Willi Rinow

Über die verallgemeinerten uniformen Strukturen von Morita und ihre Vervollständigung

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 297--305.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700892

ÜBER DIE VERALLGEMEINERTEN UNIFORMEN STRUKTUREN VON MORITA UND IHRE VERVOLLSTÄNDIGUNG

W. RINOW

Greifswald

Uniforme Strukturen können nach Tukey [4] durch Systeme von Überdeckungen definiert werden. Auf dieser Grundlage hat Morita [1] den Begriff der uniformen Struktur verallgemeinert. Ein beliebiges Überdeckungssystem auf einer Menge heisst nach Morita eine uniformity. Dieser Begriff wird schrittweise verschärft zur T-uniformity, regular uniformity und completely regular uniformity. Die letzte ist mit der Tukeyschen uniformen Struktur identisch. In den zitierten Arbeiten hat Morita den Vervollständigungsprozess auf die verallgemeinerten uniformen Strukturen zu übertragen versucht. Andere Konstruktionen gibt Suzuki [3] an. Diese Ansätze führen jedoch nur für den Fall der regular uniformity zum Ziel. Im allgemeineren Falle ergibt die übliche Konstruktion durch Cauchyfilter, die sogenannte einfache Erweiterung, jedoch keine Vervollständigung. Diese kann für die T-uniformities nur durch einen transfiniten Iterationsprozess erreicht werden. Ferner ergibt sich, dass die unterliegende Topologie der allgemeinsten uniformity stets schwach regulär im Sinne von Shanin [2] ist.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man die genannten Schwierigkeiten vermeiden kann. Wir gehen von gefilterten Überdeckungssystemen aus. Diese sind mit den T-uniformities von Morita identisch. Die einem Überdeckungssystem unterliegende Topologie wird jedoch schwächer gefasst als bei Morita, so dass jeder topologische Raum uniformisierbar wird. Die Äquivalenzrelation zwischen Überdeckungssystemen wird dagegen gegenüber Morita verschärft. Die Äquivalenzklassen sind die verallgemeinerten uniformen Strukturen. Wir ziehen den Namen Überdeckungsstruktur vor, um beim Vergleich mit den Moritaschen und anderen Arbeiten Verwirrungen in der Nomenklatur zu vermeiden. Der Begriff der Überdeckungsstruktur wird verschärf zu dem der schwach regulären und der regulären Überdeckungsstruktur. Diese entsprechen genau den T-uniformities bzw. regular uniformities bei Morita. Es erweist sich weiterhin als notwendig, den Begriff des Cauchyfilters von Morita abzuschwächen zum Begriff des Fundamentalfilters. Für die Zwecke der Vervollständigungstheorie wird es dann nötig, den Begriff des Fundamentalfilters schrittweise zu verschärfen. Entsprechend erhalten wir auch verschiedene Vollständigkeitsbegriffe. Die regulären Überdeckungsstrukturen sind dadurch ausgezeichnet, dass die genannten verschiedenen Begriffe des Fundamentalfilters sowie der Vollständigkeit zusammenfallen und mit den Moritaschen Formulierungen identisch werden.

Der bekannte Vervollständigungsprozess für uniforme Strukturen kann nunmehr auf beliebige Überdeckungsstrukturen übertragen werden. Es werden drei Vervollständigungen $V_m^0(\boldsymbol{U})$, $V^0(\boldsymbol{U})$ und $V^1(\boldsymbol{U})$ einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ konstruiert. $V_m^0(\boldsymbol{U})$ und $V^0(\boldsymbol{U})$ sind strikte T_0-Erweiterungen und können durch Maximaleigenschaften charakterisiert werden. $V^1(\boldsymbol{U})$ ist eine strikte T_1-Erweiterung und $\boldsymbol{U}$ sowohl als auch $V^1(\boldsymbol{U})$ sind schwach reguläre Überdeckungsstrukturen. $V^1(\boldsymbol{U})$ kann in eindeutiger Weise bis auf äquivalente Erweiterungen charakterisiert werden. Hieraus folgt die Vervollständigung von Morita durch den eingangs erwähnten transfiniten Iterationsprozess in $V^1(\boldsymbol{U})$ eingebettet ist. Schliesslich wird gezeigt, dass $\boldsymbol{U}$ stets so gewählt werden kann, dass jede strikte T_1-Erweiterung eines beliebigen T_1-Raumes $(M, \boldsymbol{T})$ durch die Vervollständigung $V^1(\boldsymbol{U})$ einer passend gewählten, mit der Topologie $\boldsymbol{T}$ verträglichen, schwach regulären Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ erzeugt werden kann. Dies ist die Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Morita über reguläre Erweiterungen eines regulären Raumes.

1. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ und $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_\beta \mid \beta \in B\}$ seien zwei Systeme von Überdeckungen derselben Menge M. $\mathfrak{U}$ heisst *feiner* als $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$, wenn es zu jedem $\beta \in B$ ein $\alpha \in A$ gibt, so dass die Überdeckung $\mathfrak{U}_\alpha$ feiner ist als die Überdeckung $\mathfrak{V}_\beta$. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, so heissen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ *äquivalent*, $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{V}$ (vgl. Morita [1, I]).

Ist ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ auf einer Menge M gegeben, so erzeugt $\bigcup_{\alpha\in A} \mathfrak{U}_\alpha$ eine Topologie $\tau(\mathfrak{U})$ auf M, die *unterliegende Topologie*. $\mathfrak{U}$ heisst T-*feiner* als $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{V}$, wenn $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$ und $\tau(\mathfrak{U}) \supseteqq \tau(\mathfrak{V})$ gilt. Gilt $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$, so heissen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ T-*äquivalent*, $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{V}$; es ist alsdann $\tau(\mathfrak{U}) = \tau(\mathfrak{V})$.

Ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ heisst *gefiltert* (T-uniformity bei Morita [1, I], Bedingung B), wenn es zu jedem $\alpha' \in A$ und $\alpha'' \in A$ ein $\alpha \in A$ gibt, so dass $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{U}_{\alpha'}$ und $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{U}_{\alpha''}$ ist. Die Relation $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{V}$ ist eine auf der Menge aller gefilterten Überdeckungssysteme von M definierte Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse bezüglich dieser Relation heisst eine *Überdeckungsstruktur* $\boldsymbol{U}$ auf M und $M = |\boldsymbol{U}|$ die *Trägermenge* von $\boldsymbol{U}$. Je zwei Repräsentanten derselben Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ besitzen dieselbe unterliegende Topologie. Diese wird als die $\boldsymbol{U}$ unterliegende Topologie $\tau(\boldsymbol{U})$ definiert. Ist auf M eine Topologie $\boldsymbol{T}$ und eine Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ gegeben, so heisst $\boldsymbol{U}$ mit $\boldsymbol{T}$ *verträglich*, wenn $\boldsymbol{T} = \tau(\boldsymbol{U})$ ist. (Morita [1, I] benutzt eine schärfere Verträglichkeitsbedingung.) Sind $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ Überdeckungsstrukturen auf M, so heisst $\boldsymbol{U}$ *feiner* als $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U} < \boldsymbol{V}$, wenn jeder Repräsentant von $\boldsymbol{U}$ T-feiner als jeder Repräsentant von $\boldsymbol{V}$ ist.

$\hat{\mathfrak{U}} = \{\mathfrak{U}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{U}_{\alpha_n} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A,\ n = 1, 2, \ldots\}$, wo $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ein Überdeckungssystem auf M ist und $\mathfrak{U}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{U}_{\alpha_n} = \{U_1 \cap \ldots \cap U_n \mid U_1 \in \mathfrak{U}_{\alpha_1}, \ldots \ldots, U_n \in \mathfrak{U}_{\alpha_n}\}$, ist ein gefiltertes Überdeckungssystem von M, welches $\mathfrak{U}$ enthält und für welches $\tau(\hat{\mathfrak{U}}) = \tau(\mathfrak{U})$ gilt. $\hat{\mathfrak{U}}$ definiert daher eine Überdeckungsstruktur, die durch $\mathfrak{U}$ erzeugte Überdeckungsstruktur. $\hat{\mathfrak{U}}$ ist offenbar ein Repräsentant von $\boldsymbol{U}$, für welchen die sämtlichen Überdeckungselemente eine Basis für $\tau(\boldsymbol{U})$ bilden, die gegenüber endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.

