Toposym 1

Pavle Papić

Sur les images continues des continus ordonnés

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [296]--297.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700981

SUR LES IMAGES CONTINUES DES CONTINUS ORDONNÉS

P. PAPIĆ

Zagreb

Cette communication est le résultat d'un travail commun de S. Mardešić et de l'auteur, publié sous le titre: S. MARDEŠIĆ-P. PAPIĆ, Continuous images of ordered continua, Glasnik mat.-fiz. i astr. 15 (1960), 171—178.

On sait bien que tout espace de Hausdorff X qui est image continue d'un continu ordonné est nécessairement compact, connexe et localement connexe. Si X est un espace métrique, ces conditions sont aussi suffisantes (théorème de H. HAHN et S. MAZURKIEWICZ). Nous donnerons ici une quatrième condition nécessaire, qui est indépendante des conditions citées dans le cas où X n'est pas métrique, et quelques autres propriétés des images continues des continus ordonnés.

Si X est un espace topologique, nous désignerons par $w(X)$ le plus petit nombre cardinal tel qu'il existe une base de voisinages de X de puissance $w(X)$. Nous dirons que l'espace X est k-séparable s'il contient une partie partout dense de puissance $\leqq k$, c'est-à-dire si son dégré de séparabilité $s(X) \leqq k$.

Un ensemble $E \subset X$ est non-dense si $\overline{X \setminus \overline{E}} = X$.

Théorème 1. *Soit X une image continue d'un continu ordonné. Si $p : X \to Y$ est une transformation continue de l'espace X sur un espace de Hausdorff Y ayant la propriété que pour tout $y \in Y$, l'ensemble fermé $p^{-1}(y)$ soit non-dense, alors $w(Y) = w(X)$.*

La démonstration du théorème précédent est basée sur ces deux lemmes:

Lemme 1. Soient $f : C \to X$ une transformation continue d'un continu ordonné C sur X et $p : X \to Y$ une transformation continue de X sur Y. Si p possède la propriété que pour tout $y \in Y$, $p^{-1}(y)$ soit non-dense dans X, alors il existe un sous-ensemble fermé $K \subset C$ qui est $w(Y)$-séparable et pour lequel $f(K) = X$.

Lemme 2. Soient X un espace localement connexe, K un espace totalement ordonné et compact et $f : K \to X$ une transformation sur X. Alors on a[1] $w(X) \leqq s(K)$.

Le théorème 1 nous donne la possibilité de caractériser les produits topologiques qui sont images continues des continus ordonnés. En effet, on a:

Théorème 2. *Pour qu'un produit topologique $\Pi_\alpha X_\alpha$, $\alpha \in A$ (puissance $A > 1$) de continus non dégénérés X_α soit image continue d'un continu ordonné, il faut et il*

[1]) La formulation originale de ce lemme a été un peu plus spéciale. A. J. WARD a fait remarquer aux auteurs que leur raisonnement démontre en essentiel le lemme cité dans le texte.

suffit que tous les X_α soient des continus métriques localement connexes (continus de Peano) et que puissance $A \leqq \aleph_0$. Alors $\Pi_\alpha X_\alpha$ est un continu métrique localement connexe et par conséquent image continue du segment $I = [0, 1]$ de nombres réels.

Du théorème 2 on déduit ce corollaire:

Soient C_1, C_2, C_3 des continus ordonnés et $f : C_1 \to C_2 \times C_3$ une transformation sur $C_2 \times C_3$. Alors $C_2 = C_3 = I$ et f peut être factorisé en une transformation motonone $g : C_1 \to I$ et „une transformation de Peano“ $h : I \to I \times I$.

Théorème 3. *Soit X image continue d'un continu ordonné. Alors $w(X) = s(X)$.*

Ce dernier théorème est une conséquence immédiate du théorème 1 et de ce lemme:

Lemme 3. *Soit X un continu non dégénéré, $\aleph_\tau$-séparable. Il existe alors un continu Y tel que $w(Y) \leqq \aleph_\tau$ est une transformation $p : X \to Y$ sur Y ayant la propriété que pour tout $y \in Y$, $p^{-1}(y)$ soit non-dense dans X.*