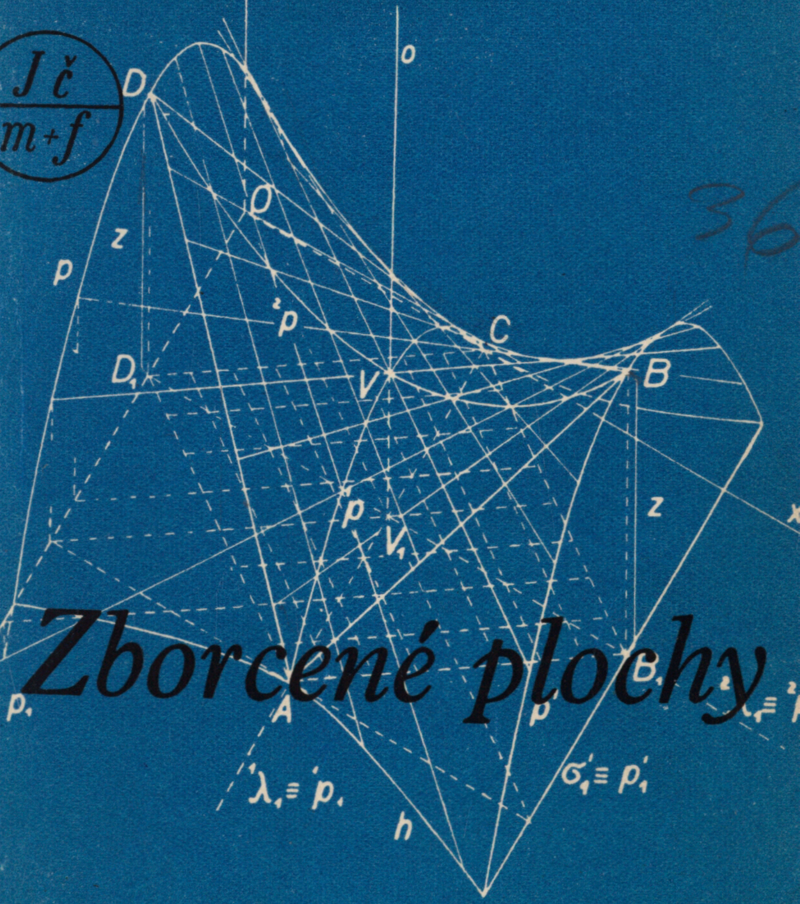
Zborcené plochy

JOSEF KOUNOVSKÝ

36



Zborcené plochy

CESTA K VĚDĚNÍ SV. 36

DR. JOSEF KOUNOVSKÝ

Zborcené plochy

Zborcené plochy, které zajímají také širší veřejnost pro své četné aplikace v technické praxi, jsou plochy přímkové. Právě tato okolnost je při jejich použití v betonářství velmi vítaná, neboť dřevění a bednění prkny lze prováděti snadněji; také opracování ploch podél přímek je technicky lehčí než podél křivek. Ovšem technická praxe má další důvody, hlavně statické, pro jejich užití. Velmi časté je použití zborcených ploch ve strojnictví (šroubové plochy).

Zborcené plochy na rozdíl od ostatních ploch přímkových, tak zvaných *rozvinutelných*, mají skoro všechny své přímky s touto vlastností: Přímka plochy neprotíná jinou (i blízkou) přímku plochy. Výjimky tvoří přímky řídicí a přímky singulární, jakou je přímka torsální a jiné. Další základní vlastností plochy zborcené je, že každá rovina, jdoucí její nesingulární přímkou, je rovinou tečnou v určitém bodě přímky. Tato vlastnost zvláště odlišuje plochy zborcené od ploch

PROF. DR JOSEF KOUNOVSKÝ

ZBORCENÉ PLOCHY

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

Byv váženou redakcí naší slibně se rozvíjející sbírky „Cesta k vědění“ požádán, abych napsal do ní knížku o zborcených plochách, měl jsem práci usnadněnu kompendiem o tomto thematu, které je obsaženo v dvoudílné Deskriptivní geometrii (Knihovna spisů matem. a fys., sv. 16 a 17), kterou jsem zpracoval s přáteli prof. dr Fr. Kadeřávkem a s tak záhy nám bohužel smrtí vyrvaným prof. dr Jos. Klímou, který zborceným plochám věnoval mnoho práce a péče. Není třeba, abych zde citoval literaturu tohoto předmětu, je téměř vyčerpána v naší Deskriptivní geometrii, na niž odkazuji. Mnozí kolegové-inženýři z praxe, kteří se k thematu znovu vracejí, snad spis ten mají, nebo mohou ho opatřiti do závodních, úředních a jiných příručních knihoven, což mělo by se státi stavovskou povinností všech techniků, aby podporovali celou naši odbornou literaturu a hlavně také její nakladatele a vydavatele; autory nechávám ovšem stranou.

Účel spisku rozhodl, že jsem se omezil na minimum látky z projektivní geometrie, ač neměli by se jí naši technikové vyhýbati; má četné aplikace v grafických metodách, v mechanice a jinde. Nechtěl jsem od spisku odraditi čtenáře, který se chce poučiti o konstrukcích zborcených ploch i bez projektivní geometrie. Také theorie polárních vlastností ploch druhého stupně, které jsem se dotkl, neučiní ani začátečníkům potíží rozšířením z kuželoseček.

Obsah spisku vyšel hlavně z mých výkladů o jeho thematu na Českém vysokém učení technickém, kde jsem o něm přednášel s různých hledisek.

Děkuji vřele panu redaktoru sbírky, milému příteli docentu dr Fr. Vyčichlovi za rady, pomoc a práci při tisku. Slavné naší Jednotě děkuji za ochotné vydání knížky a tiskárně Prometheus za vzorné její vypravení.

V Praze, v únoru 1944.

J. Kounovský.

Vážený čtenář laskavě promine, že končím osobně. Tato práce pomohla mi totiž formovat znovu život, když opustila mne vloni má nejdražší žena. Připisuji knížku její světlé památce.

1. Vznik křivek a ploch. *Křivka* čili *křivá čára* vzniká jako geometrické místo spojitě se pohybujícího bodu; jest *rovinná*, leží-li v jedné rovině, nebo *prostorová*. Rovinná křivka leží celá v rovině libovolnými jejími třemi body určené.

Pohybem křivky vzniká *křivá plocha*. Křivka, která se pohybuje podle jistých zákonů, může měniti svůj tvar, nebo může býti neproměnnou. Každý bod křivky vytvořuje při jejím pohybu svou *dráhu* (*trajektorii*); i vznikají současně na ploše dvě soustavy křivek, které ji vyplňují: soustava křivek vzniklých pohybem křivky dané, jež se zove *tvořící křivkou* (*generatrix*) a soustava trajektorií jednotlivých bodů této křivky.

Je-li určeno, že pohybující se křivka protíná jisté křivky dané, zoveme je *řídícími křivkami* (*directrix*). Řídící křivky mohou býti nahrazeny *řídícími plochami*, kterých se tvořící křivka dotýká, nebo *řídícím bodem*, kterým prochází.

Ani tvořící ani řídící křivky nejsou vždy křivkami rovinnými, nýbrž mohou to býti křivky prostorové; ale nejčastěji se vytvoří plochy pomocí rovinných křivek.

Plocha může míti také t. zv. *části parasitní*. Uvažujeme-li na př. o ploše vytvořené pohybující se tečnou pevné kružnice, pak plocha daného kruhu je sice částí roviny, k níž vzniklá plocha patří, není však částí plochy. Vzniklá plocha je rovinou bez vnitřku kruhu.

Tím jsme již dospěli k pojmu *dotyku* křivek a ploch, z něhož je třeba uvésti základní vztahy.

Tečna křivky v daném *bodě dotyku* je spojnicí toho bodu s jejím bodem soumezným; má s křivkou společný *prvek*, jenž je určen oběma body bezprostředně po sobě na křivce následujícími a udává směr pohybu bodu při kinetickém jejím vytvoření. Dospíváme k tečně křivky v určitém jejím bodě M, určíme-li mezní polohu spojnice bodu M křivky s jiným bodem křivky, když tento druhý bod se blíží bodu M, t. j. když splyne s bodem dotykovým.

Duálně lze vytvořiti křivku souhrnem jejích tečen jako *křivku obalovou*; na pevné tečně obdržíme pak dotykový bod jako meznou polohu jejího průsečíku s proměnnou tečnou křivky, když při pohybu se stane její *tečnou soumeznou.*

Sečnou (*sekantou*) *prostorové křivky* se zove přímka, která ji protíná jen v jednom bodě. Přímka, která spojuje dva různé body prostorové křivky, jest její *bisekantou.*

Poznámka. Bisekanta, jejíž oba body na křivce splynou, je tečna křivky.

U prostorové křivky přistupuje ještě pojem tečné roviny. *Tečnou rovinou* prostorové křivky se zove každá rovina, jež prochází tečnou křivky; má tedy prostorová křivka v každém bodě celý rovinový svazek tečných rovin; tečna křivky v tom bodě je *osou* tohoto svazku.

Otáčíme-li tečnou rovinou prostorové křivky kolem tečny, kterou prochází, může se státi, že její průsečík, v kterém ještě protíná křivku, se blíží dotykovému bodu a že dokonce s ním splyne. Tato tečná rovina, která má s křivkou *tři splývající body společné*, jest t. zv. *oskulační rovina.*

Ve svých úvahách máme na mysli *obyčejný* čili *obecný bod* křivky, v němž existuje určitá tečna a určitá oskulační rovina, které jsme právě definovali. Zvláštní případy, t. zv. *singulární prvky* křivky, zatím pomíjíme.

Dotyk křivky s tečnou v obyčejném bodě se zove *dotyk prvního stupně*, nebo dotyk *dvoubodový*, dotyk křivky a oskulační roviny je dotyk s třemi společnými body (soumeznými) neboli t. zv. *dotyk trojbodový* čili *druhého stupně.*

Kolmice vztyčená k tečně nebo k tečné rovině křivky v dotykovém bodě jest její *normálou.* Souhrn normál prostorové křivky v daném bodě vyplňuje její *normální rovinu.* Normála ležící v oskulační rovině křivky jest *hlavní normála*, normála kolmá k oskulační rovině je *binormála křivky* v tom bodě. Tečna, hlavní normála a binormála tvoří pravoúhlý *hlavní trojhran*, nebo *průvodní trojhran* (Serretův) v tom bodě křivky, jeho stěnami jsou *oskulační rovina*, *normální rovina* a

t. zv. *rektifikační rovina*, jež je určena tečnou a binormálou a je tedy kolmá k hlavní normále.

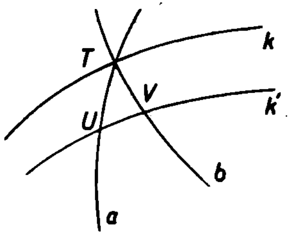
Úběžným bodem křivky jest její bod nekonečně vzdálený.

Asymptota jest mezní polohou tečny, když dotykový bod se vzdaluje po křivce do nekonečna. Je tedy *asymptota tečnou v úběžném bodě křivky.*

Tečna křivky sestrojené na křivé ploše jest tečnou plochy. Tečna je limitní polohou sečny plochy.

Tečny všech křivek bodem na ploše sestrojených leží v téže rovině t. zv. tečné rovině plochy.

Tečná rovina plochy v daném jejím bodě je určena tečnami sestrojenými v bodě ke dvěma křivkám, jež procházejí daným bodem na ploše a které se v bodě nedotýkají. Abychom si ozřejmili, že skutečně tečny všech křivek plochy v bodě leží v rovině, postupujme takto: Vytkněme bodem T na ploše dvě křivky pevné a a b a proměnnou křivku k jako křivku tvořící (obr. 1) a vyznačme ještě blízkou křivku k' té soustavy, která protíná křivky a a b v bodech U a V. Sečny TU, TV a UV leží v téže rovině, což platí pro různé polohy tvořící křivky k' po obou stranách křivky k; pro limitní polohu v křivce k obdržíme ze stran vytčeného trojúhelníku tři tečny, které leží tedy vskutku v jedné rovině, tečné rovině plochy.



Obr. 1.

Normálou plochy jest kolmice vztyčená na její tečnou rovinu v bodě dotykovém.

Z právě popsané úvahy o tečné rovině plyne, že můžeme do jisté míry křivou plochu nahraditi mnohostěnem o velkém počtu stěn velmi malých; vlastnosti mnohostěnů pak vhodně rozšiřujeme na křivé plochy.

2. Plochy přímkové. Plochy dělíme podle tvaru tvořících křivek i podle zákonů pohybu, za kterých se vytvořují.

Vzniká-li plocha pohybem přímky, zove se *přímkovou plochou*. Přímkové plochy dělíme na *plochy rozvinutelné* a *plochy zborcené*.

Prochází-li tvořící přímka plochy při svém pohybu stále pevným bodem, vzniká *plocha kuželová*, pevný bod jest jejím *vrcholem* čili *středem*; mimo vrchol je kuželová plocha určena *řídící křivkou*, kterou polohy tvořících *povrchových* (*plošných*) *přímek* protínají. Je-li vrchol plochy bodem úběžným a tedy tvořící přímky vzájemně rovnoběžné, jest *plocha válcovou*. Kuželové a válcové plochy se zovou též *paprskovými plochami*.

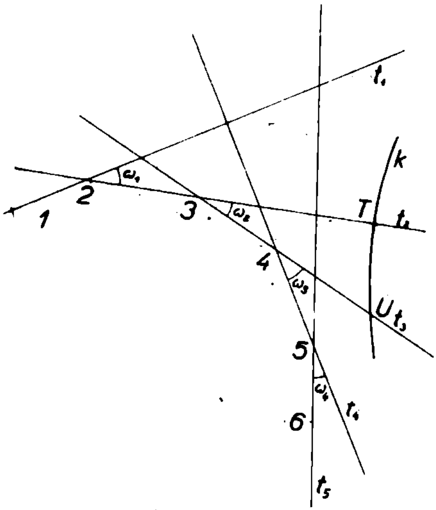
Kuželové a válcové plochy náleží do skupiny ploch rozvinutelných. *Plocha rozvinutelná* má tu vlastnost, že lze ji bez přerušení souvislosti, t. j. bez přeložení, protažení a přetržení rozprostříti do jedné roviny; při tom nahrazujeme plochu mnohostěnem, který lze rozvinouti do roviny.

Při základním vytvoření rozvinutelné plochy vzniká plocha tak, že sestrojujeme tečny prostorové křivky; je tedy rozvinutelná plocha *plochou tečen prostorové křivky* (tedy je dána souhrnem tečen křivky). Tuto plochu lze rozvinouti do jedné roviny, protože lze ukázati, že je možno jednu oskulační rovinu otočením kolem tečny v ní ležící převésti do oskulační roviny blízké.

V znázorňujícím obr. 2 jsou body křivky postupně označeny *1, 2, 3, 4, ...,* tečny $t_1, t_2, t_3, \ldots$ a oskulační roviny $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$; $t_1 \equiv 12$, $t_2 \equiv 23, \ldots, \omega_1 \equiv (t_1, t_2)$, $\omega_2 \equiv (t_2, t_3), \ldots$; na př. roviny ω_2 a ω_3 lze převésti do jedné roviny otočením kolem společné přímky t_3, atd.

Tímto postupem rozvine se spolu také prostorová křivka *1234*... tak, že délka křivky se zachová, protože prvky křivky *12, 23, 34*, ... se rozvinutím nemění.

Chceme-li sestrojiti v libovolném bodě rozvinutelné plochy tečnou rovinu, na př. v bodě T na *přímce* (též *povrchové přímce*) t_2 (obr. 2), sestrojíme tímto bodem na ploše křivku k, jež protíná celou soustavu plošných přímek; druhou křivkou je přímka t_2 sama. Tečná rovina je stanovena tečnami dvou křivek v dotykovém bodě. Jednu tečnu zastupuje přímka t_2, druhou tečnu sestrojíme ku křivce k; je přibližně určena bodem T a blízkým bodem U na blízké povrchové přímce t_3; tato tečna leží v oskulační rovině $\omega_2 \equiv (t_2, t_3)$, která jest tedy společnou tečnou rovinou v bodě T přímky t_2. Tedy:



Obr. 2.

Oskulační roviny prostorové křivky jsou tečnými rovinami její rozvinutelné plochy a dotýkají se plochy ve všech bodech příslušné tečny prostorové křivky.

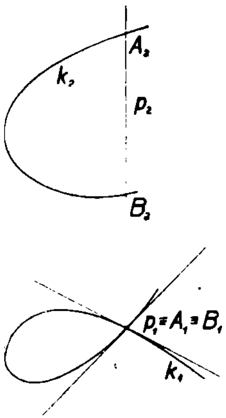
Poznámka. Rozvinutelná plocha jest také *obalovou plochou* svých tečných rovin; tato věta vyjadřuje charakteristickou vlastnost obalových ploch, jež vznikají pohybem roviny.

Na rozdíl od plochy rozvinutelné je *zborcená plocha vytvořena takovým pohybem přímky v prostoru, při němž každé dvě tvořící přímky (mimo konečný počet t. zv. singulárních přímek)* *jsou vzájemně mimoběžné.* Plošný prvek, který mezi dvěma blízkými přímkami leží, není částí roviny, je zborcený, nelze ho převésti do roviny. Také tečné roviny v různých bodech povrchové přímky jsou různé, bodové řadě na tvořící přímce plochy je přiřazen rovinový svazek tečných rovin, jak uvidíme.

Prostorová křivka a její rozvinutelná plocha tečen mají svou *řídící kuželovou plochu*, kterou obdržíme, sestrojíme-li libovolným bodem v prostoru rovnoběžky k tečnám prostorové křivky. Blízkým tečnám křivky jsou přiřaděny blízké povrchové přímky řídící kuželové plochy a lze ukázati, že oskulační roviny křivky jsou rovnoběžny s tečnými rovinami řídící kuželové plochy.

Obdobně sestrojujeme řídící kuželovou plochu plochy zborcené, její povrchové přímky jsou rovnoběžné s tvořícími přímkami zborcené plochy. Tato kuželová plocha vlastně promítá úběžnou křivku na ploše zborcené a odtud její, použití při konstrukcích.

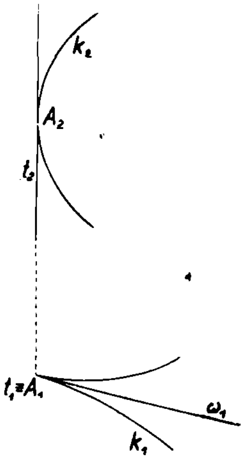
3. Průměty prostorových křivek. Obrysy ploch. Promítáním (rovnoběžným i středovým) rovinné křivky, která neleží v rovině promítací, se povaha všech bodů zachová. Obecný (obyčejný) bod (čl. 1) zůstává obecným bodem a *zvláštní* (*singulární*) *body* jako *bod dvojný*, *bod vratu a bod obratu*, podržují také svůj charakter.



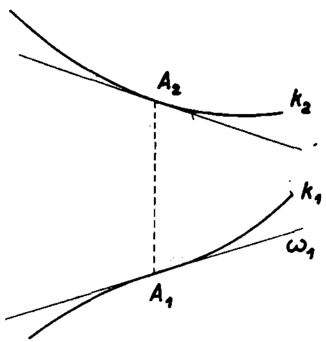
Obr. 3.

U prostorové křivky se promítá dvojný bod jako takový; můžeme však také dospěti k dvojnému bodu průmětu, leží-li střed promítání na bisekantě křivky. V obr. 3 znázorněn nárys k_2 a půdorys k_1 prostorové křivky a vytčena její bisekanta $p \equiv AB$, která je půdorysně promítací. *Půdorys bisekanty je dvojným bodem půdorysu křivky.* Dvojným bodem procházejí dva oblouky křivky; obě tečny těchto oblouků v bodě jsou tečny křivky v tom bodě; každá má v tom bodě tři body společné s křivkou.

Leží-li střed promítání na tečně t křivky k v bodě A (obr. 4), je tečna promítací přímkou (v obr. speciálně kolmá k půdorysně) a v průmětu $t_1 \equiv A_1$ má křivka k_1 *bod vratu.* Bod A zastupuje dva body společné s křivkou, oskulační rovina ω je



Obr. 4.



Obr. 5.

rovněž promítací a průmět ω_1 je jedinou tečnou v bodě vratu A_1. Tedy: *Promítací tečna prostorové křivky dává v průmětu křivky jeho bod vratu.*

Leží-li střed promítání v oskulační rovině bodu A, která je promítací (obr. 5), pak v průmětu leží tři splývající body křivky k_1 na průmětu ω_1 oskulační roviny; to znamená, že ω_1 je tečnou obratu bodu A_1, který je *bodem obratu* neboli *inflexním* bodem průmětu k_1.

Tečnu prostorové křivky určené dvěma průměty v jejím obecném bodě stanovíme, sestrojíme-li v sdružených obrazech bodu tečny k příslušným obrazům křivky; tím dostaneme sdružené obrazy hledané tečny.

Oskulační rovinu prostorové křivky v jejím bodě T sestrojíme jako tečnou rovinu podél tečny t toho bodu ke kuželové ploše, která promítá křivku z libovolného bodu V na tečně. (Za vrchol kuželové plochy lze také zvoliti bod T.)

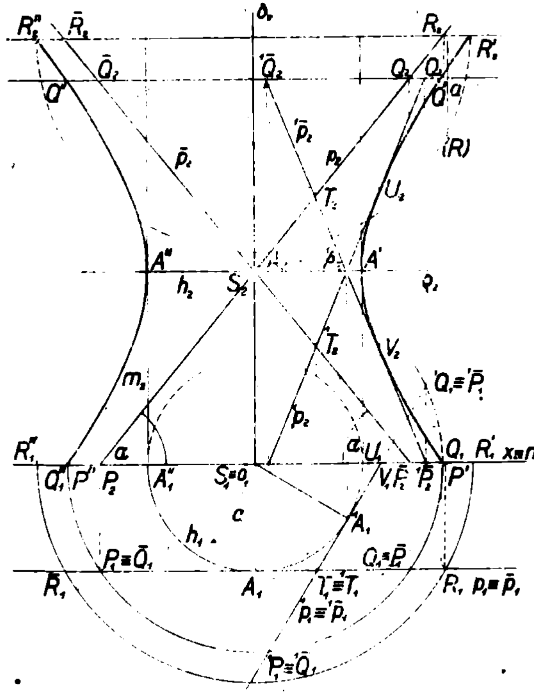
Při sestrojování průmětů ploch zobrazujeme soustavy křivek na ploše a *zdánlivý obrys plochy*. Sestrojíme středem promítání nebo ve směru promítání tečny k ploše, čímž obdržíme *dotykovou kuželovou* nebo *válcovou plochu promítací*. Dotyková křivka s danou plochou je *skutečným obrysem* a stopa promítací dotykové plochy, tedy průmět skutečného obrysu, je *obrysem zdánlivým*. Skutečný obrys je také geometrickým místem dotykových bodů tečných promítacích rovin.

Je-li na ploše křivka, která přechází v průsečném bodě se skutečným obrysem z viditelné části povrchu plochy k části neviditelné, pak v průmětu tohoto průsečného bodu dotýká se průmět té křivky zdánlivého obrysu. Má-li uvažovaná křivka na ploše v průsečíku se skutečným obrysem za tečnu promítací paprsek, pak ovšem podle obr. 4 má její průmět v průmětu toho průsečíku bod vratu na zdánlivém obrysu plochy, tečna v něm je stopou oskulační roviny křivky a nemusí býti tečnou obrysovou. *Zdánlivý obrys plochy obaluje průměty křivek, které leží na ploše a protínají její skutečný obrys.*

Je-li uvažovaná plocha zborcená, jsou podle této úvahy průměty tvořících přímek tečnami zdánlivého obrysu, který obalují. U rozvinutelné plochy to obecně neplatí, každá tečná rovina není rovinou promítací; je-li promítací, pak průmět celé přímky náleží obrysu.

Obměnou uplatňují se tyto úvahy v theorii osvětlení ploch.

4. Rotační jednodílný hyperboloid. Zvolme tuto technicky důležitou plochu východiskem k úvahám o plochách zborcených.



Obr. 6.

Vzniká otáčením hyperboly kolem vedlejší osy. Vytvoříme ji nejdříve jako plochu přímkovou a ukážeme, že jejím poledníkem je hyperbola, jež má svou vedlejší osu v rotační ose plochy. Zvolíme osu o rotační plochy ve svislé poloze v druhé průmětně (obr. 6) a otáčíme kolem ní přímku p s osou o mimoběžnou, jež zvolena v poloze průčelné rovnoběžně s nárysnou. Pak nejkratší příčka $a \equiv SA$ mimoběžek o a p je v ordinále osy a jeví se ve skutečné velikosti v první průmětně, s níž je rovnoběžna. Bod A vytvořuje nejmenší kružnici rotační plochy o poloměru a, její hrdlo h. Otočením bodu do poloh A', A'' do druhé průmětny, v níž leží hlavní poledník plochy, obdržíme osu souměrnosti $A'A''$ tohoto poledníku, hlavní osu hyperboly m o středu S. V obr. vyznačeny ještě shodné rovnoběžky stopníku P a bodu Q otáčející se přímky, kde $\overline{AP} = \overline{AQ}$ a rovnoběžka libovolného bodu R v rovinách rovnoběžných s půdorysnou a vytčeny na nich opět body $P'P''$, $Q'Q''$ a $R'R''$ hlavního poledníku; rovina ϱ hrdlové rovnoběžky je rovinou souměrnosti plochy.

Jest patrno, že vytvořená plocha je přímková, daná soustavou tvořících přímek vzniklých otáčením přímky p; je zborcenou, protože při rotaci každé dvě polohy přímky se neprotínají.

Zvolíme-li ještě druhou přímku $\bar{p}$ souměrně sdruženou s přímkou p podle roviny poledníku kolmého k nárysně, $\bar{p}_1 \mp p_1$, oba nárysy $\bar{p}_2$ a p_2 jsou souměrně sdružené podle osy o (obě přímky mají tutéž odchylku od půdorysny α, jež jeví se v nárysu), je patrno, že její rotací kolem osy o vzniká táž plocha rotační, která má tedy dvě soustavy povrchových přímek.

Konstrukce bodů R' a R'' ukazuje, že poledník plochy je vskutku hyperbola, která má přímky p_2 a $\bar{p}_2$ za asymptoty. Připojíme-li ještě půdorys rovnoběžky bodu R k jejímu nárysu i se sklopeným (R), je patrno, že $\overline{R_2R_2'} \,.\, \overline{\bar{R}_2R_2''} = \overline{\bar{R}_2R_2'} \,.\, \overline{\bar{R}_2R_2''} = \overline{R_2(R)}^2 = a^2$ a podle věty, že na kolmicích k vedlejší ose hyperboly součin vzdáleností bodu hyperboly od průsečíků kolmice s oběma asymptotami je stálý a roven čtverci hlavní poloosy, je jasno, že meridiánem této rotační plochy je tedy hyperbola.

Vytkněme dvě libovolné přímky různých soustav p a ${}^1\overline{p}$, jedna prochází bodem A a druhá bodem ${}^1A$ hrdlové kružnice. Obě přímky majíce tutéž odchylku od půdorysny a za své půdorysy tečny půdorysu h_1 hrdlové rovnoběžky přikazují průsečíku T_1 svých půdorysů tutéž kótu z_T nad rovinou ϱ, přímky se protínají. Tedy:

Rotační jednodílný hyperboloid je zborcenou plochou o dvou soustavách povrchových přímek. Přímky téže soustavy jsou vzájemně mimoběžné, každé dvě přímky různých soustav se protínají.

Existence druhé soustavy povrchových přímek vyplývá též ze souměrnosti plochy podle roviny hrdlové rovnoběžky.

Že přímky p a ${}^1\overline{p}$ jsou různoběžny je patrno z okolnosti, že spojnice jejich průsečíků s dvěma vodorovnými rovinami jsou vzájemně rovnoběžny a tedy půdorysné hlavní přímky společné roviny, $A^1A \parallel Q^1\overline{Q}$. Patrně také přímky $\overline{p}$ a ${}^1p$ mají společný bod ${}^1T$, kde ${}^1T_1 \equiv T_1$.

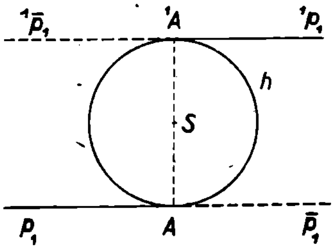
Protože každým bodem na ploše probíhají dvě povrchové přímky, je patrno:

Tečná rovina v libovolném bodě rotačního jednodílného hyperboloidu je určena oběma povrchovými přímkami různých soustav bodem procházejícími.

Mění-li se na určité povrchové přímce bod, mění se i jeho tečná rovina. *Tečné roviny v bodech povrchové přímky tvoří rovinový svazek.*

Každým bodem A, ${}^1A$, ... hrdla h procházejí dvě povrchové přímky různých soustav ležící v téže půdorysně promítací rovině, i jest h skutečným a h_1 zdánlivým obrysem plochy vzhledem k půdorysně. Hlavní poledník m je současně skutečným i zdánlivým obrysem vzhledem k nárysně a je obalen nárysy povrchových přímek plochy, na př. druhé stopníky U a V přímek ${}^1p$ a ${}^1\overline{p}$ jsou dotykové body jejich nárysů s hlavním poledníkem a leží ovšem v téže ordinále.

Dvě povrchové přímky různých soustav sestrojené ve dvou protějších bodech hrdla (soustava nečárkovaná a soustava čárkovaná vytčeny v obr. 7 půdorysem na rovině hrdla) jsou vzájemně rovnoběžny a určují tečnou rovinu v dotykovém bodě úběžném, A^1A jest její první stopa, úhel α je odchylkou roviny od půdorysny; tato rovina se zove *asymptotickou tečnou rovinou.*



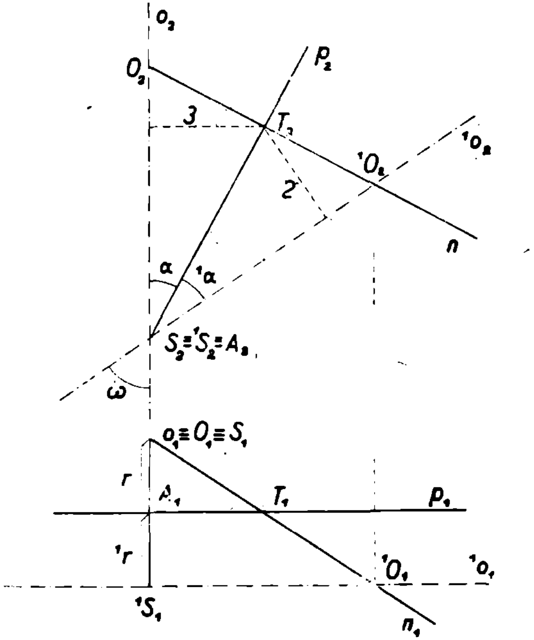
Obr. 7.

Souhrn asymptotických tečných rovin jednodílného rotačního hyperboloidu obaluje rotační kuželovou plochu asymptotickou, která vzniká rotací poledníkové asymptoty spolu s poledníkem; jest s hyperboloidem soustředná a jest jeho řídící kuželovou plochou, majíc povrchové přímky rovnoběžné s přímkami hyperboloidu.

5. Dotykové hyperboloidy. Dvou dotykových rotačních hyperboloidů jednodílných se užívá, aby se *rotace kolem určité osy převedla na rotaci kolem druhé osy, která je s první mimoběžnou.* Oba hyperboloidy dotýkají se postupně v bodech přiřaděných povrchových přímek. Úkol se řeší *ozubením prostorovým* čili *hyperboloidickým* ovšem úvahami kinematické geometrie; je možný, je-li poměr rychlostí rotačních pohybů stálý. Zde nám jde o řešení dotykového problému.

Je třeba sestrojiti nejkratší příčku obou vzájemně mimoběžných rotačních os o a ^1o. V obr. 8 zvolíme osu o v svislé poloze v nárysně a druhou osu ^1o v průčelné poloze skloněné k půdorysně, odchylka ω obou rotačních os se jeví v nárysně. Nejkratší příčka S^1S obou os je kolmá k nárysně a jeví se ve skutečné velikosti v půdorysně, $S_1{}^1S_1 \perp {}^1o_1$.

Přímka p, která vyhoví podmínce, že vytvoří oba rotační hyperboloidy tak, že se v jejích bodech oba hyperboloidy postupně vzájemně dotýkají, protíná kolmo nejkratší příčku obou rotačních os v bodě A a je rovnoběžna s nárysnou; její nárys p_2 prochází průsečíkem nárysů obou rotačních os a vyhovuje kinetické podmínce, že poměr $\sin \alpha : \sin {}^1\alpha$ úhlů, které svírá s nárysy obou os, je roven obrácenému poměru rychlostí obou rotací (na př. tento poměr je $2 : 3$).



Obr. 8.

Abychom sestrojili půdorys p_1 této povrchové přímky, zvolíme na přímce bod T a v něm sestrojíme společnou normálu n obou ploch; protože přímka p je rovnoběžna s nárysnou, jest $n_2 \perp p_2$; normála protíná osy v bodech O a ${}^1O$, z jejich nárysů odvodíme půdorys $n_1 \equiv O_1{}^1O_1$ a na něm půdorys T_1 ze zvoleného nárysu; $p_1 \parallel {}^1o_1$.

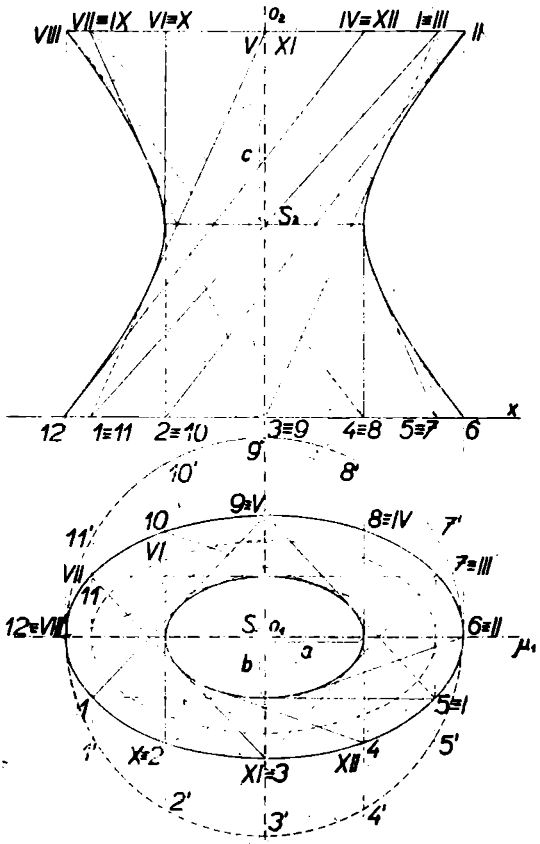
Bodem A procházejí hrdlové kružnice obou rotačních hyperboloidů, společná jejich tečná rovina v tomto bodě je rovnoběžná s nárysnou. Tečná rovina v bodě T je kolmá k normále n.

Poměr poloměrů r a ${}^1r$ hrdelních kružnic je $r : {}^1r = \overline{O_1T_1} : {}^1\overline{O_1T_1} = \overline{O_2T_2} : {}^1\overline{O_2T_2} = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} {}^1\alpha$.

Poměr 2 : 3 rychlostí obou rotací hyperboloidů určí poměr $\sin \alpha : \sin {}^1\alpha = 3 : 2$ a tím polohu a celou konstrukci hyperboloidů. Poměr 2 : 3 určuje, že dvěma otočkám hyperboloidu s osou o odpovídají tři otočky hyperboloidu s osou ${}^1o$; podle toho lze určiti povrchové přímky, jichž splynutí při pohybu nastane.

Při konstrukci hyperboloidického ozubení spojují se osy s pomocnými plochami zubními, jichž dotykovým záběrem nastává převod; jedna plocha se zvolí, druhá vznikne při kotálecím pohybu obou hyperboloidů.

6. Zborcený hyperboloid. Z jednodílného rotačního hyperboloidu dospíváme prostorovou afinitou k obecnější zborcené ploše. Zvolíme na př. rovinu μ (obr. 9) hlavního poledníku rotačního hyperboloidu s osou o kolmou k půdorysně za samodružnou rovinu afinní příbuznosti a redukujeme vzdálenosti bodů rotačního hyperboloidu od této roviny (souřadnice y nebo jejich rozdíly) podle jisté charakteristiky, na př. v poměru 3 : 2. Ve vodorovných rovinách obdržíme tímto afinním vztahem homotetické elipsy s týmž poměrem poloos, dvěma soustavám povrchových přímek (v obr. stejnoměrně rozděleným) jsou afinně přiřaděny opět dvě soustavy povrchových přímek. Vlastnosti obou soustav povrchových přímek i tečných rovin zůstávají v platnosti. Vzniklá plocha je *zborcený hyperboloid*. Je patrno, že má střed, tři osy tvořící ve středu pravoúhlý trojhran (a rovnoběžné při vytknuté poloze hyperboloidu a roviny samodružné s osami souřadnicovými) a tři roviny souměrnosti, určené těmito osami; je to rovina samodružná, rovina rovnoběžná se stranorysnou a rovina rovnoběžná s půdorysnou. První dvě roviny souměrnosti odpovídají vzájemně kolmým rovinám poledníků a protínají hyperboloid v hlavních hyperbolách o společné ve-



Obr. 9.

