C. Andreian-Cazacu

Méthodes topologiques dans la théorie des surfaces de Riemann

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [59]--63.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700928

MÉTHODES TOPOLOGIQUES DANS LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

C. ANDREIAN-CAZACU

Bucarest

La théorie des fonctions analytiques a été à la fois une des plus puissantes sources et un des plus beaux champs d'application de la topologie. L'oeuvre mathématique de mon maître, le Prof. S. STOÏLOW y apporta une contribution décisive: Outre la solution des problèmes fondamentaux: la caractérisation topologique des fonctions analytiques et du recouvrement riemannien, [1], S. Stoïlow a ouvert une nouvelle voie de recherche en définissant exclusivement à l'aide de leurs propriétés topologiques deux importantes classes de surfaces de Riemann de recouvrement: les surfaces avec la propriété d'Iversen [2] et les surfaces normalement exhaustibles [3].

Soit Σ une surface bi-dimensionnelle (variété à base dénombrable) orientable. Une transformation intérieure f d'une variété bi-dimensionnelle V dans Σ engendre un recouvrement riemannien, que nous allons désigner par Σ_f^V. Ce recouvrement est total au sens de S. Stoïlow, [1], si à toute suite de points $P_n \in V$ convergeant vers la frontière idéale de V (c'est-à-dire sans point d'accumulation dans V) correspond une suite de points $f(P_n) = p_n \in \Sigma$, qui converge vers la frontière idéale de Σ. Les surfaces normalement exhaustibles Σ_f^V sont caractérisées par l'existence d'une suite de domaines d'exhaustion $V_k \subset V$, satisfaisant aux conditions habituelles et de plus, tels que chaque V_k recouvre totalement sa projection $f(V_k) \subset \Sigma$. Cette classe de surfaces de Riemann constitue une généralisation directe des surfaces closes, chaque V_k ayant le même nombre fini de points sur tout point de $f(V_k)$ et la ramification donnée par la formule de Hurwitz. Quelque soit k, la frontière Γ_k de V_k, qui est formée par un nombre fini de courbes de Jordan, se projette sur la frontière γ_k de $f(V_k)$, qui consiste aussi d'un nombre fini de courbes de Jordan.

Dans le but d'étendre la formule de Hurwitz, ce qui lui a permis de mettre en évidence le contenu topologique de quelques théorèmes de la théorie des fonctions, [1], S. Stoïlow a défini le recouvrement partiellement régulier de Σ par V selon f par les conditions suivantes:

(β_1) Toute suite de points $P_n \in V$, qui tend vers la frontière de V se projette dans une suite de points $p_n \in \Sigma$, qui tend vers la frontière de Σ ou vers un nombre fini de courbes de Jordan γ, deux à deux disjointes, chacune séparant deux domaines disjoints de $\Sigma - \gamma$.

(β_2) La pré-image $f^{-1}(\gamma)$ est l'ensemble nul ou un ensemble compact dans V.

Dans quelques travaux antérieurs [4]—[7] j'ai établi différentes propriétés des surfaces normalement exhaustibles et j'ai défini et étudié les surfaces partiellement régulièrement exhaustibles Σ_f^V, qui admettent une exhaustion par domaines V_k, recouvrant partiellement régulièrement Σ par rapport à un nombre fini de courbes de Jordan γ_k deux à deux disjointes. Parmi ces surfaces se trouvent les surfaces de L. I. Volkovyski [8] et de T. Kuroda [9].

Dans cette comunication nous allons introduire de nouvelles classes de surfaces de Riemann, définies seulement par des propriétés topologiques de l'exhaustion. Nous allons inclure ainsi dans cette classification les surfaces données par les propriétés de leurs points de ramification de Kobayashi, Ahlfors et L. J. Volkovyski [8] ou par l'arbre topologique de R. Nevanlinna, E. Ullrich, H. Wittich et A. A. Goldberg [10]—[12].

Une généralisation tout à fait naturelle des surfaces partiellement régulièrement exhaustibles s'obtient si l'on renonce à l'hypothèse (β_2) ci-dessus et si l'on suppose à chaque étape de l'exhaustion que γ_k consiste d'un nombre fini de courbes de Jordan deux à deux disjointes et d'un nombre fini d'arcs de Jordan. Je désignerai par la lettre P (du mot polyédrique) les surfaces exhaustibles par une suite de domaines polyédriques V_k dont la frontière Γ_k se projette sur γ_k.

Puisque toute surface de Riemann admet une exhaustion par des domaines V_k limités par un nombre fini de courbes de Jordan analytiques et qu'une telle exhaustion remplit les conditions énumerées plus haut, toute surface pourrait être conçue comme une surface P. Pourtant, l'intêret de ce point de vue ressort dès que l'on ajoute des hypothèses supplémentaires sur les ensembles γ_k. De cette manière on peut approfondir les surfaces à ramification régulière au sens de Kobayashi, Nevanlinna et d'autres.