Sei $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ein beliebiger Repräsentant von $\boldsymbol{U}$. $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_\beta \mid \beta \in B\}$ sei das System aller Überdeckungen von M durch bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$ offene Teilmengen, so dass wenigstens ein $\mathfrak{U}_\alpha$ feiner ist als $\mathfrak{V}_\beta$. Es ist nach Definition $\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}$ T-äquivalent zu $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{V}$ heisst ein *voller Repräsentant* von $\boldsymbol{U}$.

1.1. *Jede Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ auf M besitzt genau einen vollen Repräsentanten. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass er jeden Repräsentanten von $\boldsymbol{U}$ als Teilmenge enthält. Es ist $\boldsymbol{U}' < \boldsymbol{U}''$ genau dann, wenn der volle Repräsentant von $\boldsymbol{U}''$ Teilmenge des vollen Repräsentanten von $\boldsymbol{U}'$ ist.*

1.2. *Das System aller Überdeckungen einer Menge M ist voller Repräsentant der feinsten Überdeckungsstruktur auf M. Die unterliegende Topologie ist die diskrete.*

1.3. *$\boldsymbol{T}$ sei eine Topologie auf M. Das System aller bezüglich $\boldsymbol{T}$ offenen Überdeckungen von M ist voller Repräsentant der feinsten mit $\boldsymbol{T}$ verträglichen Überdeckungsstruktur.*

$\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ heisst ein *schwach reguläres Überdeckunssystem*, wenn $\{\mathrm{St}_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$ für jedes $x \in M$ eine Basis des Umgebungsfilters von x bezüglich der Topologie $\tau(\mathfrak{U})$ ist ($\mathrm{St}_\alpha(C)$ bedeutet den Stern von C bzgl. $\mathfrak{U}_\alpha$). Dies ist gerade die Bedingung A bei Morita [1, I]. Unter einer *schwach regulären Überdeckungsstruktur* versteht man eine Überdeckungsstruktur, die einen schwach regulären Repräsentanten besitzt. Aus der Bemerkung über die unterliegende Topologie folgt sofort, dass jeder Repräsentant einer schwach regulären Überdeckungsstruktur schwach regulär ist.

1.4. *Für schwach reguläre Überdeckungssysteme fällt der Begriff der* T-*Verfeinerung und damit der* T-*Äquivalenz mit dem der Verfeinerung bzw. Äquivalenz zusammen.*

Damit ist der Zusammenhang mit den Arbeiten von Morita [1] hergestellt: Zwei mit einer Topologie $\boldsymbol{T}$ verträgliche T-Uniformitäten sind genau dann im Sinne von Morita äquivalent, wenn sie Repräsentanten derselben schwach regulären Überdeckungsstruktur sind.

Wir nennen ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ auf M regulär, wenn $\mathfrak{U}$ schwach regulär ist und wenn es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha' \in A$ gibt, derart dass zu jedem $U' \in \mathfrak{U}_{\alpha'}$ ein (von U' und α' abhängiges) $\alpha'' \in A$ mit $\mathrm{St}_{\alpha''}(U') \subseteqq U$ für wenigstens ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ existiert (Bedingung C bei Morita [1, I]). $\mathfrak{U}$ heisst vollständig regulär, wenn $\mathfrak{U}$ schwach regulär ist und wenn es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha' \in A$ gibt, so dass $\{\mathrm{St}_{\alpha'}(U) \mid U \in \mathfrak{U}_{\alpha'}\}$ eine Überdeckung von M ist, die feiner ist als $\mathfrak{U}_\alpha$ (Bedingung D bei Morita [1, I]).

1.5. *Sind $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ und $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_\beta \mid \beta \in B\}$ äquivalent, und ist $\mathfrak{U}$ regulär bzw. vollständig regulär, so ist auch $\mathfrak{V}$ regulär bzw. vollständig regulär.*

Eine Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ heisst regulär bzw. vollständig regulär, wenn die Repräsentanten von $\boldsymbol{U}$ regulär bzw. vollständig regulär sind. Vollständig reguläre Überdeckungsstrukturen sind mit den uniformen Strukturen im üblichen Sinne identisch und sind stets auch regulär. Nach Morita [1, I] gelten folgende Sätze.