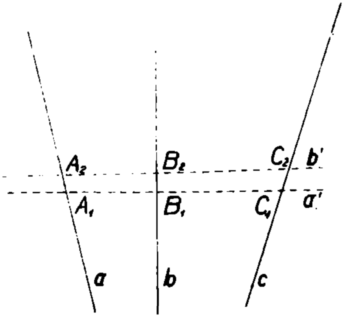
dlejší ose, třetí odpovídá rovině hrdlové rovnoběžky a protíná plochu v hlavní elipse, jejíž osy se rovnají hlavním osám obou hyperbol. Hlavní elipsa zove se také hrdlem a jest nejmenší ze všech řezů s ní rovnoběžných.

V průmětech vytčena jedna soustava povrchových přímek s příslušnou viditelností. Kdybychom vytkli obě soustavy, odpadlo by tečkování neviditelných částí.

Také řídící kuželová plocha daného rotačního hyperboloidu transformovala by se v kuželovou řídící plochu zborceného hyperboloidu s řídící elipsou v půdorysně, jež v obr. sestrojena jako homotetická elipsa k horizontálním řezům zborceného hyperboloidu. Jest to asymptotická kuželová plocha zborceného hyperboloidu, obalená jeho asymptotickými tečnými rovinami.

Zevšeobecněním rotačního hyperboloidu nabývají přímky téže soustavy obecné polohy, jedna neplyne z druhé rotací kolem osy. V obou případech jsou ovšem *přímky druhé soustavy dány jako příčky tří libovolných vzájemně mimoběžných přímek první soustavy.*

Buďtež dány tři přímky a, b a c (*řídicí přímky*) vzájemně mimoběžné jedné soustavy (nečárkované) a hledejme přímky a', b', c', ... druhé soustavy (čárkované) jako jejich transversály. Body jedné mimoběžky a sestrojujeme příčky druhých dvou b a c; stane se tak průsečnicemi dvou rovin položených zvoleným bodem a každou z druhých mimoběžek b a c.



Obr. 10.

Duální konstrukce: Mimoběžkou a položíme rovinový svazek a sestrojíme průsečíky každé roviny s mimoběžkami b a c; jejich spojnice jsou hledané příčky.

Obdržíme tak celou soustavu tvořících přímek, čili *zborcený svazek*, někdy nazývaný také *regulus*. Libovolné dvě přímky čárkované soustavy jsou vzájemně mimoběžny. Kdyby byly různoběžné, určovaly by rovinu, v níž by ležely i řídící přímky plochy, což odporuje její definici; tedy každé dvě přímky zborceného svazku jsou vzájemně mimoběžny (obr. 10).

Pomocné rovinové svazky o osách b a c jsou perspektivní s bodovou řadou na ose a jako její zory a jsou tedy vzájemně projektivní:

Plocha zborceného hyperboloidu (zborcený svazek [regulus] na ní) se vytvořuje průsečnicemi rovinových družin projektivních rovinových svazků.

Jejich osy zvolíme ve dvou daných řídících přímkách, družiny rovin procházejí body třetí řídicí přímky.

Duální konstrukcí jest rovinový svazek o ose a perspektivní s jeho řezy, bodovými řadami na b a c, které jsou vzájemně projektivní.

Plocha zborceného hyperboloidu (zborcený svazek [regulus] na ní) se vytvořuje spojnicemi bodových družin dvou projektivních bodových řad.

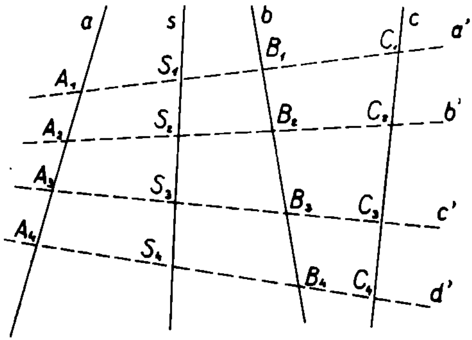
Osy obou řad zvolíme ve dvou daných řídicích přímkách, spojnice bodových družin protínají třetí řídicí přímku.

Jsou-li dány tři přímky a, b, c vzájemně mimoběžné a sestrojíme-li tři jejich příčky a', b', c' zborceného svazku, lze vytvořiti zborcený hyperboloid obráceně příčkami přímek a', b', c'; mezi ně patří i a, b, c (obr. 11). Oba hyperboloidy zborcených svazků mají šest povrchových přímek společných a splývají v jednu plochu, mající dvě soustavy povrchových přímek, tedy obsahující dva zborcené svazky. Přímky jedné soustavy protínají všechny přímky druhé soustavy a obráceně.

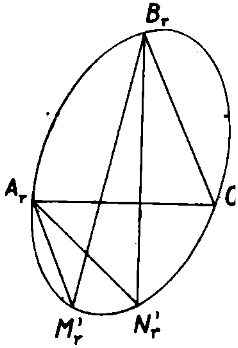
Ukážeme to projektivností: Na př. příčka s přímek a', b', c' protíná i $d', e', \ldots$ Neboť v soumístných a projektivních rovinových svazcích $s\,(A_1, A_2, A_3, \ldots) \barwedge s\,(B_1, B_2, B_3, \ldots)$ jsou tři družiny $(s, A_1) \equiv (s, B_1)$, $(s, A_2) \equiv (s, B_2)$, $(s, A_3) \equiv (s, B_3)$ samodružné a tedy všechny družiny, protože projektivnost jest určena jednoznačně třemi družinami; t. j. $(s, A_4) \doteq (s, B_4)$, s protíná A_4B_4, t. j. d' atd.

Patrně jest bodová řada na s projektivní s bodovými řadami na a, b, c, ..., protože je na př. řezem rovinového svazku b $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$.

Platí tedy: *Jedna soustava povrchových přímek protíná druhou soustavu v projektivních řadách. Zorem jedné soustavy z přímek druhé soustavy jsou projektivní rovinové svazky.*



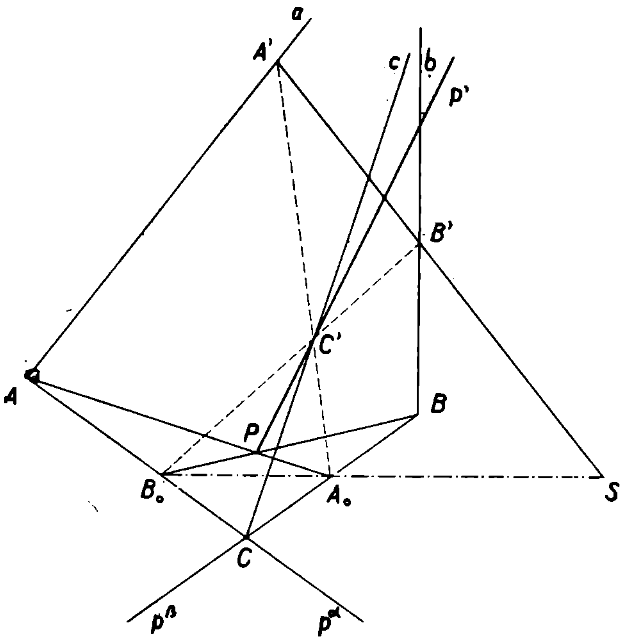
Obr. 11.



Obr. 12.

Rovinný průsek zborceného hyperboloidu jest kuželosečka. Myslíme-li si plochu vytvořenu dvěma vzájemně projektivními rovinovými svazky s osami a a b, protíná je libovolná rovina ϱ ve dvou vzájemně projektivních paprskových svazcích o vrcholech A_r a B_r na a a b, jež vytvořují průsečíky $M'_r, N'_r, O'_r, \ldots$ paprskových družin kuželosečku k, patrně rovinný řez plochy (obr. 12); body kuželosečky jsou průsečíky přímek $m', n', o', \ldots$ s rovinou ϱ. *Zborcený hyperboloid (a tedy i rotační hyperboloid jednodílný) je plochou druhého stupně, jelikož má s libovolnou rovinou průsečnou kuželosečku a tedy s libovolnou přímkou obecně dva průsečíky.*

Důkaz o rovinném průseku zborceného hyperboloidu lze provésti i bez projektivních rovinových svazků. Je-li zvolena plocha třemi mimoběžkami a, b, c a jejich průsečíky s libovolnou rovinou A, B, C (v obr. 13 vše libovolné), zvolme ještě průsečíky B' přímky b s rovinou $\alpha \equiv (A, c)$ a A' přímky a



Obr. 13.

s rovinou $\beta \equiv (B, c)$. Pokládáme-li rovinu řezu za půdorysnu, označíme $p^\alpha \equiv AC$ a $p^\beta \equiv BC$ jako stopy pomocných rovin.

Libovolným bodem C' na mimoběžce c sestrojme příčku mimoběžek a, b. Spojnice $B' C'$ má stopník B_0 na p^α, spojnice $A'C'$ má stopník A_0 na p^β. Pak roviny (C', a) a (C', b) mají stopy AA_0 a BB_0 a jejich průsečnice p' (hledaná přímka druhé soustavy) má stopník P v průsečíku těchto stop.

Patrně jest spojnice A_0B_0 středovým průmětem pevné spojnice $A'B'$ na půdorysnu ze středu C' a prochází tedy stále jejím stopníkem S, když C' probíhá přímku c. Sestrojování stopníku P jest však známou konstrukcí kuželosečky dané tečnami SA a SB s dotykovými body A a B a dalším bodem C. Průsečíkem tečen sestrojí se libovolný paprsek a jeho průsečíky s tětivami AC a BC se obráceně spojí s body B a A, čímž obdržíme další bod kuželosečky. Vskutku platí konstrukce pro kružnici, jsou-li obě tečny vzájemně rovnoběžné a AB tedy průměrem; středovým průmětem přechází konstrukce na kuželosečku.

Ježto rovinný průsek zborceného hyperboloidu je kuželosečka, má rovina, která prochází jednou jeho přímkou, s ním ještě druhou přímku společnou, patrně přímku druhé soustavy. Taková rovina je tečnou rovinou pro průsečík obou přímek jako dotykový bod.

Tečná rovina v libovolném bodě zborceného hyperboloidu je určena oběma povrchovými přímkami bodem tím procházejícími.

Vskutku nemá jiná přímka, sestrojená dotykovým bodem T v tečné rovině (a, a') těchto dvou povrchových přímek, s plochou společný další bod $U \neq T$. Kdyby takový bod U na ploše existoval, tu by na př. povrchová přímka b jím procházející a protínající přímku a' ležela v tečné rovině a protínala by i přímku a téže soustavy, což je nemožné.

Tečné roviny v bodech povrchové přímky zborceného hyperboloidu tvoří rovinový svazek projektivní s řadou příslušných dotykových bodů.

Na př. svazek tečných rovin s osou a je perspektivní s řadou b $(B_1, B_2, B_3, \ldots)$, která je jeho řezem a ta je projektivní s bodovou řadou a $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ a jelikož každý její bod leží v příslušné rovině, je řada a dokonce perspektivní s rovinovým svazkem a.

Zorem zborceného hyperboloidu z libovolného bodu v prostoru je kuželová plocha druhé třídy.

Zorem dvou vzájemně projektivních řad na mimoběžných přímkách téže soustavy jsou totiž dva projektivní paprskové svazky o společném vrcholu a zor zborceného svazku spojujícího tyto dvě projektivní řady obaluje tedy kuželovou plochu druhé třídy (v řezu křivku druhé třídy).

Zborcený hyperboloid je plochou druhé třídy, jelikož libovolnou danou přímkou procházejí k hyperboloidu dvě tečné roviny. Tyto roviny sestrojují se pomocnou dotykovou kuželovou plochou, tedy zorem hyperboloidu z libovolného bodu na dané přímce.

Protože u hyperboloidu třída se rovná stupni, říkáme někdy, že *hyperboloid jest druhého řádu, nebo plochou kvadratickou čili kvadrikou.*

Opsaná dotyková kuželová (a speciálně válcová) plocha se dotýká zborceného hyperboloidu podél kuželosečky.

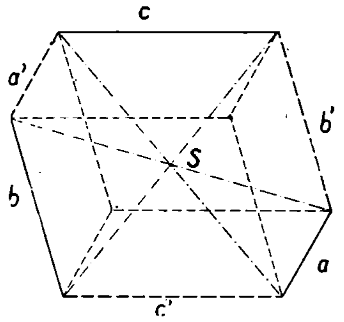
Mysleme si, že na třech tečných rovinách α, β, γ, procházejících bodem R, stanovíme jejich dotykové body A, B, C na přímkách hyperboloidu a, b, c. Pak rovina $\varrho \equiv (A, B, C)$ protíná roviny α, β, γ v tečnách t_A, t_B, t_C, jež jsou společné řezu roviny ϱ kuželovou i zborcenou plochou. Obě průsečné kuželosečky v rovině ϱ tedy splývají, čímž věta dokázána.

Posune-li se dotykový bod tečné roviny zborceného hyperboloidu na povrchové přímce do nekonečna, jsou přímky určující rovinu tečnou vzájemně rovnoběžné. Rovina tečná s úběžným dotykovým bodem se jmenuje *asymptotická rovina* plochy. Na zborceném hyperboloidu lze ku každé přímce jedné soustavy sestrojiti jedinou rovnoběžnou s ní přímku druhé soustavy; obě určují asymptotickou rovinu hyperboloidu.

Sestrojíme-li ke třem mimoběžkám a, b a c povrchové přímky soustavy čárkované, mající s nimi společné body úběžné, t. j. $a' \parallel a$ a protíná přímky b a c, $b' \parallel b$ a protíná přímky a a c a $c' \parallel c$ a protíná přímky a a b, určují všechny přímky šest rovin, jež omezují rovnoběžnostěn (obr. 14). Roviny asymptotické (a, a'), (b, b') a (c, c') protínají se v jeho středu a to jest střed S hyperboloidu, jak ukazuje již půlení tětiv plochy.

Obráceně *tečné roviny v bodech pevné kuželosečky zborceného hyperboloidu se protínají v určitém bodě*, jak ihned seznáme, zvolíme-li na ploše tři body A, B a C, $(A, B, C) \equiv \varrho$, jichž tečné roviny se protínají v bodě R.

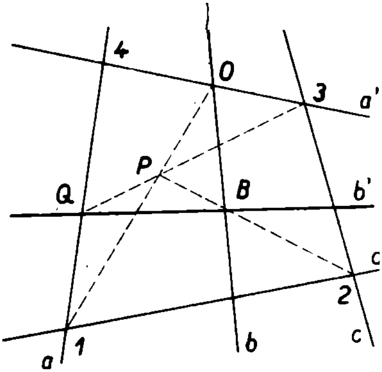
Bod R a rovina ϱ dotykové kuželosečky kuželové plochy opsané ploše z vrcholu R jsou *pól a sdružená jemu polární rovina*. Když rovina je úběžná a kuželosečka v ní nekonečně vzdálená kuželosečka na ploše, protínají se všechny tečné roviny sestrojené v bodech úběžné kuželosečky ve *středu* plochy S, pólu úběžné roviny σ. Náš rovnoběžnostěn v obr. 14 ukazuje, že *tři asymptotické roviny hyperboloidu a tedy všechny se protínají v jeho středu a obalují asymptotickou kuželovou plochu*, která se tedy dotýká hyperboloidu podél jeho úběžné kuželosečky. Obě plochy mají společné osy a hlavní roviny souměrnosti; i lze osy sestrojiti současně pro asymptotickou kuželovou plochu i pro hyperboloid.



Obr. 14.

Sestrojíme-li středem rovnoběžky k pěti přímkám hyperboloidu, určují asymptotickou kuželovou plochu a v řezu stanoví její řídící kuželosečku pěti body. Konstrukci os lze provésti úvahou, že každá rovina procházející osou kuželové plochy protíná ji ve dvou povrchových přímkách, jejichž úhel je osou půlen. Sestrojíme vrcholem kuželové plochy libovolnou přímku jako osu rovinového svazku, protneme jeho rovinami plochu a sestrojíme osy úhlů průsečných přímek; tyto osy poskytují pomocnou kuželovou plochu, na které leží i osy asymptotické plochy. Opakujeme konstrukci a obdržíme druhou pomocnou kuželovou plochu. Společné povrchové přímky obou jsou osami asymptotické kuželové plochy i hyperboloidu.

Projektivní geometrie poskytuje přesnější a přímé konstrukce os ploch druhého stupně, založené na jejich vlastnostech polárních, jež by však překročily rámec našich úvah o plochách zborcených, pro které ovšem vlastnosti zborceného hyperboloidu jsou zásadně důležitými, jak uvidíme.



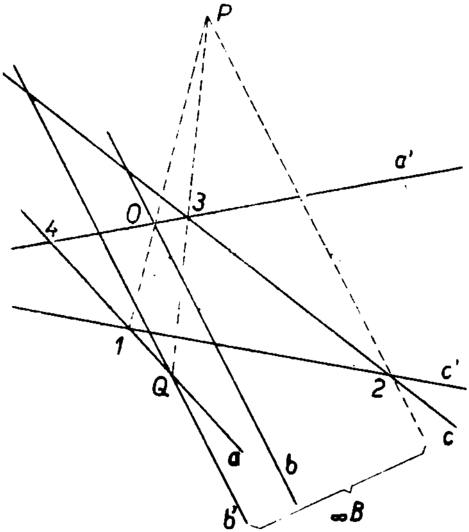
Obr. 15.

Úlohu sestrojiti tečnou rovinu v bodě B na povrchové přímce b hyperboloidu určeného mimoběžkami a, b, c, jsou-li sestrojeny dvě přímky a′ a c′ druhé soustavy, řešíme *prostorovým (zborceným) čtyrúhelníkem 1234* (obr. 15). Je-li $O \equiv (a', b)$, má rovina $(2, b)$ na rovině $(1, 3, 4)$ stopu $1O$, přímka $2B$ na ní stopník P; spojnice $3P$ je stopou roviny (B, c) na rovině $(1, 3, 4)$ a určí na a bod Q, $BQ \equiv b'$ jest přímka čárkované soustavy, jež určuje žádanou tečnou rovinu (b, b').

Obdobně řešena úloha *sestrojiti asymptotickou rovinu zborceného hyperboloidu* procházející přímkou b za téhož označení v obr. 16; $2\infty B \parallel b \parallel b'$.

Úlohu *sestrojiti transversálu čtyř mimoběžek abcd* řešíme zborceným hyperboloidem daným třemi z těch mimoběžek na př. *abc* a jeho řezem *k* libovolnou rovinou, jež prochází mimoběžkou *d*. Průsečíky přímky *d* a průsečné kuželosečky *k* procházejí obě transversály žádané jako povrchové přímky druhé soustavy na hyperboloidu *abc*.

Průmět zborceného hyperboloidu je dán průmětem soustavy povrchových přímek (tvořících). Mysleme si plochu vytvořenu dvěma vzájemně projektivními řadami. Jejich středové nebo rovnoběžné průměty jsou opět vzájemně projektivní bodové řady a tedy spojnice družin, *průměty přímek zborceného svazku (regulu) na ploše — obalují kuželosečku.* Kdyby střed promítání byl speciálně na hyperboloidu, pak povrchové přímky jím procházející promítají se jako body a obě



Obr. 16.

soustavy povrchových přímek se promítají do paprskových svazků, jež mají vrcholy v těchto bodech; body představují degenerovanou kuželosečku, již obalují průměty povrchových přímek.

Zborcený hyperboloid lze ovšem přímo určiti délkami jeho tří poloos, reálných a, b, jež určí hrdlovou elipsu (hlavní řez) a imaginární c; druhé dvojice stanoví obě hlavní hyperboly podle obr. 9. Rovnocenné je určení plochy dvěma shodnými rovnoběžnými elipsami v rovinách rovnoběžných s hlavní rovinou (osa k nim kolmá) a povrchovou přímkou spojující bod jedné elipsy (v obr. 9 v půdorysně) s bodem druhé elipsy (v rovině rovnoběžné s půdorysnou). Na obou elipsách obdržíme projektivně přiřazené bodové řady rovinovým svazkem, který má za osu danou povrchovou přímku nebo dvěma rovnoběžnými paprskovými svazky, jež mají vrcholy v průsečících dané povrchové přímky s elipsami. Aby rozdělení bylo stejnoměrné, zvolíme projektivní řady dělením na stejný počet dílů kružnice afinní s elipsou, opsanou nad její velkou osou. Aby pro hořejší elipsu nebylo dělení jiné, zvolíme půdorys horního bodu dané povrchové přímky v jednom z dělících bodů na elipse v půdorysně $I_1 \equiv 5$; pak $1I$, $2I$, ... je zborcený svazek. V obrazci sestrojena jedna soustava povrchových přímek, záměnou obdrželi bychom druhou soustavu, vždy dvě přímky různých soustav v jedné promítací rovině. Hrdlová elipsa půlí úseky povrchových přímek mezi oběma řídícími elipsami. Sestrojíme-li středem S rovnoběžky k průčelným povrchovým přímkám, obdržíme v nárysu asymptoty obrysu a v půdorysu stopu asymptotického kužele, homotetickou s danou elipsou. Z půdorysu libovolného bodu na ploše odvodí se nárys pomocí obou povrchových přímek, jejichž půdorysy jsou tečnami hrdlové elipsy. Tečné roviny v těch bodech sestrojí se povrchovými přímkami druhé soustavy.

Důležité *vlastnosti polární*, o které se opírají konstrukce na plochách druhého stupně, plynou ze skutečnosti, že *pól a sdružená polární rovina oddělují na všech sečnách, jež procházejí pólem, plochu harmonicky*; *v rovinách, jež procházejí pólem, platí harmonické dělení pro pól a sdruženou poláru řezu, která zapadá do polární roviny.* Z toho hned plyne, že polární rovina úběžného bodu je *rovina středová* (*diametrální*) a půlí všechny rovnoběžné tětivy procházející sdruženým úběžným pólem, mezi nimi je i průměr plochy; polární rovina úběžného bodu obsahuje též dotykové body všech tečen plochy, rovnoběžných ve směru tětiv (opsaná válcová plocha). Dvě přímky zovou se *sdružené* (*harmonické*) *poláry* plochy druhého stupně, když jedna je osou rovinového svazku, jehož póly vzhledem ku ploše jsou na druhé přímce. Rovnoběžné roviny protínají plochu v kuželosečkách, jejichž středy jsou póly společné úběžné přímky $_\infty p$ těch rovin vzhledem k řezům a leží na průměru, jenž je sdruženou (harmonickou) polárou úběžné přímky; průměr obsahuje ovšem póly všech rovnoběžných rovin a prochází též dotykovými body tečných rovin, které procházejí úběžnou přímkou $_\infty p$. *Střed plochy je pólem úběžné roviny*; obdržíme jej jako střed diametrálního řezu nebo jako půlící bod průměru.

Průměr a diametrální rovina jsou sdruženy, když rovina půlí tětivy rovnoběžné s průměrem nebo když průměr spojuje středy všech řezů rovnoběžných s diametrální rovinou.

Dva průměry jsou sdruženy, je-li jeden v diametrální rovině druhého.

Tři sdružené průměry jsou průměr p a dvojice sdružených průměrů řezu, který leží v diametrální rovině sdružené k průměru p. V trojhranu sdružených průměrů je každá stěna sdružena s protější hranou.

Rovnoběžné řezy plochy mají tuto vlastnost. Ke každé družině sdružených průměrů jednoho řezu existuje družina rovnoběžná. Rovnoběžné řezy plochy jsou podobné a podobně ležící čili homotetické. Vrcholy dotykových kuželových ploch podél rovnoběžných řezů jsou na sdruženém průměru.

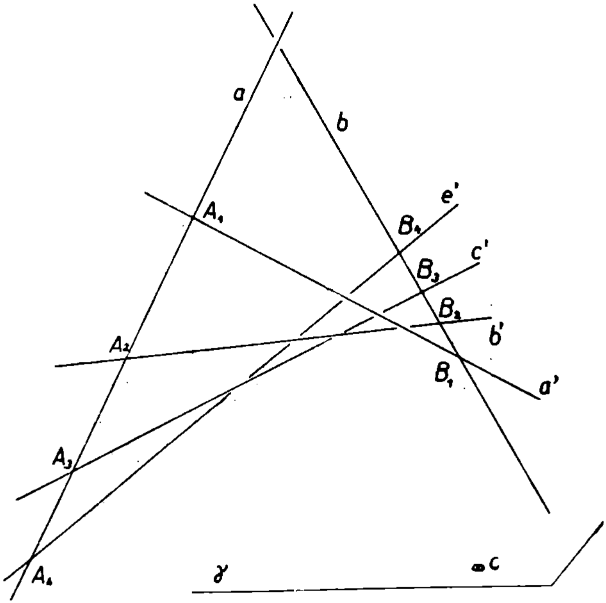
Hlavní rovinou se zove rovina (diametrální) půlící tětivy k ní kolmé.

Osou se zove průměr kolmý na roviny rovnoběžných řezů, jichž středy spojuje.

Homotetičnost řezů zborceného hyperboloidu týká se spolu i asymptotické kuželové plochy, dotýkající se hyperboloidu v úběžné kuželosečce. Rovnoběžné hyperbolické řezy obou ploch mají rovnoběžné asymptoty, libovolná rovina protíná obě plochy v kuželosečkách soustředných o společných asymptotách. Asymptoty všech hyperbol na ploše, jejichž roviny jsou diametrální, leží na asymptotické kuželové ploše a jsou asymptotami hyperboloidu.

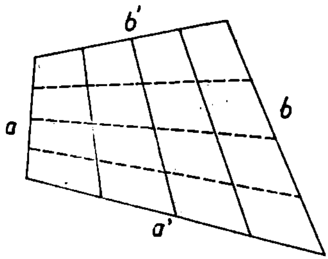
Kruhové řezy zborceného hyperboloidu v rovinách kolmých k hlavní rovině sestrojíme pomocí kulové plochy, jež je opsána nad větší reálnou osou jako průměrem. Touto osou a průsečíky kulové plochy s druhým hyperbolickým hlavním řezem, jehož osou je menší osa reálná, jsou určeny polohy obou soustav rovin kruhových řezů.

7. Hyperbolický paraboloid je zvláštním případem zborceného hyperboloidu. Je dán *dvěma řídícími přímkami a, b*



Obr. 17.

vzájemně mimoběžnými a *řídící rovinou* γ, jejíž úběžná přímka $_\infty c$ jest třetí řídící přímkou plochy. Tvořící přímky a', b', c', d', ... (soustavy čárkované) jsou rovnoběžné s řídící rovinou γ a určují na přímkách soustavy $a, b, \ldots$ (nečárkované) podobné řady. Protože přímka ${}_{\infty}c$ přiřaďuje na přímkách čárkovaných jejich úběžné body, jsou i řady určené na přímkách čárkované soustavy soustavou nečárkovanou vzájemně podobné. I jest též soustava $a, b, \ldots$ povrchových přímek nečárkovaných rovnoběžna s jistou rovinou γ' a protíná její nekonečně vzdálenou přímku ${}_{\infty}c'$; rovina γ' je *druhou řídící rovinou.*



Obr. 18.

Hyperbolický paraboloid je také dán třemi řídícími přímkami rovnoběžnými s touž rovinou. Úběžná přímka této roviny protíná všechny řídící přímky a patří druhé soustavě, která na nich vytíná podobné řady.

Hyperbolický paraboloid je rovněž *určen dvěma podobnými řadami na mimoběžných osách a, b* (obr. 17). A jelikož podobné řady na mimoběžných osách jsou určeny dvěma družinami bodů, jest hyperbolický paraboloid určen *prostorovým* čili *zborceným čtyrúhelníkem* (obr. 18). Obě řídící roviny jsou určeny dvojinami protějších jeho stran ab, $a'b'$, s nimiž jsou rovnoběžny.

Jelikož rovnoběžným promítáním se neruší podobnost obou řad, *jest rovnoběžným průmětem plochy parabola jako obalová křivka průmětů jeho povrchových přímek.*

Dělením protějších stran čtyrúhelníka na týž počet stejných dílů a spojením bodů, které si odpovídají, obdržíme obě osnovy povrchových přímek.

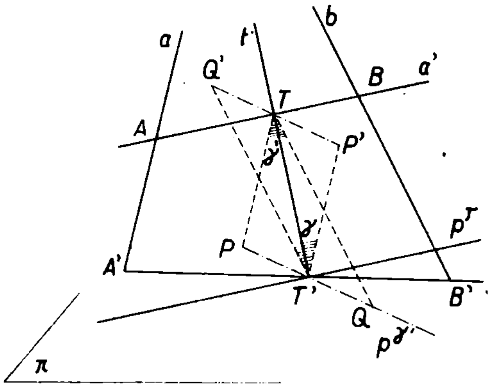
Hyperbolický paraboloid má dvě úběžné přímky různých soustav, t. j. dotýká se úběžné roviny.

Řez hyperbolického paraboloidu libovolnou rovinou je hyperbola, ježto má obecně dva úběžné body.

Průsečnice řídících rovin jsou *průměry*; každým bodem v prostoru prochází jeden průměr. *Rovina rovnoběžná s průměrem seče plochu v parabole.* Odtud název plochy.

Rovina tečná rovnoběžná s danou rovinou ϱ se určí povrchovými přímkami rovnoběžnými s průsečnicemi (ϱ, γ) a (ϱ, γ') roviny s oběma řídícími rovinami; lze je sestrojiti v průmětech jako obrysové tečny daného směru.

Vrchol je dotykový bod tečné roviny (vrcholové) kolmé na směr průměrů, povrchové přímky procházející vrcholem jsou *hlavní přímky*, průměr jdoucí vrcholem je *osou* plochy. Osové roviny půlící úhly hlavních přímek určují *hlavní paraboly*.



Obr. 19.

Rovnoosý hyperbolický paraboloid má řídící roviny vzájemně kolmé, jeho hlavní paraboly jsou shodny, roviny kolmé na osu protínají jej v rovnoosých hyperbolách.

Tečné roviny hyperbolického paraboloidu sestrojujeme zase dvěma povrchovými přímkami různých soustav; konstruktivně využije se ovšem okolnosti, že povrchová přímka leží v příslušné řídící rovině.

Buď *dán hyperbolický paraboloid zborceným čtyrúhelníkem* $ABA'B'$, kde povrchová přímka $A'B'$ leží na př. v průmětně π (obr. 19) rovnoběžného promítání; jest *sestrojiti tečnou rovinu* τ *v bodě* T *povrchové přímky* $a' \equiv AB$. Sestrojíme bodem T řídící rovinu γ', $\overline{TP} \# \overline{AA'}$, $\overline{TQ} \# \overline{BB'}$, stopa $p^{\gamma'} \equiv PQ$ protíná již b' v bodě T' a $t \equiv TT'$ je druhou přímkou tečné roviny $\tau \equiv (a', t)$, $p^{\tau} \parallel a'$.

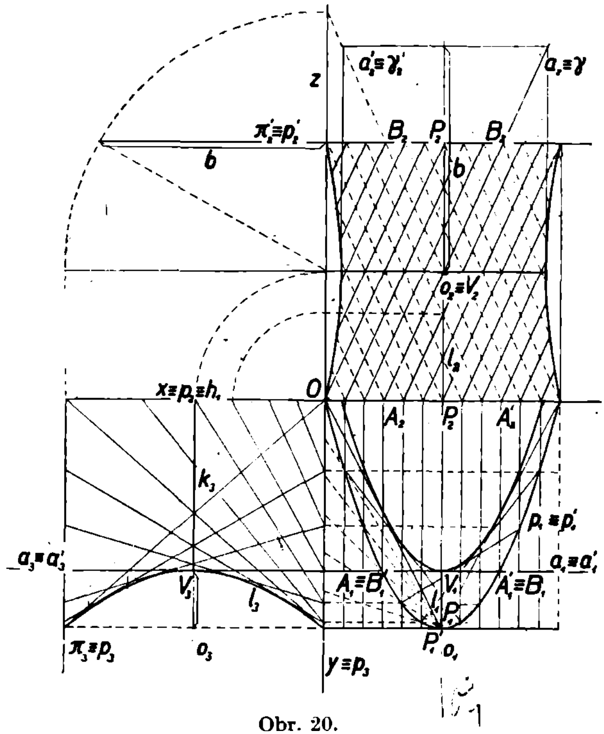
Je-li obráceně zvolena povrchovou přímkou a' rovina τ stopou $p^{\tau} \parallel a'$, určíme její dotykový bod T na a'. Průsečíkem $T' \equiv (A'B', p^{\tau})$ sestrojíme $\overline{T'P'} \# \overline{AA'}$, $\overline{T'Q'} \# \overline{BB'}$, $P'Q'$ je půdorysná hlavní přímka řídící roviny γ' v úrovni povrchové přímky a', kterou protíná v hledaném dotykovém bodě T. Podobné řady na přímkách čárkovaných jsou dány vztahem $\overline{AT} : \overline{BT} = \overline{A'T'} : \overline{B'T'}$, můžeme podle toho sestrojiti dotykový bod T (nebo dříve stopník T') planimetricky. Tečnu t lze též sestrojiti jako pátou tečnu obrysové paraboly Brianchonovou větou.

Pravoúhlé průměty hyperbolického paraboloidu, je-li jeho osa o kolmá k nárysně a jsou-li hlavní roviny s hlavními parabolami rovnoběžny s půdorysnou a stranorysnou (obr. 20). Dány dvě shodné paraboly p a p' v půdorysně π a v rovině $\pi' \parallel \pi$, osa $o \perp \nu$ půlí jejich vzdálenost. Půdorysy parabol se stotožňují, jejich osy jsou rovnoběžny se základnicí y.

Roviny řídící γ a γ' procházejíce osou hyp. paraboloidu jsou nárysně promítací, nárysy povrchových přímek jedné soustavy jsou rovnoběžny s γ_2, druhé soustavy s γ_2'. V obraze byly půdorysy přímek paraboloidu sestrojeny užitím nárysu. (Lze je ovšem získati také vhodným rozdělením oblouku paraboly p_1 a vhodným spojením dělicích bodů.)

Povrchovou přímku $a \equiv AB$ zvolíme rovnoběžnou s nárysnou, tolikéž přímku $a' \equiv A'B'$ druhé soustavy, $a_1 \equiv a'_1$, obě přímky se protínají ve vrcholu V plochy a určují její tečnou rovinu kolmou k ose o.

Půdorysy a stranorysy povrchových přímek obalují průměty hlavních parabol $k \parallel \pi$ a $l \parallel \sigma$ v hlavních rovinách jako zdánlivé obrysy pro kolmé promítání. Dotykové body se odvodí na nich vlastnostmi subtangent, jež poskytnou ovšem průsečíky s hlavními rovinami.

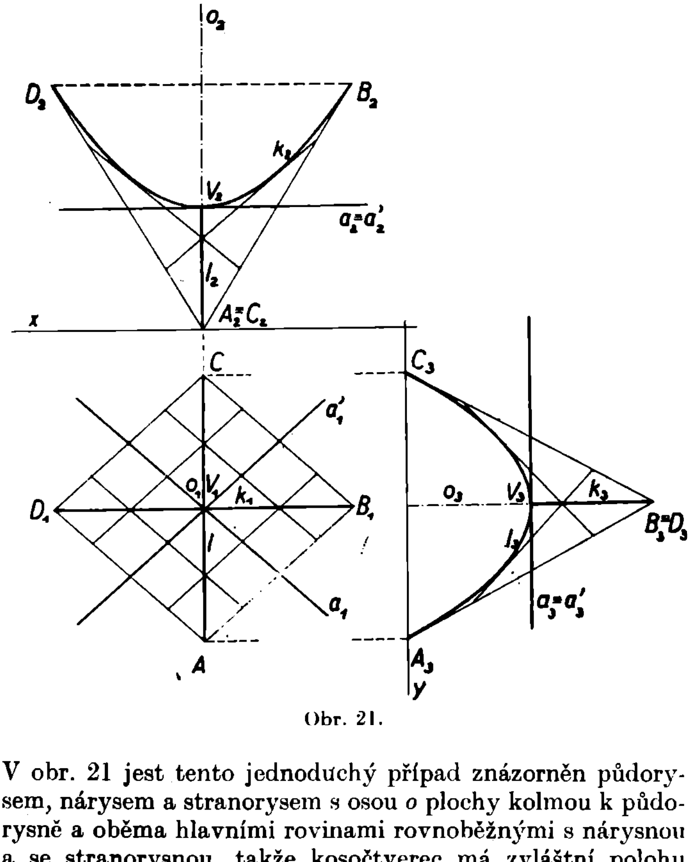


Obr. 20.

Řez nárysnou je hyperbola h; má asymptoty A_2B_2, $A'_2B'_2$ a je určena ještě počátkem souřadnic O, konstrukce její vedlejší poloosy je v nárysu vyznačena.

Má-li prostorový čtyrúhelník, kterým je hyperbolický paraboloid určen, strany vzájemně rovné, je *zborceným koso-*

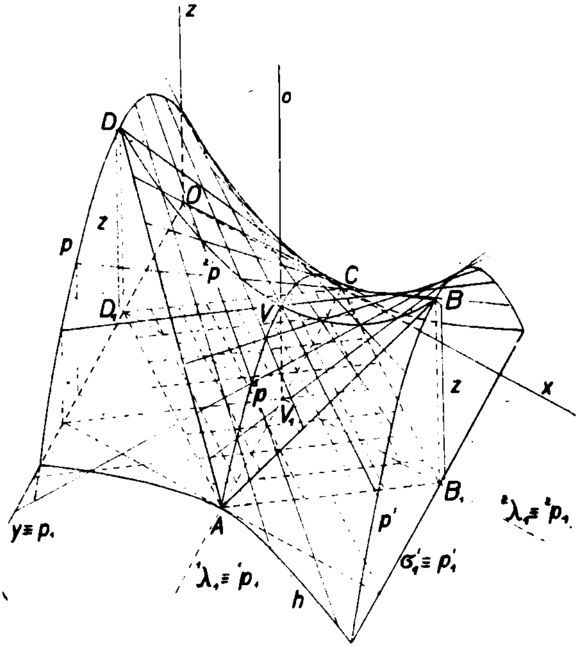
čtvercem, který se promítá ve směru osy plochy kolmo do kosočtverce, obě soustavy povrchových přímek se promítají v tom směru do osnov rovnoběžek se stranami kosočtverce.