Les classes de surfaces A, W, Λ que nous définirons dans ce qui suit, ont leur origine dans les travaux de L. I. Volkovyski [8]. Nous rénoncerons désormais à l'hypothèse que l'exhaustion considérée de la surface V soit réalisée par des domaines polyédriques et nous considérons des exhaustions par des surfaces bordées V_k, caractérisées par certaines propriétés simples du recouvrement $\Sigma_f^{V_k}$.

Les surfaces Λ admettent une exhaustion par une suite de surfaces $V_k \subset V$, à connexion finie, dont la frontière relative Γ_k se compose d'un nombre fini de courbes ou d'arcs de Jordan qui se projettent sur un nombre fini de courbes de Jordan, deux à deux disjointes γ_k; chaque arc de Γ_k recouvre comme une spirale à une infinité de feuilles une des courbes de γ_k; de plus, chaque surface V_k contient un nombre fini de points de ramification, tous algébriques, projetés dans $\Sigma - \gamma_k$.

Les surfaces W diffèrent des surfaces A, en ce qui concerne l'hypothèse relative à la ramification: toute surface V_k contient un nombre fini de points de ramifications algébriques ou logarithmiques. Les surfaces Λ sont les surfaces W ayant un nombre fini de ramifications algébriques.

Evidemment, $A \subset W$, mais en même temps on peut etablir l'inclusion contraire $A \supset W$. En effet, si Σ_f^V est une surface de classe W et V_k une surface d'exhaustion ayant

L_k ramifications logarithmiques projetées dans les points $p_{1k}, \ldots, p_{lk}$, nous entourons ces points par voisinages v_{jk} suffisament petits et extrairons de V_k les pré-images non-compactes de ces voisinages, qui forment des voisinages des ramifications logarithmiques de V_k. La surface V_k' obtenu a les propriétés des surfaces d'exhaustion A, donc $\Sigma_f^{V_k'} \in A$. Par conséquent $\Sigma_f^V \in A$, puisqu'on peut former une suite d'exhaustion de V du type A.

De même nous considérons les surfaces à exhaustion formée par des V_k qui recouvrent sans frontière chacun des domaines de $\Sigma - \gamma_k$, ou bien des V_k tels que $\Sigma_f^{V_k}$ ait la propriété d'Iversen [2] ou de Blaschke [13] sur les domaines de $\Sigma - \gamma_k$ ou toute autre propriété de recouvrement. On pourra aussi supposer que γ_k soit un ensemble fini de courbes et d'arcs de Jordan.

A chaque surface de Riemann exhaustible d'une manière quelconque nous attacherons (comme nous l'avons fait dans le cas partiellement régulièrement exhaustible [6]) plusieurs ensemble fermés: $\mathscr{E}$ – l'ensemble des points $p \in \Sigma$, pour lesquels il existe des suites n_k de nombres naturels et des suites p_{n_k} de points de γ_{n_k}, tel que $p = \lim\limits_{k \to \infty} p_{n_k}$; $\mathscr{M}$ – l'ensemble des points $p \in \Sigma$, qui sont limite de points p_k de γ_k: $p = \lim\limits_{k \to \infty} p_k$; $\mathscr{A}$ – l'adhérence de l'ensemble des valeurs asymptotiques de la transformation f; $\mathscr{R}$, respectivement $\mathscr{L}$ – l'ensemble des limites des suites des projections des ramifications algébriques, respectivement logarithmiques de Σ_f^V.

Évidemment, $\Sigma \supset \mathscr{E} \supset \mathscr{M} \supset \mathscr{A} \supset 0$ pour les surfaces P ou A, chaque inclusion pouvant être stricte ou non.

En supposant $\mathscr{E} \neq \Sigma$, nous pouvons établir facilement des propriétés de recouvrement parmi lesquelles nous citons:

Si $\Sigma_f^V \in P$, les domaines maxima [1] d'un domaine compact $\Delta \subset \Sigma - \mathscr{E}$ recouvrent Δ totalement. Et si Δ est une région de $\Sigma - \mathscr{E}$ chaque composante connexe de sa pré-image en V engendre un recouvrement normalement exhaustible de Δ.

Si $\Sigma_f^V \in A$ et $p \in \Sigma - (\mathscr{A} \cup (\mathscr{M} \cap \mathscr{R}))$, il existe un voisinage fermé dont tous les domaines maxima sont normaux.

Il résulte de ces propositions des relations avec les propriétés LBl, LBl_1, LI. Si $\mathscr{A}$ est un ensemble de capacité logarithmique nulle, Σ_f^V est de classe Bl; si $\mathscr{E}$, $\mathscr{M}$ ou $\mathscr{A}$ est un ensemble totalement discontinu, Σ_f^V est de classe I, [6].

La formule de Hurwitz-Stoïlow, que nous avons étendue aux recouvrements engendrés par des domaines polyédriques quelconques à frontière formée par des courbes analytiques, constitue un instrument utile dans l'étude de la ramification des surfaces envisagées ci-dessus [14]. En effet, cette formule s'applique directement dans le cas de V_k compact, et autrement, en effectuant une exhaustion convenable de V_k. On obtient ainsi des théorèmes des disques. A titre d'exemple je me bornerai d'indiquer que les surfaces $A_{0\infty}$ simplement connexes de L. I. Volkovyski [8] peuvent avoir au plus 3 disques complètement ramifiés.

