Ákos Császár

Complétion et compactification d'espaces syntopogènes

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. 133--137.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700961

COMPLÉTION ET COMPACTIFICATION D'ESPACES SYNTOPOGÈNES

Á. CSÁSZÁR

Budapest

Une théorie de structures générales, appelées structures syntopogènes, embrassant les structures topologiques, les structures uniformes, les structures de proximité et d'autres, a été élaborée par l'auteur dans l'ouvrage [1]. Le terme primitif dont se sert cette théorie est la notion d'ordre semi-topogène; on entend par *ordre semi-topogène* sur un ensemble E une relation binaire $<$ définie pour deux sous-ensembles de E et remplissant les conditions

(O_1) $$0 < 0 , \quad E < E ;$$

(O_2) $$A < B \quad \textit{implique} \quad A \subset B ;$$

(O_3) $$A \subset A' < B' \subset B \quad \textit{implique} \quad A < B .$$

Un *ordre topogène* est un ordre semi-topogène satisfaisant à la condition:

(Q) $A < B$ *et* $A' < B'$ *impliquent* $A \cap A' < B \cap B'$ *et* $A \cup A' < B \cup B'$.

Nous appelons *structure syntopogène* sur E une famille $\mathscr{S}$ d'ordres topogènes sur E vérifiant les axiomes:

(S_1) $<', <'' \in \mathscr{S}$ *implique l'existence de* $< \in \mathscr{S}$ *tel que* $A < B$ *découle de l'une quelconque des conditions* $A <' B$ *et* $A <'' B$;

(S_2) $< \in \mathscr{S}$ *implique l'existence de* $<' \in \mathscr{S}$ *tel que* $A < B$ *entraîne* $A <' C <' B$ *pour un ensemble convenable* C.

Dans un espace topologique E, on introduit un ordre topogène en posant $A < B$ si et seulement si $A \subset \operatorname{Int} B$; la famille $\{<\}$ composée de cet ordre est une structure syntopogène sur E. Dans un espace de proximité E, on définit un ordre topogène $<$ en posant $A < B$ si et seulement si $A \bar{\delta} E - B$; la famille $\{<\}$ constitue de nouveau une structure syntopogène. Enfin, dans un espace uniforme E, on peut faire correspondre à chaque entourage symétrique V un ordre topogène $<_V$ en posant $A <_V B$ si et seulement si $x \in A$, $(x, y) \in V$ entraînent $y \in B$; la famille $\{<_V\}$ de tous ces ordres forme une structure syntopogène sur E.

Dans ce qui suit, nous employons la terminologie et les notations de [1]. Dans § 16 de [1], les questions de complétion d'espaces syntopogènes et de compactification d'espaces topogènes ont été étudiées. Par l'application des méthodes nouvelles et de quelques idées nouvelles, dues en partie à notre collaborateur J. Czipszer, nous avons réussi récemment à donner à la théorie de la complétion et de la compactification une forme plus générale et en même temps plus précise.

Considérons deux ensembles E et E^* et une opération h qui fait correspondre à un sous-ensemble quelconque $A \subset E$ un sous-ensemble $h(A) \subset E^*$ et qui vérifie les conditions suivantes:

(1) $$h(0) = 0\,, \quad h(E) = E^*\,;$$

(2) $$A \subset B \subset E \quad \textit{implique} \quad h(A) \subset h(B)\,.$$

Si $<$ est un ordre semi-topogène sur E, définissons une relation $<^h$ entre deux sous-ensembles de E^* en posant

(3) $A^* <^h B^*$ *si et seulement si il existe deux ensembles A et B tels que*
$$A < B\,, \quad A^* \subset h(A)\,, \quad h(B) \subset B^*\,.$$

La relation $<^h$ est un ordre semi-topogène sur E^*. Par exemple, si f est une application de E^* dans E et si l'on pose $h(A) = f^{-1}(A)$, on aura $<^h = f^{-1}(<)$ (cf. [1], p. 51). De plus, si f est une application biunivoque de E sur un sous-ensemble $E_0^* \subset E^*$ et si l'on a

(4) $$f(A) = E_0^* \cap h(A) \quad \textit{pour} \quad A \subset E\,,$$

on vérifie aisément l'égalité $< = f^{-1}(<^h)$.

$\mathscr{S}$ étant une structure syntopogène sur E, la famille

(5) $$\mathscr{S}^h = \{<^{hq} : < \in \mathscr{S}\}$$

(cf. [1], p. 27) est une structure syntopogène sur E^*, satisfaisant à l'égalité

(6) $$\mathscr{S} = f^{-1}(\mathscr{S}^h)$$

(cf. [1], p. 91) si la condition (4) a lieu.

