Hans Günter Bothe

Eine fixierte Kurve in E^3

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 68--73.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700893

EINE FIXIERTE KURVE IN E^3

H. G. BOTHE

Greifswald

1. Einleitung

Ist A eine Teilmenge des dreidimensionalen euklidischen Raumes E^3 und h ein Autohomöomorphismus von A, d.h. ein Homöomorphismus von A auf sich, so soll h auf E^3 fortsetzbar genannt werden, falls es einen Autohomöomorphismus von ganz E^3 gibt, dessen Einschränkung auf A mit h übereinstimmt. Ist z.B. $A = K$ eine einfach geschlossene zahme Kurve, so lassen sich alle Autohomöomorphismen bzw. alle orientierungserhaltenden Autohomöomorphismen von K auf E^3 fortsetzen, je nachdem K einen invertierbaren oder nicht invertierbaren Knoten repräsentiert. (Eine einfach geschlossene Kurve in E^3 heißt zahm, falls es einen Autohomöomorphismus von E^3 gibt, der sie auf ein Polygon abbildet.) Komplizierter wird die Situation, wenn man wilde einfach geschlossene Kurven betrachtet. *Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine wilde einfach geschlossene Kurve K zu konstruieren, bei der sich außer dem identischen kein Autohomöomorphismus auf E^3 fortsetzen läßt.* In einer anderen Arbeit [2] wurde bereits eine wilde einfach geschlossene Kurve angegeben, bei der sich alle Autohomöomorphismen auf E^3 fortsetzen lassen.

Allgemeiner kann man die hier aufgeworfene Frage etwa so formulieren: Es sei K_0 der Einheitskreis und G_0 eine Gruppe von Autohomöomorphismen von K_0. Wann kann man eine topologische Einbettung f von K_0 in E^3 finden, bei der $f(K_0)$ wild ist und sich genau die Autohomöomorphismen aus fG_0f^{-1} von $f(K_0)$ auf E^3 fortsetzen lassen?

Die beiden oben angekündigten Ergebnisse beantworten diese Frage positiv in den beiden extremen Fällen, wo G_0 die nur aus der Identität bestehende oder die volle Autohomöomorphismengruppe von K_0 ist. Auch wenn G_0 die von der Drehung um den Winkel $2\pi/n$ erzeugte endliche zyklische Gruppe der Ordnung n ist, erhält man eine positive Antwort (durch eine einfache Modifikation der hier ausgeführten Konstruktion). Interessant wäre es zu wissen, welche Antwort man erhält, wenn G_0 die Gruppe aller Rotationen von K_0 ist.[1]

Zu den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen sei folgendes vermerkt: E^n ist der n-dimensionale euklidische Raum, den wir auf ein festes Cartesisches Koordi-

[1]) Zusatz bei der Korrektur: Die Antwort ist positiv.

natensystem bezogen denken, so daß die Punkte aus E^n als n-Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ von reellen Zahlen angesehen werden können. Dabei nehmen wir an, daß E^{n-1} auf die übliche Weise als Hyperebene $\xi_n = 0$ in den E^n eingebettet ist. Hauptsächlich interessiert hier der Raum E^3, jedoch liegt der Arbeit [4], deren Ergebnisse wir wiederholt anwenden werden, die dreidimensionale Sphäre S^3 zugrunde. Damit wir diese Ergebnisse unmittelbar übernehmen können, bezeichnen wir mit S^3 den Rand der vierdimensionalen Zelle, die sich als konvexe Hülle des in E^3 durch $|\xi_i| \leqq 2$ $(i = 1, 2, 3)$ definierten Würfels W_e und dem Punkt $(0, 0, 0, 1)$ in E^4 ergibt. Es ist dann $W_e = E^3 \cap S^3$, und S^3 erhält von E^4 her eine natürliche Metrik ϱ und auch eine simpliziale Struktur, so daß wir in S^3 von Polyedern und semilinearen Abbildungen sprechen können (eine auf einem Polyeder P definierte Abbildung φ in S^3 heißt semilinear, falls φ bei passend gewählten (geradlinigen) simplizialen Unterteilungen von P und S^3 simplizial ist). Auf W_e stimmen Metrik und simpliziale Struktur von E^3 und S^3 überein. Unter einer *n-Polyzelle* $(n = 2, 3)$ verstehen wir ein in S^3 gelegenes zur Kreisscheibe bzw. zur Vollkugel homöomorphes Polyeder. Ist X eine Teilmenge von S^3, so sei mit Int X stets die Menge der inneren Punkte von X bezeichnet.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auf einige technische Einzelheiten beim Beweis, die hier nicht genau ausgeführt werden konnten, in einer folgenden Arbeit über ähnliche Probleme eingegangen wird. Alle für das Verständnis der Konstruktion und der Beweisidee notwendigen Begriffe werden dagegen schon hier eingeführt.