1.6. *Ist $\boldsymbol{U}$ eine schwach reguläre, bzw. reguläre bzw. vollständig reguläre Überdeckungsstruktur, so ist die unterliegende Topologie $\tau(\boldsymbol{U})$ schwach regulär bzw. genügt dem Trennungsaxiom T_3 bzw. dem Trennungsaxiom von Tychonoff.*

1.7. *$\boldsymbol{T}$ sei eine schwach reguläre bzw. eine T_3-Topologie auf M. Dann ist das Überdeckungssystem, welches aus allen bezüglich $\boldsymbol{T}$ offenen Überdeckungen besteht, voller Repräsentant einer schwach regulären bzw. regulären Überdeckungsstruktur.*

Der Begriff der gleichmässigen Stetigkeit muss gegenüber Morita [1, II] etwas abgeändert werden: $\boldsymbol{U}$ bzw. $\boldsymbol{U}'$ seien Überdeckungsstrukturen auf M bzw. M' und $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ bzw. $\mathfrak{U}' = \{\mathfrak{U}'_{\alpha'} \mid \alpha' \in A'\}$ seien Repräsentanten von $\boldsymbol{U}$ bzw. $\boldsymbol{U}'$. Eine Abbildung f von M in M' heisst bezüglich $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}'$ *gleichmässig stetig*, wenn sie bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$, $\tau(\boldsymbol{U}')$ stetig ist und wenn es zu jedem $\alpha' \in A'$ ein $\alpha \in A$ gibt, so dass $\mathfrak{U}_\alpha$ feiner ist als die Überdeckung $\{f^{-1}(U') \mid U' \in \mathfrak{U}'_{\alpha'}\}$. Diese Definition ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten.

Der Zusammenhang mit den Moritaschen Formulierungen ergibt sich aus

1.8. *f sei eine Abbildung von M in M'. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ bzw. $\mathfrak{U}' = \{\mathfrak{U}'_{\alpha'} \mid \alpha' \in A'\}$ seien Überdeckungssysteme auf M bzw. M'. $\mathfrak{U}'$ sei schwach regulär und es gebe zu jedem $\alpha' \in A'$ ein $\alpha \in A$, so dass $\mathfrak{U}_\alpha < \{f^{-1}(U') \mid U' \in \mathfrak{U}'_{\alpha'}\}$. Dann ist f bezüglich $\tau(\mathfrak{U})$ und $\tau(\mathfrak{U}')$ stetig.*

Eine Abbildung f heisst ein bezüglich $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}'$ *uniformer Isomorphismus*, wenn f eine eineindeutige Abbildung von $|\boldsymbol{U}|$ auf $|\boldsymbol{U}'|$ ist und wenn f sowohl als auch f^{-1} bezüglich $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{U}'$ gleichmässig stetig sind. Existiert ein uniformer Isomorphismus von $\boldsymbol{U}$ auf $\boldsymbol{U}'$, so heissen $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{U}'$ uniform äquivalent.

2. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sei Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ auf M. Ein Filter Φ auf M heisst ein *Fundamentalfilter bezüglich* $\boldsymbol{U}$, wenn es zu jedem $\alpha \in A$ ein $X \in \Phi$ und ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ mit $X \subseteqq U$ gibt.

2.1. *Ist $\boldsymbol{U}' < \boldsymbol{U}''$, so ist jeder Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}'$ auch ein Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}''$.*

2.2. *Jeder Filter, der feiner ist als ein Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$, ist ein Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$.*

Sei $\boldsymbol{T}$ eine Topologie auf M und Φ ein Filter auf M. Φ heisst ein *offener Filter bezüglich* $\boldsymbol{T}$, wenn die in Φ enthaltenen, bezüglich $\boldsymbol{T}$ offenen Mengen eine Filterbasis für Φ bilden. Ist $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$

auf M, so heisst ein Fundamentalfilter Φ ein $\mathfrak{U}$-*Filter*, wenn es zu jedem $X \in \Phi$ endlich viele Mengen $U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha$ mit $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \Phi$ und $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteqq X$ gibt. Für den vollen Repräsentanten $\mathfrak{U}$ einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ fällt der Begriff des $\mathfrak{U}$-Filters mit dem des offenen Fundamentalfilters bezüglich $\boldsymbol{U}$ zusammen. Ist Φ ein beliebiger Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$, so erzeugen die Elemente von $\bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha$, die in Φ enthalten sind, einen Filter $\Phi_{\mathfrak{U}}$. $\Phi_{\mathfrak{U}}$ ist offenbar ein $\mathfrak{U}$-Filter und Φ ist feiner als $\Phi_{\mathfrak{U}}$.

