

EQUADIFF 5

Karel Kozel; Jan Polášek; M. Vavřincová

Mathematische Methoden zur Berechnung der transonischen Umströmung von dünnen Profilen

In: Michal Greguš (ed.): Equadiff 5, Proceedings of the Fifth Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Bratislava, August 24-28, 1981. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 47. pp. 288--292.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/702308>

Terms of use:

© BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1982

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

MATHEMATISCHE METHODEN ZUR BERECHNUNG DER TRANSONISCHEN UMSTRÖMUNG
VON DÜNNEN PROFILEN

K.Kozel, J.Poláček, M.Vavřincová
Praha, ČSSR

Im Beitrag wird die Formulierung einer Randwertaufgabe für die stationäre potentialc Umströmung von einem isolierten dünnen Profil oder von Systemen Jünner Profile behandelt und einige Eigenschaften der schwachen Lösung dieser Randwertaufgabe erörtert. Für die numerischen Berechnungen dieser Probleme wurde eine modifizierte Netz-Methode, die sogenannte Relaxationsmethode, ausgearbeitet. Es werden einige Resultate der numerischen Berechnungen der ebenen transonischen Umströmung eines dünnen Profils im Kanal und der dreidimensionalen transonischen Umströmung eines pfeilförmigen Flügels im Tunnel angegeben.

I. Formulierung der Randwertaufgabe

Es wird eine stationäre, potentielle transonische Umströmung eines dünnen Körpers in E_3 betrachtet. Die Anströmgeschwindigkeit ist homogen und hat den konstanten Wert U , bzw. die Machzahl M . Das Strömungsfeld kann in diesem Fall durch die Differentialgleichung für das Störungspotential $\Psi(x, \tilde{y}, \tilde{z})$ beschrieben werden.

$$[K - (x+1)\Psi_x]\Psi_{xx} + \Psi_{\tilde{y}\tilde{y}} + \Psi_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0, \quad K = (1 - M_\infty^2)/\delta \quad M_\infty^2, \quad \tilde{y} = \delta M_\infty^2 \tilde{y}, \quad \tilde{z} = \delta M_\infty^2 \tilde{z}, \quad (1)$$

hier ist δ die maximale relative Dicke des umströmten Körpers ($\delta \ll 1$), κ ist die Poissonsche Konstante und m ist eine Konstante, $m \in (0, 2)$, weiter gilt $M_\infty \in \langle M_1, M_2 \rangle$, $0 < M_1 < M_2 \leq 1,4$.

Die Gleichung (1) ist eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom gemischten elliptisch-hyperbolischen Typus. Die Gebiete, in welchen diese Gleichung elliptischen bzw. hyperbolischen Typs ist, sind im voraus unbekannt. Sie ergeben sich erst aus der Lösung der betreffenden Randwertaufgabe. Die Randbedingung an dem umströmten dünnen Körper (die Bedingung der Undurchdringlichkeit) wird in der linearisierten Form

$$\frac{\partial \Psi(x, \pm 0, \tilde{z})}{\partial \tilde{y}} = M_\infty^{m-1} (\rho'_{hd}(x, \tilde{z}) - \alpha) / \delta; \quad x \in \langle 0, x_T(\tilde{z}) \rangle, \quad \tilde{z} \in \langle 0, \tilde{z} \rangle \quad (2)$$

angegeben. Dabei sind $y = f_{h,d}(x, \tilde{z})$ differenzierbare Funktionen, die die Form des oberen (h) bzw. unteren (d) Teiles der Oberfläche des umströmten Körpers angeben. Die konservative Form der Gleichung (1) lautet

$$[K\Psi_x - \frac{\kappa+1}{2}\Psi_x^2]_x + [\Psi_{\tilde{y}}]_{\tilde{y}} + [\Psi_{\tilde{z}}]_{\tilde{z}} = 0. \quad (1a)$$

Für eine zweidimensionale transonische Umströmung eines dünnen Profils ergibt sich aus der Gleichung (1) die Gleichung

$$[K - (\kappa + 1)\varphi_x] \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (3)$$

deren konservative Form lautet

$$[K\varphi_x - \frac{\kappa+1}{2}\varphi_x^2]_x + [\varphi_y]_y = 0. \quad (3a)$$

Bei einer realen transonischen Umströmung entstehen Stosswellen, d.h., es entstehen Flächen, an denen sich Druck und Geschwindigkeit sehr schnell ändern. Bei dem mathematischen Modell muss dann im zweidimensionalen Falle die Möglichkeit der Unstetigkeit erster Ordnung in φ_x, φ_y auf bestimmten Kurven (Stosswellen) zugelassen werden, das heisst, man muss die Lösung im Sinne einer schwachen Lösung suchen. Von der Lösung $\varphi \in C(\Omega)$, Ω ist das betrachtete Gebiet, $\varphi_x, \varphi_y \in K(\Omega)$ die Definition der Funktionsklasse $K(\Omega)$ ist in [1] bzw. [2] angegeben. Sind ausserdem φ_x und φ_y beschränkt, so gehört die Funktion φ zur Klasse $\bar{K}(\Omega)$. Anstelle der Gleichung (3) kann man für die gesuchte Funktion φ die Integralbeziehung

$$\oint_{\Omega} [K\varphi_x - \frac{\kappa+1}{2}\varphi_x^2] d\bar{y} - \varphi_y dx = 0 \quad (4)$$

betrachten. Die Beziehung (4) muss gelten längs jeder stückweisen glatten Jordanschen Kurve $dc \Omega$, die in ihrem Innern keine Punkte des Profils (der Strecke $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $y \cong 0$) enthält. Für jede konkrete Aufgabe, z.B. Umströmung von einem Profil, einem Profiltgitter u.s.w., müssen noch weitere Randbedingungen bzw. Periodizitätsbedingungen erfüllt werden (siehe [2], [3], [4]).