2. Knoten und Vollringe

Es sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller einfach geschlossenen orientierten Polygone in S^3. Man nennt zwei Polygone P_1, P_2 aus $\mathfrak{P}$ *gleichverknotet*, falls es einen orientierungserhaltenden Autohomöomorphismus h von S^3 gibt, der P_1 auf P_2 abbildet (unter Berücksichtigung der auf diesen Polygonen ausgezeichneten Orientierungen). Nach den Approximationssätzen für Homöomorphismen kann man h hierbei semilinear wählen [3]. Der von einem Polygon P aus $\mathfrak{P}$ repräsentierte *Knoten* $\langle P \rangle$ ist die Menge aller mit P gleichverknoteten Polygone aus $\mathfrak{P}$. Mit $\mathfrak{Q}$ wollen wir die Menge aller (nicht orientierten) einfach geschlossenen Polygone in S^3 bezeichnen. Der von einem Polygon Q aus $\mathfrak{Q}$ repräsentierte *allgemeine Knoten* sei dann die Menge aller Polygone aus $\mathfrak{Q}$, die man erhält, indem man auf Q alle semilinearen Autohomöomorphismen von S^3 anwendet (auch die orientierungsumkehrenden). Auf naheliegende Weise ist jedem Knoten κ ein allgemeiner Knoten $\bar{\kappa}$ zugeordnet, und die Zuordnung $\kappa \to \bar{\kappa}$ ist eine Abbildung der Menge aller Knoten auf die Menge aller allgemeinen Knoten, bei der jeder allgemeine Knoten höchstens vier Urbilder hat.

Es sei nun K_e der durch $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, $\xi_3 = 0$ definierte *Einheitskreis* und V_e der *Einheitsvolltorus*, d. h. die Menge der Punkte aus E^3, die von K_e höchstens den Abstand $\frac{1}{2}$ haben. Unter einem *Vollring* verstehen wir ein zu V_e homöomorphes

Teilpolyeder von S^3. (Diese Definition sowie die meisten in diesem Abschnitt folgenden Definitionen und Sätze sind im wesentlichen der Arbeit [4] entnommen.) Ein auf dem Rande T eines Vollringes V gelegenes einfach geschlossenes Polygon heißt *Meridian* von V, falls es in V nicht aber auf T zusammenziehbar ist. Eine 2-Polyzelle in V, deren Rand ein Meridian von V ist, die aber sonst ganz im Innern von V liegt, heißt *Meridianfläche* von V. Ist L eine im Innern von V gelegene einfach geschlossene Kurve, so ist die *Ordnung* von V in bezug auf L die kleinste Anzahl von Punkten, in denen eine Meridianfläche von V die Kurve L schneiden kann. (Diese Ordnung muß nicht notwendig endlich sein.) Ein Vollring V heißt orientiert, falls in seiner (unendlich zyklischen) Fundamentalgruppe $\pi(V)$ ein erzeugendes Element ε ausgezeichnet ist. Eine in V gelegene einfach geschlossene orientierte Kurve L repräsentiert dann in $\pi(V)$ ein Element ε^n. Die Zahl n heißt die *Umlaufzahl* von L in V. Eine *Seele* eines Vollrings V ist ein einfach geschlossenes Polygon im Innern von V, das bei einem Homöomorphismus von V_e auf V aus dem Einheitskreis K_e hervorgegangen ist. Ist der Vollring V orientiert, so kann man seine Seelen so orientieren, daß sie die Umlaufzahl 1 erhalten. Die so orientierten Seelen sollen *positiv orientiert* genannt werden. Jeder orientierte Vollring repräsentiert einen Knoten, nämlich den von seinen positiv orientierten Seelen repräsentierten Knoten. Ein (nicht orientierter) Vollring definiert auf ähnliche Weise einen allgemeinen Knoten.