Ein Filter, der für jeden Repräsentanten $\mathfrak{U}$ von $\boldsymbol{U}$ ein $\mathfrak{U}$-Filter ist, heisst ein $\boldsymbol{U}$-*Filter*. Solche Filter existieren, denn man sieht leicht ein, dass für jedes $x \in M$ der Filter aller Umgebungen von x bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$ ein $\boldsymbol{U}$-Filter ist. Ein Filter, der feiner ist als ein $\boldsymbol{U}$-Filter, heisst ein *strikter Fundamentalfilter*. Nach 2,2 ist jeder strikte Fundamentalfilter auch ein Fundamentalfilter.

2.3. *Jeder bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$ konvergente Filter ist ein strikter Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$.*

$\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sei Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$. Ein Filter Φ auf M heisst ein *schwacher Sternfilter bezüglich* $\boldsymbol{U}$, wenn es zu jedem $X \in \Phi$ ein $\alpha \in A$ gibt, so dass aus $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ und $U \in \Phi$ stets $U \subseteqq X$ folgt.

2.4. *Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$ und Φ ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathfrak{V}$, so ist Φ auch ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathfrak{U}$.*

2.5. *Jeder schwache Sternfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$ ist ein minimaler Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$, d. h. ein Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$, der keinen Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$ als echte Teilmenge enthält. Jeder minimale Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$ ist ein $\boldsymbol{U}$-Filter.*

2.6. *$\boldsymbol{U}$ sei eine schwach reguläre Überdeckungsstruktur auf M. Dann ist für jedes $x \in M$ der Umgebungsfilter $\boldsymbol{T}_x$ von x bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$ ein schwacher Sternfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$.*

2.7. *Φ sei ein schwacher Sternfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$, der gegen einen Punkt $x \in |\boldsymbol{U}|$ konvergiert. Dann ist Φ mit dem Umgebungsfilter von x bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$ identisch.*

Ein Filter Φ auf M heisst nach Morita ein *Cauchyfilter* bezüglich eines Überdeckungssystems $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$, wenn es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha' \in A$ und ein $X \in \Phi$ gibt, so dass $\mathrm{St}_{\alpha'}(X) \subseteqq U$ für wenigstens ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ gilt. Jeder Cauchyfilter bezüglich $\mathfrak{U}$ ist offenbar ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathfrak{U}$. Ein Filter heisst ein *schwacher Cauchyfilter* bezüglich $\boldsymbol{U}$, wenn er feiner als ein schwacher Sternfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$ ist.

2.8. *Jeder Cauchyfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$ ist ein schwacher Cauchyfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$ und jeder schwache Cauchyfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$ ist ein strikter Fundamentalfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$.*

2.9. *U sei eine schwach reguläre Überdeckungsstruktur auf M. Dann ist jeder bezüglich $\tau(U)$ konvergente Filter ein schwacher Cauchyfilter.*

2.10. *U sei eine reguläre Überdeckungsstruktur auf M. Dann sind die Begriffe Fundamentalfilter, strikter Fundamentalfilter, schwacher Cauchyfilter und Cauchyfilter bezüglich U sowie die Begriffe minimaler Fundamentalfilter, schwacher Sternfilter bezüglich U identisch.*

Eine Überdeckungsstruktur U auf M heisst *fundamental vollständig* bzw. *schwach fundamental vollständig* bzw. *stark vollständig* bzw. *vollständig*, wenn jeder Fundamentalfilter bzw. strikte Fundamentalfilter bzw. schwache Cauchyfilter bzw. Cauchyfilter bezüglich $\tau(U)$ konvergiert. Jede fundamental vollständige Überdeckungsstruktur ist schwach fundamental vollständig, jede schwach fundamental vollständige ist stark vollständig und jede stark vollständige ist vollständig. Für reguläre Überdeckungsstrukturen fallen diese Begriffe nach Satz 2.10 zusammen. Der Begriff der Vollständigkeit fällt mit dem der Vollständigkeit nach Morita [1, I] zusammen.