Obr. 21.

V obr. 21 jest tento jednoduchý případ znázorněn půdorysem, nárysem a stranorysem s osou o plochy kolmou k půdorysně a oběma hlavními rovinami rovnoběžnými s nárysnou a se stranorysnou, takže kosočtverec má zvláštní polohu k průmětnám, jak z obrazu patrno. Obě povrchové přímky

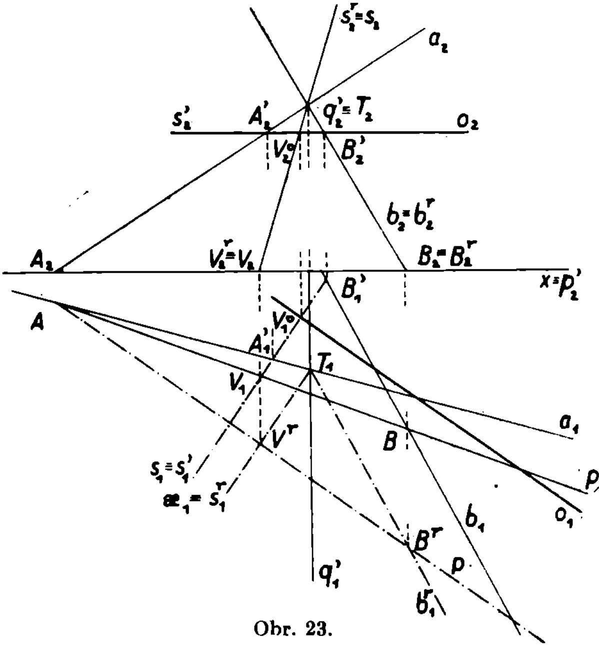
a a a' ve vrcholu V jsou vodorovné a určují vodorovnou vrcholovou tečnou rovinu, které se dotýká hlavní parabola k, rovnoběžná s nárysnou, nad rovinou a druhá hlavní parabola l pod rovinou tečnou. Půdorys je sestrojen v rámci koso-



Obr. 22.

čtverce, takže odpadá hyperbolický řez první průmětnou, který by měl asymptoty a_1, a'_1 a vrchol A.

I z pravoúhlých průmětů vyniká tvar plochy hyperbolického paraboloidu, jenž je vystižen názvem *sedlovitá plocha*, který se jí přikazuje. Ještě názorněji jeví se plocha v průmětu axonometrickém. V obr. 22 sestrojen její *kosoúhlý průmět* *isometrický na půdorysnu*, osa $o \parallel z$ se promítá do směru kolmého na směr od levé ruky k pravé. Vrcholy A, C kosočtverce leží v půdorysně, vrcholy B, D mají stejnou souřadnici z, která se v průmětu zachová. Průmět plochy je omezen hyperbolou h v půdorysně, parabolou p v stranorysně a rovnoběžnou parabolou shodnou p' v rovině σ'. V průmětu vytčena



Obr. 23.

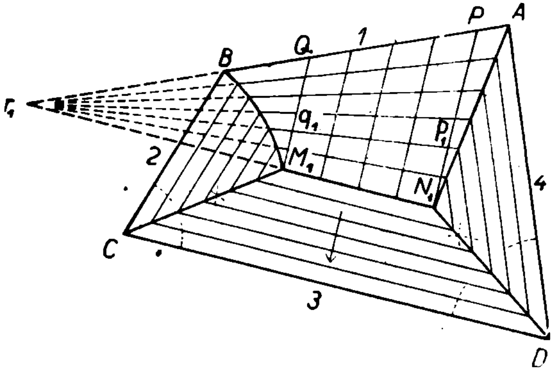
obalová parabola obrysová a hlavní paraboly ${}^1p$ a ${}^2p$ na ploše v jejích hlavních rovinách souměrnosti ${}^1\lambda$ a ${}^2\lambda$. Průmět popsán jako útvar v prostoru.

Je-li *hyperbolický paraboloid určen dvěma mimoběžkami a řídicí rovinou, lze sestrojiti jeho vrchol, osu a vrcholové hlavní přímky i hlavní roviny* zcela jednoduše. V obr. 23 zvolena plocha dvěma mimoběžkami a, b a půdorysnou jako řídící rovinou v pravoúhlých průmětech. Čárkovaná soustava je rovnoběžna s půdorysnou a vytíná na přímkách a a b podobné řady, obrysem půdorysu je parabola. Nárysy této soustavy jsou osnovou rovnoběžek se základnicí x; v obr. vyznačena přímka p' v půdorysně a q' kolmá k nárysně, $q'_2 \equiv (a_2, b_2)$. Odtud hned patrno, že nečárkovaná soustava přímek $a, b, \ldots$ se promítá do nárysny jako paprskový svazek o vrcholu q'_2, takže obrysová parabola degeneruje v složenou křivku druhé třídy.

Ke konstrukci potřebujeme průměr. Zvolíme na přímce a bod T, $T_2 \equiv q'_2$, a tím sestrojíme $b^r \parallel b$; spojnice stopníků $AB^r \equiv p$ je půdorysnou stopou druhé řídící roviny a tedy průměrem. Sestrojíme dále bodem T půdorysně promítací rovinu $\varkappa$ kolmo na průměr, $\varkappa_1 \perp p$, k průsečnici $s^r \equiv TV^r$ roviny $\varkappa$ a druhé roviny řídící odvodíme nárys a pak na ploše přímku $s \parallel s^r$, $s_2 \equiv s^r_2$; s je již hlavní tečnou ve vrcholu. Druhá hlavní tečna s' je rovnoběžna s půdorysnou, $s'_1 \equiv s_1$, (s a s' určují vrcholovou tečnou rovinu kolmou na průměr), s'_2 se odvodí body A' a B' na daných povrchových přímkách. Vrchol plochy je $V^0 \equiv (s, s')$, jím prochází osa o ve směru průměru, $o_2 \equiv s'_2$. Hlavní roviny procházejíce osou půlí úhly sevřené hlavními tečnami ve vrcholu a protínají plochu v hlavních parabolách.

8. Hyperbolický paraboloid při řešení střech. V stavitelství se ho užívá, máme-li spojiti střešní plochou dvě přímky vzájemně mimoběžné; bývá to *hrana římsová* (totožná theoreticky s pozednicí i okapní hranou v půdorysně) a *hřeben* jako horizontální omezující hrana sousední střešní roviny. Použití nachází při různoběžníkovém půdoryse.

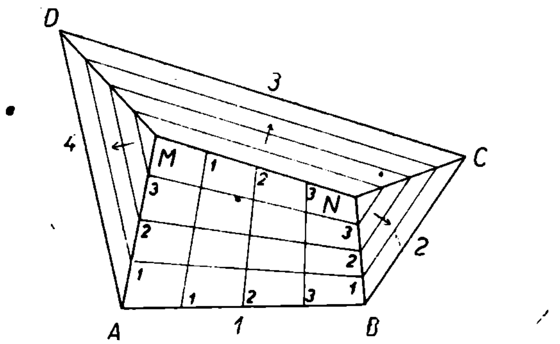
V obr. 24 dán různoběžníkový půdorys budovy $ABCD$. Okapními hranami BC, CD a DA položíme střešní roviny stejného spádu, takže půdorysy nároží CM rovin *2* a *3* a DN rovin *3* a *4* jsou osami úhlů půdorysných stop střešních rovin. Dále zvolíme hřeben $MN \parallel CD$, který omezuje přední část střechy. Čtvrtou střešní plochou, jež má stopu $l \equiv AB$, bude hyperbolický paraboloid. Sestrojíme $M_1Q \perp M_1N_1$ a $N_1P \perp M_1N_1$, P a Q jsou na AB a náš hyperbolický paraboloid je zborcený čtyrúhelník $MNPQ$. Jeho řídící roviny jsou půdorysna a rovina rovnoběžná s promítací rovinou přímky $p \equiv NP$ nebo $q \equiv MQ$. Měřítka téhož počtu rovných dílů na M_1Q a N_1P (v obr. 6 dílů) jsou homotetická a mají společný zor z bodu r_1, což znamená, že soustava hori-



Obr. 24.

zontálních povrchových přímek, jež spojují obě měřítka na p a q, protíná přímku r kolmou k půdorysně. Jest tedy naše plocha určena také přímkami p, q a r rovnoběžnými s toutéž promítací rovinou. Tím je řešena otázka horizontálních *latí*, ovšem vzájemně mimoběžných. *Krokve* tvoří druhou soustavu povrchových přímek, která protíná soustavu latí; spojují podobně ležící měřítka na MN a PQ (v obr. jsou 4 díly). Střechy $CDNM$, ADN a BCM jsou děleny týmž počtem latí, ovšem vzájemně rovnoběžných. Latě obou trojúhelníkových rovin protínají latě paraboloidu stejné výšky v bodech, které spojeny dávají průseky paraboloidu uvedenými rovinami; jsou to oblouky hyperbol, jež tvoří křivá nároží na zborcené části střešní. Kdyby roviny střešní byly rovnoběžny s průměrem hyperbolického paraboloidu, t. j. s přímkami $M_1Q \parallel N_1P$, byla by nároží parabolická. Praxe žádá, aby tato nároží byla jen málo zakřivena.

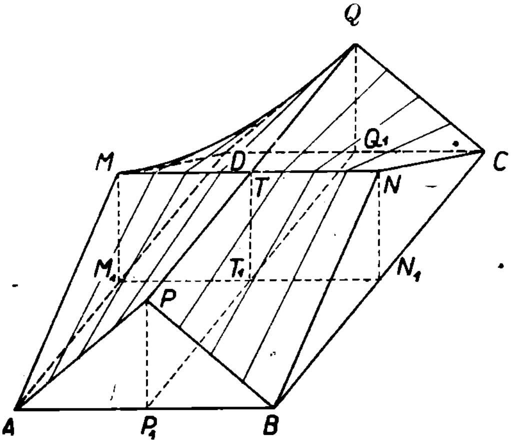
V obr. 25 jest provedeno řešení střechy téhož tvaru a použito zborceného čtyrúhelníka $ABNM$. Zde jsou přímá nároží AM a BN předem zvolena jako povrchové přímky sou-



Obr. 25.

stavy krokví. Dělení stran zborceného čtyrúhelníku je úplně obdobné. Druhá řídící rovina není ovšem kolmá k půdorysně, t. j. soustava krokví nemá půdorysy vzájemně rovnoběžné.

V obr. 26 provedeno *v kosoúhlé isometrii řešení střech nad čtvercovým půdorysem* $ABCD$, nad jehož obrysem se zvedají čtyři vertikální štíty ABP, BCN, CDQ a DAM o téže výšce. Spojnice MN a PQ se protínají v horizontální rovině v bodě T. Tím je střecha rozčleněna na *čtyři zborcené čtyrúhelníky* (jaksi deltoidy s osami souměrnosti $\overline{AT} = \overline{BT} = \overline{CT} = \overline{DT}$), které vyplníme střešními hyperbolickými paraboloidy. Úžlabí jsou tu nahrazena sedlovitým tvarem plochy, odpad vody nutno provésti sběrnými body A, B, C a D. Jak patrno z konstrukce, jsou použité plochy ortogonálními hyperbolickými paraboloidy, ježto mají řídicí roviny vzájemně kolmé; jsou to svislé roviny štítů. Společnou osou ploch je vertikála



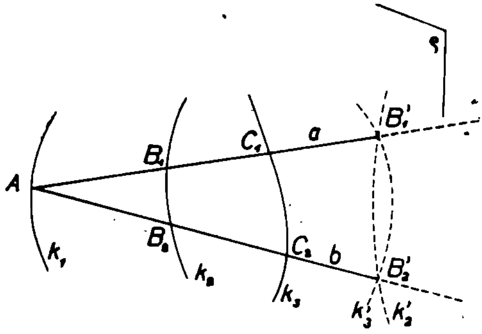
Obr. 26.

společného vrcholu T s vodorovnou vrcholovou tečnou rovinou, v níž $MN \perp PQ$ jsou hlavními tečnami.

* * *

Uvažované zborcené plochy druhého stupně mají důležitý úkol v theorii zborcených ploch vyšších stupňů; některé konstrukce o nich se převádějí totiž na zborcené plochy 2. stupně.

9. Vytvoření a základní vlastnost obecné plochy zborcené. Souhrn přímek v prostoru je mohutnosti 4; všechny přímky v prostoru zachytíme totiž spojnicemi všech bodů dvou rovinných bodových polí mohutnosti 2. Tedy přímky, jež vyhovují třem jednoduchým podmínkám v mohutnosti 1 vyplňují přímkovou plochu. Jednoduchou podmínkou pro přímku na příklad jest, aby protínala danou křivku v jednom bodě.



Obr. 27.

Zborcená plocha vznikne obecně pohybem tvořící přímky tak, že přímka stále protíná tři pevné řídící křivky. Povrchové přímky určíme pomocnými kuželovými plochami. Jsou-li dány řídící křivky k_1, k_2 a k_3 (obr. 27), zvolíme na křivce k_1 bod A, sestrojíme kuželové plochy o vrcholu A a řídících křivkách k_2 a k_3 a určíme jejich průsečné povrchové přímky $a, b, \ldots$, jež jsou žádanými povrchovými přímkami zborcené plochy, jdoucími bodem A. Konstrukce se provede průseky kuželových ploch pomocnou rovinou ϱ v křivkách k'_2 a k'_3, jejichž průsečíky $B'_1, B'_2, \ldots$ procházejí tvořící přímky $a, b, \ldots$

Je-li některá z daných řídících křivek rovinná k_3, jest pomocnou rovinou ϱ její rovina a pak se sestrojí jen průsek rovinou ϱ kuželové plochy $[Ak_2]$.

Ze tří řídících křivek může býti jedna (k_1) nekonečně vzdálena a určena kuželovou plochou, tedy *zborcená plocha může býti určena řídící kuželovou plochou a dvěma řídícími křivkami.* Povrchové přímky zborcené plochy se určí průsekem pomocných ploch válcových procházejících danými řídícími křivkami, vždy rovnoběžně s některou povrchovou přímkou řídící plochy kuželové (tedy bodem $_\infty A$ na ní).

Je-li úběžný řídící útvar přímkou, jest určen řídící rovinou.

Řídící křivky mohou býti nahrazeny *řídícími plochami, jichž se tvořící přímky dotýkají* (jednoduché podmínky pro přímku). Je-li dána aspoň jedna řídící křivka (a dvě řídící plochy), sestrojíme bodem řídící křivky dotykové kuželové plochy obou řídících ploch; jejich průsečné povrchové přímky jsou plošnými přímkami zborcené plochy.

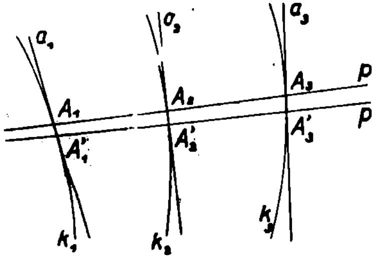
Nejsložitější by byl případ tří řídících ploch. Zvolíme ještě přímku a určíme zborcenou plochu stanovenou touto řídící přímkou a dvěma danými řídícími plochami. Určíme průsečnou křivku zborcené plochy s třetí řídící plochou; její tečny, které jsou zároveň přímkami pomocné zborcené plochy, jsou povrchovými přímkami hledané plochy zborcené. Pomocnou přímku lze voliti jako úběžnou, tedy nahraditi pomocnou rovinou řídící, s níž jsou povrchové přímky rovnoběžny.

Zborcenou plochu lze také vytvořiti *příčkami dané délky dvou řídících křivek.* Přímky plochy jdoucí bodem jedné křivky se určí pomocnou plochou kulovou, mající v tom bodě střed a danou délku za poloměr.

Plochu zborcenou sestrojíme také příčkami dvou křivek řídících za podmínky, že svírají s jednou danou křivkou úhel stálé velikosti, jenž je dán. Povrchové přímky jdoucí bodem jedné křivky leží na rotační kuželové ploše, jejíž osou je tečna sestrojená v tom bodě ke křivce a jejíž přímky svírají s tečnou daný úhel.

Dané řídící útvary mají zcela obecnou polohu, nemají ani společných bodů ani dotyku. Tvořící přímka je dána podmínkami protínání nebo dotyku s danými řídícími útvary, což geometricky stačí; jinak ovšem bývá možno příslušný pohyb vytvořující přímky uzákonit.

Jsou-li řídící křivky algebraické, jest vytvořená plocha také *algebraickou*, je-li některá řídící křivka transcendentní, pak také zborcená plocha je *transcendentní*. Nemají-li řídící útvary výtvarných zákonů, čili jsou-li křivkami empirickými nebo plochami grafickými, vytvořená zborcená plocha je také *grafickou*.

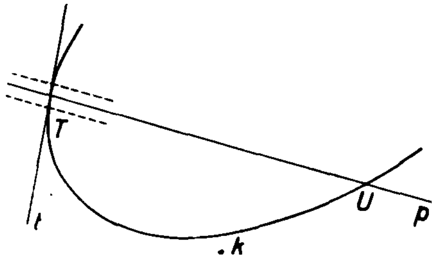


Obr. 28.

Že sestrojené plochy jsou zborcené, plyne z pozorování dvou blízkých poloh povrchových přímek p a p' (obr. 28); obě určují na řídících křivkách blízké body, tedy přímky $a_1 = A_1A'_1$, $a_2 = A_2A'_2$ a $a_3 = A_3A'_3$ jsou blízké tečnám řídících křivek, které obecně neleží v téže rovině, protože řídící křivky zvoleny docela libovolně. Plošný prvek mezi p a p' je zborcený, nelze ho převésti do roviny (čl. 2).

10. Tečné roviny zborcených ploch. Libovolná rovina protíná zborcenou plochu v křivce, souhrnu to průsečíků s povrchovými přímkami. Tečná rovina obsahuje tečny ke všem křivkám, které procházejí na ploše zvoleným dotykovým bodem. U plochy zborcené zastupuje jednu takovou křivku povrchová přímka, na níž byl dotykový bod zvolen. Tedy *každá rovina, jež prochází tvořící povrchovou přímkou zborcené plochy, jest její tečnou rovinou. Tečná rovina v bodě zborcené plochy je* *určena povrchovou přímkou tím bodem procházející a tečnou některé křivky (třeba rovinné) na ploše sestrojenou v tomto bodě.*

Nechť libovolná rovina τ, procházející povrchovou přímkou p, protíná plochu ještě v křivce k, přímka p a křivka k tvoří dohromady průsečný útvar $p + k$ a mají vzájemné průsečíky $T, U, \ldots$ (obr. 29). Jejich průsečík T budiž ten bod, v kterém přechází křivka k povrchovou přímku p, když pohybující se povrchová přímka (jejímiž průsečíky s rovinou τ vzniká křivka k) přechází polohu p. Obecně existují ještě



Obr. 29.

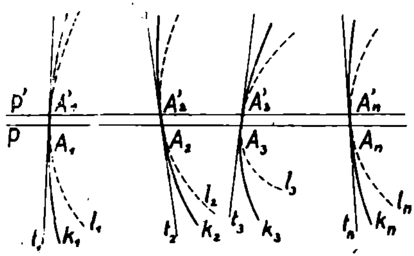
další průsečíky podle tvaru průsečné křivky. *Rovina tečná τ má dotykový bod T a je určena přímkou p a tečnou t v bodě T křivky k.* Bod T je totiž dvojným bodem úplného řezu $p + k$ plochy rovinou τ, t. j. každá přímka jdoucí v rovině τ bodem T je tečnou plochy.

Tečna t je speciálně tečnou v dvojném bodě průsečné křivky. Druhou tečnou v dvojném bodě průseku je povrchová přímka p.

Dvě zborcené plochy, které mají společnou povrchovou přímku a dotyk ve třech různých bodech na ní, dotýkají se podél celé povrchové přímky ve všech jejích bodech. Buďtež to body A_1, A_2 a A_3 na společné povrchové přímce p (obr. 30). Sestrojme jimi tři libovolné roviny a jejich průsečné křivky k_1, k_2, k_3 a l_1, l_2, l_3 s oběma plochami; i dotýkají se vzájemně k_1 a l_1 v bodě A_1, k_2 a l_2 v bodě A_2 a k_3 a l_3 v bodě A_3; společné tečny jsou

$t_1 \equiv A_1A'_1$, $t_2 \equiv A_2A'_2$ a $t_3 \equiv A_3A'_3$; A'_1, A'_2 a A'_3 jsou blízké body bodů dotykových a určují blízkou společnou povrchovou přímku p' obou ploch, kteráž jest jedinou příčkou, kterou lze sestrojiti na př. bodem A'_1 k tečnám t_2 a t_3. Libovolná jiná rovina protíná útvary v bodech A_n, A'_n, k_n a l_n, $t_n \equiv A_nA'_n$ je společnou tečnou křivek k_n a l_n v bodě A_n; obě plochy mají v tomto bodě společnou tečnou rovinu (p, t_n).

Zborcené plochy mající ve všech bodech přímky p společné tečny a tečné roviny a tedy dotýkající se podél přímky, mají společný t. zv. plošný prvek.



Obr. 30.

Tečny t_1, t_2 a t_3 určují jako řídící přímky *zborcený hyperboloid t. zv. dotykový, protože ve třech bodech dané přímky a tedy v každém jejím bodě se dotýká dané zborcené plochy.* Každá rovina procházející přímkou p je tečnou rovinou hyperboloidu pro určitý bod přímky a tedy také tečnou rovinou obecné zborcené plochy v tomto jediném bodě.

Dotykových zborcených hyperboloidů podél určité povrchové přímky obecné plochy zborcené je nekonečné množství. Každý takový hyperboloid zvolíme třemi řídícími přímkami, jež jsou tečnami ve třech bodech přímky p. Protože v každém bodě lze sestrojiti paprskový svazek ∞^1 tečen plochy, jest souhrn dotykových hyperboloidů mohutnosti 3.

Zvolíme-li tečny t_1, t_2 a t_3 rovnoběžné s danou rovinou ϱ, obdržíme *dotykový hyperbolický paraboloid* dané plochy zborcené. K jeho určení stačí dvě tečny t_1 a t_2 ve dvou bodech přímky p k ploše a tečná rovina v dalším třetím bodě přímky p.

Tečná rovina v nekonečně vzdáleném bodě na povrchové přímce p je t. zv. *rovina asymptotická*. Asymptotická rovina se sestrojí pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem; dostaneme ji jako jeho druhou řídicí rovinu procházející přímkou p.

Zvolíme-li $t_1 \perp p$ a $t_2 \perp p$ v rovinách kolmých na p, jest také řídící rovina dotykového hyperbolického paraboloidu kolmá k přímce p a též všechny povrchové přímky s ní rovnoběžné. Otočením této soustavy o 90° kolem přímky p stanou se z přímek dotykového hyperbolického paraboloidu normály uvažované zborcené plochy. Tedy:

Normály zborcené plochy v bodech její povrchové přímky vyplňují hyperbolický paraboloid (t. zv. *hyperbolický paraboloid normál*).

Vlastnosti a konstrukce tečných rovin zborceného hyperboloidu se přenášejí ihned na obecnou zborcenou plochu. Tedy důležitá věta:

Svazek tečných rovin zborcené plochy procházejících její obecnou tvořící přímkou jest projektivní s řadou jejich dotykových bodů na ploše.

Ze tří družin tohoto projektivního vztahu lze sestrojovati další družiny, z bodů tečné roviny a obráceně. Protneme rovinový svazek přímkou v bodové řadě a sestrojujeme body dotyku nebo tečné roviny na základě projektivnosti této bodové řady s řadou dotykových bodů.

Dotykový hyperboloid zborcené plochy je určen tečnami t_1, t_2 a t_3 plochy ve třech bodech dotykové povrchové přímky, (na př. tečnami křivek řídících). Sestrojíme-li příčky q a r těchto tečen, t. j. přímky druhé soustavy, sestrojíme v bodě A_n na přímce p tečnou rovinu pomocí přímky t_n hyperboloidu, která je příčkou přímek q a r.

Pro libovolnou rovinu τ procházející přímkou p sestrojíme dotykový bod zase přímkou t_n, jež je určena průsečíky Q a R roviny s přímkami q a r; $t_n \equiv QR$.

Protože asymptotické roviny se dotýkají zborcené plochy v úběžných bodech povrchových přímek, obaluje souhrn asymptotických rovin zborcené plochy její *asymptotickou rozvinutelnou plochu*, dotýkající se zborcené plochy podél její křivky nekonečně vzdálené.

Obě plochy, daná zborcená a její asymptotická plocha rozvinutelná mají tutéž řídící kuželovou plochu, která jest zorem jejich společné úběžné křivky. Tečné roviny této řídící kuželové plochy jsou rovnoběžny s rovinami asymptotickými, povrchové přímky rovnoběžné s povrchovými přímkami plochy zborcené i asymptotické plochy rozvinutelné. Tedy platí: *V asymptotické rovině jsou spolu rovnoběžny povrchová přímka zborcené plochy a povrchová přímka asymptotické plochy rozvinutelné.*

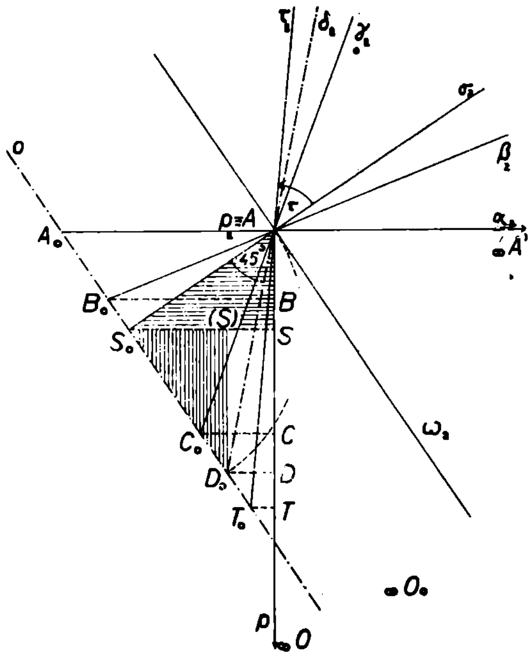
Centrální bod povrchové přímky zborceného hyperboloidu i obecné zborcené plochy jest dotykový bod t. zv. *centrální roviny* přímky zborcené plochy, jež je kolmá k asymptotické rovině. *Souhrn centrálních bodů je strikční křivka zborcené plochy.*

Centrální bod a centrální rovina mají na povrchové přímce důležitou úlohu pro jednoduché určení dotykových bodů svazku tečných rovin, jenž má svou osu v přímce, nebo obráceně.

Zvolme v obr. 31 povrchovou přímku p zborcené plochy v půdorysně kolmo k nárysně, takže tečné roviny svazku p jsou nárysně promítací a v nárysně se jeví jejich vzájemné odchylky ve vrcholu p_2. Volíme dále tři roviny tečné α, β a γ a jejich dotykové body A, B, C, aby $\alpha \equiv \pi$ byla půdorysnou a dotykový bod $A \equiv p_2$ v nárysně.

Označíme-li $_\infty A'$ úběžný bod na paprsku α_2, jest zor $_\infty A'$ $(A, B, C, \ldots)$ paprsková osnova perspektivní se svazkem p_2 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots)$, protože $_\infty A'A \equiv \alpha_2$ je jejich samodružným paprskem. Perspektivní osou o je spojnice $o \equiv B_0C_0$ průsečíků dvou paprskových družin $_\infty A'B$ a β_2, $_\infty A'C$ a γ_2. Pomocí této perspektivní osy lze sestrojovati další družiny, buď z dotykového bodu T nárys τ_2 tečné roviny τ nebo obráceně z daného τ_2 dotykový bod.

Sestrojme ve svazku asymptotickou rovinu ω. Protože její dotykový bod $_\infty O$ je úběžným, je i O_0 úběžným a tedy $\omega_2 \parallel o$.



Obr. 31.

Rovina centrální $\sigma \perp \omega$ má $\sigma_2 \perp \omega_2$, z bodu S_0 odvozen centrální bod S.

Sestrojme nyní rovinu ϑ, která má odchylku 45° od centrální roviny v kladném smyslu, $\overline{S_0D_0} = \overline{S_0A}$. Odvodíme-li dotykový bod D této roviny a učiníme ještě $D_0(S) \parallel p$, plyne ze vztahu $\triangle S_0(S)D_0 \simeq \triangle ASS_0$, že $\overline{SD} = \overline{(S)D_0} = \overline{SS_0}$, což je pro $\overline{SD}$ stálou hodnotou na přímce p. Délka $\overline{SD}$ se zove *parametrem distribuce*; je to vzdálenost od centrálního bodu dotykového bodu roviny, jež má od centrální roviny odchylku 45°. Pro libovolnou rovinu τ, jejíž odchylku od centrální roviny σ označíme také literou τ, platí

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{S_0T_0}}{\overline{S_0D_0}} = \frac{\overline{S_0T_0}}{\overline{S_0A}} = \operatorname{tg} \tau;$$

tedy $\overline{ST} = \overline{SD} \,.\, \operatorname{tg} \tau$; slovně vyjádřeno:

Vzdálenost dotykového bodu tečné roviny, jež prochází obecnou tvořící přímkou zborcené plochy, od jejího centrálního bodu, se rovná součinu parametru distribuce přímky a tangenty odchylky uvažované tečné roviny od centrální roviny.

11. Stupeň, třída a řád zborcené plochy. Řídící křivky i přímky. Přímky torsální a body kuspidální. Nechť libovolná přímka p protíná algebraickou zborcenou plochu v n-bodech, t. j. nechť plocha je n-ho *stupně*. Každým průsečíkem přímky s plochou prochází povrchová přímka a ta určuje s přímkou p tečnou rovinu procházející přímkou p; dotykový bod není ovšem v tom průsečíku. Jiné tečné roviny přímkou p neprocházejí, tečná rovina přímkou p musí obsahovati povrchovou přímku, jež protíná p. Souhlasí tedy počet tečných rovin přímkou p ku ploše procházejících s počtem n průsečíků, t. j. plocha je *n-té třídy*. Někdy se říká také, že plocha je n-ho *řádu*; častěji se užívá při stejném stupni a třídě jen výrazu n-ho stupně. (Tedy na př. plochy druhého stupně, plochy zborcené třetího stupně a pod.)

V každém bodě obecné přímky zborcené plochy existuje jedna tečná rovina plochy. V různých bodech přímky zborcené plochy jsou tečné roviny tedy obecně různé. Může se však státi, že přímka plochy je taková, že tečné roviny plochy sestrojené v různých bodech přímky splývají. V tomto případě (zvláštním) projektivita mezi řadou bodů na přímce a svazkem tečných rovin přímkou zborcené plochy degeneruje tak, že existuje určitý bod K přímky a určitá rovina přímkou o těchto vlastnostech: Každé rovině $\alpha \neq \tau$ přímkou procházející odpovídá bod K; každému bodu $T \neq K$ na přímce odpovídá rovina τ. V tomto zvláštním případě tečná rovina τ se dotýká plochy podél celé povrchové přímky. Přímka se zove *torsální přímka* zborcené plochy; zborcená plocha má podél ní povahu rozvinutelné plochy (jež se zove také *torsí*).

Torsální rovinou zborcené plochy jest její tečná rovina podél torsální přímky. (Viz rovinu τ.)

Kuspidální bod je dotykový bod každé netorsální roviny procházející torsální přímkou. (Viz bod K.) Rovina procházející kuspidálním bodem protíná zborcenou plochu v křivce, jež má tento bod za bod vratu. Je-li dána zborcená plocha řídícími křivkami a řídící přímkou, je rovina sestrojená řídící přímkou jako tečná rovina jedné řídící křivky rovinou torsální a určí na druhé řídící křivce kuspidální bod.

Meze vlastních stínů a obrysové křivky na zborcené ploše procházejí jejími kuspidálními body a dotýkají se v nich torsálních přímek.

Řídící křivka zborcené plochy jest její *vícenásobnou křivkou*. Jsou-li na př. křivky k_1, k_2 a k_3 stupňů n_1 resp. n_2 a n_3, prochází každým bodem křivky k_1 zborcené plochy $n_2 n_3$ povrchových přímek. Řídící křivky jsou tudíž postupně $n_2 n_3$ resp. $n_3 n_1$, resp. $n_1 n_2$-násobné křivky.

Jsou-li řídící křivky k_1, k_2, k_3 zborcené plochy stupňů n_1, n_2 a n_3 a neprotínají-li se žádné dvě z nich, pak stupeň vytvořené zborcené plochy jest $n = 2n_1 n_2 n_3$.

Budiž za účelem důkazu zvolen zborcený hyperboloid přímkami p_1, p_2, p_3; víme, že je stupně druhého. Křivka k_1 protíná hyperboloid ve $2n_1$ bodech, t. j. k_1, p_1, p_2, p_3 mají $2n_1$ příček, což znamená, že zborcená plocha $[k_1 p_2 p_3]$*) je

*) Lomenou závorkou $[k_1 p_2 p_3]$ označujeme plochu, jejíž řídící útvary jsou křivka k_1 a přímky p_2, p_3.

stupně $2n_1$. Tato zborcená plocha jest proťata křivkou k_2 ve $2n_1n_2$ bodech, t. j. k_1, k_2, p_2, p_3 mají $2n_1n_2$ příček, což znamená, že zborcená plocha $[k_1k_2p_3]$ jest stupně $2n_1n_2$. Tato zborcená plocha jest proťata křivkou k_3 ve $2n_1n_2n_3$ bodech, t. j. k_1, k_2, k_3, p_3 mají $2n_1n_2n_3$ příček, což znamená, že uvažovaná zborcená plocha $[k_1k_2k_3]$ jest stupně $2n_1n_2n_3$.

Protínají-li se dvě řídící křivky k_1 a k_2 v jednom bodě V, pak se rozpadá zborcená plocha na dvě části; jednou z nich je kuželová plocha o vrcholu V a řídící křivce k_3, tedy řádu n_3. Tedy stupeň druhé části (zborcené) je $2n_1n_2n_3 - n_3$. Mají-li křivky k_1 a k_2 společných s_3 bodů, k_2 a k_3 společných s_1 bodů, a konečně křivky k_3 a k_1 společných s_2 bodů, pak stupeň zborcené plochy po odečtení všech kuželových ploch je

$$2n_1n_2n_3 - s_1n_1 - s_2n_2 - s_3n_3.$$

Čísla určující mnohonásobnost řídících křivek jsou pak postupně

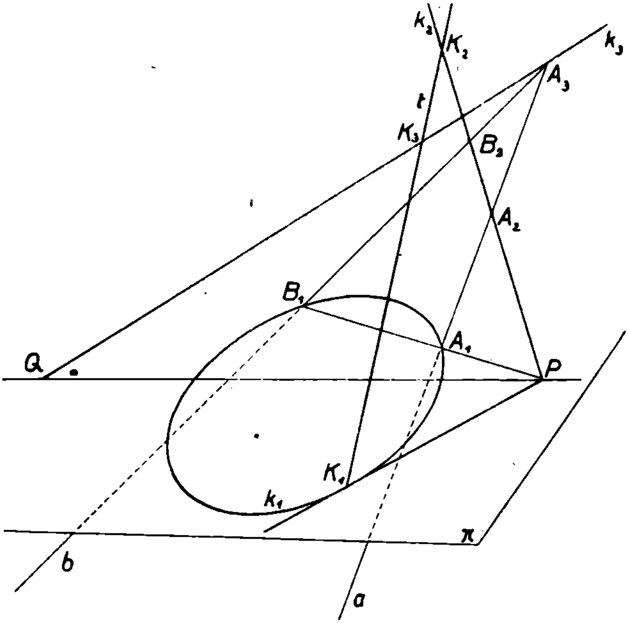
$$n_2n_3 - s_1,\ n_3n_1 - s_2,\ n_1n_2 - s_3.$$

Pro zborcenou plochu určenou třemi řídícími kuželosečkami, z nichž dvě a dvě ve dvou bodech se protínají (*spjatými* kuželosečkami) byl by dle toho stupeň $2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4$; jest to však plocha druhého stupně a zdánlivý rozpor se vysvětlí tím, že jsme hledali počet přímek plochy, které protínají danou přímku, a víme, že plocha druhého stupně skutečně takové čtyři přímky obsahuje.

Základní tyto vztahy znázorněny jsou v obr. 32 na zborcené ploše stupně čtvrtého, dané řídící kuželosečkou k_1 v rovině π a řídícími přímkami k_2 a k_3 se stopníky P a Q na π. Libovolná rovina položená přímkou k_2 určí na kuželosečce k_1 body A_1 a B_1, na k_3 bod A_3, $a \equiv A_1A_3$, $b \equiv B_1A_3$ jsou přímky zborcené plochy. Je patrno, že přímka k_3 a obdobně k_2 jest *dvojnou* (*dvojnásobnou*) *přímkou* plochy. Řídící kuželosečka k_1 jest *jednoduchou křivkou* na ploše, každým jejím bodem probíhá jediná příčka řídících přímek k_2 a k_3.

Spojnice stopníků PQ jest *dvojnou povrchovou přímkou zborcené plochy*, není to však řídící přímka. Jsou-li společné body přímky PQ s řídící kuželosečkou k_1 sdruženě imaginární, pak jest přímka *isolovanou přímkou na ploše.*

Sestrojíme-li stopníkem P tečnu ke k_1, splynou v tomto případě povrchové tvořící přímky v přímce torsální t a její průsečík s dvojnou řídící přímkou k_3 je kuspidální bod K_3.