En généralisant une méthode connue de prolongement d'espaces topologiques (v. [3]; [4]; [2], p. 159), on peut définir une méthode générale de prolongement d'espaces syntopogènes de la façon suivante. Dans un espace syntopogène $[E, \mathscr{S}]$ (cf. [1], p. 62), appelons *grilles fondamentales* les grilles (cf. [1], p. 183) de la forme $\{\{x\}\}$ pour $x \in E$, et désignons par f l'application qui fait correspondre à $x \in E$ la grille fondamentale $f(x) = \{\{x\}\}$, par E_0^* l'ensemble des grilles fondamentales, et par E^* un ensemble de grilles dans E contenant E_0^* comme sous-ensemble. Pour $A \subset E$, désignons par $h(A)$ l'ensemble des grilles $x^* \in E^*$ telles qu'il existe un ensemble $X \in x^*$, $X \subset A$. Alors (1), (2) et (4) ont lieu, de sorte qu'en définissant, pour $< \in \mathscr{S}$, $<^h$ d'après (3), et $\mathscr{S}^h$ d'après (5), $\mathscr{S}^h$ sera une structure syntopogène sur E^* satisfaisant à (6). De plus, on vérifie aisément que l'image par f de la grille $x^* \in E^*$ (cf. [1], p. 184) converge vers x^*:

(7) $$f(x^*) \to x^* \quad (\mathscr{S}^h)$$

(cf. [1], p. 185), et que par conséquent E_0^* est dense dans $[E^*, \mathscr{S}^h]$ (cf. [1], p. 221).

En généralisant la terminologie de [2], nous dirons qu'une grille $\mathfrak{R}$ est *ronde* dans un espace syntopogène $[E, \mathscr{S}]$, si $R \in \mathfrak{R}$ implique l'existence de $< \in \mathscr{S}$ et $R' \in \mathfrak{R}$

tels que $R' < R$. Or si, dans la construction précédente, les $x^* \in E^* - E_0^*$ sont des filtres ronds dans $[E, \mathscr{S}]$, on a

$$f(x^*) = \mathfrak{V}^*(x^*) (\cap) E_0^* \quad pour \quad x^* \in E^* - E_0^* \tag{8}$$

(cf. [1], p. 183), où $\mathfrak{V}^*(x^*)$ désigne le filtre des voisinages (cf. [1], p. 185) du point x^* par rapport à $\mathscr{S}^h$. Si, de plus, les grilles $x^* \in E^* - E_0^*$ sont des filtres ronds qui ne convergent pas dans $[E, \mathscr{S}]$, alors la structure syntopogène $\mathscr{S}^h$ est *relativement séparée* par rapport à E_0 en ce sens que x^*, $y^* \in E^*$, $x^* \neq y^*$ impliquent l'existence de $<^* \in \mathscr{S}^h$ tel que soit $x^* <^* E^* - y^*$, soit $y^* <^* E^* - x^*$ a lieu, sauf le cas où $x^*, y^* \in E_0^*$.

Supposons maintenant que les grilles $x^* \in E^*$ sont comprimées dans $[E, \mathscr{S}]$ (cf. [1], p. 191). On a alors

$$\mathscr{S}^{hs} \sim \mathscr{S}^{sh} \tag{9}$$

(cf. [1], pp. 75 et 19) et au lieu de (7)

$$f(x^*) \to x^* \ (\mathscr{S}^{hs}) \quad pour \quad x^* \in E^* , \tag{10}$$

de sorte que E_0^* est dense dans $[E^*, \mathscr{S}^{hs}]$. De plus, si les grilles $x^* \in E^*$ sont des grilles de Cauchy dans $[E, \mathscr{S}]$ (cf. [1], p. 189), on peut remplacer (7) et (10) par

$$f(x^*) \to x^* \ (\mathscr{S}^{hsb}) \quad pour \quad x^* \in E^* \tag{11}$$

(cf. [1], p. 75), de sorte que E_0^* est dense dans $[E^*, \mathscr{S}^{hsb}]$.