II. Bedingungen längs der Stosswelle

Aus der Beziehung (4) und $\varphi \in \bar{K}(\Omega)$ ergeben sich folgende Bedingungen, die die Lösung längs der Stosswelle erfüllen muss.

$$\langle K\varphi_x - \frac{\kappa+1}{2}\varphi_x^2 \rangle (d\bar{y})_s - \langle \varphi_y \rangle (dx)_s = 0, \quad (5)$$

die Voraussetzung der Wirbelfreiheit führt zu der Bedingung

$$\langle \varphi_x \rangle (dx)_s + \langle \varphi_y \rangle (d\bar{y})_s = 0 \quad , \text{ in dem } \langle f \rangle = f_1 - f_2. \quad (6)$$

Der Sprung $\langle f \rangle$ in einem Punkt der Stosswelle ist die Differenz zwischen dem Limes vor (von links) und hinter (von rechts) der Stosswelle. Weitere Eigenschaften der Lösung längs der Stosswelle bei diesem Modell der transonischen Strömung sind angegeben und bewiesen in [2].

III. Numerische Lösung

Für numerische Berechnungen wird die Netz-Methode angewandt. Die Differenzenapproximation der Lösung ergibt sich aus der Beziehung [4], die längs der Grenze jeder Berechnungszelle erfüllt wird. Allgemein wird ein schiefwinkeliges Netz (x, t) , $\vec{t}^0 = (\cos \tilde{\beta}, \sin \tilde{\beta})$ im Koordinatensystem (x, \tilde{y}) gewählt (siehe [2], [4]). Die Werte von $\varphi_{\tilde{y}} = (\varphi_t - \varphi_x \cos \tilde{\beta}) / \sin \tilde{\beta}$ werden stets durch zentrale Differenzen approximiert. Die Genauigkeit dieser Approximation ist von zweiter Ordnung. Die Werte von φ_x in dem Ausdruck $K\varphi_x - \frac{x+1}{2} \varphi_x^2$ im Punkt $P_{i+\frac{1}{2}, j}$ werden im Falle von $V_{i,j} = K - (x+1)(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) / 2\Delta x > 0$ mit zentralen Differenzen approximiert $\varphi_x = (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) / \Delta x + O(\Delta x^2)$ und im Falle $V_{i,j} < 0$ durch rückgängige Differenzen approximiert $\varphi_x = (\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}) / \Delta x + O(\Delta x)$. Im Punkt $P_{i-\frac{1}{2}, j}$ wird ähnlicherweise vorgegangen. So gelangt man zum konservativen Schema:

$$\begin{aligned} & (1 - M_{i,j}) \left\{ K(\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) - \frac{x+1}{2\Delta x} [(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j})^2 - (\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j})^2] \right\} \tau \sin^2 \tilde{\beta} + \\ & M_{i-1,j} \left\{ K(\varphi_{i,j} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}) - \frac{x+1}{2\Delta x} [(\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j})^2 - (\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i-2,j})^2] \right\} \tau \sin^2 \tilde{\beta} + \{ \varphi_{i+1,j} - \\ & - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j} \} \tau \cos^2 \tilde{\beta} + \tau \cdot \left\{ \varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1} \right\} - \frac{1}{2} \cos \tilde{\beta} \{ \varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1} \} = 0, \\ & M_{i,j} = 1 \text{ für } V_{i,j} > 0, \quad M_{i,j} = 0 \text{ für } V_{i,j} < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Durch eine einfache Umformung von (7) kann man zu einem nichtkonservativen Schema gelangen, das jedoch längs der Stosswelle konservativ ist.