Um in der Menge aller Knoten eine Multiplikation einzuführen kann man folgendermaßen vorgehen: Es seien κ und λ zwei Knoten. Zunächst wählen wir einen Repräsentanten P für κ aus $\mathfrak{P}$ und einen unverknoteten Vollring V_0, der P so im Innern enthält, daß P in V_0 die Umlaufzahl 1 hat. (Ein orientierter Vollring heißt *unverknotet*, falls er den trivialen Knoten repräsentiert, d. h. den Knoten der auch vom orientierten Rand eines Dreiecks repräsentiert wird.) Weiter wählen wir einen orientierten Vollring V, der λ repräsentiert und einen die Orientierung der Vollringe erhaltenden semilinearen Homöomorphismus φ von V_0 auf V. Dann hängt der von $\varphi(P)$ repräsentierte Knoten nur von κ und λ ab und heißt Produkt $\kappa\lambda$ von κ und λ. Diese Multiplikation macht die Menge aller Knoten zu einer kommutativen regulären Halbgruppe, die zur multiplikativen Halbgruppe der positiven ganzen Zahlen isomorph ist.

Wir nennen einen allgemeinen Knoten $\bar{\kappa}$ Begleitknoten eines allgemeinen Knotens $\bar{\lambda}$, falls es einen $\bar{\kappa}$ repräsentierenden Vollring V und ein $\bar{\lambda}$ repräsentierendes Polygon Q mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) $Q \subseteq \operatorname{Int} V$.
(2) *Q ist nicht Seele von V.*
(3) *V hat in bezug auf Q nicht die Ordnung* 0.

Mit $\mathfrak{A}$ wollen wir die Menge aller nicht trivialen allgemeinen Knoten bezeichnen. ($\mathfrak{A}$ ist also die Menge aller allgemeinen Knoten, die nicht durch den Rand eines Dreiecks repräsentierbar sind.) Setzen wir $\bar{\kappa} < \bar{\lambda}$, falls $\bar{\kappa}$ Begleitknoten von $\bar{\lambda}$ ist, so wird durch $<$ in $\mathfrak{A}$ eine Halbordnung eingeführt. Es gilt also:

(1) *Aus* $\bar{\kappa} < \bar{\lambda}$ *und* $\bar{\lambda} < \bar{\mu}$ *folgt* $\bar{\kappa} < \bar{\mu}$.
(2) *Es gilt niemals* $\bar{\kappa} < \bar{\kappa}$.

In dieser Halbordnung gibt es unendlich viele minimale Elemente. (Die den Schlingknoten mit trivialem Diagonalknoten zugeordneten allgemeinen Knoten sind u.a. solche minimalen Elemente.)

Schließlich sei noch bemerkt, daß für zwei nicht triviale Knoten κ und λ stets $\bar{\kappa} < \overline{\kappa\lambda}$ gilt. (Durch den Querstrich bezeichnen wir immer den Übergang zum entsprechenden allgemeinen Knoten. Für allgemeine Knoten kann man ein Produkt im oben ausgeführten Sinne nicht definieren.)

3. Konstruktion der Kurve K

Wie in [2] nennen wir eine endliche Folge $\mathfrak{W} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ von 3-Polyzellen in S^3 einen *Wurm*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $n > 3$.
(2) $Z_i \cap Z_{i+1}$ *ist eine* 2-*Polyzelle* $(1 \leqq i \leqq n-1)$.
(3) $Z_i \cap Z_j = 0$, *falls* $|i-j| > 1$.

Eine Folge $\mathfrak{R} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ von 3-Polyzellen in S^3 heißt *Ring*, falls für $1 \leqq i \leqq n$ die Folgen $(Z_{i+1}, \ldots, Z_n, Z_1, \ldots, Z_{i-1})$ Würmer sind. Die Menge $|\mathfrak{R}| = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ ist dann ein Vollring, der von der Anordnung der Zellen in $\mathfrak{R}$ her eine Orientierung erhält. Ein Wurm, der nur aus Zellen des Ringes $\mathfrak{R}$ besteht, heißt *Teilwurm* von $\mathfrak{R}$. Es seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ zwei Ringe mit $|\mathfrak{R}'| \subseteq \operatorname{Int} |\mathfrak{R}|$, wobei für jede Zelle Z aus $\mathfrak{R}$ die Zellen aus $\mathfrak{R}'$, die $\operatorname{Int} Z$ schneiden, ganz in Z liegen und einen Teilwurm von $\mathfrak{R}'$ bilden. Stimmen dann die Orientierungen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ überein, haben also die Kurven, die in $|\mathfrak{R}'|$ die Umlaufzahl 1 haben auch in $|\mathfrak{R}|$ die Umlaufzahl 1, so nennen wir $\mathfrak{R}'$ *normal* in $\mathfrak{R}$ gelegen. Es sei jetzt $\mathfrak{R}'$ normal in $\mathfrak{R}$ gelegen und Z eine Zelle von $\mathfrak{R}$. Dann ist $(S^3 - \operatorname{Int} Z) \cup |\mathfrak{R}'|$ ein Vollring V, der von $\mathfrak{R}'$ her eine Orientierung erhält (d. h. V sei so orientiert, daß in $|\mathfrak{R}'|$ gelegene orientierte Kurven in $|\mathfrak{R}'|$ und in V die gleichen Umlaufzahlen haben). Den von V repräsentierten Knoten nennen wir dann den von $\mathfrak{R}'$ in Z repräsentierten Knoten.