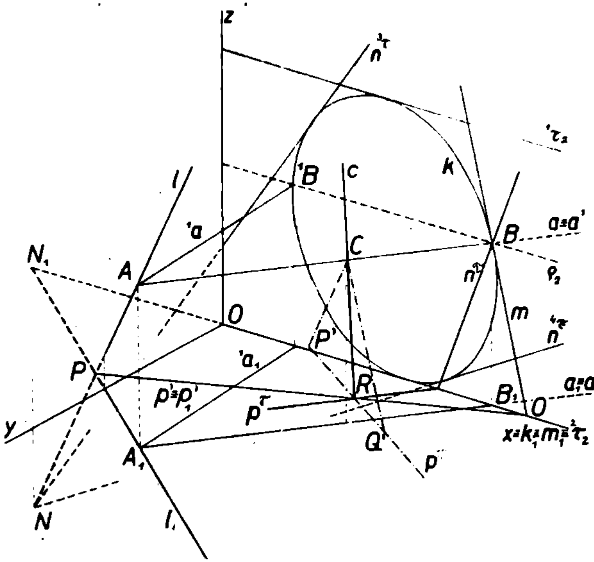


Obr. 32.

Seče-li řídící přímka k_2 křivku k_1 v bodě P, pak se rozpadá zborcená plocha v rovinu (P, k_3) a v *zborcenou plochu třetího stupně.* Pak k_3 je toliko jednoduchou přímkou plochy.

Protínají-li obě řídící přímky křivku k_1, pak se plocha rozpadá na dvě roviny (P, k_3) a (Q, k_2) a na zborcený hyperboloid stupně druhého.

12. Konoid je zvláštním případem zborcené plochy o dvou řídících přímkách, je-li jedna řídící přímka v nekonečnu. I jest *konoid určen řídící přímkou, řídící křivkou* (nebo plochou, jíž se tvořící povrchové přímky dotýkají) *a řídící rovinou.* Je-li stupeň řídící křivky n_1, jest stupeň konoidu $2n_1$.



Obr. 33.

Je-li řídící přímka kolmá k řídící rovině, jmenuje se konoid *pravoúhlý* (*přímý*), jinak *kosoúhlý konoid.*

Řídící křivka jest jednoduchou křivkou plochy (každým jejím bodem jde jedna její tvořící povrchová přímka), řídící přímka jest jejím útvarem n-násobným (každým jejím bodem jde n přímek na ploše); jiných vícenásobných čar není.

Hyperbolický paraboloid je také konoidem.

Kosoúhlý konoid kuželosečkový, zborcená plocha čtvrtého stupně, je dán axonometrickým průmětem v obr. 33. Řídící elipsa k leží v nárysně, řídící přímka l má obecnou polohu a zvolena axon. průmětem a axon. půdorysem, řídící rovinou jest půdorysna π. Sestrojena libovolná povrchová přímka a procházející bodem A na řídící přímce l pomocnou rovinou $\varrho \parallel \pi$, $\varrho_2 \parallel x$, $z_\varrho = z_A$. Je-li B průsečík křivky k a roviny ϱ, jest $a \equiv AB$. Úkolem jest *sestrojiti v libovolném bodě C přímky a tečnou rovinu τ konoidu.*

Jako při obecné zborcené ploše řešíme tento úkol převedením na dotykový zborcený hyperboloid, jejž stanovíme tečnami v bodech příslušné povrchové přímky k ploše, při čemž řídící přímky mohou zastupovati tyto tečny, právě tak použijeme u konoidu pomocného *dotykového hyperbolického paraboloidu*. V našem případě je určen řídící přímkou l, tečnou m řídící elipsy v bodě B a řídící půdorysnou. Označme přímku $a \equiv a'$ a spojnici půdorysných stopníků P a O přímek l a m jako druhou přímku p' čárkované soustavy. Tím je dán dotykový paraboloid jako zborcený čtyrúhelník $ABOP$, i lze sestrojiti přímku c nečárkované soustavy, procházející daným bodem C podle čl. 8; v obr. sestrojena bodem C řídící rovina π' nečárkované soustavy, $\overline{CP'} \# \overline{AP}$, $\overline{CQ'} \# \overline{BO}$, stopa roviny je $P'Q'$ a protíná přímku p' v půdorysném stopníku R přímky $c \equiv CR$. Tím je tečná rovina τ určena, její stopa $p^\tau \parallel a$ a prochází stopníkem R, nárysná stopa prochází stopníkem B.

13. Oskulační hyperboloidy zborcené plochy. Připojíme ještě jen několik hlavních poznámek k dotyku zborcených ploch.

Již v čl. 10 uvažovali jsme o libovolné tečné rovině zborcené plochy. Každá rovina τ procházející její tvořící povrchovou přímkou p protíná plochu ještě v křivce k, která je geom. místem průsečíků přímek zborcené plochy s rovinou τ. Tato rovina je tečnou rovinou plochy pro ten průsečík T křivky k a přímky p, který vzniká přecházíme-li spojitě přímku zborcené plochy v okolí přímky p přes přímku p.

Každá přímka roviny τ, jež prochází dvojným bodem průseku $p + k$ plochy rovinou τ, jest tečnou plochy. Tečna t

křivky k a přímka p jsou *asymptotickými tečnami* zborcené plochy majíce s ní tři společné splývající body; jsou tečnami obratu (inflexními) normálných řezů plochy jimi procházejících. Plocha leží v okolí bodu T po obou stranách tečné roviny τ a má v něm t. zv. hyperbolické zakřivení.

Otáčí-li se rovina τ kolem osy p, posunuje se dotykový bod T na p a mění se i asymptotická tečna t. Souhrn těchto asymptotických tečen ve všech bodech povrchové přímky p zborcené plochy tvoří zborcený svazek (jednu soustavu) povrchových přímek t. zv. *oskulačního hyperboloidu.* Patrně takové tečny t, t', t'' ve třech bodech T, T', T'' určují zmíněný hyperboloid oskulující danou zborcenou plochu podél povrchové přímky p. Neboť t, t', t'' hyperboloidu protínají ještě dvě sousední přímky p' a p'' zborcené plochy a p, p', p'' jsou společnými přímkami obou zborcených ploch.

K oskulačnímu hyperboloidu podél povrchové tvořící přímky p dospějeme též, sestrojíme-li hyperboloid ze tří od sebe různých povrchových přímek p, q, r zborcené plochy a pak měníme na ploše přímky q a r až splynou s přímkou p. Pak každá povrchová přímka hyperboloidu ze soustavy t, t', t'' je asymptotickou tečnou zborcené plochy, majíc s ní tři splývající společné body.

Jsou-li přímky p, q, r rovnoběžné s toutéž rovinou, nastává případ oskulačního paraboloidu.

Z těchto asymptotických tečen podél povrchové přímky p mají dvě zvláštní vlastnost. Průsečná křivka zborcené plochy s libovolným hyperboloidem a tedy také s oskulačním hyperboloidem podél povrchové přímky p má na každé přímce zborcené plochy dva body, tedy i na přímce p. Obě asymptotické tečny v těchto bodech U_1 a U_2 mají pak se zborcenou plochou čtyři splývající body společné. Potom tečné roviny v těchto bodech protínají zborcenou plochu ještě v křivkách, jež mají body U_1 a U_2 za body obratu. Body slují *fleknody* a jejich tečny dotyku čtyrbodového *fleknodálními tečnami.* I procházejí každou povrchovou přímkou zborcené plochy dvě roviny — *fleknodální roviny* — jejichž dotykové body jsou na příslušných průsečných křivkách s plochou zborcenou body obratu.

Obsahuje-li zborcená plocha takovou tvořící povrchovou přímku p, že oskulační hyperboloid podél ní má ještě tři splývající tvořící povrchové přímky s plochou společné (v přímce p), nazývá se tento dotykový hyperboloid *stacionárním oskulačním hyperboloidem.* Přímka p se zove *hyperboloidickou.*

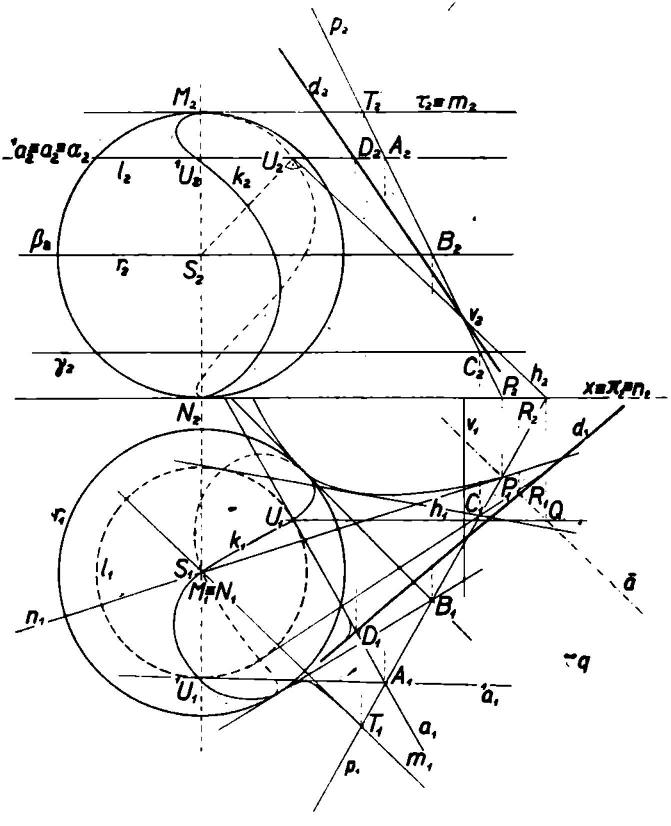
IV. PŘÍKLADY ZBORCENÝCH PLOCH ALGEBRAICKÝCH

14. Kulový konoid. Jest příkladem zborcených ploch čtvrtého stupně, kde řídící kuželosečka je nahrazena kulovou plochou, danou středem S a poloměrem (obr. 34). Řídící přímka p je vzhledem k řídící rovině v poloze obecné (jako v obr.) a pak konoid je *kosoúhlým*, nebo stojí kolmo na řídící rovinu (v obr. půdorysna π) a pak konoid je *přímým*. Úběžná přímka ${}_{\infty}q$ půdorysny je tedy druhou řídící přímkou.

Libovolným bodem A na přímce p položíme rovinu $\alpha \parallel \pi$ a tečny, sestrojené bodem A k průsečné kružnici l kulové plochy rovinou α, jsou povrchové přímky a a ${}^1a$ konoidu; jejich dotykové body na kulové ploše označme U a ${}^1U$. Řídící přímka je dvojnou přímkou konoidu, každým jejím bodem procházejí dvě různé tvořící přímky plochy. Geom. místem dotykových bodů $U, {}^1U, \ldots$ je křivka k (čtvrtého stupně), podél které se konoid dotýká řídící kulové plochy. V obr. sestrojeny ještě body na rovníku a na rovnoběžce shodné s l a souměrně sdružené s ní podle roviny rovníku; příslušné povrchové tvořící přímky procházejí v rovinách β a γ body B a C.

Budiž úkolem sestrojiti v libovolném bodě D na tvořící povrchové přímce a tečnou rovinu. Použijeme pomocného hyperbolického paraboloidu, jehož řídící rovinou je řídící rovina konoidu a řídícími přímkami jeho řídící přímka p a některá tečna v bodě U na kulovou plochu, na př. druhá hlavní přímka h v její tečné rovině kolmé na poloměr SU, $h_2 \perp S_2U_2$, $h_1 \parallel x$. V řídící půdorysně vytkněme povrchovou přímku $\bar{a} \equiv PQ$ druhé soustavy hyp. paraboloidu jako spojnici prvních stopníků přímek p a h; dále vytkněme v této soustavě přímku v kolmou k nárysně, $v_2 \equiv (p_2, h_2)$. Pak je ihned dán nárys $d_2 \equiv D_2v_2$ povrchové přímky hyperbolického paraboloidu v bodě D a pomocí stopníku R na $\bar{a}$ se odvodí půdorys d_1; (a, d) je hledaná tečná rovina.

Obráceně lze určiti dotykový bod D tečné roviny, jež prochází libovolně přímkou a; její stopa rovnoběžná s a protne $\bar{a}$



Obr. 34.

v stopníku R přímky d, sestrojí se nárys $d_2 \equiv R_2v_2$ a z bodu D_2 se odvodí D_1.

Tečné roviny $\tau \parallel \pi$ a π v bodech M a N kulové plochy určují torsální přímky $m \equiv MT$ a $n \equiv NP$ našeho konoidu a jejich kuspidální body T a P na p.

Abychom sestrojili druhé dvě torsální přímky, bylo by třeba sestrojiti přímkou p obě torsální tečné roviny ke kulové ploše; půdorysné hlavní přímky jdoucí dotykovými body v těchto rovinách jsou dalšími torsálními přímkami a určují úběžné kuspidální body na ${}_{\infty}q$. Obě tečné roviny sestrojí se na př. s pomocí osvětlení kulové plochy ve směru p; jejich první stopy jsou tečnami vrženého stínu kulové plochy na půdorysnu, který je určen středem, ohniskem a vedlejší poloosou.

Konstrukce těchto kuspidálních bodů se stává složitější, protíná-li přímka p kulovou plochu v reálných bodech, a jsou-li tedy torsální roviny a kuspidální body imaginární.

15. Přímý konoid eliptický. Osvětlení. Budiž *konoid určen elipsou k v nárysně se směry os x a z, řídící přímkou p kolmou k půdorysně a půdorysnou jako řídící rovinou* (obr. 35).

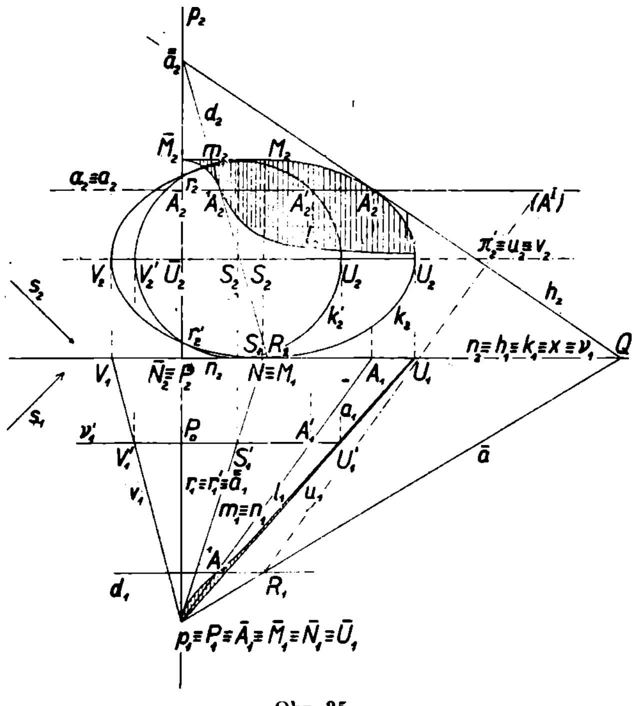
Pomocnou rovinou $\alpha \parallel \pi$ sestrojíme přímky a a ${}^1a$ procházející průsečíkem $\overline{A}$ řídící přímky p rovinou α a průsečíky s řídící elipsou; v obr. znázorněna jen přímka $a \equiv \overline{A}A$.

Řídící přímka p je opět dvojnou přímkou plochy.

Vodorovná rovina $\pi' \parallel \pi$, procházející středem řídící elipsy, je rovinou souměrnosti konoidu.

V průsečících nárysů p_2 a k_2 řídících útvarů jsou nárysy r_2 a r'_2 dvou povrchových přímek r a r' konoidu, jež jsou kolmé k nárysně, $r_1 \equiv r'_1 \perp x$.

Půdorysna a rovina s ní rovnoběžná, jichž se řídící elipsa dotýká, jsou torsálními rovinami a určují torsální přímky m a n ve vrcholech M a N vedlejší osy elipsy a kuspidální body $\overline{M}$ a $\overline{N}$ na řídící přímce p. Přímkou p a vrcholy U a V hlavní osy řídící elipsy procházejí její tečné roviny, tedy druhé dvě roviny torsální, jež obsahují torsální přímky $\overline{U}U \equiv u$ a $\overline{U}V \equiv v$ protínající se v bodě $\overline{U}$ na řídící přímce p a procházející úběžnými kuspidálními body v řídící rovině. Tyto



Obr. 35.

půdorysně promítací torsální roviny určují svými torsálními přímkami skutečný obrys konoidu pro jeho kolmý průmět na řídící rovinu; jejich půdorysy tvoří zdánlivý obrys plochy v první průmětně.

V obraze je vyznačena jen část plochy mezi řídící přímkou a řídící křivkou. Mimo to byl v obraze sestrojen řez konoidu rovinou $\nu' \parallel \nu$, tedy rovnoběžný s rovinou řídící elipsy. Protože plocha je čtvrtého stupně, je i její řez rovinou obecné polohy, který by se sestrojil jako geometrické místo průsečíků roviny s přímkami plochy, obecně křivkou čtvrtého stupně. Ale v našem případě je řez rovinou $\nu' \parallel \nu$ kuželosečkou k'. Odvodíme-li z půdorysu nárys, je zjevno, že křivka k'_2 je afinní s elipsou k_2 pro osu afinity p_2, na níž jsou obě křivky spjaty v bodech r_2 a r'_2 a charakteristiku afinity $\overline{A_2A'_2} : \overline{A_2A_2} = \overline{P_0A'_1} : \overline{P_2A_1} = \overline{P_0P_1} : \overline{P_2P_1} =$ konst. Z této vlastnosti plyne hned výhodné použití pásu plochy tohoto konoidu jako zborcené lícní plochy klenby nad lichoběžníkovým půdorysem (*klenbový oblouk*).

Tečnou rovinu v libovolném bodě ${}^1A$ na tvořící povrchové přímce $a \equiv \overline{AA}$ sestrojili bychom opět pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem, daným řídící půdorysnou a řídícími přímkami p a h, kde h je tečnou řídící křivky v bodě A. Spojnice $\overline{a} \equiv PQ$ obou půdorysných stopníků je další přímkou vodorovné soustavy a třetí její přímkou je nárysně promítací přímka $\overline{\overline{a}}$, $\overline{\overline{a}}_2 \equiv (p_2, h_2)$; tím je konstrukce dána.

Chceme však řešiti také úlohu obrácenou ve spojení s řešením úkolu *určiti bod meze vlastního stínu na libovolně vytčené tvořící přímce povrchové.*

Přímkou a sestrojíme světelnou rovinu a určíme její dotykový bod, užitím téhož dotykového hyperbolického paraboloidu. V obr. zvoleno osvětlení technické ($\sphericalangle s_1x_1 = \sphericalangle s_2x_2 = 45°$). Světelná rovina určena světelným paprskem bodu A; jeho vrženým stínem na půdorysnu je (A^1), kde je $\overline{A_2(A^1)} = \overline{A_1A_2}$. První stopa světelné roviny je rovnoběžná s a_1 a protíná přímku $\overline{a}$ hyperbolického paraboloidu v bodě R, jímž prochází přímka $d \parallel \nu$, $d_1 \parallel x$, druhé soustavy; pomocný hyperbolický paraboloid je totiž rovnoosý, protože nárysna je jeho druhou řídící rovinou. Přímka d, jejíž nárys prochází bodem $\overline{\overline{a}}_2$, určí na a bod ${}^1A$ meze vlastního stínu l daného geometrálného osvětlení.

Souhrn světelných rovin povrchových tvořících přímek obaluje světelnou válcovou plochu, jejíž přímky jsou tečnými větelnými paprssky plochy; válcová plocha se dotýká plochy podél meze vlastního stínu.

Pro směr kosoúhlého promítání s jest křivka l skutečným obrysem plochy.

Přímka torsální, jak jsme vyvodili, má ve všech svých bodech (mimo bod kuspidální) společnou tečnou rovinu. Všechny roviny procházející torsální přímkou (mimo rovinu torsální) mají na ní dotykový bod v společném kuspidálním bodě. Proto také platí:

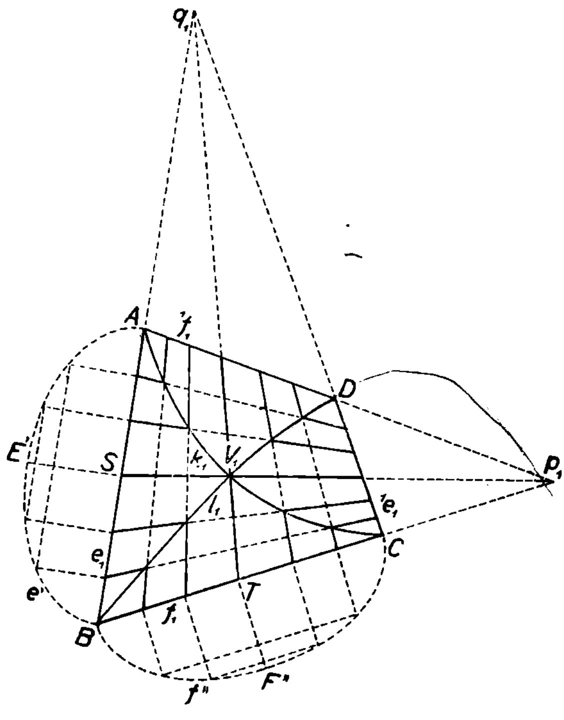
Skutečný obrys a mez vlastního stínu na zborcené ploše prochází všemi kuspidálními body a dotýká se v nich příslušné torsální přímky.

Pro náš konoid jsou takovými body kuspidálními bod $\overline{M}$ a úběžný bod torsální přímky u (mez vytčena jen pro horní polovinu plochy nad π').

Prakticky lze použíti této zborcené plochy k *sestrojení křížové klenby nad vodorovným různoběžníkem ABCD*. Sousední strany AB a BC různoběžníku zvolíme za hlavní osy řídících elips e a f dvou přímých konoidů, jejichž společnou řídící rovinou je půdorysna; řídícími přímkami p a q jsou svislice procházející průsečíky (AD, BC) a (AB, CD) družin protějších stran základního čtyrrohu (obr. 36).

Zřízení této „konoidové" křížové klenby žádá, aby vedlejší poloosy obou řídících elips byly sobě rovny, $\overline{SE} = \overline{TF}$, v obr. ve sklopení $\overline{SE'} = \overline{TF''}$ na poloelipsách e' a f''. Pak mají konoidové lícní klenbové plochy v záhlaví společnou torsální rovinu a obě vodorovné torsální přímky v této rovině se protínají ve vrcholu V klenby, jímž procházejí průsečná žebra k a l; jsou to křivky společné oběma konoidům, v které se rozpadá jejich úplný průsek. Oba půdorysy jsou sestrojeny z průsečných bodů obou ploch na přímkách týchž kót z.

V obr. je sestrojen půdorys dvou čtveřin povrchových přímek; vytvořující svazky o vrcholech p_1 a q_1 půdorysů k_1 a l_1



Obr. 36.

jsou paprskové svazky vzájemně projektivní (zory podobných řad na AB a BC) a tedy křivky k_1 a l_1 jsou kuželosečkami.

Omezení obou konoidů ve svislých rovinách procházejících stranami CD a DA základního různoběžníku jsou průsečné rovinné křivky ^1e a ^1f čtvrtého stupně; není-li odchylka protějších stran různoběžníku příliš velkou, blíží se tyto křivky kuželosečkám.

Prstencová křížová klenba vznikne *průnikem kruhového rotačního anuloidu přímým konoidem s řídící elipsou*. Osa anuloidu je řídící svislou přímkou, rovina rovníku, v níž leží dráha (S) opsaná středem S jeho poledníkové kružnice, řídící rovinou konoidu. Řídící elipsa má svislou poloosu rovnou poloměru poledníkové kružnice a jest souměrná podle roviny rovníku; má střed S na dráze (S) a rovinu kolmou na SO, kde O je středem prstence.

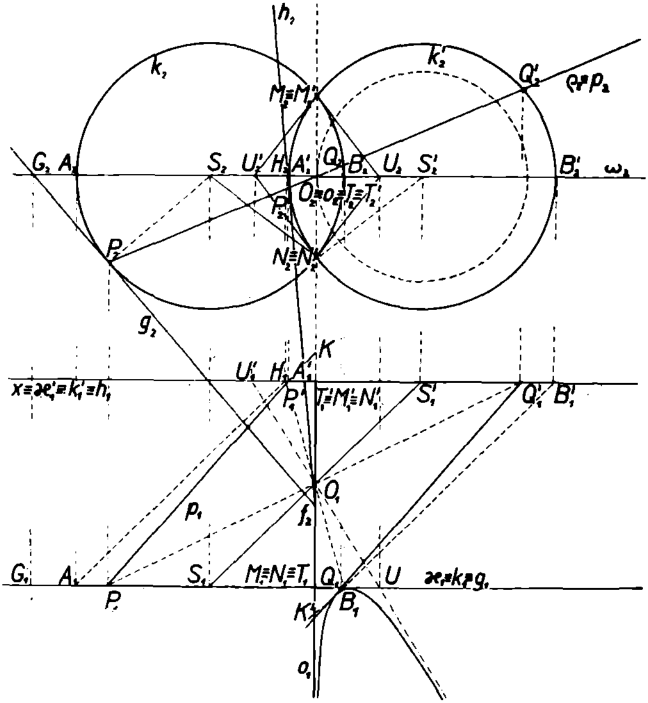
16. Plocha šikmého průchodu. Řídícími útvary této zborcené plochy čtvrtého stupně jsou dvě kružnice k a k' o témž poloměru v rovnoběžných rovinách $\varkappa$ a $\varkappa'$ a přímka o, která prochází půlícím bodem O vzdálenosti $\overline{SS'}$ středů obou řídících kružnic a stojí kolmo na jejich roviny. Budiž přímka o kolmá k nárysně, rovina (S, o) rovnoběžna s půdorysnou; průsečíky řídící přímky o s rovinami obou řídících kružnic buďtež T a T' (obr. 37).

Rovina $\omega = (S, o, S')$ je rovinou souměrnosti celé plochy, obě kružnice jsou podle ní souměrné. Vždy dvě tvořící přímky této plochy jsou podle této roviny souměrně sdruženy protínajíce se na přímce o, jež jest *dvojnou přímkou* plochy.

Každá rovina ϱ procházející přímkou o protíná plochu šikmého průchodu ve dvou rovnoběžných tvořících povrchových přímkách, stejně vzdálených od bodu O; proto každá přímka jdoucí bodem O jest *průměrem* plochy, půleným jejím *středem* O. O tom se přesvědčíme, sestrojíme-li přímkou o rovinu nárysně promítací ϱ a její průsečíky PQ a $P'Q'$ s řídícími kružnicemi. Povrchové přímky $PP' \parallel QQ'$ jsou stejně vzdálené od středu O; na př. PQ' a $P'Q$ jsou průměry plochy.

Opíše-li rovina ϱ celý rovinový svazek o ose o, vytvoří povrchové přímky PP' a QQ' zborcenou plochu, kdežto průměry PQ' a $P'Q$ opíší kuželovou plochu o vrcholu O a řídících křivkách k a k'. Společné příčky útvarů $[kk'o]$ jsou tedy také povrchovými přímkami této kuželové plochy druhého stupně, kterou dlužno od celkového výtvoru odečísti.

Tvořící přímky plochy šikmého průchodu protínají obě řídící kružnice v projektivních řadách; neboť bodové řady



Obr. 37.

$P, \ldots$ na k a $Q', \ldots$ na k' při otáčení roviny ϱ kolem osy o jsou shodné, i jest řada $P, \ldots$ projektivní s řadou $P', \ldots$ Tedy *přímky plochy spojují bodové družiny dvou projektivních řad na dvou kuželosečkách; plocha jest zborcenou plochou čtvrtého stupně.*

Podle odvozeného vzorce $n = 2n_1n_2n_3$ by byl stupeň této plochy $n = 8$, protože $n_1 = 1$ (přímka o) a $n_2 = n_3 = 2$ (řídící kružnice); dlužno však odečísti kuželovou plochu druhého stupně $[Ok]$ a pak dvě imaginární roviny spojující přímku o s oběma kruhovými body v rovinách $\varkappa \parallel \varkappa'$, jež jsou společné oběma řídícím kružnicím; tedy $n = 8 - 2 - 2 . 1 = 4$.

Mimo dvojnou přímku o má plocha šikmého průchodu ještě *dvojnou kuželosečku nekonečně vzdálenou*, což ukazují už dvojiny rovnoběžných povrchových přímek, určujících body úběžné křivky. Jest to kuželosečka, protože řídící kuželová plocha naší zborcené plochy je druhého stupně; zvolíme-li za vrchol této kuželové plochy bod T, pak stopou té řídící kuželové plochy na nárysně jest kružnice soustředná s řídící kružnicí k' a procházející bodem T'.

Povrchové přímky v rovině souměrnosti jsou torsálními a mají kuspidální body K a K' na přímce o. Úsečka KK' na o jest částí isolovanou.

Tečny z bodu T na k (v obr. imaginární) určují další dvě torsální přímky s kuspidálními úběžnými body. V našem případě poskytují průsečíky nárysů k_2 a k'_2 řídících kružnic dvě tvořící povrchové přímky MM' a NN' kolmé k nárysně.

Položíme-li přímkou PP' svislou rovinu, protíná plochu ještě v druhé povrchové přímce souměrně sdružené podle roviny souměrnosti ω; proto protíná tato svislá rovina zborcenou plochu ještě v kuželosečce.

Z projektivního vztahu na kružnicích k a k' ještě plyne, že všechny svislé roviny procházející povrchovými přímkami obalují válcovou plochu druhého stupně. Uvažované svislé roviny procházejí družinami tohoto projektivního vztahu a určují na průměrech AB a $A'B'$ dvě projektivní řady, jichž spojnice (průměty přímek plochy) obalují kuželosečku. V našem případě je to hyperbola o středu O (stejná vzdálenost rovnoběžných tečen od středu); $T_1T'_1$ jest její asymptotou (tečna středem). Sestrojíme-li pól U tětivy MN vzhledem ku k a pól U' tětivy $M'N'$ vzhledem ku k', jest UU' též družinou projektivního vztahu na průměrech AB a $A'B'$ a tedy UU' druhou asymptotou hyperboly. Zdánlivý obrys půdorysu plochy tvoří tato hyperbola a povrchové přímky AA' a BB'.

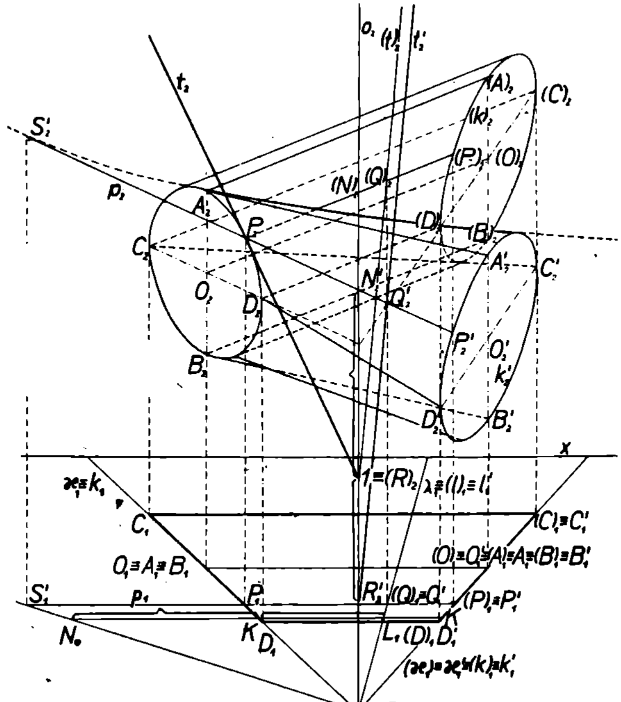
Kuželosečka, v které protíná plochu svislá rovina procházející reálnou přímkou zborcené plochy, má jednu osu ve vodorovné rovině souměrnosti ω a vrcholy tedy na přímkách AA', BB' a střed na přímce SS'. Jest to hyperbola, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny k povrchovým přímkám ležícím v uvažované rovině; neboť ku každé povrchové přímce existuje ještě jedna s ní rovnoběžná a ty tedy poskytují dva nekonečně vzdálené body řezu.

Jsou-li povrchové přímky v takové svislé rovině sdruženě imaginární, pak řezem je elipsa nebo kružnice. Takovými jsou i řídící kružnice k a k', povrchové přímky v jejich rovinách jsou sdruženě imaginární; hyperbola v půdorysně dotýká se i půdorysů $\varkappa_1$ a $\varkappa'_1$ rovin řídících kružnic.

Úlohy o tečných rovinách podél tvořící povrchové přímky $p = PP'$ řešíme pomocí dotykového hyperboloidu, jehož jedna soustava má za řídící přímky o a tečny g a h k řídícím kružnicím, k druhé soustavě patří přímka p, spojnice GH průsečíků přímek g a h s rovinou ω a přímka f kolmá k nárysně, $f_2 = (g_2, h_2)$, $f \parallel o$; tato druhá soustava je zvláště výhodnou, protože nárysem daného bodu a bodem f_2 prochází ihned nárys přímky první soustavy; půdorys se odvodí průsečíkem s přímkou GH. A podobně se odvodí dotykový bod, je-li předem známa tečná rovina.

Plochy šikmého průchodu lze stereotomicky použíti jen při klenbách malé hloubky (klenbové oblouky). Při delších průchodech nebo podjezdech se užívá lícní plochy válcové a ložné čáry tvoří soustavu pravoúhlých trajektorií nebo šroubovic a odtud dva hlavní typy theoretického zřízení šikmých průchodů. V Praze je provedeno na podjezdech dráhy spojujících Poříč s Karlínem.

17. Cylindroid Frézierův. Body dvou řezů k a (k) válcové plochy druhého stupně jsou jejími povrchovými přímkami k sobě přiřazeny projektivně, vztahem afinním. V obr. 38 zvolena válcová plocha průčelná s povrchovými přímkami rovnoběžnými s nárysnou a její eliptické řezy rovinami $\varkappa$ a $(\varkappa)$ půdorysně promítacími vytčeny sdruženými průměry AB,



Obr. 38.

CD; $(A)(B)$, $(C)(D)$. Posuneme-li jeden řez (k) ve směru svislé průsečnice o rovin $\varkappa$ a $(\varkappa)$ obou řezů do polohy k' se sdruženými průměry $A'B'$, $C'D'$ a spojíme-li nové polohy bodů křivky k' s přiřazenými body křivky pevné k, jest geometrickým místem spojnic AA', BB', ... zborcená plocha čtvrtého stupně — *Frézierův cylindroid*.

Průsečnice o obou rovin jest *dvojnou přímkou cylindroidu* a leží na ploše, když protíná křivky k a k'; neprotíná-li jich reálně, jest isolovanou přímkou plochy; to plyne z okolnosti, že společné body obou křivek k a (k) na původní válcové ploše jsou sobě afinitou (o ose o) přiřazeny.

Mimo to má cylindroid ještě *úběžnou dvojnou přímku*, podél které se vzájemně dotýkají dvě části plochy cylindroidu. Tětivě křivky k rovnoběžné s o odpovídá afinitou rovnoběžná a stejně dlouhá tětiva křivky (k) a po posunutí právě taková tětiva křivky k'. Spojnice koncových bodů poskytují dvě vzájemně rovnoběžné povrchové přímky cylindroidu, procházející úběžným dvojným bodem. Úběžná přímka je určena *řídící rovinou*, s kterou jsou rovnoběžny všechny povrchové přímky cylindroidu. Směr řídící roviny je dán povrchovou přímkou válcové plochy a průsečnicí o obou jejích sečných rovin; v naší konstrukci jest jí nárysna. V dvojných úběžných bodech jsou obě tečné roviny identické, obě povrchové přímky zborcené plochy úběžným bodem procházející leží s úběžnou přímkou v téže řídící rovině.

Dotykové body obou tečen křivky k rovnoběžných s přímkou o jsou body torsálních přímek plochy s kuspidálními úběžnými body na úběžné dvojné přímce.

Obrys půdorysu je vytvořen půdorysy torsálních přímek CC', DD'. (V obraze je znázorněna část plochy mezi rovinami $\varkappa$ a $(\varkappa')$.)

Roviny, jež procházejí povrchovými přímkami rovnoběžně s nárysnou, jsou asymptotickými rovinami, dotýkajíce se cylindroidu v úběžných bodech. Roviny, které promítají tvořící povrchové přímky kolmo do nárysny jsouce kolmé k asymptotickým rovinám jsou rovinami centrálními a jejich dotykové body jsou centrálními body plochy; jejich geom. místem je *strikční křivka* plochy. *Nárys strikční křivky cylindroidu je zdánlivým obrysem nárysu plochy.*

Řez plochy libovolnou rovinou je křivka 4. stupně. Uvažujme o řezu rovinou, jež prochází přímkou o; *protíná základní válcovou plochu i cylindroid v kuželosečkách shodných.* Budiž v obr. taková rovina λ půdorysně promítací a příslušné řezy kuželosečka (l) válcové plochy a křivka l' na povrchu cylindroidu. Jak z půdorysu zjevno, protíná tato rovina všechny úseky přímek cylindroidu mezi řezy k a k' v témž dělícím poměru a platí to ovšem i pro rovinu protínající část v obr. nezobrazenou. Na povrchové přímce PP' sestrojen bod Q', i platí $\overline{(Q)Q'} : \overline{(P)P'} = \overline{PQ'} : \overline{PP'} =$ konst. Posunou se tedy všechny body elipsy (l) o stejnou dráhu na cylindroid a poskytnou jeho eliptický řez $l' \cong (l)$.

