СОВМЕСТНОСТЬ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Хорис М.Маликов

Душанбе,СССР

Для системы

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(x,D)y_j = f_i(x), \quad i = 1,\dots,n,$$

где $f_i \in A$, A -кольцо функций,аналитических в точке $x=0$, $P_{ij} \in A[D]$ выводится необходимое и достаточное условие совместности.

Сформулируем основные результаты.

1. $\forall \tilde{P} = (P_1,\dots,P_n) \in A^n[D]$ $\exists$ обратимая матрица $Q : M^n[D] \to A^n[D]$,такая,что

(1) $\tilde{P} = Q\tilde{q}$

где M -поле отношений кольца A , $\tilde{q} \in M^n[D]$ и последная компонента q_n вектора $\tilde{q}$ будет правым наибольшим общим делителем дифференциальных полиномов $P_1,\dots,P_n$ т.е. $\tilde{q} = q^1 q_n$.

2.Любое решение переопределенной системы уравнений

(2) $\tilde{P}y = f(x) \in A^n$

относительно одной неизвестной функции y будет решением переопределенной системы уравнений

$$\tilde{q}y = f^1(x) .$$

Верно и обратное утверждение.Здесь $f^1 = Q^{-1}f$.

3.Пусть каждое уравнение системы (2) имеет решение,принадлежащее некоторому множеству функций.Для разрешимости переопределенной системы (2) в данном множестве необходимо и достаточно чтобы

$$q^1 f_n^1(x) = f^1(x) ,$$

где f_n^1 -последняя копонента вектора f^1 .

4.Пусть P есть прямоугольная матрица,отображающая $A^m[D]$ в

$A^n[D]$ и r есть число ее строк, линейно независимых над $A[D]$ слева. Матрица p эквивалентна в смысле [1] (§16.2) матрице

$$q = (q_{ij}) : M^m[D] \longrightarrow M^n[D]$$

где

$$q_{ij} = 0 \quad \text{,если } i = 1, \cdots, n-r+1 \ (j > 1) \text{ или}$$

$$i = n-r+2, \cdots, n-1 \quad (j > i-n+m) .$$

Столбцы матрицы q связаны с соответствующими столбцами матрицы p соотношениями типа (1), т.е. существует обратимая матрица $P : M^n[D] \rightarrow A^n[D]$,такая, что $p = P q$.

5. Любое решение $y = (y_1, \cdots, y_m)$ системы уравнений

(3) $py = f(x) \in A^n$

будет решением системы уравнений

$$q y = f^1(x) \in M^n$$

Верно и обратное утверждение, где $f^1 = P^{-1} f$.

6. Пусть $rang\, p(0, D) = r$. Для совместности системы (3) в A^m необходимо и достаточно, чтобы

$$q_i^1 f^1_{n-r+1}(x) = f_i^1(x) ,$$

где f_i^1 есть i -я компонента вектора f^1, а q_i^1 определяется из тождества

$$q_i^1 q_{n-r+1,1} = q_{i1}$$

Если $m < n$ и $r = m$,то система (3) будет переопределенной и для нее можно сформулировать необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Вазов. Асимптотические разложения решений обыкн. дифф. уравнений. Москва, "Мир", 1968.

2. Х.М. Маликов. Доклады АН Тадж. ССР, 1976, Т.19, №6, с.3-6.