Zur Konstruktion von K wählen wir zunächst eine Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ von Knoten, deren zugehörige allgemeine Knoten $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots$ paarweise verschieden und in $\mathfrak{A}$ minimal sind. Nun definieren wir sukzessive eine Folge $\mathfrak{R}^1, \mathfrak{R}^2. \ldots$ von Ringen:

$\mathfrak{R}^1 = (Z_1, \ldots, Z_{r_1})$ sei ein beliebiger Ring, dessen Zellen in $\operatorname{Int} W_e$ liegen und höchstens den Durchmesser 1 haben (W_e wurde in der Einleitung definiert).

$\mathfrak{R}^2 = (Z_{r_1+1}, \ldots, Z_{r_2})$ sei ein normal in $\mathfrak{R}^1$ gelegener Ring, dessen Zellen höchstens den Durchmesser $\frac{1}{2}$ haben und der für $1 \leqq i \leqq r_1$ in Z_i den Knoten μ_i repräsentiert.

$\mathfrak{R}^3 = (Z_{r_2+1}, \ldots, Z_{r_3})$ sei ein normal in $\mathfrak{R}^2$ gelegener Ring, dessen Zellen höchstens den Durchmesser $\frac{1}{3}$ haben und der für $r_1 + 1 \leqq i \leqq r_2$ in Z_i den Knoten μ_i repräsentiert.

Es ist nun leicht zu erraten, wie man die weiteren Ringe $\mathfrak{R}^4$, $\mathfrak{R}^5$, ... zu definieren hat.

Da die Durchmesser der Zellen aus den Ringen $\mathfrak{R}^i$ gegen 0 streben, ist der Durchschnitt

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} |\mathfrak{R}^i|$$

eine einfach geschlossene Kurve. Es ist dies die Kurve, von der wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, daß jeder Autohomöomorphismus von S^3, der K als Gesamtheit festläßt, sogar jeden Punkt von K festlassen muß, die also die in der Einleitung behauptete Eigenschaft besitzt.

Schließlich sei noch vermerkt – ohne daß wir den nicht sehr schwierigen Beweis hier ausführen –, daß für $j > i$ der Ring $\mathfrak{R}^j$ stets normal in $\mathfrak{R}^i$ liegt und für jede Zelle Z aus $\mathfrak{R}^i$ der von $\mathfrak{R}^j$ in Z repräsentierte Knoten gerade das Produkt $\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}$ ist, wobei $Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_s}$ alle in Z enthaltenen Zellen der Ringe $\mathfrak{R}^i, \ldots, \mathfrak{R}^{j-1}$ sind.

4. K ist fixiert

Es sei φ ein Autohomöomorphismus von S^3 mit $\varphi(K) = K$. Wir haben zu zeigen, daß φ die Kurve K punktweise festläßt. Dieser Beweis soll indirekt geführt werden, so daß wir jetzt annehmen, die Einschränkung von φ auf K sei nicht die Identität. Nach den Sätzen über die Approximierbarkeit der Homöomorphismen von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (siehe [1]), dürfen wir voraussetzen, daß φ auf $S^3 - K$ lokal semilinear ist. (φ heißt auf $S^3 - K$ lokal semilinear, falls es zu jedem Punkt x aus $S^3 - K$ ein x im Innern enthaltendes Polyeder gibt, auf dem φ semilinear ist.) Wir wählen einen Punkt a auf K mit $b = \varphi(a) \neq a$. Diese Wahl können wir so treffen, daß sowohl a als auch b für jeden Ring $\mathfrak{R}^i$ im Innern einer Zelle aus $\mathfrak{R}^i$ liegen (es gibt ja nur abzählbar viele Punkte auf K, die diese letzte Bedingung nicht erfüllen). Da φ gleichmäßig stetig ist, kann man leicht eine Zelle Z_a aus einem Ring $\mathfrak{R}^i$ und eine Zelle Z_b aus einem Ring $\mathfrak{R}^j$ so auswählen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$a \in \operatorname{Int} Z_a\,, \quad b \in \operatorname{Int} Z_b\,,$$
$$Z_a \cap Z_b = 0\,,$$
$$\varphi(Z_a) \subseteq \operatorname{Int} Z_b\,.$$