Réciproquement, soient $[E, \mathscr{S}]$ et $[E', \mathscr{S}']$ deux espaces syntopogènes, $E'_0 \subset E'$, $\mathscr{S}'_0 = \mathscr{S}' \mid E'_0$ (cf. [1], p. 94), k un isomorphisme de $[E'_0, \mathscr{S}'_0]$ sur $[E, \mathscr{S}]$ (cf. [1], p. 103) et E'_0 dense dans $[E', \mathscr{S}']$. Désignons par $\mathfrak{V}'(x')$ le filtre des voisinages de $x' \in E'$ par rapport à $\mathscr{S}'$, et posons $\mathfrak{V}'_0(x') = \mathfrak{V}'(x') (\cap) E'_0$. Alors $k(\mathfrak{V}'_0(x'))$ sera, pour $x' \in E' - E'_0$, un filtre rond dans $[E, \mathscr{S}]$, et si l'on désigne par E^* l'ensemble composé de tous ces filtres $k(\mathfrak{V}'_0(x'))$ $(x' \in E' - E'_0)$ et de toutes les grilles fondamentales, puis on construit $\mathscr{S}^h$ de la manière décrite plus haut, alors l'application

$$l(x') = f(k(x')) \quad \text{pour} \quad x' \in E'_0 ,$$
$$l(x') = k(\mathfrak{V}'_0(x')) \quad \text{pour} \quad x' \in E' - E'_0$$

sera $(\mathscr{S}'^{tp}, \mathscr{S}^{htp})$-continue (cf. [1], pp. 73, 74 et 102), et si l'on suppose encore que $\mathscr{S}'$ est symétrique (cf. [1], p. 62), l sera même $(\mathscr{S}', \mathscr{S}^h)$-continue.

Les méthodes de prolongement d'espaces syntopogènes que nous venons d'esquisser permettent d'obtenir facilement la solution des problèmes de complétion et de compactification. En effet, si $[E, \mathscr{S}]$ est un espace syntopogène quelconque, désignons par E^* l'ensemble composé des grilles fondamentales et des filtres de Cauchy ronds qui ne convergent pas dans $[E, \mathscr{S}^{sb}]$, et construisons $\mathscr{S}^h$ comme plus haut. Alors les structures syntopogènes $\mathscr{S}^h$ et $\mathscr{S}^{hsb}$ sont complètes (cf. [1], p. 193), E_0^* est dense dans $[E^*, \mathscr{S}^{hsb}]$, $\mathscr{S}^h$ est relativement séparée par rapport à E_0^*, et l'on a $\mathscr{S} = f^{-1}(\mathscr{S}^h)$, d'où résulte que f est un isomorphisme de $[E, \mathscr{S}]$ sur $[E_0^*, \mathscr{S}^h \mid E_0^*]$. Convenons d'appeler *complétion* pour un espace syntopogène $[E, \mathscr{S}]$ le triple $(E', \mathscr{S}', f')$ d'un ensemble E', d'une structure syntopogène $\mathscr{S}'$ sur E' et d'une application f' de E sur $E'_0 \subset E'$ jouissant des propriétés: $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}'^{sb}$ sont complètes, E'_0 est dense dans $[E', \mathscr{S}'^{sb}]$, $\mathscr{S}'$ est relativement séparée par rapport à E'_0 et f' est un isomorphisme de $[E, \mathscr{S}]$ sur $[E'_0, \mathscr{S}' \mid E'_0]$. On peut dire alors que, pour un espace syntopogène quelconque $[E, \mathscr{S}]$, il existe au moins une complétion $(E', \mathscr{S}', f')$ satisfaisant même à l'égalité plus précise $\mathscr{S} = f'^{-1}(\mathscr{S}')$. Si $\mathscr{S}$ est séparée (cf. [1], p. 175), $\mathscr{S}'$ sera également séparée, et si $\mathscr{S}$ est symétrique, parfaite, biparfaite ou symétrique et biparfaite (cf. [1], p. 62), on peut choisir $\mathscr{S}'$ de la manière qu'elle jouisse de la même propriété.

On peut même démontrer que la complétion d'un espace syntopogène est déterminée univoquement à un isomorphisme près. Cela veut dire de façon plus précise que si $(E', \mathscr{S}', f')$ et $(E'', \mathscr{S}'', f'')$ sont deux complétions pour un espace syntopogène $[E, \mathscr{S}]$, alors il existe un isomorphisme g de $[E', \mathscr{S}']$ sur $[E'', \mathscr{S}'']$ tel que $g \mid f'(E) = f'' \circ f'^{-1}$. C'est une conséquence immédiate du théorème d'extension suivant. Soient $[E, \mathscr{S}]$ et $[E', \mathscr{S}']$ deux espaces syntopogènes, $\mathscr{S}'^{sb}$ complète, $E_0 \subset E$ dense dans $[E, \mathscr{S}^{sb}]$ et f_0 une application $(\mathscr{S} \mid E_0, \mathscr{S}')$-continue de E_0 sur un ensemble $E'_0 \subset E'$. Il existe alors une application $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$-continue de E dans E' telle que $f \mid E_0 = f_0$. Cette application est déterminée univoquement si soit $\mathscr{S}'$ est séparée, soit $\mathscr{S}$ est relativement séparée par rapport à E_0, $\mathscr{S}'$ est relativement séparée par rapport à E'_0 et f_0 est un isomorphisme de $[E_0, \mathscr{S} \mid E_0]$ sur $[E'_0, \mathscr{S}' \mid E'_0]$; ces dernières conditions entraînent que f est un isomorphisme de $[E, \mathscr{S}]$ sur $[f(E), \mathscr{S}' \mid f(E)]$ et, si de plus $\mathscr{S}^{sb}$ est complète et E'_0 est dense dans $[E', \mathscr{S}'^{sb}]$, on a encore $f(E) = E'$.