Sestrojíme-li příčku $\overline{KK'} \parallel x$ a $\overline{KK'} = \overline{(O)O'}$, pak vytíná na ní rovina λ bod L a $\overline{KL} = \overline{(Q)Q'}$ je velikost posunutí řezu (l) do l'. Obráceně lze ze známého posunutí určiti rovinu λ.

Abychom sestrojili tečnou rovinu τ cylindroidu v libovolném bodě Q' na povrchové přímce $p \equiv PP'$, určíme ještě tečnu t' kuželosečky l' procházející tím bodem na ploše; tato tečna jest rovnoběžna k příslušné tečně (t) v bodě (Q) řezu (l) základní válcové plochy; tečna (t) se protíná s tečnou t v bodu P na k v témž bodu 1 na ose afinity o. Sestrojí se tedy tečna t, ta protne přímku o v bodě (R) 1, $\overline{(R)R'} = \overline{(Q)Q'} = \overline{KL}$, $Q'R'$ t' je hledaná tečna; tečná rovina $\tau \equiv (p, t') \equiv (P, Q', R')$.

Ovšem lze použíti pomocného dotykového hyperbolického paraboloidu, protože plocha je určena řídícími kuželosečkami a rovinou.

Je-li obráceně dána tečná rovina τ procházející povrchovou přímkou p, určí se její průsečík R' s přímkou o, sestrojí se tečna t kuželosečky k v bodě P a ta určí na o bod (R); tím je dáno posunutí $\overline{(R)R'}$, učiníme $\overline{KL} = \overline{(R)R'}$ a $\lambda_1 = o_1L$ stanoví již půdorys dotykového bodu Q' dané tečné roviny τ. Tím je také dána základní konstrukce osvětlení cylindroidu.

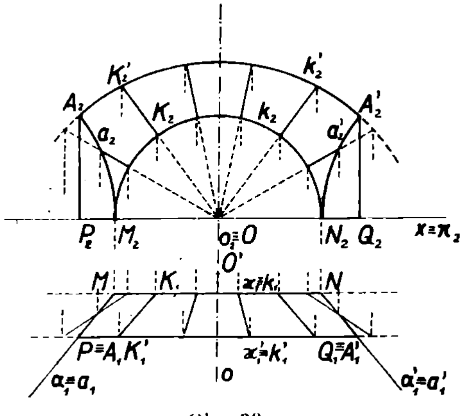
Je-li rovina τ, proložená přímkou p, nárysně promítací, pak její dotykový bod jest centrálním bodem povrchové přímky

p cylindroidu. Konstrukce je tato: Protíná-li nárys roviny $p_2 \equiv P_2P'_2$ nárys o_2 v bodě N'_2, učiníme $\overline{(R)_2N'_2} = \overline{KN_0}$ (v obráceném smyslu na KL); pak o_1N_0 protne $P_1P'_1$ v půdorysu S'_1 bodu centrálního, jehož nárys S'_2 určí bod druhého obrysu.

Geometrickým místem bodu S' jest strikční křivka cylindroidu; má obě torsální přímky za asymptoty, protože dotykový bod roviny kolmé k asymptotické rovině je v kuspidálním bodu v nekonečnu.

Řez rovinou obecné polohy sestrojí se pomocnými rovinami rovnoběžnými s nárysnou jako řídící rovinou; pomocná rovina protne cylindroid ve dvou povrchových přímkách vzájemně rovnoběžných a sečnou rovinu v nárysné hlavní přímce; jejich společné body náleží řezu.

18. Klenbové oblouky. Otupené čelné hrany klenby. Zmínili jsme se již v čl. 15, že lze použíti přímého konoidu kuželosečkového jako lícní plochy obloukové klenby nad úzkým licho-

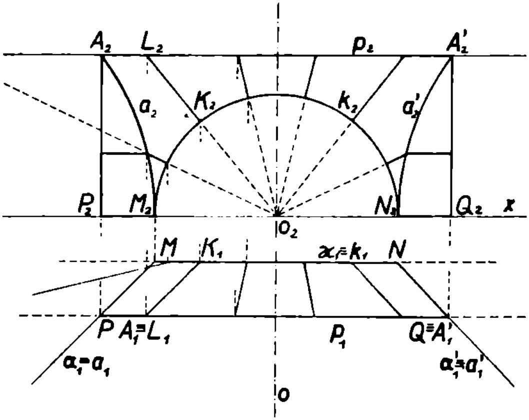


Obr. 39.

běžníkovým půdorysem; takové klenby mají obecný název *arrière-voussure*. Zvláště je-li řídící křivkou konoidu kružnice, kteráž plocha se zove též *kuželovým klínem*; je definován přímkami, které na dané pevné přímce stojí kolmo a protínají kružnici, jejíž rovina je s danou přímkou rovnoběžna.

Jako obloukových kleneb používá se v stavitelství mimo plochu šikmého průchodu zvláště ještě dvou ploch zborcených; jsou to oblouk marseilleský a montpellierský.

Oblouk marseilleský je znázorněn v obr. 39 sdruženými pravoúhlými průměty. Spojuje dvě kružnice k a k' v rovno-

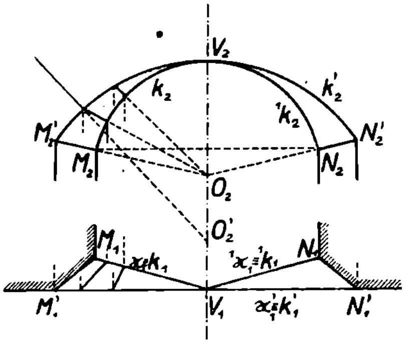


Obr. 40.

běžných svislých rovinách $\varkappa$ a $\varkappa'$. (Nepodáváme ovšem úplné stereotomické řešení této klenby.) Řídící přímkou o klenbové lícní plochy je osa menší zadní kružnice k, $o \perp \varkappa$ a leží v půdorysně; z plochy použije se horní poloviny. Lícní plocha je omezena křivkami a a a' v rovinách α a α' půdorysně promítacích a procházejících rameny PM a QN základního lichoběžníku.

Oblouk montpellierský zobrazen půdorysem a nárysem v obr. 40. Kružnice k' oblouku marseilleského je nahrazena vodorovnou průčelnou přímkou p, takže zborcená plocha [*kpo*] je čtvrtého stupně: Omezení lícní plochy křivkami a a a' jako v případě předcházejícím.

Corne de vache — ***kravský roh.*** Zove se tak rozšíření valené mostní klenby do průčelí plochami znázorněnými v obr. 41 v půdorysu i nárysu. Valená klenba je znázorněna v nárysu obloukem k_2 o středu O_2 většího zakřivení. Čelnou hranu klenby, která by procházela vrcholem V v rovině $\varkappa' \perp o$, odstraníme a valenou klenbu ukončíme jejími řezy k a ${}^1k$ ve svislých rovinách $\varkappa$ a ${}^1\varkappa$ a tyto křivky spojíme otupovací zborcenou plochou „corne de vache" tvaru kravského rohu s obloukem k' v rovině $\varkappa'$ a s osou o', dotýkajícím se ve vrcholu V (nebo dále od něho souměrně po obou stranách). Zborcené plochy kravského rohu [$kk'o$] a [${}^1kk'o$] zlepšují mostní oblouk po stránce estetické i mechanické. (Stereotomického řešení nepodáváme; v obr. jen naznačeny povrchové přímky plochy, jichž nárysy procházejí O_2.)



Obr. 41.

Oblouky kruhové mohou býti ovšem nahrazeny oblouky eliptickými. Jelikož je třeba v nárysu zachovati kolmost povrchových přímek zborcené plochy a mostního oblouku, je patrno, že tyto nárysy jsou normálami elipsy a obalují její evolutu. Plocha je dána dvěma řídícími elipsami a řídící válcovou plochou, jejímž normálným řezem je tato evoluta. V Praze je aplikována tato plocha na kamenném mostě Legií u Národního divadla.

19. Normálie neboli **plocha normál** *jest geom. místo normál sestrojených na libovolnou plochu v bodech její křivky.* Jest obecně zborcená, protože i dvě blízké normály křivé plochy obecně se neprotínají. Daná plocha se zove *řídící plocha* a daná křivka na ní *řídící křivka.*

Sledovali jsme již speciální normálii zborcené plochy a to souhrn jejích normál v bodech libovolné tvořící netorsální přímky a seznali jsme, že *normálií každé zborcené plochy podél její netorsální přímky jest hyperbolický paraboloid* (čl. 10).

Normálie plochy druhého stupně podél jejího rovinného řezu (kuželosečky) *je zborcená plocha čtvrtého stupně.*

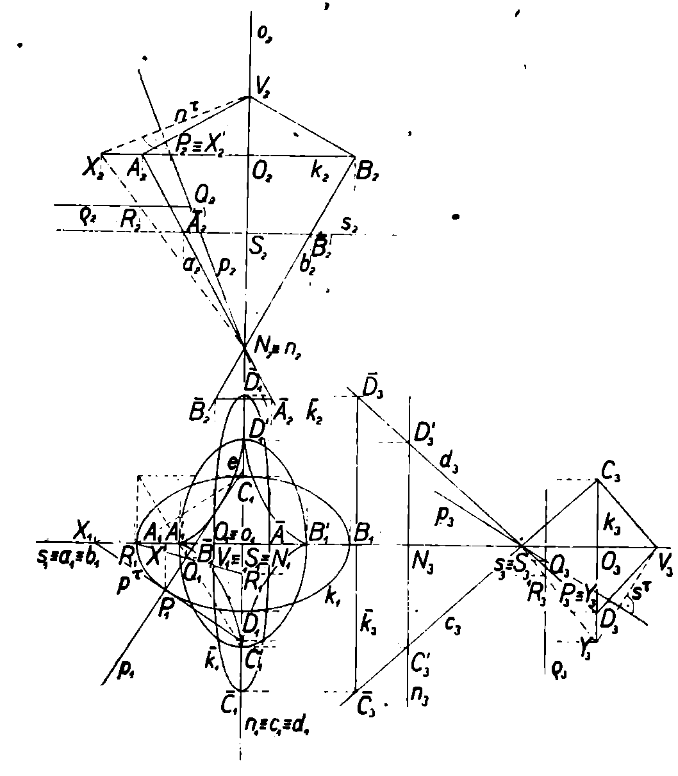
Tečné roviny v bodech takového rovinného řezu obalují kuželovou plochu 2. stupně, jejíž vrchol je pólem roviny kuželosečky vzhledem k ploše; normály obou ploch jsou společné. Lze tedy uvažovati jen *o ploše normál kuželové plochy druhého stupně podél kuželosečky na ní.*

Řídící kuželová plocha této normálie jest také druhého stupně.

Budiž dána kuželová plocha $[Vk]$, kde $k\ (A, B, \ldots)$ jest libovolná její kuželosečka. Sestrojíme-li povrchové přímky VA, $VB, \ldots$ a vrcholem V k tečným rovinám normály, obdržíme řídící kuželovou plochu uvažované normálie. Tečny v bodech $A, B, \ldots$ na k určují na dvou jejích pevných tečnách p a q bodové řady vzájemně projektivní, jejich zory z vrcholu V jsou paprskové svazky vzájemně projektivní a normály sestrojené vrcholem V na dvě tečné roviny (V, p) a (V, q) jsou osami dvou vzájemně projektivních rovinových svazků, jichž výtvarem jest (normálná) kuželová plocha 2. stupně. Je-li stopou této kuželové plochy na rovině řídící kuželosečky k kuželosečka l, jsou obě řady k a l na kuželosečkách projektivně sobě přiřazeny.

Sestrojíme-li body kuželosečky k rovnoběžky k přiřazeným přímkám kuželové plochy $[Vl]$, obdržíme *plochu normál 4. stupně,* protože její tvořící povrchové přímky spojují družiny dvou projektivně sobě přiřazených křivých řad na kuželosečce k a nekonečně vzdálené kuželosečky kuželové plochy $[Vl]$.

Je-li rovina řídící kuželosečky na ploše 2. stupně rovnoběžná s hlavní rovinou souměrnosti, jest právě takovou rovinou i na dotykové kuželové ploše, ke které sestrojujeme



Obr. 42.

plochu normál. Plocha se zove *přímá plocha normál plochy 2. stupně.* Budiž tato řídící elipsa k v půdorysně, osa $VO = o$ dané kuželové plochy jest půdorysně promítací a jest *osou normálie* (obr. 42). Druhé dvě hlavní roviny dané plochy, procházející osami AB a CD kuželosečky k, buďtež nárysnou a stranorysnou, které při zobrazení průmětů vysuneme ve směru těchto os.

Sestrojme stopy tečné roviny τ v bodu P řídící kuželosečky k na hlavních rovinách, $n^\tau \equiv VX$, $s^\tau \equiv VY$. Průměty povrchové přímky p zborcené plochy jsou: $p_1 \perp p^\tau$, $p_2 \perp n^\tau$, $p_3 \perp s^\tau$. Označíme-li na ose AB sdružené body X a X', t. j. pól X a průsečík X' jeho poláry PX', tvoří patrně vzájemně projektivní řady; a obdobně družiny Y a Y' na druhé ose CD. V sdružených průmětech řada $X_2 \ldots \barwedge P_2 \ldots$ a řada $Y_3 \ldots \barwedge P_3 \ldots$

Jelikož body $P_2 \ldots$ procházejí paprsky $p_2 \ldots$ kolmé k paprskům $V_2(X_2 \ldots)$ a ježto podle souměrnosti tři z těchto paprsků, t. j. oba kolmé na obrysové přímky základní kuželové plochy a paprsek promítající se do o_2 se protínají na o_2, vyplňují patrně nárysy všech povrchových přímek normálie paprskový svazek o vrcholu n_2. A docela obdobně stranorysy povrchových přímek normálie vyplňují paprskový svazek o vrcholu s_3 na o_3. Z toho plyne:

Všechny přímky normálie protínají hlavní rovinu rovnoběžnou se stranorysnou v bodech přímky n a hlavní rovinu rovnoběžnou s nárysnou v bodech přímky s. Vzhledem k souměrnosti prochází každým bodem přímek n a s po dvou přímkách normálie, tedy n a s jsou jejími dvojnými přímkami. Úhrnem můžeme říci:

Přímá plocha normál plochy 2. stupně jest zborcenou plochou danou řídící kuželosečkou k a dvěma řídícími přímkami n a s, rovnoběžnými s jejími osami a protínajícími osu o procházející středem křivky k kolmo k její rovině. Je tedy plochou čtvrtého stupně.

Přímky procházející vrcholy řídící elipsy jsou patrně torsálními přímkami normálie s kuspidálními body A' a B' na povrchových přímkách a a b a přímce dvojné s a s kuspidálními body C' a D' na povrchových přímkách c a d a přímce dvojné n.

Půdorysy bodů kuspidálních jsou středy křivosti pro vrcholy křivky k, t. j. *body vratu evoluty e elipsy k*, která jsouc obalena jejími normálami p_1 ... jest zdánlivým obrysem půdorysu normálie.

Je-li k elipsa, nacházejí se jak patrno dvojné přímky n a s na opačné straně roviny elipsy k než vrchol V základní kuželové plochy. Všechny torsální přímky a kuspidální body jsou reálné, mimo úsečky $A'B'$ a $C'D'$ probíhají přímky s a n na normálii isolovaně.

Je-li k hyperbolou o hlavní ose AB, vycházejí přímky n a s po různých stranách roviny řídící hyperboly. Reálnými torsálními přímkami jsou a, b s body kuspidálními $A'B'$, přímka s jest isolovanou v úsečce $A'B'$. Přímka n nemá isolované části.

Zborcená plocha našeho druhu má za řezy rovinami rovnoběžnými s řídící kuželosečkou k kuželosečky souosé téhož druhu. To se dá posoudit pozorováním družin bodových obou řezů na téže přímce normálie. Poměr souřadnic bodů na řezu k a na řezu $\bar{k}$ v rovině s ním rovnoběžné je konstantní, i vzniká $\bar{k}$ z křivky k dvojí afinní transformací.

Úběžná přímka roviny řídící křivky k leží patrně na ploše, pro elipsu k jest ovšem isolovanou dvojnou přímkou plochy, při základní hyperbole dvojnou přímkou na ploše.

Zvolíme-li vrchol řídící kuželové plochy 2. stupně této normálie v průsečíku osy o s přímkou n nebo s, pak řez této kuželové plochy rovinou kolmou k ose o a obsahující druhou dvojnou přímku jest kuželosečka, jejíž půdorys má vrcholy v půdorysech $A'_1B'_1C'_1D'_1$ kuspidálních bodů; jest to kuželosečka podobná a souosá s řídící k, ale otočená o pravý úhel, jak ukazuje poměr poloos, vyjádříme-li poloměry křivosti křivky k. Můžeme tedy vysloviti větu:

Zborcená plocha 4. stupně [k, n, s], kde k je kuželosečka a o je kolmice vztyčená v jejím středu k její rovině. n a s jsou příčky přímky o rovnoběžné s osami kuželosečky, jest přímá normálie plochy druhého stupně.

Tečná rovina v libovolném bodu Q na libovolné povrchové přímce p přímé normálie plochy 2. stupně sestrojí se s pomocí dotykového hyperbolického paraboloidu.

Řídícími jeho útvary jsou přímky n, s a tečna p^r v bodě P řídící kuželosečky k, řídící rovinou je půdorysna. Je-li $N \equiv (n, o)$ a $S \equiv (s, o)$, pak jsou XN a YS povrchovými přímkami paraboloidu ze soustavy přímky p. Na př. řídící rovina ϱ procházející bodem Q na p protíná v bodu R přímku XN a QR jest druhou přímkou procházející bodem Q; nebo ve stranorysu určí ϱ obdobný bod ${}^1R$ na YS a pak $R_1{}^1R_1$ prochází bodem Q_1 (kontrola). Žádaná tečná rovina jest (P, Q, R).

Obrys půdorysu tvoří evoluta základní křivky, jak bylo již řečeno. Dotykový bod povrchové přímky lze sestrojiti zase s pomocí půdorysně promítací tečné roviny hyperbolického paraboloidu; nebo planimetricky jako střed křivosti pro bod P křivky k s pomocí Pelcovy paraboly. Obě interpretace vedou k těmže konstruktivním přímkám.

Rovina asymptotická pro povrchovou přímku p normálie je kolmá na spojnici PV, ježto je rovnoběžná s dvěma splývajícími přímkami normálie.

Rovina centrální je kolmá na rovinu asymptotickou, i prochází přímkou PV. Všechny centrální roviny procházejí vrcholem V základní plochy; i jest geometrické místo jejich dotykových bodů, bodů centrálních, tedy strikční křivka normálie, skutečným obrysem plochy pro střed promítání V.

20. Zborcená plocha elipsoidického a prostorového eliptického pohybu. Jde vlastně o pohyb přímky, při kterém její tři určité body se pohybují ve třech stěnách trojhranu a kdy libovolný další bod přímky vytvořuje elipsoid. V pravoúhlém trojhranu jsou jeho stěny hlavními rovinami souměrnosti elipsoidu. Jsou-li P, N a S body přímky pohybující se v rovinách π, ν a σ (půdorysně, nárysně a stranorysně) a A její další bod (libovolný), pak $\overline{PA} = c$, $\overline{NA} = b$ a $\overline{SA} = a$ jsou poloosy elipsoidu na osách z, y a x.

Souhrn ∞^2 poloh takto se pohybující přímky vytvořuje paprskovou kongruenci (6, 2).*) Vyjmeme-li z tohoto souhrnu všechny přímky, které mají konstantní odchylku od hlavní roviny, na př. odchylku α od půdorysny, pak vyplňují *zborcenou plochu čtvrtého stupně tohoto elipsoidického pohybu*, která má týž charakter jako přímá plocha normál plochy druhého stupně.

Vytkneme-li takovou polohu přímky s neměnící se bodovou čtveřinou ${}^1P{}^1N{}^1S{}^1A$ v nárysně, jest při neproměnné velikosti odchylky α od půdorysny rovněž stálá čtveřina ${}^1P_1{}^1N_1{}^1S_1{}^1A_1$ v půdorysně, bod ${}^1N_1$ se pohybuje po ose x, bod ${}^1S_1$ po ose y a body ${}^1P_1$ a proměnný ${}^1A_1$ vytvořují elipsy. Na přímce v prostoru pohybuje se bod ${}^1P$ po elipse p v půdorysně, bod ${}^1N$ na přímce ${}^1n \parallel x$ v nárysně, bod ${}^1S$ na přímce ${}^1s \parallel y$ v stranorysně a bod ${}^1A$ opisuje eliptický řez plochy rovnoběžný s půdorysnou. *Zborcená plocha je určena řídící elipsou a dvěma řídícími přímkami rovnoběžnými s osami elipsy a protínajícími normálu její roviny v jejím středu vztyčenou.*

Tvořící přímky v hlavních rovinách jsou *torsálními přímkami* zborcené plochy a určují vždy na příslušné řídící přímce v té rovině ležící *kuspidální body* plochy. Torsální přímky všech zborcených ploch vytčeného elipsoidického pohybu obalují v hlavních rovinách pravidelné asteroidy eliptického pohybu. Souhrn kuspidálních bodů v hlavní rovině vyplňuje kuželosečku opsanou bodem v té rovině.

Řídící přímky n a s jsou dvojnými přímkami plochy; jejich části mimo elipsy kuspidálních bodů jsou na ploše isolovány.

Úběžná přímka roviny π je isolovanou dvojnou tvořící přímkou plochy.

Zborcená plocha prostorového eliptického pohybu. Pohybují-li se dva určité body A, B přímky po dvou mimoběžných trajektoriích (A) a (B), tu svírají všechny polohy pohybující

*) T. j. kongruenci, v níž každým bodem prostoru prochází šest přímek a v každé rovině leží dvě přímky kongruence.

se přímky s rovinou π kolmou na osu o obou mimoběžek konstantní úhel α. Souhrn přímek je tedy táž zborcená plocha jako pro pohyb elipsoidický. Řídicí křivkou je úběžná kuželosečka rotační kuželové plochy, jejíž povrchové přímky svírají s rovinou π úhel α. Úběžná přímka roviny π je dvojnou tvořící přímkou plochy.

21. Küpperův konoid jest zborcená plocha třetího stupně.

Poznali jsme, že zborcená plocha určená kuželosečkou a dvěma řídícími přímkami, které ji neprotínají, je zborcená plocha čtvrtého stupně. Platí to i tehdy, je-li jedna řídící přímka nahrazena řídící rovinou (konoid). Protíná-li řídící přímka p řídící kuželosečku k, pak všecky přímky procházející průsečíkem (p, k) a protínající druhou řídící přímku, patří k zborcené ploše, která se tedy zjevně rozpadá v rovinu a v zborcenou plochu třetího stupně. Tedy:

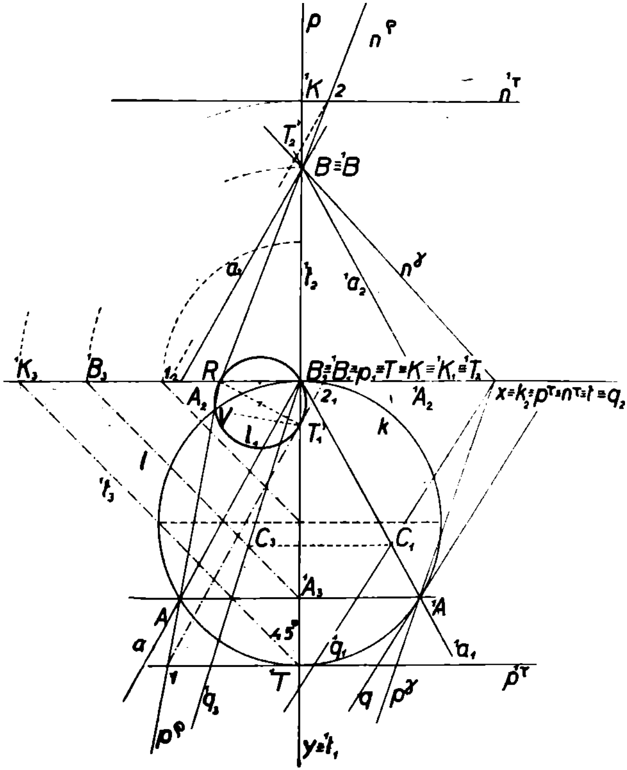
Zborcená plocha třetího stupně je určena řídící kuželosečkou a dvěma řídícími přímkami, z nichž jedna protíná řídící kuželosečku.

Řídící přímka p, která protíná řídící kuželosečku, je dvojnou přímkou plochy, druhá řídící přímka je její přímkou jednoduchou.

Küpperův konoid je vytvořen přímkou, která stále protíná danou řídící kružnici k, dále řídící přímku p, jež prochází bodem kružnice kolmo k její rovině a je rovnoběžna s rovinou, jež půlí úhel roviny kružnice a roviny, která procházejíc přímkou p dotýká se kružnice. Má tedy řídící rovina sklon 45° k rovině řídící kružnice. Zvolíme-li řídící kružnici v půdorysně tak, že se dotýká základnice x, lze v tomto dotykovém bodě sestrojiti v nárysně svislou řídící přímku p, nárysna je pak pomocnou rovinou a řídící rovinou rovina totožnosti (svírající úhel 45° s půdorysnou) (obr. 43).

Protože povrchové přímky konoidu jsou rovnoběžny s rovinou totožnosti, mají oba průměty vzájemně rovnoběžné, na př. $a_1 \parallel a_2$, ${}^1a_1 \parallel {}^1a_2$; obě přímky mají souřadnici y bodů

A a ${}^1A$ na k rovnou souřadnici z bodů $B \equiv {}^1B$ na dvojné přímce p.



Obr. 43.

Plocha má dvě úběžné tvořící povrchové přímky, jež spojují úběžný bod $_\infty P$ přímky p s kruhovými body řídící kružnice.

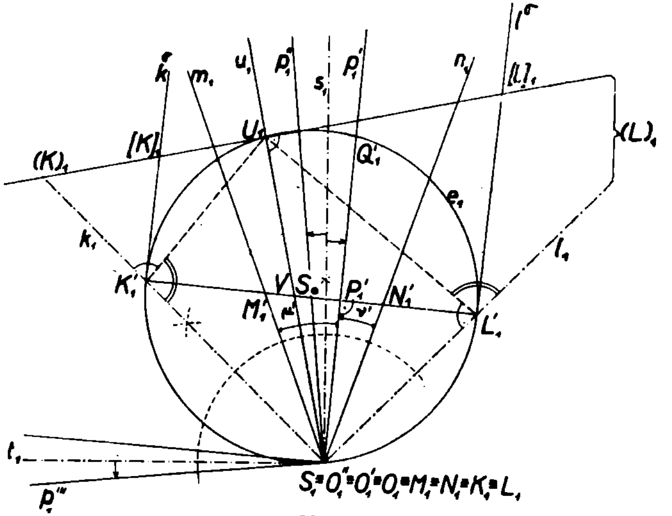
Úběžná přímka roviny totožnosti jest jednoduchou řídící přímkou plochy. Touto jednoduchou přímkou procházejí torsální roviny, jedna τ splývá s rovinou totožnosti, druhá ${}^1\tau \parallel \tau$. Torsální přímky $t \equiv x$ a ${}^1t \equiv {}^1T^1K$, kde $\overline{{}^1TK} = \overline{K^1K}$, K a ${}^1K$ jsou kuspidální body.

Libovolná rovina tečná, procházející povrchovou přímkou konoidu, na př. rovina ϱ jdoucí přímkou $a \equiv AB$ protíná konoid ještě v elipse mající své úběžné body na obou imaginárních úběžných přímkách plochy. Tyto eliptické řezy promítají se na rovinu řídící kružnice kolmo jako kružnice, což plyne odtud, že úběžné jejich body se promítají z úběžného bodu ${}_{\infty}P$ na p do kruhových bodů v půdorysně; důležité body řezu jsou v půdorysu l_1 vytčeny: bod R roviny ϱ na základnici x, bod K, bod T' na ${}^1t$, bod U na p^{ϱ}, RT'_1 je průměr.

Tečná rovina v libovolném bodě C na povrchové přímce ${}^1a$ sestrojí se pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem, jenž má za řídící přímky přímku $p \perp \pi$ a tečnu q v bodě ${}^1A$ na k v půdorysně, řídící rovinou je rovina totožnosti. Soustava jeho povrchových přímek rovnoběžných s rovinou totožnosti tvoří v půdorysu patrně paprskový svazek o vrcholu p_1, jejich stranorysy jsou vzájemně rovnoběžny; hlavní stranorysna sdružena kolem základnice y s půdorysnou.

Druhá řídící rovina pomocného hyperbolického paraboloidu je půdorysně promítací rovina přímky q, druhá soustava povrchových přímek s ní rovnoběžná má tedy půdorysy rovnoběžně ku q a stranorysy tvoří paprskový svazek o vrcholu K, do něhož se promítá do stranorysny osa x jako jedna přímka soustavy první. Tím je jednoduché použití pomocného hyperbolického paraboloidu zřejmo. Z bodu C_1 odvodíme C_3 a druhá povrchová přímka ${}^1q$ bodem procházející je dána půdorysem ${}^1q_1 \parallel q$ i stranorysem ${}^1q_3 \equiv C_3K$. Obráceně je zřejmé sestrojení dotykového bodu pro rovinu procházející povrchovou přímkou.

22. Cylindroid čili Plückerův konoid. Cylindroid je určen *řídící elipsou* jako řezem rotační válcové plochy, *řídící přímkou*, která jest její přímkou povrchovou a *řídící rovinou*, jež jest rovinou jejího normálního řezu. Jest *eliptickým konoidem přímým* zvláštní konstrukce a je třetího stupně, protože řídící přímka protíná řídící křivku.



Obr. 44.

Jest několik způsobů sestrojení této důležité zborcené plochy; její použití tkví v mechanice a zvláště v kinematice. Vyjděme z určení, že *cylindroid je geometrickým místem os příček dvou daných mimoběžek a jejich osy*. Znázorňujícím obrazcem buď jediný kolmý průmět na rovinu, s níž jsou dané dvě mimoběžky m a n rovnoběžny a jejich osa o k ní kolmá, jeví se tedy o_1 jako bod $O_1 \equiv (m_1, n_1)$; (v obr. 44 bylo by třeba připojiti kóty bodů). Sestrojme kolmé příčky osy o a proměnné příčky mimoběžek m a n. Plocha určená těmito kolmými příčkami jest cylindroid.

Povrchové přímky konoidu jsou rovněž rovnoběžny s průmětnou a jejich průměty tvoří paprskový svazek o vrcholu o_1. Je-li $M'N'$ příčka mimoběžek m a n, pak povrchová přímka p' konoidu má svůj $p'_1 \perp M'_1N'_1$ a protíná tuto příčku v bodě P'. Označíme-li průsečíky přímek m, n a p' s osou o postupně M, N a O', pak $\overline{MO'} : \overline{NO'} = \overline{M'P'} : \overline{N'P'} = \overline{M'_1P'_1} : \overline{N'_1P'_1} = \operatorname{tg} \mu' : \operatorname{tg} \nu'$, jsou-li μ' a ν' úhly sevřené přímkou p' s přímkami m a n. Všechny příčky, jež mají tento poměr stálý, mají tutéž příčku p'; jsou to příčky s rovnoběžnými průměty. Souhrn povrchových přímek konoidu obdržíme, necháme-li bod M' na m pevným a probíhá-li při tom bod N' přímku n. Přímky m a n leží též na ploše. Osy souměrnosti s_1 a t_1 úhlů přímek m_1 a n_1 jsou průměty těch povrchových přímek s a t konoidu, které procházejí půlícím bodem S úsečky MN, t. zv. *středem plochy.*

Dvě povrchové přímky p' a p'', které svírají s některou z přímek s a t stejné úhly, protínají přímku o v bodech souměrně sdružených podle středu S. Na ose patrně je $\overline{MO'} : \overline{NO'} = \overline{NO''} : \overline{MO''}$.

Sledujeme-li dvě povrchové přímky p' a p''' té vlastnosti, že $\sphericalangle sp' = \sphericalangle tp'''$, poznáme, že protínají přímku o v témž bodě. Zvláště přímky k a l, jež půlí úhel přímek s a t procházejících středem plochy, svírají s nimi úhel 45 a určují na o body K a L, jimiž prochází toliko po jedné povrchové přímce.

Přímka o je dvojnou přímkou konoidu a zove se jeho osou, přímky k a l jsou torsálními přímkami na ploše.

Jako byly základními přímky m a n, právě tak mohou jimi býti jiné dvě přímky, jež svírají stejné úhly s přímkou s (nebo t), jež půlí $\sphericalangle\, mn$; ve zvláštním případě mohou to býti přímky $k \perp l$.

Řez zborcené plochy cylindroidu rovinou, jež prochází povrchovou přímkou. Mysleme si rovinu σ přímkou p' a její stopy k^σ a l^σ na vodorovných rovinách, jež procházejí torsálními přímkami k a l, jakož i průsečíky $K' \equiv (k, k^\sigma)$ a $L' \equiv (l, l^\sigma)$. Pak $K'L'$ leží v rovině σ a protíná přímku p' v bodu P'. Podle definice konoidu prochází každým bodem P' na p' přímka, jež stojí na p' kolmo a protíná k a l, ($K'L' \perp p'$, spádová a hlavní přímka roviny σ). Volbou bodu P' je provedena volba roviny σ ze svazku rovinového s osou p'.

Kružnice e_1 opsaná nad průměrem $K'_1L'_1$ prochází bodem O_1 a je průmětem řezu konoidu rovinou σ. Ukážeme, že libovolná povrchová přímka u konoidu protíná rovinu σ v bodu U, jehož průmět U_1 je na e_1.

Sestrojme u_1 a v průsečíku U_1 s e_1 kolmici na u_1 a označme její průsečíky s průměty torsálních přímek $(K)_1$ a $(L)_1$, se stopami zvolené roviny $[K_1]$ a $[L_1]$. Pak (K) a (L) jsou průsečíky přímek k a l s příčkou bodem U a $[K]$ a $[L]$ lze považovati za stopníky přímky v rovině σ. Přímky $(K)(L)$ a $[K][L]$ se protínají v bodu U, jenž je průsečíkem přímky u s rovinou σ.

Z podobných trojúhelníků $\triangle\, U_1K'_1(K)_1 \sim \triangle\, U_1L'_1O_1$ (mají strany vzájemně kolmé) plyne, ježto také $K'_1[K]_1$ a L'_1V jsou v nich stejnolehlými příčkami, úměra

$$\overline{(K)_1U_1} : \overline{[K]_1U_1} = \overline{O_1U_1} : \overline{VU_1}.$$

Obdobně z podobných trojúhelníků $\triangle\, U_1L'_1(L)_1 \sim \triangle\, U_1K'_1O_1$ plyne úměra

$$\overline{(L)_1U_1} : \overline{[L]_1U_1} = \overline{O_1U_1} : \overline{VU_1}.$$

Tedy

$$\overline{(K)_1U_1} : \overline{[K]_1U_1} = \overline{(L)_1U_1} : \overline{[L]_1U_1},$$

což potvrzuje, že bod U je průsečík přímek $(K)(L)$ a $[K][L]$; a jelikož leží v rovině σ a na u, jest tvrzení dokázáno. Tedy:

Rovina procházející povrchovou přímkou cylindroidu protíná plochu ještě v elipse, jež se promítá kolmo ve směru jeho osy do kružnice.

Tato kružnice se dotýká průmětu té povrchové přímky p''', která s p' protíná osu o v témž bodu. Neboť obě přímky určují s přímkou o obě tečné roviny plochy v tom bodě (tečné roviny obou plášťů, jež se v dvojné ose pronikají) a průsečnice roviny sečné a promítací tečné je tečnou řezu. Střed S_0

kružnice e_1 jest podle toho na průmětu p''_1 povrchové přímky p'', jenž je s p'_1 souměrně sdružený podle s_1.

Zároveň patrno, že vzniká těmito osami táž zborcená plocha třetího stupně, jež je definována v záhlaví článku řídícími útvary.

Zdánlivým obrysem libovolného průmětu cylindroidu jest křivka třetí třídy. Neboť každý bod průmětny je průmětem tří bodů plochy, průsečíků s promítacím paprskem; i procházejí jím průměty tří povrchových přímek jako tečny obrysové.

Sestrojování tečné roviny v bodě plochy a dotykového bodu pro rovinu procházející povrchovou přímkou cylindroidu je obsaženo v základním obrazci.

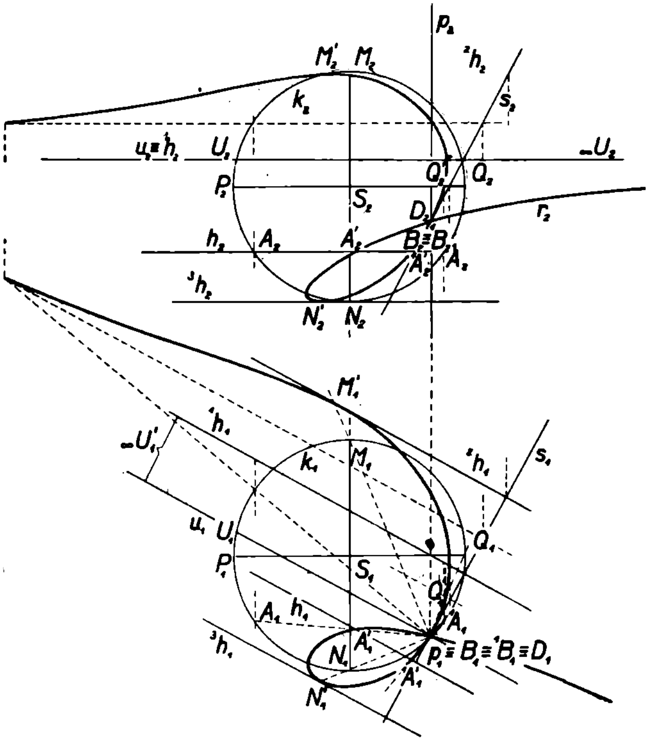
Je-li sestrojiti tečnou rovinu v bodě Q' povrchové přímky p', sestrojíme půlící bod úsečky $S_1Q'_1$ a v tom kolmici na p'_1; ta určí na torsálních přímkách k a l body K' a L', jimiž procházejí stopy $k^\sigma \parallel l^\sigma \parallel p'_1$ žádané tečné roviny na torsálních rovinách.