Les résultats concernant la ramification des surfaces permettent de préciser les critères du type. En effet, pour certaines surfaces P, A ou W on peut étendre les méthodes d'Ahlfors, Kobayashi et Volkovyski [8], en établissant des conditions d'appartenance à la classe de surfaces O_g.

Les méthodes métrico-topologiques qui ont permis à Ahlfors de construire sa célèbre théorie des surfaces régulièrement exhaustibles [15] peuvent être utilisées pour approfondir les propriétés des surfaces de recouvrement considérées ici. D'un côté on peut établir des critères pour que ces surfaces soient régulièrement exhaustibles, de l'autre on peut introduire des conditions métriques sur les courbes γ_k et en déduire des résultats relatifs aux surfaces Σ_f^V. En supposant, par exemple, que Σ soit la sphère et γ_k des cercles dont le rayon tend vers zéro avec $1/k$, on obtient les surfaces à points de ramification qui se rapprochent de L. I. Volkovyski [8].

Un autre cas important se présente quand les courbes γ_k forment une exhaustion de $\Sigma - \mathscr{E}$. Lorsque $\Sigma - \mathscr{E}$ se réduit à un seul domaine, ce cas généralise celui considéré par T. KURODA [9].

Dans l'exposé sommaire que j'ai fait, je me suis bornée à définir et indiquer des propriétés des classes P, A, W etc. dont l'intérêt réside dans le grand nombre de surfaces de Riemann qui y sont contenues et qui sont traitées ainsi d'un point de vue unitaire.

À côté de fructueuses recherches de G. T. WHYBURN [16], M. MORSE et M. HEINS [17], et de celles plus récentes de F. D. GAHOV, IU. M. KRIKUNOV, T. M. KOLOMITZEVA, I. M. MEL'NIK et A. I. POVOLOTZKII (voir la bibliographie dans [18], [19]), les résultats et les problèmes soulevés par l'introduction de ces classes de surfaces, qui ont leur origine dans l'oeuvre de S. Stoïlow, montrent une fois de plus la puissance et l'importance des méthodes topologiques dans la théorie des fonctions analytiques.

Bibliographie

[1] *S. Stoïlow*: Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Gauthier-Villars, Paris 1938, ou 1956.

[2] *S. Stoïlow*: Note sur les fonctions analytiques multiformes. Annales de la Soc. Polonaise de Math., 1952, *25*, 69–74.

[3] *S. Stoïlow*: Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces. Compositio math., 1940, *7*, 428–435.

[4] *C. Andreian Cazacu*: Über die normal ausschöpfbaren Riemannschen Flächent. Math. Nachrichten, 1956, *15*, 2, 77–86.

[5] *C. Andreian Cazacu*: Suprafete riemanniene partial regular exhaustibile. Consfătuirea de Geometrie şi Topologie, Iaşi 1958, 219—226.

[6] *C. Andreian Cazacu*: Suprafete riemanniene partial regulat exhaustibile. Studii şi Cerc. Mat., 1959, *10*, 2, 307–323.

[7] *C. Andreian Cazacu*: Überlagerungseigenschaften der Riemannschen Flächen. Revue Math. pures et appl., *1961*, *6*, 4, 685—701.

[8] *Л. И. Волковыский:* Исследование по проблеме типа односвязной римановой поверхности. Труды мат. инст. Стеклова. Москва-Ленинград, 1950, *34*.

[9] *T. Kuroda*: Remarks on some covering surfaces. Revue Math. pures et appl., 1957, *2*, 263–268.

[10] *R. Nevanlinna*: Eindeutige analytische Funktionen, Springer. Berlin Göttingen Heidelberg 1936, 1953.
[11] *H. Wittich*: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Ergebn. Math. u. ihrer Grenzgebiete, Heft 8, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[12] *А. А. Гольдберг:* Об одном классе римановых поверхностей. Мат. сб., 1959, *49* (*91*), 4, 447 до 458.
[13] *M. Heins*: On the Lindelöf principle. Ann. of. Math. 1955, *61*, 440–473.
[14] *C. Andreian Cazacu*: Über eine Formel von S. Stoïlow. Revue Math. pures et appl., 1960, *5*, 1, 59–74.
[15] *L. Ahlfors*: Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta Math., 1935, *65*, 157–194.
[16] *G. T. Whyburn*: Topological Analysis. Princeton University Press 1958.
[17] *M. Morse*: Topological Methods in the Theory of Functions of a Complex Variable. Princeton University Press, 1947, Ann. Math. Studies *15*.
[18] *И. М. Мельник:* К топологическим методам теории функций комплексного переменного. Докл. А Н СССР, 1960, *131*, 5, 1015—1018.
[19] *А. И. Поволоцкий:* Индексы особых точек псевдоаналитических функций. Докл. А Н СССР, 1959, *129*, 2, 265—267.