Pour étudier la question de compactification, on considère un espace topogène $[E, \mathscr{T}]$ (cf. [1], p. 62), on désigne par E^* l'ensemble composé des grilles fondamentales et des filtres comprimés ronds qui ne convergent pas dans $[E, \mathscr{T}^s]$, et on construit la structure topogène $\mathscr{T}^h$. On voit alors que $\mathscr{T}^h$ et $\mathscr{T}^{hs}$ sont compactes (cf. [1], p. 195), E^*_0 est dense dans $[E^*, \mathscr{T}^{hs}]$, $\mathscr{T}^h$ est relativement séparée par rapport à E^*_0, et on a enfin $\mathscr{T} = f^{-1}(\mathscr{T}^h)$, de sorte que f est un isomorphisme de $[E, \mathscr{T}]$ sur $[E^*_0, \mathscr{T}^h \mid E^*_0]$. Appelons *double compactification* pour un espace topogène $[E, \mathscr{T}]$ un triple $(E', \mathscr{T}', f')$ d'un ensemble E', d'une structure topogène $\mathscr{T}'$ sur E' et d'une application f' de E sur un sous-ensemble $E'_0 \subset E'$, si $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}'^s$ sont compactes, E'_0 est dense dans $[E', \mathscr{T}'^s]$, $\mathscr{T}'$ est relativement séparée par rapport à E'_0 et f' est un isomorphisme de $[E, \mathscr{T}]$ sur $[E'_0, \mathscr{T}' \mid E'_0]$. Par conséquent, il existe au moins une double compactification $(E', \mathscr{T}', f')$ pour un espace topogène quelconque $[E, \mathscr{T}]$, de plus, si $\mathscr{T}$ est symétrique ou séparée, $\mathscr{T}'$ jouira de la même propriété. Si $(E', \mathscr{T}', f')$ et $(E'', \mathscr{T}'', f'')$ sont deux doubles compactifications pour $[E, \mathscr{T}]$, il existe un isomorphisme g de $[E', \mathscr{T}']$ sur $[E'', \mathscr{T}'']$ tel que $g \mid f'(E) = f'' \circ f'^{-1}$, ce qu'on peut démontrer à l'aide d'un théorème d'extension semblable à celui que nous avons formulé à propos de la question d'unicité des complétions. On peut l'obtenir en y remplaçant $\mathscr{S}^{sb}$ par $\mathscr{S}^s$, $\mathscr{S}'^{sb}$ par $\mathscr{S}'^s$ et le mot „complète“ par „compacte“.

Les résultats énumérés comprennent, comme cas particuliers, plusieurs théorèmes connus sur la complétion d'espaces uniformes et sur la compactification d'espaces topologiques et d'espaces de proximité. Il est même possible de donner à ceux-ci une forme plus générale que leur formulation généralement connue. Par exemple, si E est un espace uniforme (séparé ou non), on peut ajouter à E des points idéaux de la manière que l'espace E' qui résulte soit un espace uniforme complet contenant E comme sous-espace dense et relativement séparé par rapport à E en ce sens que $x', y' \in E'$, $x' \neq y'$ impliquent qu'il existe un entourage qui ne contient pas le couple (x', y'), sauf si $x', y' \in E$. De plus, si E' et E'' sont deux espaces uniformes du type en question, alors il existe un isomorphisme de E' sur E'' admettant les points de E pour points fixes.

Littérature

[1] *Á. Császár*: Fondements de la topologie générale. Budapest et Paris 1960.
[2] *H. J. Kowalsky*: Topologische Räume. Basel und Stuttgart 1961.
[3] *А. П. Мышкис*: К понятию границы. Матем. сб. *25* (67) (1949), 387—414.
[4] *F. J. Wagner*: Notes on compactification. Indagationes math. *19* (1957), 171—176; 177—181.