Je-li obráceně dána rovina σ, procházející povrchovou přímkou p', stopou $l^\sigma \parallel p'$ na horizontální rovině procházející torsální přímkou l, sestrojíme bodem $L' \equiv (l^\sigma, l)$ kolmici $L'K' \perp p'$ a zjistíme její patu P' na p'; učiníme-li $\overline{P'_1Q'_1} = \overline{P'_1O_1}$, je sestrojen dotykový bod Q' ve dvojnásobné vzdálenosti bodu P' od osy konoidu.

Jest ovšem možno řešiti obě úlohy použitím dotykového hyperbolického paraboloidu.

Řez cylindroidu rovinou polohy obecné jest křivka třetího stupně s dvojným bodem na dvojné řídící přímce. V obr. 45 řešena tato úloha pro řídící elipsu k, která se promítá do půdorysny i nárysny jako kružnice, půdorysně promítací řídící přímku p, která elipsu k seče, takže půdorys p_1 leží na k_1, a řídící půdorysnu. Elipsa k leží v rovině rovnoběžné se základnicí x a svírající s oběma průmětnami úhel 45°, hlavní osa $MN \perp x$, vedlejší $PQ \parallel x$, poměr poloos $\sqrt{2} : 1$. Sečná rovina ϱ je dána první spádovou přímkou s, protínající řídící přímku v bodě D.

Povrchové přímky v jednotlivých rovinách horizontálních poskytují body průsečné křivky r na půdorysných hlavních přímkách, v kterých je proťata rovina ϱ těmi pomocnými



Obr. 45.

rovinami; na př. na přímkách AB a ${}^1A{}^1B$ určí body A' a ${}^1A'$ průsečné křivky hlavní přímka h, jejíž půdorys $h_1 \perp s_1$ se odvodí z nárysu $h_2 \parallel x$ pomocí průsečíku s přímkou spádovou.

V libovolném bodě A' sestrojila by se tečna křivky r jako průsečnice tečné roviny plochy rovinou sečnou.

Sestrojíme-li na cylindroidu povrchovou přímku u rovnoběžnou s rovinou ϱ, $u_1 \parallel h_1$ a prochází bodem p_1, protne rovinu ϱ v úběžném bodě asymptotickém $_{\infty}U'$ křivky na její hlavní přímce ${}^1h$, $u_2 \equiv {}^1h_2$.

Torsální přímky poskytnou body M' a N' křivky r na hlavních přímkách ${}^2h$ a ${}^3h$ roviny ϱ, jež jsou tečnami průsečné křivky, protože tečné roviny v bodech M' a N' jsou horizontální roviny torsální.

Průsečík D sečné roviny a dvojné řídící přímky je dvojným bodem průsečné křivky.

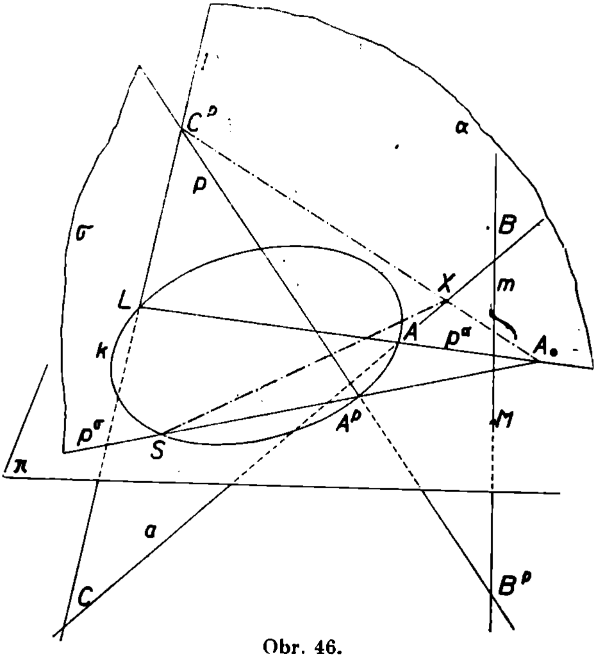
Zborcené plochy cylindroidu používá se v kinematice při určování rotačních hyperboloidů o mimoběžných osách dotýkajících se podél společné povrchové přímky, tedy při mechanismu, jenž převádí rovnoměrný rotační pohyb v týž pohyb kolem osy s původní mimoběžné (čl. 5). Dále při určování os šroubových pohybů, jež převádějí přímku a její bod v jinou přímku a bod na ní.

23. Některé vlastnosti obecných ploch zborcených třetího stupně. *Obecná zborcená plocha třetího stupně vzniká příčkami kuželosečky a dvou mimoběžek, z nichž jedna kuželosečku protíná.* Vskutku existují vždy tři povrchové přímky, jež protínají dané řídící útvary a libovolnou přímku p. Neboť přímka p a dané dvě řídící přímky určují svými příčkami zborcený hyperboloid, jejž daná kuželosečka protíná ve čtyřech bodech; ale jeden z nich je předem dán (průsečík řídící přímky s řídící kuželosečkou) a ostatními třemi procházejí tři povrchové přímky.

Je-li k kuželosečka, l řídící přímka, která ji protíná a m řídící přímka, která ji neprotíná, tu každým bodem na l procházejí dvě povrchové přímky t. j. l jest dvojnou přímkou zborcené plochy. Přímka m jest jen jednoduchou přímkou na ploše. Tečné roviny vedené přímkou m ke kuželosečce k určí na dvojné přímce l kuspidální body.

Rovina procházející povrchovou přímkou p zborcené plochy třetího stupně protíná ji ještě v kuželosečce; lze to ukázati přímo.

Označme v znázorňujícím obrazci 46 stopníky L a M řídících přímek l a m na rovině π řídící kuželosečky k. Libovolná



Obr. 46.

rovina α procházející přímkou l má stopu p^α jdoucí stopníkem L a určí na k bod A a na m bod B, i jest $AB \equiv a$ povrchovou přímkou zborcené plochy a protíná přímku l v bodě C.

Libovolná povrchová přímka p nechť protíná dané řídící útvary v bodech A^p, B^p a C^p, stopa libovolné roviny σ touto přímkou procházející jest p^σ, jde stopníkem A^p přímky, S jest její druhý průsečík s kuželosečkou k.

Proměnná povrchová přímka a zborcené plochy protíná tuto rovinu σ v bodě X, který vyplňuje kuželosečku; bod X leží na průsečnici rovin (σ, α), jež spojuje průsečík stop $(p^\sigma, p^\alpha) \equiv A_0$ s bodem C^p, společným patrně oběma rovinám.

Otáčí-li se rovina α kolem přímky l, vytvoří rovinový svazek, jeho řezy rovinou π a přímkou m, t. j. svazek stop $L(A, \ldots)$ a bodová řada $m(B, \ldots)$ jsou vzájemně projektivní a tedy též projektivní s paprskovým svazkem o vrcholu S, jenž promítá křivou bodovou řadu $k(A, \ldots)$.

Rovina $(S, A, B) \equiv (S, a)$, která obsahuje bod X, obaluje při tom otáčení kuželovou plochu druhé třídy, protože spojuje paprskové družiny soustředných vzájemně projektivních paprskových svazků $S(B, \ldots)$ a $S(A, \ldots)$ v rovinách (S, m) a π. Jednou polohou této roviny je také rovina σ; proměnná rovina (S, A, B) protíná tedy trojinu pevných rovin (S, m), π a σ v přiřazené trojině paprsků SB, SA a SX. Protože $S(X, \ldots) \barwedge S(A, \ldots) \barwedge L(A, \ldots)$ resp. $p^\sigma(A_0, \ldots)$ persp. $C^p(X, \ldots)$, jest tímto řetězem projektivních útvarů dán projektivní vztah paprskových svazků a vrcholech S a C^p v rovině σ, jež průsečíky svých družin poskytují body $X, \ldots$ průsečné kuželosečky.

Odtud plyne:

Roviny, které procházejí proměnnou povrchovou přímkou a pevným bodem zborcené plochy třetího stupně, obalují kuželovou plochu druhého stupně.

Odtud další věta:

Průmětem zborcené plochy třetího stupně z libovolného bodu na jejím povrchu na libovolnou rovinu jest kuželosečka; ta prochází ovšem průměty kuspidálních bodů.

Svazek rovinový $l(\alpha, \ldots)$, jehož osou je dvojná přímka l plochy, protíná přímku m a kuželosečku k v projektivních řadách $m(B, \ldots) \barwedge k(A, \ldots)$. Z toho plyne:

Povrchové přímky zborcené plochy třetího stupně protínají jednoduchou řídící přímku a libovolnou kuželosečku na ploše v projektivních řadách.

A obráceně:

Jsou-li dány dvě projektivní bodové řady na libovolné přímce a libovolné kuželosečce, tu spojnice jejich bodových družin jsou povrchové přímky zborcené plochy třetího stupně.

Lze tedy tři libovolné družiny voliti, další jsou stanoveny. Jsou-li $A_1A_2A_3 \ldots \barwedge B_1B_2B_3$ tyto družiny, určíme k průsečíku B_4 přímky m a roviny π bod A_4 na k, spojnice A_4B_4 protíná k po druhé v bodu L a tím prochází přímka l jako příčka na př. spojnic A_1B_1 a A_2B_2. Svazek rovin α o ose l zajisté protíná m a k v projektivních řadách se sdruženými dvojinami A_1B_1, A_2B_2 a A_4B_4. Tedy libovolná rovina svazku protíná m a k v družinách projektivity, t. j. spojnice družin protínají všechny přímku l (dvojnou přímku plochy). Tím je tvrzení dokázáno, povrchové přímky jsou příčky útvarů $[klm]$.

Zborcená plocha 3. stupně jest plně určena dvojnou přímkou l, řídící přímkou m a pěti povrchovými přímkami, které protínají obě přímky l a m. Neboť rovina procházející jednou z těch pěti povrchových přímek protíná ostatní čtyři v bodech, které s průsečíkem na přímce dvojné určují kuželosečku k. Pak je plocha dána řídícími útvary $[klm]$.

Pěti povrchovými přímkami se dvěma společnými transversálami jsou dány dvě zborcené plochy třetího stupně. Transversály leží celé na ploše, majíce s ní 4 body společné a protínají tedy i ostatní povrchové přímky. Jsou to tedy řídící útvary plochy a podle toho, kterou z nich zvolíme za přímku dvojnou, obdržíme dvě různé plochy zborcené třetího stupně. Obě plochy nemají mimo ty dvě přímky žádného společného bodu, jinak by měly společnou i příčku obou přímek procházející bodem; pak by však rovina procházející onou příčkou protínala obě plochy v téže kuželosečce.

Tvořící povrchové přímky zborcené plochy třetího stupně protínají se po dvou na dvojné přímce plochy. Tyto družiny povrchových přímek protínají jednoduchou řídící přímku v družinách bodové involuce, jejíž samodružné body jsou na torsálních přímkách. Řada průsečíků na dvojné přímce jest projektivně přiřazena bodovým družinám involuce na jednoduché řídící přímce.

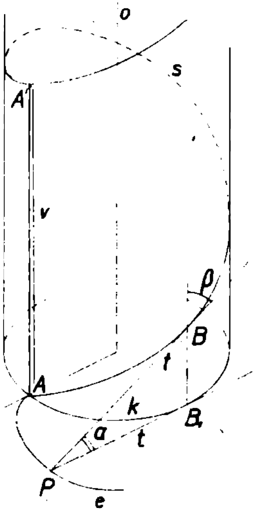
Otáčí-li se rovina kolem jednoduché řídící přímky m, tvoří její stopy paprskový svazek o vrcholu M, který vytíná na k družiny involuce; tato involuce se promítá z bodu L involucí paprskovou a z přímky l involucí rovinovou, která určuje na řídící přímce m tu bodovou involuci, jež je vyťata družinami povrchových přímek.

Svazek stop o vrcholu M určuje projektivní s ním involuci na kuželosečce k a tedy i projektivní k involuci sdružených bodů na m. Svazek stop o vrcholu M je také projektivní k bodové řadě dvojných bodů na přímce l. Tím je dán také vytčený projektivní vztah mezi l a m. Můžeme tedy říci:

Zborcená plocha třetího stupně vzniká spojnicemi bodů involuce na přímce s přiřazenými body řady, která je s bodovou involucí projektivní.

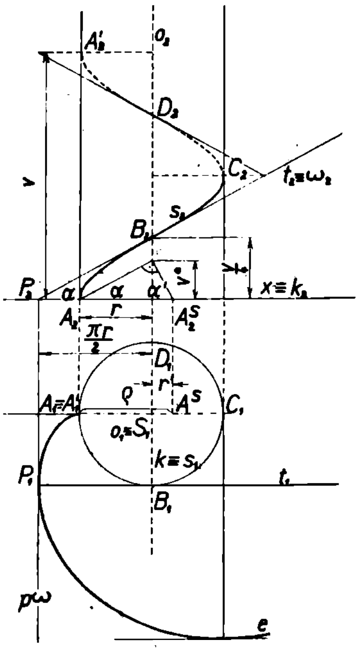
24. Šroubovice a její rozvinutelná plocha. Jest třeba všimnouti si vlastností šroubovice, abychom mohli uvésti základy theorie šroubových ploch, na nichž je šroubovice řídící křivkou. Také rozvinutelnou šroubovou plochu potřebujeme znáti pro zborcené šroubové plochy.

Šroubovice (*helix*) *jest křivkou prostorovou*. Šroubovice je *geodetickou čarou* na válcové ploše, s kterou se tedy rozvine v přímku. Obráceně *přímka v tečné rovině válcové plochy se navine při navinutí roviny na válcovou plochu v šroubovici*. Z toho ihned plyne, že tečny šroubovice svírají s povrchovými přímkami válcové plochy, na níž je šroubovice narýsována, konstantní úhel β; jest to úhel, který v rozvinutí svírá přímka, jež představuje rozvinutou šroubovici se všemi tvořícími přímkami válcové plochy. Tečny šroubovice svírají stálý úhel α též s normálným řezem základní válcové plochy; v rozvinutí svírá úhel α šroubovice a rozvinutý normálný řez a zove se *odchylkou*, tg α pak *spádem* šroubovice.



Obr. 47.

Pro libovolný oblouk $\widehat{AB}$ šroubovice je poměr vzdálenosti BB_1 krajních bodů ve směru povrchových přímek a oblouku $\widehat{AB_1}$ normálného řezu mezi jejími povrchovými přímkami stálý a roven spádu tg α (obr. 47). Při rozvinutí platí $\widehat{AB_1} = \overline{PB_1}$, t. j. stopník P tečen šroubovice opisuje v rovině normálného řezu k jeho evolventu e. Základní válcová plocha může býti jakákoli (*šroubovice obecná*); pro uzavřenou válcovou plochu je šroubovice křivkou nekonečnou. Délka šroubovice mezi dvěma sousedními body A a A' na téže povrchové přímce se zove *závitem* a délka $\overline{AA'} = v$ je *výškou závitu.*



Obr. 48.

Technicky důležitou jest šroubovice na rotační válcové ploše; pro poloměr r je spád $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{2\pi r}$, t. j. $v = 2\pi r \,.\, \operatorname{tg} \alpha$.

Redukovanou výškou v^0 závitu šroubovice je posunutí ve směru osy základního válce úměrné otočení o oblouk, jehož délka je rovna poloměru; oblouk ten se zove radiant, jeho středový úhel má přibližnou hodnotu 57° 17′ 45″; $v^0 = \frac{v}{2\pi} = r \,.\, \operatorname{tg} \alpha$, $v = 2\pi v^0$. Pro úhel β, který svírá tečna šroubovice s povrchovou přímkou, je $\operatorname{tg} \beta = \frac{2\pi r}{v} = \frac{r}{v^0}$.

Pro pozorovatele nacházejícího se před základním válcem šroubovice stoupá vpravo nebo vlevo a podle toho zove se šroubovice *pravotočivou* nebo *levotočivou.* Je-li pozorovatel v ose šroubovice, pravotočivá šroubovice na pravo klesá.

Závit pravotočivé kruhové šroubovice jest zobrazen v pravoúhlých průmětech v obr. 48. Vyznačena jest tečna t

v bodě B, jehož tečná rovina jest průčelná. Půdorysný stopník P tečny šroubovice opisuje prostou evolventu e základního kruhu k s bodem vratu A (východisko šroubovice). Půdorys $B_1P = \frac{1}{2}\pi r$ obdržíme rekfitikací čtvrtkružnice; v nárysu jeví se odchylka α šroubovice.

Řídící kuželová plocha šroubovice je rotační, protože její tečny mají od půdorysny stálou odchylku α. Zvolíme-li podstavnou hranou řídícího kužele kružnici $k \equiv s_1$, obdržíme vrchol S, sestrojíme-li $A_2S_2 \parallel t_2$; výškou kužele je redukovaná výška závitu $v^0 = z_S = r \operatorname{tg} \alpha$. Pomocí řídícího kužele lze sestrojiti tečnu šroubovice v libovolném jejím bodě; půdorys je tečnou základní kružnice, nárys se odvodí užitím rovnoběžné s ní povrchové přímky řídícího kužele.

Oskulační roviny šroubovice jsou rovnoběžny s tečnými rovinami řídící plochy kuželové; pro bod B je oskulační rovina ω nárysně promítací a nárys s_2 šroubovice má v bodě B_2 bod inflexní.

Nárysem šroubovice je *sinusoida* o rovnici $y = r \sin \frac{x}{v^0}$, jak ukazuje jeho vytvoření.

Oskulační rovina šroubovice je vždy kolmá na tečnou rovinu válcové plochy, což je základní vlastnost geodetických čar na válci.

Křivost šroubovice je pro všechny její body táž a je rovna křivosti průmětu šroubovice ve směru osy o válcové plochy do oskulační roviny ω, protože šroubovice s tímto průmětem má tři soumezné body společné; průmětem je elipsa o poloosách $\frac{r}{\cos\alpha}$, r; i jest *poloměr křivosti* šroubovice $\varrho = \frac{r}{\cos^2\alpha} = \overline{A_2A_2^s}$, je-li $S_2A_2^s \perp A_2S_2$; A^s je střed křivosti pro bod A. Geometrickým místem středů křivosti všech bodů šroubovice je t. zv. *reciproká šroubovice* o stejné výšce závitu na válcové ploše poloměru $r' = S_1A^s$, její odchylka $\alpha' = 90^\circ - \alpha$. Poloměr křivosti mají obě šroubovice týž, jak lze se substitucí přesvědčiti.

Vzhledem k stálé křivosti ve všech svých bodech pohybuje se šroubovice při šroubovém pohybu sama v sobě; říkáme, že se sama v sobě šroubuje.

25. Šroubový pohyb bodu kolem osy o, je výsledný pohyb bodu, který se otáčí rovnoměrně kolem o a zároveň posouvá podél osy o, při čemž délka posunutí v každém okamžiku je přímo úměrná úhlu otočení. Při šroubovém pohybu útvaru *opisují všechny body šroubovice souosé, téhož smyslu a téže výšky závitu* nebo téže redukované výšky závitu, kterou zoveme také *parametrem* šroubového pohybu.

Jsou-li dány v prostoru dvě polohy libovolného útvaru, tedy dva shodné útvary v různé poloze, možno vždy zříditi šroubový pohyb, kterým přechází jeden útvar do druhého. Jednotlivé body probíhají oblouky souosých šroubovic o téže výšce závitu.

Jelikož poloha prostorového útvaru jest vzhledem k jinému útvaru určena třemi body, jde vlastně o řešení úlohy:

Zříditi šroubový pohyb, kterým $\triangle\, ABC$ *v prostoru přechází v jinou polohu* $\triangle\, {}^1A^1B^1C \cong \triangle\, ABC$.

Rozložíme pohyb na *posunutí* ve směru osy a *otočení* kolem osy, kterou hledáme. Posunutí i otočení musí býti stejné pro všechny body útvaru. Tedy pravoúhlé průměty úseček A^1A, B^1B a C^1C do neznámé osy o musí se sobě rovnati.

Sestrojíme-li libovolným bodem v prostoru S rovnoběžky stejné délky s úsečkami A^1A, B^1B a C^1C, $\overline{SA_0} \# \overline{A^1A}, \ldots$, jest rovina $(A_0, B_0, C_0) \perp o$, čímž stanoven směr osy šroubového pohybu. Vzdálenost $S \dashv (A_0, B_0, C_0)$ udává velikost v' posunutí ve směru osy.

Promítneme-li ve směru osy o oba trojúhelníky do roviny k ose kolmé, obdržíme zase shodné trojúhelníky $\triangle\, A'B'C' \cong \triangle\, {}^1A'^1B'^1C'$, ježto sdružené úsečky AB a ${}^1A^1B, \ldots$ svírají s osou a tedy i s touto rovinou stejné úhly. V rovině sestrojíme střed otáčení, kterým oba trojúhelníky do sebe přecházejí; jest to společný průsečík O' os souměrnosti úseček A'^1A', B'^1B' a C'^1C'; jím prochází již osa o žádaného šroubového pohybu; zároveň je v rovině určeno otočení útvaru úhlem $\varphi = \sphericalangle A'O'^1A' = \sphericalangle B'O'^1B' = \ldots$, odpovídající posunutí v'. Stejným úhlům rotace odpovídá totéž posunutí ve směru osy. Je třeba, aby rychlosti obou těchto složek šroubového pohybu byly v stálém poměru.

Všechny šroubovice téhož šroubového pohybu mají pro otočení o 360° totéž posunutí ve směru osy, tutéž výšku závitu. Jejich poloměr jest ovšem vzdáleností od osy a ta se mění. Spád šroubovic $\operatorname{tg} \alpha$ jest poloměru nepřímo úměrný, jak plyne ze vzorce $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{2\pi r} = \frac{v}{r}$; čím větší poloměr, tím menší spád šroubovice a obráceně. Šroubovice malých poloměrů jsou strmější než šroubovice velkých poloměrů.

Šroubovým pohybem čar vznikají šroubové plochy. Šroubové útvary posunují se šroubovým pohybem samy v sobě, všecky body tvořící čáry opisují šroubovice souosé a téže výšky závitu. *Tvořící křivkou může býti každá čára, která protíná všechny šroubovice na ploše.*

Speciálně lze *vytvořiti šroubovou plochu šroubovým pohybem poledníku*, jenž je řezem plochy rovinou procházející osou, nebo normálného řezu rovinou k ose kolmou; tyto křivky jsou totiž proťaty všemi šroubovicemi na ploše.

U šroubové plochy jsou tudíž všechny meridiány vzájemně shodny a rovněž všechny normálné řezy.

Uzavřená šroubová plocha obsahuje osu plochy, t. j. tvořící čára protíná osu; jinak je *šroubová plocha otevřená s hrdlovou šroubovicí*, kterou opisuje bod tvořící čáry ose nejbližší.

Tečná rovina v bodě šroubové plochy jest obecně určena tečnou šroubovice, která tím bodem na ploše prochází a tečnou tvořící křivky v tom bodě nebo speciálně tvořící přímkou, jde-li o plochu zborcenou, jak následuje.

26. Zborcené plochy šroubové, jejich rozdělení a základní vlastnosti. Plochy vytvořené šroubovým pohybem přímky zovou se přímkové plochy šroubové, jež jsou obecně zborcené. Jsou to *plochy transcendentní*; transcendentní jsou i šroubovice. Plocha je *zavřená* nebo *otevřená* podle toho, protíná-li tvořící přímka osu plochy či nikoli. Nejkratší vzdálenost osy a tvořící přímky jest *poloměrem hrdlové šroubovice* otevřené šroubové plochy.

Je-li tvořící přímka k ose kolmá, jest plocha *kolmá* (*přímá*), *normální nebo pravoúhlá šroubová plocha.* Tedy u zborcené šroubové plochy kolmé, zavřené i otevřené, jest úhel, který svírá tvořící přímka s rovinou kolmou k ose plochy roven nule; je-li osa svislá, jest tvořící přímka vodorovnou.

Není-li tvořící přímka k ose kolmá, je *šroubová plocha kosoúhlá* a to opět *zavřená*, protíná-li tvořící přímka osu, nebo *otevřená*.

U zavřených šroubových ploch leží celá osa na ploše; představuje její šroubovici, pro kterou odchylka $\alpha = 90$ (od roviny normálné).

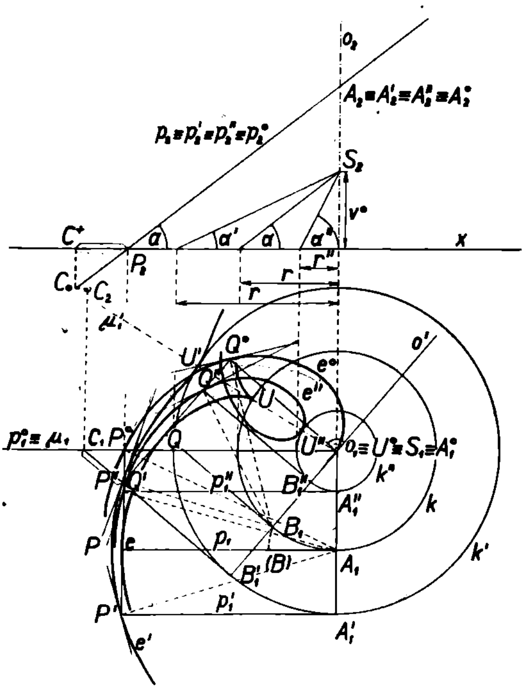
Důležitými rovinnými řezy zborcené šroubové plochy, zvláště pro určení průmětů a jiné konstrukce na ploše, jsou její *řezy normálné a poledníky* (*meridiány*). Řezy normálné skýtají nejlepší názor na zborcenou i rozvinutelnou šroubovou plochu. U pravoúhlých ploch jsou to povrchové přímky.

Sestrojme normálné řezy na kosoúhlých plochách šroubových (obr. 49).

Zvolíme šroubový pohyb osou $o \perp \pi$ a redukovanou výškou v^0, která přenesena v kladném smyslu nad půdorysnu určuje pohyb pravotočivý, a podrobíme pohybu přímku p rovnoběžnou s nárysnou a svírající s osou o úhel kosý.

Má-li přímka p od půdorysny, na níž sestrojujeme normálný řez vzniklé plochy, odchylku α rovnou odchylce šroubovice svého bodu A k ose nejbližšího, $A \dashv o = r$, pak $r \cdot \operatorname{tg} \alpha = v^0$, přímka je tečnou šroubovice bodu A a vytvořuje šroubovým pohybem *šroubovou plochu rozvinutelnou* a jejím řezem na půdorysně je *prostá kruhová evolventa* e základního kruhu k o středu o_1 a poloměru r. Východisko šroubovice, t. j. bod vratu U evolventy e obdržíme navinutím délky A_1P, kde P je půdorysný stopník přímky, na k; $\widehat{A_1U} = \overline{A_1P}$.

V další obecné poloze šroubující se přímky, t. j. na tečně v bodě B obdržíme její stopník Q na půdorysně, učiníme-li $\overline{B_1Q} = \overline{A_1P} - \widehat{A_1B_1}$ vzhledem ke kotálivému pohybu evolventnímu, kterým se křivka e vytvořuje v půdorysně; tečna evolventy v bodě Q je kolmá na B_1Q.



Obr. 49.

Sledujeme-li tentýž šroubový pohyb $[o, v^0]$ přímky $p' \parallel p$ ($p'_2 \equiv p_2$, půdorys p'_1 je tečnou kružnice k' o poloměru r'), má její nejbliží bod A' od osy vzdálenost $r' > r$, $r' \operatorname{tg} \alpha > v^0$, t. j. $v^0 = r' . \operatorname{tg} \alpha'$, kde $\alpha' < \alpha$; šroubovice bodu A' nemá již za tečnu přímku p', protože její tečna má odchylku α' a šroubovým pohybem přímky p' vzniká *zborcená šroubová plocha, kosoúhlá a otevřená*, jejímž normálním řezem na půdorysně je *protáhlá evolventa* e' s vrcholem U'.

Stopníky P' přímky p' a Q' další polohy přímky v bodě B' šroubovice bodu A' jsou určeny pravoúhelníky $PA_1A'_1P'$ a $QB_1B'_1Q'$, atd., čímž jest dána konstrukce bodů P', Q', ... evolventy e' v souvislosti s kinetickým vytvořením prosté evolventy e. Dotykové body A_1, B_1, ... jsou při kotálivém pohybu tečny po pevné kružnici k (nehybné poloidě) okamžitými středy otáčení, jimiž procházejí normály všech trajektorií pohybu; na př. tečny evolventy e' v bodech P' a Q' jsou kolmice na normály $P'A_1$ a $Q'B_1$; atd.

Evolventa e' je vytvořena bodem P' pevně spojeným kolmicí $P'P$ s kotálející se tečnou p_1 po kružnici k.

Navine-li se tečna A_1P na kružnici k až bod P přijde do jejího bodu U, pak současně bod P' zaujme polohu U' na poloměru Uo_1 jako vrchol protáhlé evolventy e'.

Docela obdobně vytvořena je šroubová plocha přímkou $p'' \parallel p$, kde p''_1 je tečnou kružnice k'' o poloměru $r'' < r$ v bodě A''_1. A'' je nejbližší bod přímky p'' od osy o; nárys $p''_2 \equiv p_2$ jako dříve; pak $r'' \operatorname{tg} \alpha < v^0$, t. j. $v^0 = r''$ . . $\operatorname{tg} \alpha''$, kde $\alpha'' > \alpha$. Plocha je opět zborcená, p'' není tečnou šroubovice bodu A'', je *kosoúhlá otevřená*, jejím normálním řezem na půdorysně je *zkrácená evolventa* e'' s dvojným bodem, opět vytvořená z bodů P'', Q'', ... a jejich tečen v souvislosti s kinetickým vytvořením prosté evolventy e; evolventu opisuje při pohybu opět bod P'', pevně spojený kolmicí $P''P$ s kotálející se tečnou p_1 po kružnici k. Bod U'' na poloměru Uo_1 je vrcholem křivky.

Konečně vytvoříme *zborcenou plochu kosoúhlou uzavřenou* šroubovým pohybem přímky $p^0 \parallel p$, $p_2{}^0 \equiv p_2$, která protíná osu o v bodě A^0, půdorys $p_1{}^0$ prochází bodem $o_1 \equiv A_1{}^0$. Šroubovice bodu A^0 přechází v osu o, která leží na uzavřené šroubové ploše.

Řez půdorysnou je vytvořen opět kineticky stopníkem P^0 přímky p^0, je-li pevně spojen s tečnou p_1 kruhu k. Po odkotálení tečny A_1P na kružnici k, když přejde stopník P do bodu U, ztotožní se současně stopník P^0 se středem $o_1 = U^0$ evolventního pohybu v půdorysně.

I jest *normálným řezem kosoúhlé uzavřené šroubové plochy* evolventa e^0 vytvořená středem U^0 poloidy nehybné, pevně spojeným s kotálející se její tečnou jako poloidou hybnou. Jest to *Archimedova spirála*. Tečny v bodech P^0, Q^0, ... jsou opět kolmé na spojnice P^0A_1, Q^0B_1, ... bodů křivky s okamžitými středy otáčení. Jiná definice této spirály plyne ze souvislosti se základní evolventou e: *Archimedova spirála vzniká, přenášíme-li na otáčející se průvodič svazku paprskového délky úměrné úhlu otáčení od základní pevné osy* (vrcholové tečny spirály $o' \perp UU^0$).

Sestrojení meridiánové křivky na kosoúhlé šroubové ploše otevřené jest řešeno v témž obr. 49. Stačí uvažovati toliko o hlavním poledníku, protože všechny jsou shodné, a jeho bodu C na obecné povrchové přímce $B'Q'$. Půdorys C_1 bodu hlavního poledníku je dán průsečíkem s rovinou μ, jež procházejíc osou o je rovnoběžna s nárysnou.

Souřadnice z_C bodu C plyne z půdorysně promítací roviny povrchové přímky $B'Q'$, pro kterou Q' je prvním stopníkem. Kóta $z_C = \overline{Q'C_1} \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha$ sestrojí se v nárysu na průčelné přímce p, $\overline{P_2C^-} = \overline{Q'C_1}$, $C^+C_0 \perp x$ jest již hledanou kótou; přenese se rovnoběžkou $C_0C_2 \parallel x$ na ordinálu bodu C_1, čímž je bod hlavního poledníku určen.

Povrchové přímky rovnoběžné s hlavním poledníkem určují svými úběžnými body asymptotické body křivek poledníkových. V nárysu je asymptotou nárysu poledníkové křivky přímka p_2. Poledníková křivka má nekonečné množství shodných větví.

Asymptotické roviny jsou rovnoběžny s příslušnými tečnými rovinami řídící plochy kuželové. Zvolíme-li v našem případě vrcholem řídící kuželové plochy ten bod osy, jehož nárys jest v $A_2 \equiv A'_2 \equiv \ldots$, jest nárysně promítací rovina přímek $p^0 \parallel p' \parallel p'' \parallel p$ asymptotickou rovinou zborcených ploch šroubových zde vytvořených a spolu tečnou rovinou rozvinutelné plochy šroubové, vytvořené pohybem přímky p. Tedy patrno, že *asymptotické roviny zborcené šroubové plochy obalují ve svém souhrnu rozvinutelnou šroubovou plochu, která se zove rozvinutelná asymptotická plocha šroubová všech vytvořených ploch šroubových* (týmž šroubovým pohybem přímek vzájemně rovnoběžných.

Centrální roviny jsou kolmé na roviny asymptotické a dotýkají se plochy v centrálních bodech povrchových přímek. V našem případě jsou půdorysně promítací a obsahují tečnu hrdlové šroubovice a tedy mají dotykové body na hrdlových šroubovicích.

Geometrickým místem centrálních bodů zborcené plochy jest *křivka strikční. Strikční křivkou zborcené plochy šroubové jest její hrdlová šroubovice, u plochy uzavřené osa plochy.*

27. Pravoúhlá (zborcená) šroubová plocha uzavřená. Jest vlastně *přímý šroubový konoid*, daný řídící šroubovicí, její osou jako řídící přímkou a řídící rovinou kolmou na osu. V obr. 50 znázorněn jeden závit této plochy s východiskem A pravotočivé šroubovice o svislé ose.

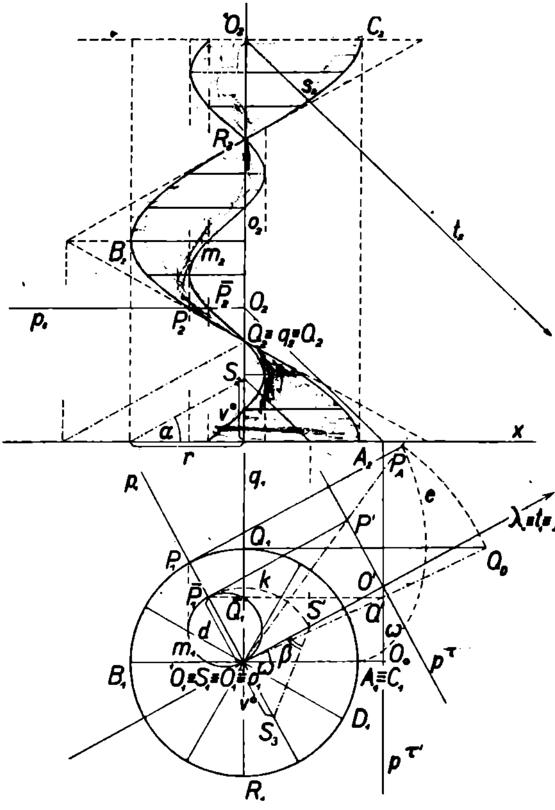
Povrchové přímky omezeny šroubovicí a osou, jak tomu bývá při použití plochy na *točitém schodišti*, kde povrchovými přímkami bývají přední hrany stupňů nebo kde se uplatňuje šroubový konoid jako spodní plocha schodiště.

Půdorysy povrchových přímek tvoří paprskový svazek, nárysy osnovu rovnoběžek se základnicí x, takže plocha nemá vlastních obrysů; šroubovice s a osa o tvoří jen vymezení části nekonečně rozlehlé plochy dané povrchovými přímkami.

Závit rozdělen na 12 dílů, takže posunutí o $\frac{1}{12}$ výšky závitu ve směru osy odpovídá rotaci kolem osy o úhel 30°.

Normálním řezem i poledníkem plochy jsou povrchové přímky.