Weiterhin läßt sich ein Index k wählen, der so groß ist, daß

$$\varphi(Z_a - \operatorname{Int}|\mathfrak{R}^{i+1}|) \subseteq \operatorname{Int}(Z_b - |\mathfrak{R}^k|)$$

gilt. (Das ist möglich, da $|\mathfrak{N}^k|$ bei wachsendem k in immer engeren Umgebungen von K liegt, während $\varphi(Z_a - \operatorname{Int}|\mathfrak{N}^{i+1}|)$ als kompakte zu K fremde Menge von K einen positiven Abstand hat.) Der Vollring $V_b = (S^3 - \operatorname{Int} Z_b) \cup |\mathfrak{N}^k|$ liegt dann im Innern des Vollringes $V_a = (S^3 - \operatorname{Int} \varphi Z_a) \cup \varphi|\mathfrak{N}^{i+1}|$. (Daß die letzte Menge ein Polyeder und damit ein Vollring ist, folgt aus der Tatsache, daß φ auf $S^3 - K$ lokal semilinear ist.) V_a repräsentiert den allgemeinen Knoten $\bar{\mu}$, der dem von $\mathfrak{N}^{i+1}$ in Z_a repräsentierten Knoten μ zugeordnet ist. (Dieser Knoten μ kommt in der zur Konstruktion von K ausgewählten Knotenfolge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ vor.) Der von V_b repräsentierte allgemeine Knoten $\overline{\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_s}}$ ist einem Produkt $\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_s}$ von Knoten zugeordnet, die ebenfalls der Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ entnommen sind. Da die Zellen Z_a und Z_b disjunkt sind, ist $\bar{\mu}$ von allen allgemeinen Knoten $\bar{\mu}_{i_j}$ $(1 \leqq j \leqq s)$ verschieden. (Das ergibt sich aus der am Ende des letzten Abschnittes gemachten Bemerkung.) Es sei nun L eine orientierte Seele von V_b, deren Orientierung so gewählt sei, daß sie den Knoten $\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_s}$ repräsentiert. Das Polygon L ist in V_b und damit erst recht in V_a zur Kurve K homotop, so daß man V_a und V_b so orientieren kann, daß L in beiden Vollringen die Umlaufzahl 1 erhält. Dann kann nur einer der folgenden beiden Fälle eintreten: Der von V_a repräsentierte allgemeine Knoten $\bar{\mu}$ ist Begleitknoten von $\overline{\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_s}}$ (wenn nämlich L nicht Seele von V_a ist), oder es gilt $\bar{\mu} = \overline{\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_s}}$ (wenn L gleichzeitig Seele von V_b und V_a ist). Man sieht sofort, daß der zweite Fall nicht eintreten kann; denn sonst müßte wegen der Minimalität von $\bar{\mu}$ das Produkt $\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_s}$ nur aus einem Faktor μ_{i_1} bestehen und somit $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{i_1}$ sein. Oben hatten wir jedoch vermerkt, daß $\bar{\mu}$ von allen allgemeinen Knoten $\bar{\mu}_{i_j}$ verschieden ist. Auch der erste Fall ist unmöglich, wie die folgende Überlegung zeigt: Wäre $\bar{\mu}$ Begleitknoten von $\overline{\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_s}}$, so müßte $\bar{\mu}$ wegen seiner Minimalität schon Begleitknoten eines der allgemeinen Knoten $\bar{\mu}_{i_j}$ sein, was jedoch der Minimalität dieser Knoten widerspricht, oder es müßte $\bar{\mu}$ gleich einem der allgemeinen Knoten $\bar{\mu}_{i_j}$ sein, was aber – wie wir soeben bei der Betrachtung des zweiten Falles sahen – ebenfalls unmöglich ist. (Um die letzten Überlegungen zu begründen, muß man einige Ergebnisse der Arbeit [4] heranziehen.) Da also keiner der beiden einzig möglichen Fälle eintreten kann, haben wir gezeigt, daß die Einschränkung des anfangs betrachteten Homöomorphismus φ auf K nicht von der Identität verschieden sein kann, und der Beweis ist beendet.

Literaturverzeichnis

[1] *R. H. Bing:* An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated. Ann. of Math. *69* (1959), 37–65.

[2] *H. G. Bothe:* Ein homogen wilder Knoten. Erscheint in Fund. Math.

[3] *E. E. Moise:* Affine structures in 3-manifolds VIII. Ann. of Math. *59* (1954), 159–170.

[4] *H. Schubert:* Knoten und Vollringe. Acta Math. *90* (1953), 131–286.