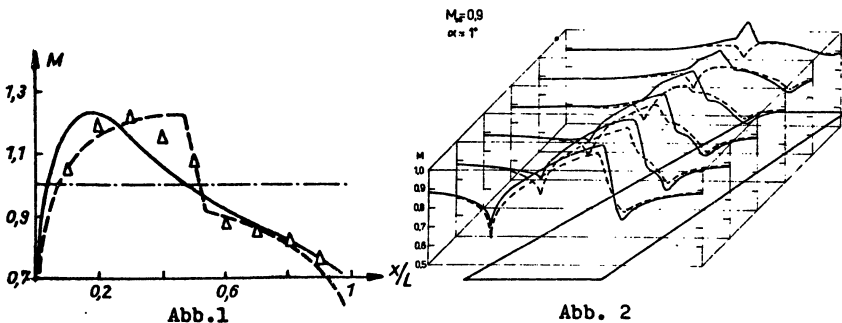
$$\begin{aligned} & (1 - M_{i,j}) V_{i,j} \tau^2 \sin^2 \tilde{\beta} \cdot (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) + M_{i-1,j} V_{i-1,j} \tau^2 \sin^2 \tilde{\beta} (\varphi_{i,j} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}) + \\ & + \tau^2 \cos^2 \tilde{\beta} \cdot (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) + \varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1} - \\ & - \frac{1}{2} \tau \cos \tilde{\beta} (\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Beide Schemen sind implizit, sie entscheiden, ob der betreffende Punkt ein elliptischer ($V_{i,j} > 0, V_{i-1,j} > 0$), parabolischer ($V_{i,j} < 0, V_{i-1,j} > 0$), hyperbolischer ($V_{i,j} < 0, V_{i-1,j} < 0$) oder ein Stosspunkt ($V_{i,j} > 0, V_{i-1,j} < 0$) ist. Beide Schemen sind unbedingt stabil (die lokale lineare Stabilität, die auf der Fourier-Analyse beruht). Durch die Anwendung von (7) bzw. (8) in den inneren Punkten und durch die geeignete Approximation der Randbedingungen oder der Periodizitätsbedingungen gelangt man zu einem System nichtlinearer Differenzgleichungen (siehe [2], [3], [4], [5]). Zur Lösung dieses Systems wird eine Block-Relaxationsmethode mit fixierten Koeffizienten angewandt. Die Blöcke in der Matrix werden aus den Koeffizienten bei $\varphi_{i,j}$ für $i = \text{konst.}$ gebildet. Die iterative Lösung erfolgt im Gebiet Ω von links nach rechts (in der Stromrichtung). Dadurch ist es möglich, die Anfangsbedingungen der

gemischten Aufgabe für die Gleichung (3), falls sie hyperbolischen Types ist, zu approximieren. In E_3 ist der Iterationsprozess folgender. Zunächst wird $z = z_1$ gelegt (zu der Ebene (x, \vec{y}) paralleler Schnitt mit minimaler z -Koordinate), und auf dieser Ebene wird die gleiche Block-Methode wie in E_2 mit fixierten Werten von $\psi_{ij, k+1}^{n-1}$, $\psi_{ij, k-1}^{n-1}$ angewandt. Ähnlicherweise erfolgt die Berechnung für $z = z_2$ u.s.w.

IV. Einige numerischen Resultate

Von den erreichten numerischen Ergebnissen sollen hier zwei dargelegt werden. Im ersten Falle handelt es sich um die transonische Umströmung des Profils NACA-0012 bei $M_\infty = 0,8$ und $\alpha = 0^\circ$. Auf Abbildung 1 sind die numerischen Ergebnisse nach dieser Methode wiedergegeben (in gestrichelter Kurve) und mit den numerischen Ergebnissen nach [6] (in voller Kurve) und auch mit den Messungen verglichen. Die berechnete Intensität der Stosswelle ist grösser als beim Experiment, bei dem die Stosswelle durch die Zähigkeit der Flüssigkeit teilweise ausgeglichen ist. In den numerischen Ergebnissen nach [6], die auf der Singularitätenmethode aufgebaut wurde, ist die Stosswelle nicht erfasst. Das weitere Resultat kann ausserdem in praktischer Hinsicht interessant sein. Es handelt sich um die transonische Umströmung eines pfeilförmigen Tragflügels im Tunnel $M_\infty = 0,9$ und $\alpha = 1^\circ$. Das Profil ist aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt. Auf dem Tragflügel verringert es sich von $\delta = 9\%$ bis zu $\delta = 0,05\%$. Die erzielten Ergebnisse sind in sehr gutem qualitativem Einklang mit den numerischen Resultaten von [7].



Literatur

- [1] Janenko N.N.: Systeme von quasilinearen Gleichungen, Nauka, Moskva 1968 (russisch).
- [2] Kozel K.: Einige mathematischen Probleme in der Theorie der transonischen Strömungsfelder (tschechisch) Habilitationsschrift, FSI ČVUT, Praha 1979.
- [3] Kozel K.: Mathematische Lösung der transonischen Umströmung eines geraden Schaufelgitters mit dünnen Profilen, Dissertation, FSI ČVUT, Praha 1976 (tschechisch).
- [4] Kozel K., Poláček J., Vavřincová M.: Some Numerical Results of Transonic cascade flow using a Relaxation Method, Strojnický časopis, č. 2, 1978.
- [5] Kozel K., Poláček J., Vavřincová M.: Numerical Solution of Transonic Flow through a Cascade with Slender Profiles, Proceedings of the Sixth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics (166 - 171).
- [6] Ribaut M., Vainio R.: On the Calculation of Two-Dimensional Subsonic and Shock-Free Transonic Flow, Journal of Eng. Power, October 1975 (603-609).
- [7] Ballhaus W.: Some Recent Progress in Transonic Flow Computations, in: Wirtz, Smolderen: Numerical Methods in Fluid Dynamics, Hemisphere Publishing Corporation, London 1978.