Úlohy o tečných rovinách lze řešiti dvojím způsobem. Tečná rovina je určena povrchovou přímkou uvažovaného bodu



Obr. 50.

a tečnou šroubovice vytčeného šroubového pohybu, která probíhá bodem na ploše. Na přímce p sestrojíme v libovolném bodě na př. $\overline{P}$ tečnou rovinu, sestrojíme-li ještě tečnu v tom bodě na jeho šroubovici. Půdorys jest kolmý ku p_1, nárys by se odvodil pomocí tečny šroubovice řídící v bodě P na p. Tato tečna PP_A má stopník P_A na evolventě e základní kružnice s_1 s bodem vratu A, $\overline{P_1 P_A} = \widehat{P_1 A}$ obdržíme rektifikaci oblouku. Tečna $\bar{P}P'$ šroubovice bodu $\bar{P}$ má stopník P'. Není třeba rektifikovati oblouk základní kružnice pro šroubovici bodu $\bar{P}$, příslušné oblouky obou jsou úměrné poloměrům; i jest stopník P' na spojnici $o_1 P_A$ středu o_1 soustředných kruhů se stopníkem tečny šroubovice s; a tak pro všechny body na přímce p. Žádaná tečná rovina τ má stopu $p^\tau \parallel p_1$ a procházející ovšem stopníkem P'.

Je-li obráceně dána tečná rovina τ stopou, určí tato stopník P' a z toho se odvodí rovnoběžkou $P'\bar{P}_1 \parallel P_A P_1$ dotykový bod $\bar{P}$.

Konstrukce lze provésti opět pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem, jehož řídícími přímkami jsou tečna dané šroubovice s v bodě P a osa konoidu a řídící rovinou půdorysna. Spojnice $o_1 P_A$ jest přímkou paraboloidu ze soustavy dané přímky p, druhou řídící rovinou je půdorysně promítací rovina tečny šroubovice. Obě methody konstrukce jsou vyjádřeny ovšem týmž rysem.

Pro sestrojení nárysu lze použíti s výhodou přímky hyperbolického paraboloidu, jež jest k nárysně kolmá a protíná tečnu šroubovice i osu plochy, a povrchových přímek řídící plochy kuželové.

V obr. 50 jest na pravoúhlé uzavřené šroubové ploše zborcené vyšetřena *mez vlastního stínu m za osvětlení rovnoběžného*. Jest tedy *opsána přímému šroubovému konoidu daným směrem válcová plocha* čili *jest určen její skutečný obrys pro daný směr promítání*. Jest jím šroubovice poloviční výšky závitu šroubovice řídící.

Osvětlení zvoleno paprskem t a vytčena rovina λ světelného poledníku, $\lambda_1 = t_1$, v níž leží jedna poloha dvanáctinného dělení závitu.

Na povrchové přímce kolmé k světel. poledníku $p \perp \lambda$ určen bod $\overline{P}$ meze vlastního stínu pomocným hyperbolickým paraboloidem. Přímkou p sestrojena světelná rovina τ pomocí paprsku bodu O na ose o, p^τ probíhá vrženým stínem O' na půdorysnu, a průsečíkem P' s povrchovou přímkou o_1P_A hyperbolického paraboloidu sestrojena přímka druhé soustavy $P'\overline{P}$, půdorys $P'\overline{P}_1 \parallel P_AP_1$. I platí vztah:

$$\overline{o_1\overline{\overline{P}}_1} : \overline{o_1\overline{P}_1} = \overline{\overline{\overline{P}}_1P'} : \overline{\overline{P}_1P_A},$$

t. j.

$$d : r = z \operatorname{cotg} \beta : z \operatorname{cotg} \alpha,$$

je-li α odchylkou dané šroubovice s, β odchylkou světelného paprsku od půdorysny a z kóta povrchové přímky p nad půdorysnou. Pak $d = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta = v^0 \operatorname{cotg} \beta$, kde v^0 je známá redukovaná výška závitu dané šroubovice s.

Sestrojíme-li tedy vržený stín S' vrcholu S řídící kuželové rotační plochy šroubovice s, mající výšku v^0 a řídící kružnici s_1 v půdorysně, jest $d = \overline{S_1S'} = v^0 \operatorname{cotg} \beta = \overline{o_1\overline{\overline{P}}_1}$; tak se tento bod meze vlastního stínu snadno sestrojí.

Bod meze vlastního stínu $\overline{Q}$ na jiné povrchové přímce q (v obrazci zvolena kolmá k nárysně) sestrojí se právě tak. Myslíme si novou půdorysnu sníženou o vzdálenost z pod přímkou q, takže obdržíme týž obrazec otočený o úhel ω, jen $\overline{\overline{\overline{Q}}_1Q'} = \overline{O_1O_0} = \overline{O_1O'} : \cos \omega$ (jak plyne z pravoúhlého $\triangle\, O_1O_0O'$ s úhlem $\omega = \widehat{p_1q_1}$) a protože $\overline{O_1O'} = \overline{\overline{\overline{P}}_1P'}$, jest $\overline{\overline{\overline{Q}}_1Q'} = \overline{\overline{\overline{P}}_1P'} \,.\, \cos \omega$. Platí tedy úměra

$$\overline{O_1\overline{\overline{Q}}_1} : r = z \operatorname{cotg} \beta \cos \omega : z \operatorname{cotg} \alpha.$$

I jest $\overline{O_1\overline{\overline{Q}}_1} = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \cos \omega = v^0 \operatorname{cotg} \beta \cos \omega = d \cos \omega$.

I leží proměnný bod $\overline{Q}_1$ na kružnici m_1 opsané nad úsečkou $\overline{O_1\overline{\overline{P}}_1} = d$ jako průměrem.

Protože dráha bodu $\overline{Q}_1$ na kružnici m_1 je úměrna posunutí ve směru osy o a úhlově je dvojnásobná než dráha půdorysu Q_1 bodu šroubovice, neboť bod $\overline{Q}_1$ proběhne kružnici m_1 dvakrát když površka šroubové plochy vykoná jeden závit, jest *mezí m vlastního stínu pravoúhlé uzavřené šroubové plochy šroubovice o polovině výšky závitu šroubovice řídící.* Odtud plyne sestrojení nárysu.

Celkové osvětlení žádá vržený stín na rovinu kolmou k ose (půdorysnu) a vržený stín plochy na sebe.

Vržené stíny šroubovic na rovinu kolmou k ose jsou: *obecná cykloida* pro šroubovici m, protože světelný paprsek je tečnou šroubovice a ten dá body vratu stínu a *cykloidy zkrácené* pro šroubovice omezující plochu.

Vržený stín na jinou rovinu (na nárysnu) sestrojí se afinitou s vrženým stínem na půdorysnu.

Lze vysloviti větu:

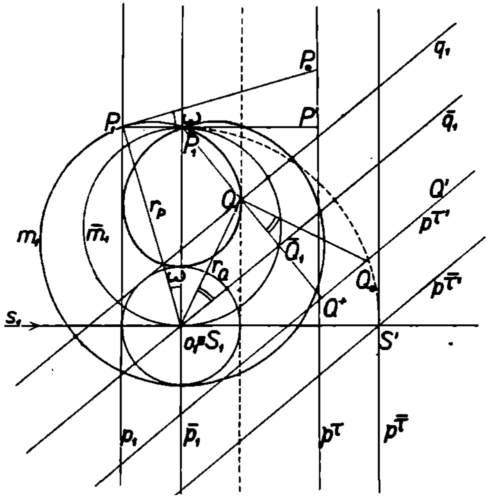
Každá rotační válcová plocha, jež má osu pravoúhlé uzavřené šroubové plochy za povrchovou přímku, protíná ji v šroubovici o poloviční výšce závitu plochou vytčeného šroubového pohybu.

28. Pravoúhlá zborcená šroubová plocha otevřená. Plocha vytčena toliko půdorysem v obr. 51 při svislé poloze své osy o, její hrdlová šroubovice h má půdorysem kružnici h_1 o středu o_1.

Povrchové přímky $p, q, \ldots$ plochy jsouce rovnoběžny s půdorysnou mají od osy stálou vzdálenost, jež je poloměrem hrdlové šroubovice, kterou opisuje bod přímky k ose nejbližší; i dotýkají se půdorysy $p_1, q_1, \ldots$ půdorysu h_1 v půdorysech bodů hrdlové šroubovice.

Kdybychom zobrazili závit plochy vymezený souosou rotační válcovou plochou, byl by omezen dvěma shodnými šroubovicemi, stočenými o úhel, jejž určuje tětiva základní kružnice. Nárysy povrchových přímek k nárysně kolmých jsou pak vrcholy sinusoidy h_2; jimi probíhají také nárysy obou omezujících šroubovic.

Řídícími útvary této zborcené plochy jsou: základní šroubovice, která určuje šroubový pohyb a jejímiž body procházejí povrchové přímky, souosá řídící válcová plocha o řídící kružnici h_1 v půdorysně, které se povrchové přímky dotýkají a řídící půdorysna, s níž jsou rovnoběžny.



Obr. 51.

Úlohy o tečných rovinách lze řešiti pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem, určeným tečnami obou omezujících šroubovic i tečnou hrdlové šroubovice.

Jde nám opět o *určení meze vlastního stínu na ploše za osvětlení rovnoběžného* a tu vystačíme s půdorysem plochy. Vytkněme světelný paprsek s a vržený stín S' bodu S osy o na půdorysnu, jež leží pod bodem S ve vzdálenosti redukované výšky závitu v^0 šroubového pohybu, $\overline{S_1S'} = v^0 \operatorname{cotg} \beta$, je-li β

odchylka světelných paprsků od půdorysny; volba S' stačí pro sestrojení půdorysu meze vlastního stínu.

Povrchová přímka kolmá na směr světelného paprsku budiž p, proměnná povrchová přímka q.

Uvažujme současně o uzavřené šroubové pravoúhlé ploše, souosé a téže výšky závitu i smyslu, jejíž povrchové přímky $\bar{p} \perp s$ a proměnná $\bar{q}$ jsou rovnoběžny s přímkami $p, q, \ldots$ otevřené plochy v těchže úrovních nad půdorysnou. Světelné roviny vytčených povrchových přímek obou ploch buďtež τ a $\bar{\tau}$, τ' a $\bar{\tau}'$, body mezí vlastních stínů na nich P a $\bar{P}$, Q a $\bar{Q}$.

Na ploše uzavřené platí podle předešlého článku $\overline{S_1\bar{P}_1} = \overline{S_1S'}$, $\overline{\bar{P}_1\bar{Q}_1} \perp \bar{q}_1$. Stopy světelných rovin $\bar{\tau}$ a $\bar{\tau}'$ (vždy pro půdorysnu sníženou o v^0) jsou $p^{\bar{\tau}}$ a $p^{\bar{\tau}'}$, stopy světelných rovin τ a τ' pro přímky otevřené plochy p^{τ} a $p^{\tau'}$, i platí rovnost vzdálenosti $p_1 \dashv p^{\tau} = \bar{p}_1 \dashv p^{\bar{\tau}}$, $q_1 \dashv p^{\tau'} = \bar{q}_1 \dashv p^{\bar{\tau}'}$.

Bod P meze vlastního stínu, který jest určiti, má vržený stín P' na p^{τ} a na ploše prochází jím šroubovice o základním poloměru r_P. Tečna šroubovice v tomto bodu meze vlastního stínu $P_1P_0 \perp P_1S_1$ musí ležeti ve světelné tečné rovině τ a její stopník P_0 musí vyhovovati podmínce $\overline{P_1P_0} = r_P = \overline{S_1P_1} = v^0 \cot \beta$. Jelikož pak $\overline{P_1P'} = \overline{S_1\bar{P}_1}$, $\overline{P_1P_0} = \overline{S_1P_1}$, plyne ze shodnosti $\triangle\, P_1P'P_0 \cong S_1\bar{P}_1P_1$ rovnost úhlů a podmínka $\overline{\bar{P}_1P_1} \perp p_1$.

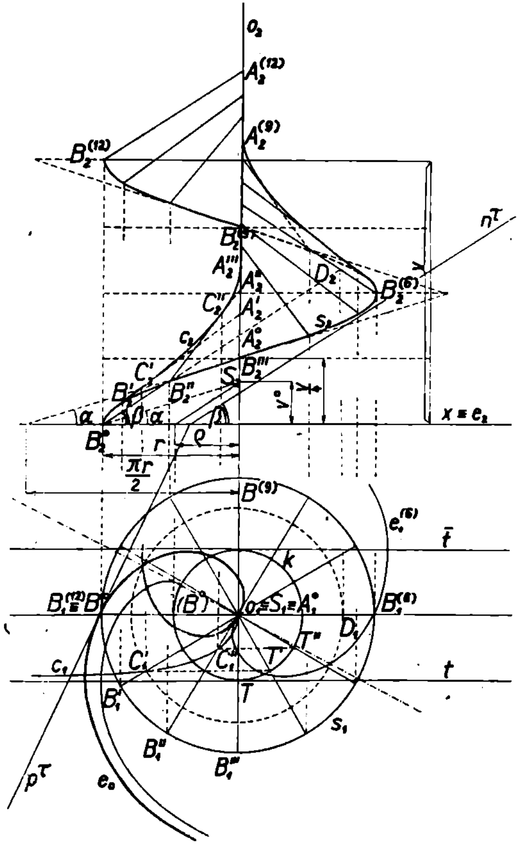
Obdobný vztah platí pro proměnnou povrchovou přímku q, jen vržený stín Q' se nahradí stopníkem Q^+ půdorysné spádové přímky bodem Q meze vlastního stínu, sestrojené ve světelné rovině τ'. Šroubovice bodem na ploše má poloměr $r_Q = \overline{S_1Q_1} = \overline{Q_1Q_0}$, $Q_1Q_0 \perp S_1Q_1$. Protože $\overline{S_1\bar{Q}_1} = \overline{Q_1Q^+}$, leží Q_1 na kolmici $\overline{\bar{P}_1Q_1} \perp q_1$.

Půdorys m_1 meze m vlastního stínu jest tedy *úpatní křivkou kružnice* h_1 pro pól P_1 nebo též *Pascalovou závitnicí* jakožto speciální *kruhovou konchoidou* kruhu $\bar{m}_1$, půdorysu meze vlastního stínu pomocné uzavřené šroubové plochy pro pól $\bar{P}_1$ ležící na ploše.

29. Kosoúhlá zborcená šroubová plocha uzavřená. Osa o plochy budiž kolmá k půdorysně. Jelikož povrchové přímky protínají osu, dělí osa tuto šroubovou plochu na *dvě části*: *vrchní a spodní*. Zobrazme *jeden závit spodní části*, rozdělíce kruh stejnoměrně na 12 dílů (obr. 52). Východiskem budiž povrchová přímka A^0B^0 rovnoběžná s nárysnou, A^0 na ose o, B^0 v půdorysně, s odchylkou β od půdorysny. Bod B^0 opisuje šroubovici s, bod A^0 posunuje se rovnoměrně po ose, výška závitu $\overline{B_2^0B_2^{(12)}} = \overline{A_2^0A_2^{(12)}} = v$. Pomocí rektifikace čtvrtkružnice $\frac{1}{2}\pi r$ půdorysu s_1 šroubovice a čtvrtiny $\frac{1}{4}v$ výšky závitu určena odchylka α šroubovice, poté pak redukovaná výška v^0 závitu, odpovídající oblouku r. Tím sestrojen vrchol S řídící kuželové plochy, $S(B^0) \parallel A^0B^0$ jest její povrchovou přímkou a k základní kružnicí o poloměru $\varrho = \overline{S_1(B^0)}$ v půdorysně. Sestrojeny jednotlivé povrchové přímky zborcené plochy, jichž půdorysy jsou poloměry, jako rovnoběžky k přímkám řídící kuželové plochy nebo samostatně pomocí bodů $A^0, A', A'', \ldots$ na ose a $B^0, B', B'', \ldots$ šroubovice s.

Meridiánová křivka této uzavřené plochy skládá se ovšem ze dvou soustav vzájemně rovnoběžných povrchových přímek $A^0B^0 \parallel A^{(12)}B^{(12)} \parallel \ldots, A^{(6)}B^{(6)} \parallel \ldots$ Přímky obou soustav (horní část jedné a spodní část druhé) se protínají v dvojných bodech plochy, jež vyplňují dvojné šroubovice na ploše. V obr. vytčen průsečík D poledníkových přímek, jenž opisuje takovou dvojnou šroubovici.

V naší konstrukci zvolen takový obecný případ, kdy bod A^0 na ose o má jinak libovolnou polohu. Kdyby pravoúhlý průmět úsečky A_0B_0 na osu, který zůstává stálým, byl roven právě čtvrtině výšky závitu, takže nárys A_2^0 inciduje s nárysem B'''_2, pak by tvořící přímka protínala podruhé šroubovici s v bodě $B^{(6)}$ povrchové přímky $A^{(6)}B^{(6)}$, takže oba souměrně sdružené body B^0 a $B^{(6)}$ podle středu A^0 opisovaly by tutéž dvojnou šroubovici. Takový případ se vyskytuje *na vý-*



Obr. 52.

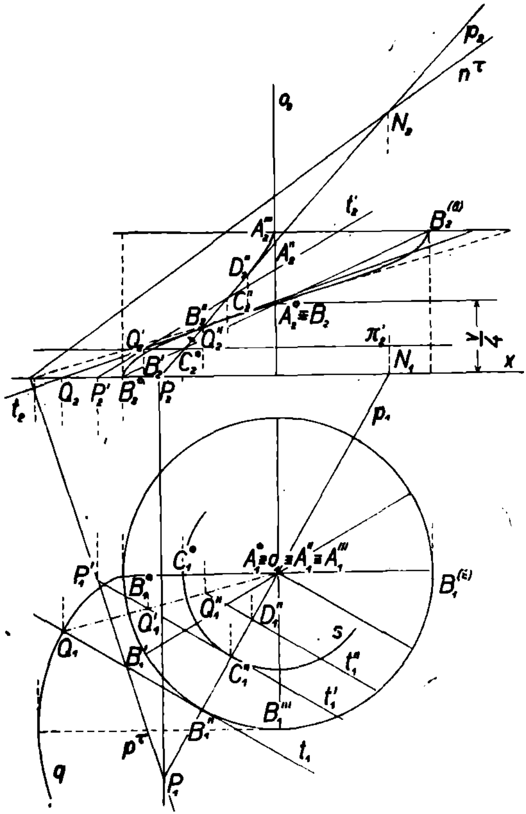
vrtce. Šroubová kosoúhlá plocha uzavřená zove se v technické praxi vůbec vývrtková plocha; vyskytuje se na ostrých šroubech.

Normálným řezem plochy jest podle čl. 26 Archimedova spirála jako speciální kruhová evolventa e^0 vytvořená středem S_1 pevně spojeným s kotálející se tečnou t (poloidá hybná) po kružnici k (poloida nehybná). V obr. znázorněn normálný řez v půdorysně a v rovině o $\frac{1}{2}v$ vzdálené, jenž odpovídá šroubovému pohybu prvního o půl otočky. Dvojný bod Archimedovy spirály jest dvojným bodem plochy, vzniklým z průsečíku přímek meridiánových, na př. D a podrobeným šroubovému pohybu.

Řídícími útvary této zborcené plochy jsou řídící šroubovice s a její osa o. Protože povrchové přímky plochy protínají osu v stálém úhlu, je řídící kuželová plocha této zborcené plochy rotační a její úběžná křivka, jejíž body incidují s příslušnými povrchovými přímkami, jest třetím řídícím útvarem.

Tečná rovina obsahuje tečny všech křivek bodem na ploše, tedy příslušnou povrchovou přímku, tečnu šroubovice dotykového bodu a tečnu normálního řezu, jenž prochází dotykovým bodem. Na př. tečná rovina τ v bodě B^0 má za půdorysnou stopu tečnu normálního řezu e^0 v půdorysně (normála v bodě B^0 prochází okamžitým středem otáčení T pohybu kotálecího, kde $S_1T \perp S_1B^0$) a nárysnou stopou $n^\tau \parallel A_2{}^0B_2{}^0$. Jelikož bod T jest pevný pro normály všech spirál bodů na povrchové přímce, plyne odtud projektivnost řady bodů povrchové přímky a svazku tečných rovin v nich.

Obrys nárysu této šroubové plochy jest obalová křivka souhrnu nárysů povrchových přímek plochy. Abychom určili dotykový bod C''_2 křivky c_2 na povrchové přímce $A''_2B''_2$, použijeme vlastnosti tečen normálného řezu. Povrchovou přímkou položíme rovinu nárysně promítací a určíme její dotykový bod C'' s plochou. Tečna normálného řezu musí býti kolmá k nárysně. Tedy $S_1T'' \perp S_1B''_1$, $T''C''_1 \parallel x$ a z půdorysu C''_1 odvozen ordinálou nárys C''_2. Půdorysem c_1 jest t. zv. *kappa křivka*, jejíž větve se dotýkají ordinály osy v jejím půdorysu o_1 a mají za asymptoty protější tečny t a $\bar{t}$ základní kružnice k. Větve druhého obrysu c_2 mají za asymptoty nárysy povrchových přímek rovnoběžných s nárysnou.



Obr. 53.

Kinematická methoda jest tu jistě pro úlohy o tečných rovinách nejvhodnější. Lze je ovšem *řešiti pomocí tečny šroubovice, která na ploše probíhá dotykovým bodem.*

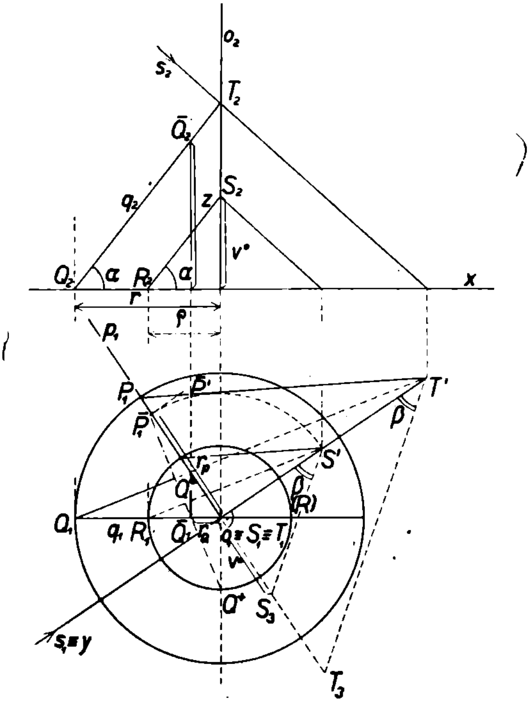
V obr. 53 je určena kosoúhlá uzavřená šroubová plocha jako v obr. předcházejícím řadou bodů B_0, B', B'', ... šroubovice s a řadou bodů A^0, A', A'', ... na její ose o. Bod A_0 má nárys ztotožněn s nárysem B'''_2, takže rozdíl souřadnic z obou přiřazených bodů rovná se čtvrtině výšky závitu v a povrchové přímky procházejí protějšími body šroubovice s jako na vývrtce, na př. A^0B^0 prochází protějším bodem $B^{(6)}$; dělení závitu opět na dvanáctiny. Je-li úlohou sestrojiti v bodě C'' na povrchové přímce $p \equiv A''B''$ tečnou rovinu τ, určíme ji povrchovou přímkou $p \equiv PN$ a tečnou t' šroubovice s', kterou opisuje na ploše bod C''. Tečna t šroubovice s v bodě B'' má půdorysný stopník Q na evolventě q, již vyplňují stopníky tečen ve všech bodech šroubovice s. Šroubovice s' jejíž půdorys je s'_1 má počáteční bod C^0 na A^0B^0 v úrovni $\pi' \parallel \pi$. Tečna t' této šroubovice má stopník Q' na rovině π' té polohy, že spojnice QQ' prochází bodem A^0 na ose vzhledem k úměrnosti odkotálených oblouků a poloměrů šroubovic; stopník P' tečny $t' \equiv C''Q'$ na půdorysně se odvodí z nárysu. Pak stopa tečné roviny $p^\tau \equiv PP'$ a n^τ prochází stopníkem N.

Tečny t a t' a osa o určují *dotykový hyperbolický paraboloid šroubové plochy* podél povrchové přímky p, která s přímkou QQ' je jeho přímkou druhé soustavy; půdorys přímek této soustavy tvoří paprskový svazek o středu o_1.

Pomocným hyperbolickým paraboloidem lze pohodlně řešiti úlohy o tečných rovinách na šroubové ploše. Na př. úkol *povrchovou přímkou $A''B''$ proložiti rovinu a určiti její dotykový bod s plochou*. Položíme-li na př. touto přímkou rovinu nárysně promítací δ, $\delta_2 \equiv A''_2B''_2$, stačí sestrojiti průsečík Q'' přímky QQ' s rovinou a v půdorysu sestrojiti přímku t'' soustavy tečen šroubovic, t. j. $Q''_1D''_1 \equiv t''_1 \parallel t_1$; ta určí již půdorys D''_1 dotykového bodu, D''_2 na δ_2 je bodem zdánlivého druhého obrysu.

Také lze ovšem použíti projektivního vztahu řady dotykových bodů na p se svazkem tečných rovin, tedy na př. s paprskovým svazkem jejich stop o vrcholu P v půdorysně.

Budiž ještě naší úlohou *sestrojiti pro kosoúhlou uzavřenou šroubovou plochu body meze vlastního stínu za osvětlení rovnoběžného*. V obr. 54 určen šroubový pravotočivý pohyb osou o



Obr. 54.

kolmou k půdorysně a redukovanou výškou závitu v^0, kterou zvolíme za výšku řídící kuželové plochy dané kosoúhlé uzavřené plochy šroubové, jež je určena povrchovou přímkou $q \doteq QT$ rovnoběžnou s nárysnou a mající odchylku α od půdorysny, bod Q jest její půdorysný stopník a T bod na ose plochy, S vrchol řídícího kužele, R stopník povrchové přímky $RS \parallel QT$. Poloměry základních kruhů jdoucích stopníky Q a R buďtež r a ϱ. Osvětlení zvoleno paprskem s, který má od půdorysny odchylku β, sestrojeny vržené stíny S' a T' na půdorysnu, což vytčeno stranorysem pro základnici $s_1 = y$.

Uvažujme nejprve o povrchové přímce p, jež leží v rovině poledníku kolmého k poledníku světelnému, $p_1 \perp s_1$. Na té jest bodem $\overline{P}$ meze vlastního stínu opět bod, jehož šroubovice má poloměr $r_P = v^0 \operatorname{cotg} \beta = \overline{S_1\overline{P}_1} = \overline{S_1S'}$; tuto délku přeneseme ve smyslu pohybu na p_1, $\overline{S_1\overline{P}_1} = \overline{S_1S'}$. Pak bod $\overline{P}$ má skutečně za tečnu své šroubovice na ploše přímku o spádu $\dfrac{v^0}{r_P} = \dfrac{v^0}{\overline{S_1S'}} = \operatorname{tg} \beta$, t. j. světelný paprsek a patří tedy mezi vlastního stínu.

Za proměnnou povrchovou přímku budiž uvažována přímka průčelná q s bodem meze vlastního stínu $\overline{Q}$ a poloměrem r_Q jeho šroubovice na ploše. Půdorysný stopník tečny šroubovice bodu $\overline{Q}$ budiž Q^0 na vrženém stínu QT', jenž je stopou světelné roviny přímky q; pak vyhovuje tečná rovina v bodě $\overline{Q}$ jako světelná rovina. Nárys podává vztah

$$\frac{z}{r - r_Q} = \frac{v^0}{\varrho} \text{ čili } z = \frac{v^0 (r - r_Q)}{\varrho}.$$

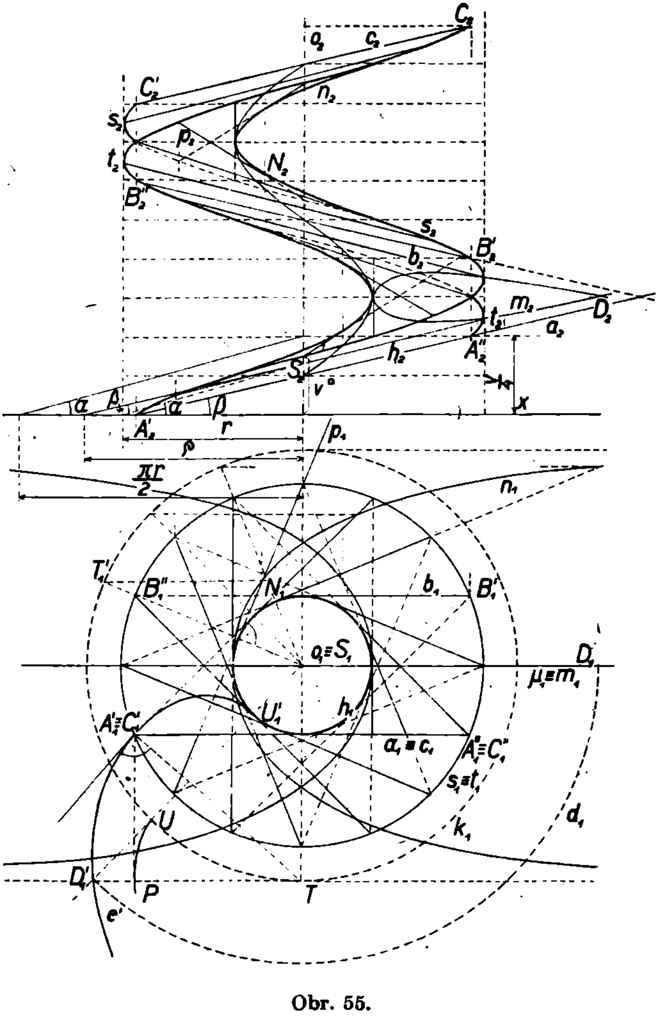
Jelikož $\dfrac{r_Q}{v^0} = \operatorname{cotg} \varepsilon$, kde ε je odchylkou tečny šroubovice od půdorysny, jest $\overline{\overline{Q}_1Q^0} = z \operatorname{cotg} \varepsilon = \dfrac{v^0 (r - r_Q)}{\varrho} \cdot \dfrac{r_Q}{v^0} = \dfrac{(r - r_Q)\, r_Q}{\varrho}$. Odtud plyne $\overline{\overline{Q}_1Q^0} : \overline{\overline{Q}_1Q} = \overline{S_1\overline{Q}_1} : \overline{S_1Q^+}$, je-li Q^+ bod kružnice řídícího kužele, pro který $\overline{S_1Q^+} \perp q_1$. I jsou podobny $\triangle\, Q^+S_1\overline{Q}_1 \sim \triangle\, Q\overline{Q}_1Q^0$; oba trojúhelníky jsou otočeny o pravý úhel, tedy $\overline{Q}_1 Q^+ \perp QT'$ a též $Q^+\overline{Q}_1 \perp RS'$. Patrně $\triangle\, Q^+S_1\overline{P}_1 \cong \triangle\, RS_1S'$ a ježto oba trojúhelníky jsou o pravý úhel otočeny, jest $Q^+\overline{Q}_1 \perp RS'$; prochází tedy $Q^+\overline{Q}_1$ pólem $\overline{P}_1$. Na každém průměru $R(R)$ základního kruhu o poloměru ϱ obdržíme takto dva body půdorysu křivky jako paty kolmic sestrojených pólem $\overline{P}_1$ na spojnice RS' a $(R)S'$. Půdorys meze vlastního stínu je křivka čtvrtého stupně, protože paprsky procházející jejím dvojným bodem $\overline{P}_1$ protínají křivku ještě ve dvou bodech; její tvar řídí se polohou pólu k základní kružnici poloměru ϱ řídící kuželové plochy o výšce v^0.

30. Kosoúhlá zborcená šroubová plocha otevřená. Bylo o ní jednáno v čl. 26, kde v obr. 49 byly sestrojeny oba tvary e' a e'' normálních řezů této plochy (evolventa protáhlá a zkrácená), mezi nimiž se nachází normální řez e (evolventa prostá) rozvinutelné plochy šroubové.

Zvolme kosoúhlou otevřenou šroubovou plochu osou o kolmou k půdorysně. Omezení dvěma shodnými šroubovicemi s a t a povrchovými přímkami $a \parallel c$ jednoho závitu, který je povrchovou přímkou b půlen, dále hrdlovou šroubovicí h, jejíž poloměr jest nejkratší vzdáleností osy a povrchové přímky je patrno z obrazce 55. Závit rozdělen na 16 stejných intervalů, povrchová přímka a sestrojena průčelně jedním koncovým bodem A' na šroubovici s v půdorysně a druhým A'' o čtvrtinu výšky závitu vzdáleným od půdorysny na šroubovici t, body A' a A''_1 jsou dělícími body v půdorysně ve vzdálenosti 6 šestnáctin kružnice $s_1 \equiv t_1$.

Rektifikací čtvrtkružnice sestrojena odchylka α a redukovaná výška závitu v^0 a z té pak kružnice k poloměru ϱ řídícího kužele plochy o výšce v^0; vrcholem S kužele prochází průčelná přímka kužele rovnoběžně s průčelnou přímkou a šroubové plochy.

Normálný řez půdorysnou je zkrácená evolventa e' procházející bodem A'. Sestrojíme-li tečnu kružnice k rovno-


C2
o2
c2
C2'
n2
s2
p2
t2
N2
B2''
s2
B2'
b2
m2
D2
t2
a2
h2
A2''
S2
v°
x
α
β
α
β
A2'
r
ρ
πr/2
p1
n1
T1'
B1''
N1
b1
B1'
o1≡S1
D1
μ1≡m1
U1'
h1
A1'≡C1'
a1≡c1
A1''≡C1''
s1≡t1
U
k1
d1
D1'
P
T
e'

Obr. 55.

běžnou s a_1 s dotykovým bodem T a na ní patu P kolmice sestrojené bodem A' normálního řezu, obdržíme bod vratu U prosté evolventy e kružnice k, naneseme-li délku TP na k; na poloměru o_1U jest dvojný bod D'_1 zkrácené evolventy e'. Tečna v bodě A' je kolmá ku $A'T$, bod T je okamžitý střed otáčení.

V obrazci sestrojena část hlavního poledníku m přímo z bodů; nárys m_2 má a_2 a b_2 za asymptoty, meridiánová křivka má dvojný bod D, jenž odpovídá bodu D'; nachází se s ním na dvojné šroubovici d plochy.

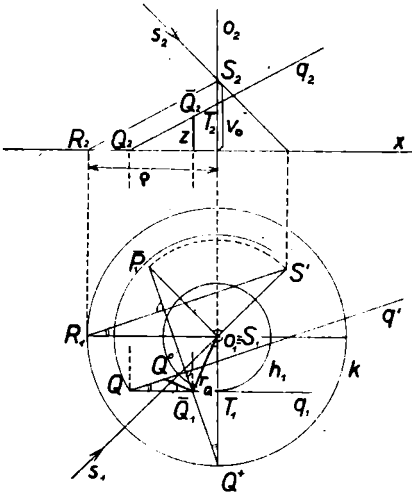
Pro rozvinutelnou šroubovou plochu má poledník bod vratu na šroubovici vratu; je-li normální řez zborcené plochy šroubové protáhlá evolventa bez dvojného bodu, nemá ho ani křivka meridiánová.

Obrysem půdorysu jest — mimo uvedené vymezení — *půdorys h_1 hrdlové šroubovice.*

Obrysem nárysu jest obalová křivka n_2 nárysů povrchových přímek, která sestává z hyperbolických větví, dotýkajících se nárysu h_2 hrdlové šroubovice střídavě z pravé a levé strany. Dotykové body určíme některou z method uvedených u plochy zavřené, pokládáme-li křivku n za skutečný obrys vzhledem k nárysně, t. j. prokládáme povrchovými přímkami roviny nárysně promítací a určujeme jejich dotykové body. Nárysně promítací tečná rovina obsahuje i nárysně promítací tečnu normálního řezu plochy, jenž prochází hledaným bodem na př. N na povrchové přímce p. Sestrojíme tedy třeba okamžitý střed otáčení T' na k, $T'o_1 \perp p_1$, $T'N_1 \parallel x$ a z půdorysu se odvodí nárys N_2 a tak celá křivka n_2; v obr. z půdorysu n_1 odvozen též bod křivky n_2 na šroubovici.

Řídícími útvary této zborcené plochy jsou řídící šroubovice s, souosá řídící válcová plocha o základní kružnici h_1 v půdorysně a úběžná křivka rovněž souosé rotační kuželové plochy, určené stálým úhlem, který svírají povrchové přímky zborcené plochy s její osou.

Otevřené šroubové kosoúhlé plochy se používá na vřetenu přístroje, jímž se pořizují otvory v slabších dřevěných deskách; jest to t. zv. *svidřík* (též *rychlovrtka*). Obě omezující šroubovice splývají tu zase v jednu dvojnou šroubovici na ploše. Je-li na povrchové přímce $A'A''$ bod A''_1 úhlově vzdálen od bodu A' o $\frac{3}{8}$ otočky, měří také jeho převýšení v nárysu $\frac{3}{8}$ výšky závitu. Tím obdržíme ostrou hranu vřetene, podobně jako na ploše vývrtkové.



Obr. 56.

Body meze vlastního stínu za osvětlení rovnoběžného na otevřené kosoúhlé šroubové ploše vyšetříme opět methodou šroubovic, procházejících hledanými body meze, sestrojíce řídící kuželovou plochu o výšce v^0, vrcholu S a kružnici k o poloměru ϱ, dále vržený stín S' vrcholu na půdorysnu a pól $\overline{P}_1$ na poledníku kolmém k světelnému, $\overline{S_1\overline{P}_1} = \overline{S_1S'}$ (obr. 56).

Bod Q meze vlastního stínu na povrchové přímce q má vzdálenost od půdorysny z a z úměrnosti v nárysně plyne $z = \dfrac{v^0}{\varrho} \cdot \overline{Q\overline{Q}_1}$. Šroubovice bodem $\overline{Q}$ na ploše má základní kruh o poloměru $r_{\overline{Q}} = v^0 \operatorname{cotg} \varepsilon$, je-li ε odchylkou její tečny od půdorysny; půdorysný stopník Q^0 této tečny musí opět padnouti na půdorysnou stopu světelné roviny procházející přímkou q, t. j. na vržený stín $q' \parallel RS'$. I musí $\overline{Q_1}Q^0 = z \,.$ $. \operatorname{cotg} \varepsilon = \frac{v^0}{\cdot \varrho} \,.\, \overline{Q\overline{Q_1}} \cdot \frac{r_{\overline{Q}}}{v^0} = \overline{Q\overline{Q_1}} \cdot \frac{r_{\overline{Q}}}{\varrho}$. Odtud plyne úměra $\overline{\overline{Q_1}Q^0} : \overline{Q\overline{Q_1}} = r_Q : \varrho$, t. j. $\overline{Q_1}Q^0 : Q\overline{Q_1} = S_1\overline{Q_1} : \overline{Q^+S_1}$ kde Q^+ leží na kružnici řídícího kužele, $Q^+S_1 \perp RS_1$. Z rovnosti úhlů jedním obloučkem označených a z této úměry jest patrna podobnost $\triangle\, Q\overline{Q_1}Q^0 \sim \triangle\, Q^+S_1\overline{Q_1}$ a ježto oba trojúhelníky mají sdružené strany vzájemně kolmé, jest $Q^+\overline{Q_1} \perp QQ^0$, t. j. $Q^+\overline{Q_1} \perp RS'$. Protože $\triangle\, RS_1S' \cong \triangle\, Q^+S_1\overline{P_1}$ a oba trojúhelníky jsou o pravý úhel otočeny, jest i $Q^+\overline{P_1} \perp RS'$. I leží bod $\overline{Q_1}$ na kolmici sestrojené pólem $\overline{P_1}$ ku RS', čímž je dána konstrukce půdorysu meze vlastního stínu. Pól $\overline{P_1}$ jest dvojným bodem křivky, jak plyne z jejího průběhu. Sestrojení této unikursální křivky 4. řádu jest takto vyjádřeno: Na kružnici h_1 a soustředné kružnici o poloměru ϱ určuje proměnný poloměr body T_1 a Q^+. Spojnice $Q^+\overline{P_1}$ (s pevným pólem) určí na tečně kružnice h_1 v bodě T_1 bod $\overline{Q_1}$ křivky.

Rovinný řez a průsečík s přímkou šroubových ploch přímkových. Připojujeme tuto poznámku týkající se všech přímkových šroubových ploch.

Rovinný průsek každé zborcené plochy sestrojujeme z průsečíků jednotlivých povrchových přímek s rovinou sečnou. Určíme-li pro průsečík tečnou rovinu zborcené plochy, poskytne její průsečnice s rovinou sečnou tečnu průsečné křivky. U zborcených ploch šroubových použije se často při sestrojování takového průsečíku na místě promítací roviny povrchové přímky některé její roviny tečné, na př. roviny určené tečnou k normálnému řezu. Pro přímku povrchovou rozvinutelné plochy šroubové poskytne tato rovina, dotýkající se podél celé přímky, současně bod průseku i s jeho tečnou.

Jinak sestrojíme rovinný průsek transformací na průsek promítací rovinou. Aby nebylo třeba sestrojovati pomocný průmět plochy, lze konstrukci zaříditi také tak, že sečnou rovinu podrobíme šroubovému pohybu určenému danou plochou, až stane se rovinou promítací, sestrojíme řez a v opačném smyslu sešroubujeme jej do původní polohy sečné roviny obecné polohy. K přešroubování roviny do polohy roviny promítací lze použíti jejích hlavních přímek a bodu na ose plochy, v rovině kolmé k ose pohybu obdržíme prostou rotací, které odpovídá určité posunutí, o zlomek výšky závitu pro všechny body.

Rovinný řez pravoúhlých šroubových ploch jest ovšem dán průsečíky přímek povrchových s příslušnými hlavními přímkami sečné roviny.

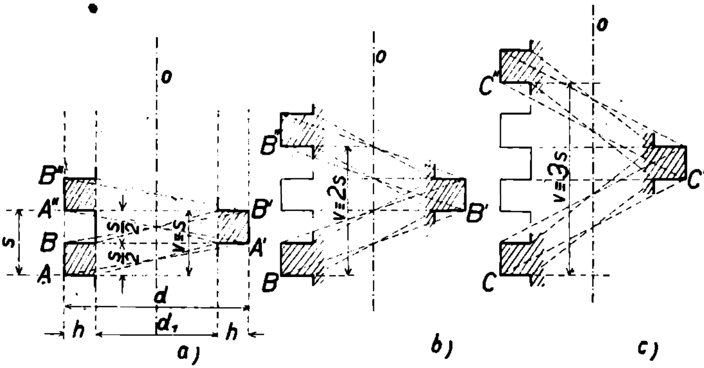
Průsečíky přímky se šroubovou plochou přímkovou určíme buď

1. *promítací rovinou*, kterou přímkou položíme a řezem plochy touto rovinou, nebo

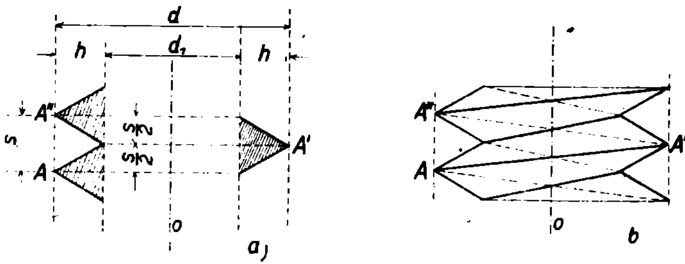
2. *šroubovým pohybem*. Přikážeme dané přímce p šroubový pohyb daný plochou. Je-li X hledaný průsečík přímky s plochou, prochází jím povrchová přímka plochy a šroubovice na nově vytvořené šroubové ploše. Šroubovým pohybem do některé roviny kolmé k ose (na př. půdorysny) přijde bod X do průsečíku stop obou šroubových ploch. Kružnice sestrojená průsečíkem (X) obou těchto evolvent (nebo přímky a evolventy při ploše pravoúhlé) jest průmětem společné šroubovice a určí na průmětu dané přímky p průměty hledaných průsečíků X.

31. Zborcené šroubové plochy v praxi. Mimo použití přímého šroubového konoidu (čl. 27) na točitém schodišti hrají obě uzavřené šroubové plochy zborcené důležitou úlohu v celé strojnické technice. Jsou základem *šroubů spojovacích* nebo *upevňovacích*, jež zovou se *ostré šrouby* a jsou vytvořeny kosoúhlými uzavřenými šroubovými plochami (vývrtkovými) a *šroubů pohybových*, jež se nazývají *tupé* nebo *ploché šrouby*; jsou vytvořeny pravoúhlými uzavřenými šroubovými plochami a realisují převod pohybu točného v pohyb posuvný.

Jádrem každého šroubu jest *vřeteno*, jež jest rotační válec. K tomu jest u šroubu tupého připojen pravoúhelník (obr. 57) a u šroubu ostrého trojúhelník rovnoramenný (se základnou na vřetenu) nebo rovnostranný (obr. 58), jež leží v rovině



Obr. 57.



Obr. 58.

osového řezu a šroubovým pohybem kolem osy *o*, tedy šroubováním uzavřeného obrazce vytvořují těleso přiléhající k vřetenu, t. zv. *tupý* (*plochý*) nebo *ostrý závit*. Body A a B na tupém závitu a bod A závitu ostrého vytvořují šroubovicové hrany. Jest různá praxe rýsování šroubů, ustálená normalisačními předpisy také pro strojnické kreslení. Nárysy šroubovic (sinusoidy) nahrazují se somenými čarami, jichž strany jsou průměty tětiv šroubovic na polovičkách výšky závitu.

Jestliže na jedné výšce závitu se nachází jediný profil, na př. pravoúhelník v obr. 57a, sluje *šroub jednoduchý*; výška závitu (v praxi též *stoupání*), t. zv. *rozteč* $s = \overline{AA''} = 2 \,.\, \overline{AB}$. U jednoduchého ostrého šroubu v obr. 58 je výškou závitu rozteč $s = \overline{A'A''}$ rovné základně profilového trojúhelníku; obr. 58b ukazuje pohled na ostrý jednoduchý šroub.

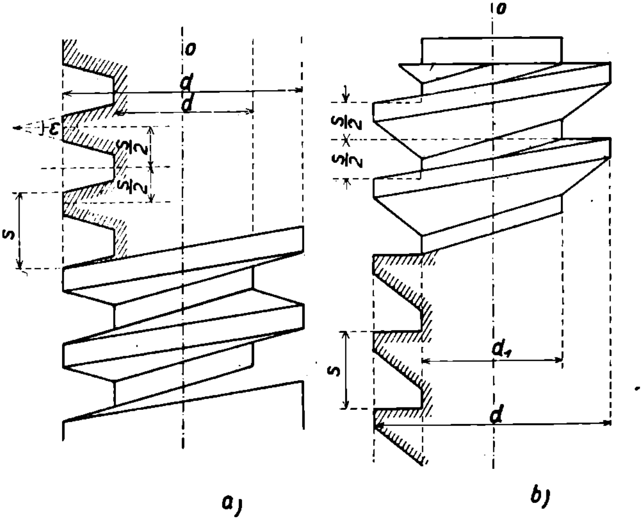
V obou obrazcích a) jsou vyznačeny na šroubech *průměry* $d > d_1$, *d průměr* šroubu a d_1 *průměr jádra*, podle normal. předpisů *velký* a *malý průměr. Hloubka závitu* $h = \frac{1}{2}(d - d_1)$.

Šroubuje-li se současně několik profilů, což bývá obyčejně na šroubech plochých, vzniká *závit n-násobný, n-chodý*; šroub má pak n rovnoběžných závitů vzniklých z n tvořících obrazců; n značí též počet profilů (také period) na jedné výšce závitu čili v jednom stoupání, výška závitu $v = n \,.\, s$. V obr. 57b je vyznačen nárys dvojchodého a v obr. 57c trojchodého plochého šroubu s výškou závitu $v_2 = 2s$ a $v_3 = 3s$, ponecháme-li výšku $v_1 = s$ pro šroub jednoduchý. Je-li n sudé (v obr. b) je $n = 2$), je v řezu proti zubu zub, pro liché n (v obr. c) je $n = 3$) je proti zubu mezera. Vyznačíme-li na př. u trojchodého šroubu profil C a nad ním nad výškou závitu $v_3 = 3s$ profil C'', jest profil protější C' pro polovinu obrátky právě v polovici mezi oběma profily levými, tedy proti mezeře.

Vřeteno se závitem se zove *svorník. Šroubová matice* je těleso s dutým prostorem, kterým se může shodný svorník šroubovati.

Závit plochý bývá nahrazen *závitem lichoběžníkovým* (obr. 59a, b), meridiánovým profilem je buď lichoběžník rovnoramenný (s úhlem $\varepsilon = 29°$ obou ramen) nebo lichoběžník pravoúhlý; v obr. jsou pro obě alternativy vytčeny rozteče a oba průměry jako dříve. Šrouby jsou oba jednoduché a sestrojeny v řezu i v nárysu. Je-li profilem pravoúhlý lichoběžník, jsou na šroubu zastoupeny i pravoúhlá i kosoúhlá uzavřená plocha šroubová. Tyto šrouby mohou ovšem také býti vícenásobné.

V strojnictví se užívá hlavně šroubů s jednoduchým ostrým závitem a to zpravidla pravotočivým (pravým). Profilem

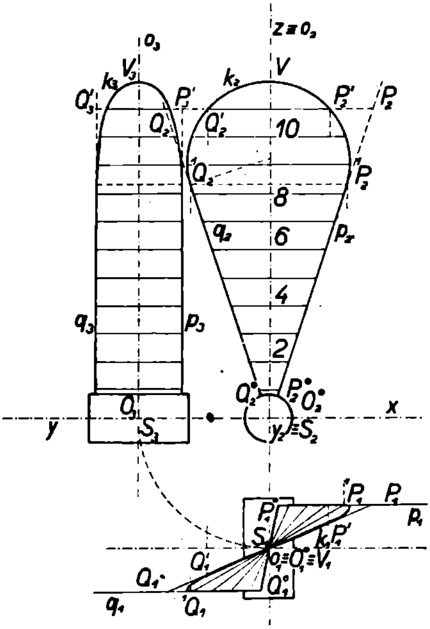


Obr. 59.

závitu je na př. rovnoramenný trojúhelník s vrcholovým úhlem 55° při vrcholu při šroubu Whitworthovu se zaokrouhlenými rohy a tedy s otupěnými šroubovicovými hranami i zářezy. Normální řezy při profilech doplněných na přesné trojúhelníky jsou Archimedovy spirály, které se sestrojí interpolací z bodů v mezikruží, do něhož se promítá závit ve směru osy šroubu. Pak se připojí kružnice velkého a malého průměru.

Šrouby okrouhlé patří mezi obecné plochy šroubové a sice cyklické, protože jejich profilem je vlnovka složená z kruhových oblouků.

Zborcených ploch se užívá při konstrukcích vzdušných a lodních propellerů a to jako lícních (předních) *ploch na jejich křídlech.*



Obr. 60.

1. řešení: hyperbolickým paraboloidem. Z důvodů methodických ponechal jsem toto použití hyperbolického paraboloidu až do odstavce pro praktické užití šroubových ploch. Podávám toliko základní princip této důležité aplikace na jednom křídle spojeném s nábojem, rotačním válcem, jehož osa y je osou celého šroubu. V obr. 60 sestrojeny půdorys, nárys a stranorys křídla, jehož *střední přímka* (*osa křídla*) $o \perp y$ prochází středem S náboje. Průmět ve směru $o \parallel z$ je půdorysem, průmět ve směru osy náboje nárysem, průmět na rovinu (y, z) stranorysem. Křídlo zvoleno v náryse dvěma obrysovými přímkami p_2 a q_2, procházejícími nárysem $S_2 \equiv y_2$, jejich půdorysy $p_1 \parallel q_1 \parallel x$ protínají kolmoos u y. Nárysy jsou spojeny kruhovým obrysovým obloukem $\widehat{{}^1P_2V_2{}^1Q_2}$ kružnice k_2.

Přímky o, p, q jako řídící útvary určují zborcenou plochu, protože pak $p_1 \parallel q_1$, jest jí hyperbolický paraboloid; jeho tvořící povrchové přímky jsou rovnoběžny s půdorysnou a tvoří v půdorysně paprskový svazek o středu o_1. Jednotlivé povrchové přímky se odvodí do půdorysu z průsečíků na př. P a Q, ... s přímkami p a q, na nichž při rovnoměrném rozdělení tvoří měřítka, osa y je tvořící přímkou hyperbolického paraboloidu. Obě řídící roviny jsou (půdorysna a nárysna) vzájemně kolmé; tedy *zborcenou plochou křídla jest rovnoosý hyperbolický paraboloid.*

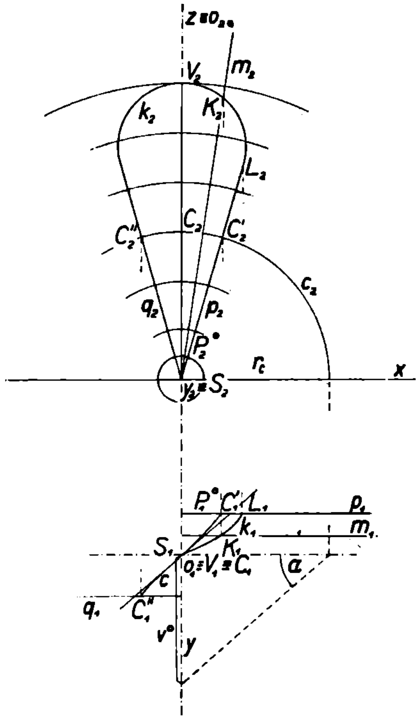
Půdorys k_1 křivé hrany k křídla se odvodí z průsečíků P' a Q', ... s jednotlivými tvořícími přímkami. Pak lze též snadno sestrojiti stranorys křivky k a celého křídla i s nábojem.

Osou plochy je rovnoběžka s osou x, vrcholem bod S, vrcholovou tečnou rovinou je rovina (o, y).

V podrobném provedení bylo by třeba sestrojiti průsečnou křivku plochy hyperbolického paraboloidu s povrchovou rotační plochou náboje.

2. řešení: *šroubovým konoidem.* Lícní plochou téhož křídla zvolena pravoúhlá uzavřená plocha šroubová. Poloha a tvar křídla s nábojem zvoleny jako v obrazci předcházejícím. Osou náboje a celého šroubu je zase osa y, $o \perp y$ v středu náboje S je opět osou (střední přímkou) křídla, $o \parallel z$. Tato přímka podrobena šroubovému pohybu kolem osy y, šroubový pohyb určen smyslem pohybu a redukovanou výškou závitu v^0 (obr. 61).

Jednotlivé body přímky o opisují šroubovice, které jsou takto přesně určeny. Na př. bod C, který půlí vzdálenost nejodlehlejšího bodu V od osy y, opisuje šroubovici c o poloměru r_C. Šroubová plocha křídla je opět omezena přímkami p a q jako polohami šroubující se přímky o (volíme nárysy a z úhlů otočení $\widehat{qo} = \widehat{op}$ úměrností odvodíme v poměru $v^0 : r_C$ velikost posunutí těchto přímek p a q ve směru osy y, čímž sestrojeny půdorysy $p_1 \parallel q_1 \parallel x$). Půdorys k_1 omezující křivky k sestrojíme pomocí jejích bodů $K, L, \ldots$; zvolíme K_2, tím prochází nárys m_2 povrchové přímky, její půdorys $m_1 \parallel x$ sestrojí se opět z úměrnosti posunutí s rotacemi a na m_1 odvodí se ordinálou K_1. Křivka k_1 má v bodě V_1 za tečnu obratu tečnu šroubovice bodu V, což plyne ze souměrnosti. Křivka k jest vlastně částí průniku nárysně promítací rotační válcové plochy, o řídící křivce k_2, s tímto šroubovým konoidem.



Obr. 61.

Body půdorysu c_1 šroubovice c se odvodí z nárysu na příslušné půdorysy povrchových přímek, na př. C'_1, C''_1. Půdorysem c_1 je část sinoidy s bodem obratu C_1, tečna v něm je dána zase spádem $\operatorname{tg} \alpha = v^0 : r_C$.

V podrobném provedení bylo by opět třeba sestrojiti průsečnou křivku plochy šroubového konoidu s povrchovou rotační plochou náboje.

Oblouky šroubovic na křídle lze v půdorysu nahraditi tečnami obratu. Šroubovou plochu křídla lze nahraditi dotykovým hyperbolickým paraboloidem podél přímky *o*.

Zadní plochy křídla v obou řešeních nejsou zborcené, ale utvořeny zkušenostmi mechanickými, zvláště s ohledem na tloušťku stěn křídla v různých jeho částech. I určují se jednotlivými příčními profily a jsou plochami grafickými.

Šroubový pohyb nachází hojného použití v prostorové kinematické geometrii, ba tvoří její podstatnou součást. Zmiňujejeme se zde o dvou základních úlohách.

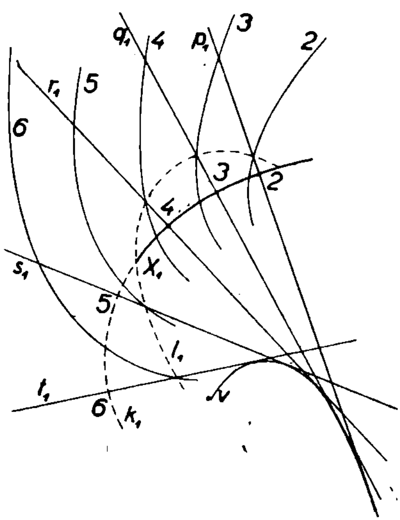
α) *Spojiti dva šroubové pohyby dané mimoběžnými osami, redukovanými výškami závitu a smyslem pohybu.* Jeden pohyb se převádí v druhý postupným vzájemným dotykem dvou pomocných zborcených šroubových ploch, t. zv. *axoidů;* společná tvořící přímka je kolmá k ose obou mimoběžných os daných pohybů a přísluší jí na obou plochách společný parametr distribuce.

β) Jiné použití týká se *tečnového šroubového pohybu*. Úlohu přemístění nepromněnné prostorové soustavy šroubovým pohybem kolem jisté osy jsme řešili a osu sestrojili (čl. 25). Jde-li o přemístění velmi malé, spojujeme pak dvě blízké polohy nepromněnné prostorové soustavy malým šroubovým pohybem kolem *okamžité osy*; při tom opíší body soustavy elementy souosých šroubovic téhož smyslu a téže výšky závitu, spojnice bodových družin jsou tečnami těchto šroubovic. Studium souhrnu normál šroubovic souvisí se znalostí soustav přímkové geometrie.

32. Použití při úlohách na ploše topografické. Zborcené plochy jsou zastoupeny také mezi plochami grafickými, jejichž výtvarného zákona neznáme. Grafické plochy určujeme osnovou křivek, mezi sousedními křivkami tvoříme plochu přibližně; tyto empirické křivky stanovíme graficky bodovou řadou, již získáme pokusy nebo měřením.

Grafická zborcená plocha je určena zborceným svazkem tvořících povrchových přímek stejně jako plocha zákonitě vytvořená. I může přibližnost vycházeti u ní jen z daných útvarů řídících.

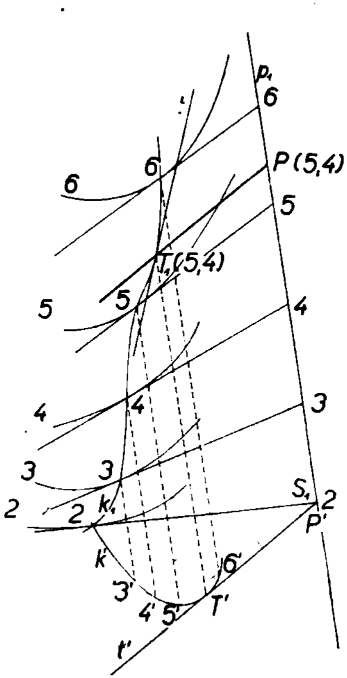
Hlavního použití doznávají grafické zborcené plochy při plochách topografických, jež jsou dány soustavou vrstevnic. Konstrukcí získaných na ploše topografické lze použíti na každé ploše grafické; jest totiž obdobně vytvořena.



Obr. 62.

Průsečíky křivky s plochou topografickou se řeší pomocnou plochou, kterou položíme danou křivkou. Touto plochou může býti horizontální plocha válcová libovolného směru povrchových přímek, ale také plocha zborcená.

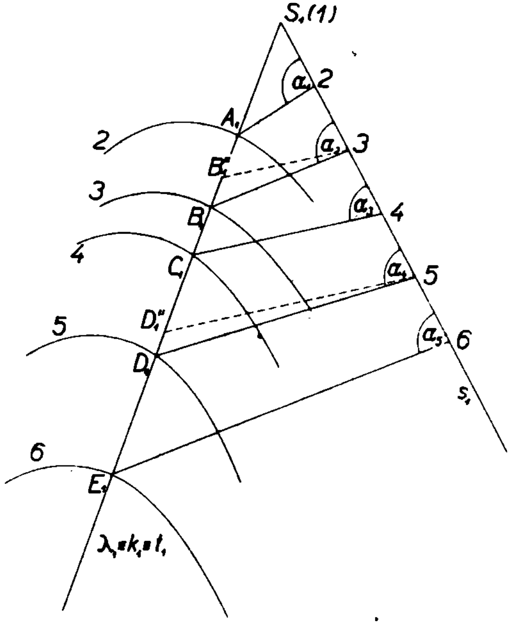
V obr. 62 dána topografická plocha soustavou neprotínajících se vrstevnic a empirická křivka *k*, daná bodovou řadou v těchže úrovních jako jsou vrstevnice a sestrojen průsečík X obou útvarů. Pomocnou zborcenou plochu určíme tak, že body křivky sestrojíme její normály vodorovné polohy. Jsou kolmé k tečnám křivky a tento pravý úhel se kolmým promítáním neruší. Jsou tedy půdorysy $p_1, q_1, r_1, \ldots$ těchto normál normálami křivky k_1 a obalují její evolutu v. Souhrn přímek $p, q, r, \ldots$ je zborcená plocha, konoid, jehož řídící rovinou je průmětna a dalšími řídícími útvary křivka k a svislá válcová plocha s řídící křivkou v. Průsek dané plochy s tímto pomocným konoidem, který určíme průsečíky vrstevnic s příslušnými povrchovými přímkami konoidu, je křivka l; ta určí na křivce k hledaný bod X, který rozhraničuje viditelnou a neviditelnou část křivky vzhledem k ploše topografické.



Obr. 63.

Danou přímkou sestrojiti tečnou rovinu k ploše topografické. Opět použijeme plochy konoidu, který má za řídící útvary danou přímku p, danou topografickou plochu a průmětnu (obr. 63).

Body přímky sestrojíme tečny k vrstevnicím, jichž kóty jsou stejné jako kóty bodů a tím obdržíme povrchové přímky konoidu a jeho dotykovou křivku k s topografickou plochou. Přímka PT konoidu, procházející dotykovým bodem T a bodem P na řídící přímce, leží ovšem v tečné rovině a rovněž tečna t křivky k v tom bodě dotykovém. V kosoúhlém průmětu celého vztahu ve směru p do roviny třeba úrovně 2 obdržíme křivku k' a bod P'',



Obr. 64.

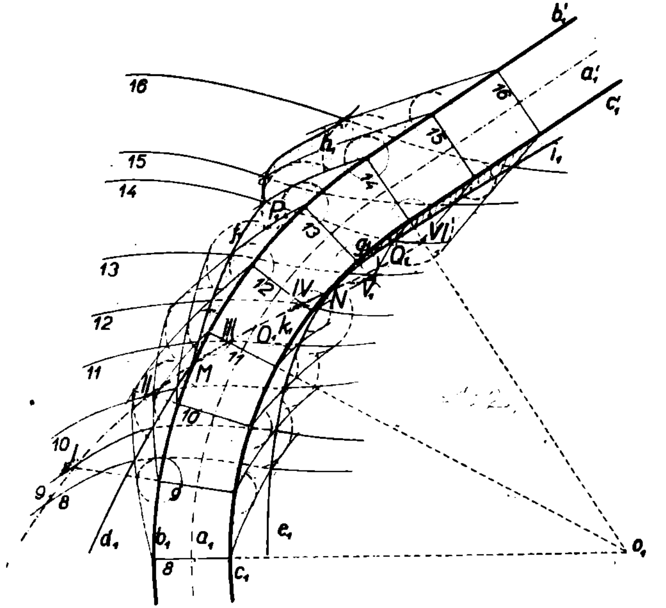
jím sestrojená tečna t' ke k' dá dotykový bod T' a zpětný promítací paprsek určí dotykový bod T žádané tečné roviny (p, T). Tečná rovina dotýká se konoidu v obou bodech P a T, i jest torsální jeho rovinou a PT torsální přímkou. Přibližnou polohu bodu T lze stanoviti z okolnosti, že sousední povrchové přímky jsou téměř rovnoběžné.

Středové osvětlení topografické plochy. Nejde nám o podrobné provedení úlohy, která se řeší kuželovou plochou, jež má vrchol v daném středu osvětlení S a dotýká se topografické plochy v skutečném obrysu pro svítící bod S jako střed promítání. Konstrukce vyžaduje pořízení několika vertikálních profilů svazkem rovin procházejících vertikálou středu S. Úlohy se užívá na př. ve vojenství, aby se určil neostřelovaný prostor z kóty S. Pro rychlé určení bodu skutečného obrysu v rovině takového profilu lze použíti zase pomocného konoidu, který řeší úlohu bez sestrojení profilu a tečny k němu ve sklopení (obr. 64).

Bodem S sestrojíme libovolnou přímku s a vystupňujeme ji. Abychom sestrojili tečnu bodem S v rovině svislé λ k profilové křivce k topografické plochy, sestrojíme body $A, B, C, \ldots$ tohoto profilu a spojíme je s body těchže kót na pomocné přímce. Tyto vodorovné spojnice svírají s průmětem s_1 úhly $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5$. Spojnice $C4$ nejmenší odchylky udává bod C jako přibližný dotykový bod hledaný, ovšem při náležité hustotě vrstevnic. Učiníme-li ještě $3B'' \parallel 5D'' \parallel C4$, leží body B'' a D'' na spojnici SC jako přibližné tečně vskutku nad plochou topografickou.

Opět je tu sestrojen pomocný konoid, mající řídící přímku s, řídící křivku k a řídící půdorysnu. Tvořící povrchová přímka $C4$ jest jeho torsální přímkou s kuspidálním bodem v nekonečnu; proto tečna řídící křivky k v bodě C protíná přímku s v bodě S.

33. Zřízení komunikace terénem. Jest to jeden z hlavních konstrukčních úkolů na topografické ploše; jde o technické projekty cest a drah, zřízení plavidel, regulací a podobné úkoly. Takový návrh se řeší průmětem na podrobný vrstevnicový plán terénu na základě přesného zaměření. Navržené technické těleso se stanoví podélným profilem a profily příčnými. Podélný profil jest dán rozvinutím svislé promítací válcové plochy osy tohoto tělesa na horní ploše cesty a pod., jež se zove *planýrovací plochou* nebo *planýrkou*. Tato plocha jest zborcená. Je určena střední křivkou (osou) a na planýrce. Jest konoidem, jehož tvořící povrchové přímky jsou opět vodorovné normály křivky a, řídící rovinou průmětna. Třetím řídícím útvarem je, jak jsme uvedli v předešlém článku, promítací válcová plocha, jež prochází evolutou křivky a_1



Obr. 65.

v půdorysně. Základní konstrukcí jest zapojení navrženého komunikačního tělesa do terénu. Všimněme si této úlohy.

V obr. 65 zvolen terén čili topografická plocha soustavou vrstevnic a plocha projektu střední křivkou a, která se empiricky stanoví podélným profilem a hlavně body s kótami vrstevnic. Vodorovné normály křivky, tedy normály jejího půdorysu, určují planýrku. Šířka cesty jeví se v plánu na přímkách konoidu, přeneseme-li polovici od osy na obě strany obdržíme rovnoběžné půdorysy b_1 a c_1 ku křivce a_1, křivky b a c vymezují horní plochu tělesa; takto omezená část zborcené plochy zove se *korunou* a hrany b a c *korunními hranami*.

Navržená cesta stále stoupá. Za kótou 14 prodlužuje se přímou osou a' i korunními hranami b' a c', jest nakloněnou rovinou. Vzhledem k tomu, že neřešíme celý návrh v podrobnostech, ale zdůrazňujeme jen hlavní úkol této zborcené plochy stavebního inženýrství, nepřipojujeme měřítko, jinak nutné a nebéřeme zřetel na velikost spádů; ani kóty nevycházejí z praktického příkladu.

Důležitými jsou průsečíky O, M, N křivek a, b, c s terénem. Sestrojí se pomocnou *nulovou křivkou k*, průsečnou to křivkou terénu a navržené zborcené plochy, kterou obdržíme průsečíky I, II, III, IV, V vrstevnic téže kóty; planýrovací plocha má za vrstevnice ovšem své povrchové přímky tvořící.

V našem obrazci je půdorys a_1 osy silničního tělesa kruhový. Při stejnoměrném stoupání cesty jest tedy planýrovací plochou pravoúhlá uzavřená šroubová plocha se svislou osou o.

Připojení komunikace k terénu stane se pomocí násypů a zářezů omezených plochami stejných spádů, jež v nákresu nebyly též určeny, proložených korunními hranami. Vrstevnice těchto ploch sestrojí se použitím svahových kuželů, jak v obrazci je vyznačeno; poloměry jejich podstav v jednotlivých úrovních se určí pomocí zmíněných spádů. Vrstevnice jsou obalovými křivkami těchto kruhových podstav, jejichž středy jsou na svislých osách kuželů, které mají vrcholy v průsečících vrstevnic a korunních hran silničního tělesa.

Tyto násypové a zářezové plochy, jejichž rozhraní jsou bod M a N nulové křivky, končí v průsečných křivkách d, e, f, g, h, i s terénem. Body P a Q oddělují zářez u plochy zborcené od zářezu nakloněnou rovinou cesty. Úplné řešení vyžadovalo by ovšem ještě navrhnouti podél cesty v zářezu příkopy k odvádění vody k bodům M a N.

Cesta k vědění

Brož. svazky formátu B6.

1. *Schwarz:* O rovnicích. 2. vyd. 46,—.
2. *Petržílka-Slavík:* Piezoelektřina a její použití v technické praxi. 2. vyd. se chystá.
3. *Ilkovič:* Polarografie. Rozebráno.
4. *Holubář:* O methodách rovinných konstrukcí. Rozebráno.
5. *Strnad:* Technika zvukového filmu. Rozebráno.
6. *Link:* Jak poznává astrofysika vesmír? Rozebráno.
7. *Hruška:* Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. Rozebráno.
8. *Okáč:* Výklad k základním operacím v chemické analyse. 2. vyd. v tisku.
9. *Sahánek:* Vznik světla v plynech. Rozebráno.
10. *Seifert:* Imaginární elementy v geometrii. Rozebráno.
11. *Link:* Lety do stratosféry a výzkum vysoké atmosféry. Rozebráno.
12. *Pleskot:* Spojnicové nomogramy. 2. vyd. 40,—.
13. *Tomíček:* Potenciometrické titrace. 28,60.
14. *Sahánek:* Televise. Rozebráno.
15. *Pírko:* O souřadnicích. Rozebráno.
16. *Zahradníček:* Mechanické kmity. Rozebráno.
17. *Okáč:* Analytické reakce. I. Reakce kationtů. 2. vyd. 44,—.
18. *Klapka:* Jak se studují geometrické útvary v prostoru. Část I. 2. vyd. 28,—.
19. *Okáč:* Analytické reakce. II. Reakce aniontů. 2. vyd. 28,—.
20. *Čech:* Co je a nač je vyšší matematika? Rozebráno.
21. *Čupr:* Aritmetické hry a zábavy. 2. vyd. se chystá.
22. *Janko:* Jak vytváří statistika obrazy světa a života. Díl I. 2. vyd. v tisku.

23. *Klapka:* Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část. 2. vyd. 40,—.
24. *Kladivo:* Měřické chyby a jejich vyrovnání. Rozebráno.
25. *Ryšavý:* Vektory a tensory. 2. vyd. se chystá.
26. *Janko:* Jak vytváří statistika obrazy světa a života. Díl II. 2. vyd. se chystá.
27. *Klíma:* Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii. Rozebráno.
28. *Čupr:* Numerické řešení rovnic. 2. vyd. v tisku.
29. *Klíma-Šimek:* Kamenořez. Rozebráno.
30. *Potužák:* Praktická geometrie. Část I. 2. vyd. se chystá.
31. *Katětov:* Jaká je logická výstavba matematiky? 46,—.
32. *Link:* Co víme o hvězdách? V tisku.
33. *Hostinský:* O mnohoúhelnících a mnohostěnech. 22,—.
34. *Zich:* Úvod do filosofie matematiky. 48,—.
35. *Ludmila-Kučera:* Od pravěku k upravenému uhlí. V tisku.
36. *Kounovský:* Zborcené plochy. 46,—.
37. *Běhounek:* K jádru hmoty. Chystá se.
38. *Čupr:* Geometrické hry a zábavy. Chystá se.
39. *Bouška:* Zemský magnetismus. Chystá se.
40. *Milbauer:* Chemie ve fotografii. Chystá se.
41. *Hacar:* Mechanika sluneční soustavy. Chystá se.
42. *Kounovský:* Theoretické základy fotogrammetrie. Chystá se.
43. *Menšík:* Fotogrammetrie. Chystá se.
44. *Kožešník:* Fysikální podobnost a stavba modelů. Chystá se.
45. *Vyšín:* O nekonečných řadách. Chystá se.

OBSAH

Spisovatel Prof. Dr Josef Kounovský

Název díla *Zborcené plochy*

Vydala *Jednota československých matematiků a fysiků*

roku *1947*

V edici *Cesta k vědění, svazek 36*

Za redakce *Dra R. Brdičky, Dra M. A. Valoucha, Dra F. Vyčichla a Dra O. V. Zicha*

Stran *138*

Obrazců *65*

Vytiskla *knihtiskárna Prometheus v Praze VIII*

Vydání *první (1—5500 výtisků)*

Cena *Kčs 46,—*

rozvinutelných, kterou je na př. rotační plocha válcová, u níž, jak čtenář dobře ví, existuje podél přímky jediná rovina tečná.

Tyto a jiné *charakteristické vlastnosti zborcených ploch* a podobné vlastnosti ploch rozvinutelných probírá autor ve své knížce velmi podrobně. Poněvadž lze každou zborcenou plochu aproximovat zborcenou plochou druhého stupně, když jde o konstrukce tečných rovin, probírá autor nejdříve *zborcený hyperboloid* a *hyperbolický paraboloid*. Dále ukazuje, které jsou *technicky významné plochy zborcené vyšších stupňů* a jak jsou určeny.

Šroubové plochy zborcené mají mezi plochami zborcenými zvláštní postavení, poněvadž vznikají také t. zv. šroubovým pohybem přímky. Autor jim věnoval zvláštní odstavec s ohledem na jejich časté použití ve strojnické praxi.

Knížku uzavírá výklad o *použití zborcených ploch v topografii* a v *theorii grafických ploch* vůbec.

Obsahem i výkladem spojuje knížka theorii s praxí a přibližuje čtenáři pojmy, které mají ve stavitelství a ve strojnictví bohaté pole použití.

Kčs 46