2.11. *T sei eine Topologie auf M und U_T die feinste mit T verträgliche Überdeckungsstruktur. Dann ist U_T fundamental vollständig.*

3. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sei ein Überdeckungssystem auf M und N eine Teilmenge von M. Für jedes $\mathfrak{U}_\alpha$ bilde man die Spur auf $N : \widetilde{\mathfrak{U}}_\alpha = \{U \cap N \mid U \in \mathfrak{U}_\alpha\}$. $\widetilde{\mathfrak{U}} = \{\widetilde{\mathfrak{U}}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ist dann ein Überdeckungssystem auf N, die *Spur* von $\mathfrak{U}$ auf N. Offenbar gelten folgende Sachverhalte: Die $\widetilde{\mathfrak{U}}$ unterliegende Topologie $\tau(\widetilde{\mathfrak{U}})$ ist gleich der Spur von $\tau(\mathfrak{U})$ auf N. Ist $\mathfrak{U}$ feiner bzw. T-feiner als $\mathfrak{V}$, so gilt das Entsprechende für die Spuren. Äquivalente bzw. T-äquivalente Überdeckungssysteme haben äquivalente bzw. T-äquivalente Spuren, und gefilterte Überdeckungssysteme haben auch gefilterte Spuren. Es ist daher auch die Spur $\widetilde{U}$ auf N einer Überdeckungsstruktur U definiert. Es ist leicht einzusehen, dass die Spur einer schwach regulären bzw. regulären Überdeckungsstruktur wieder eine schwach reguläre bzw. reguläre Überdeckungsstruktur ist.

Ist $M \subseteqq M'$, $\mathfrak{U}' = \{\mathfrak{U}'_{\alpha'} \mid \alpha' \in A'\}$ ein Überdeckungssystem auf M', $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ die Spur von $\mathfrak{U}'$ auf M und M eine bezüglich $\tau(\mathfrak{U}')$ dichte Teilmenge von M', so heisst $\mathfrak{U}'$ eine *Erweiterung* von $\mathfrak{U}$. Es ist dann der topologische Raum $(M', \tau(\mathfrak{U}'))$ eine Erweiterung des topologischen Raumes $(M, \tau(\mathfrak{U}))$, d. h. $(M, \tau(\mathfrak{U}))$ ist ein in $(M', \tau(\mathfrak{U}'))$ dichter Teilraum. Eine Überdeckungsstruktur U' auf M' heisst eine *Erweiterung der Überdeckungsstruktur* U auf M, wenn M eine bezügliche $\tau(U')$ dichte Teilmenge von M' und U die Spur von U' auf M ist, wenn also jeder Repräsentant von U' Erweiterung eines Repräsentanten von U ist.

Wir werden im folgenden nur strikte Erweiterungen betrachten. Diese sind so definiert: Der topologische Raum (M', T') sei eine Erweiterung des topologischen Raumes (M, T). Für jede bezüglich T offene Menge G sei $O_{M'}(G)$ die Vereinigung aller bezüglich $\boldsymbol{T}'$ offenen Teilmengen G' von M', für die $M \cap G' = G$ ist. Ist $\{O_{M'}(G) \mid G \in \boldsymbol{T}\}$ eine Basis von $\boldsymbol{T}'$, so heisst $(M', \boldsymbol{T}')$ eine *strikte Erweiterung* von $(M, \boldsymbol{T})$.

Ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U}'$ bzw. eine Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}'$ auf M' heisst eine *topologisch strikte Erweiterung* des Überdeckungssystems $\mathfrak{U}$ bzw. der Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ auf M, wenn $\mathfrak{U}'$ bzw. $\boldsymbol{U}'$ eine Erweiterung von $\mathfrak{U}$ bzw. $\boldsymbol{U}$ ist und wenn die Erweiterung $(M', \tau(\mathfrak{U}'))$ bzw. $(M', \tau(\boldsymbol{U}'))$ von $(M, \tau(\mathfrak{U}))$ bzw. $(M, \tau(\boldsymbol{U}))$ strikt ist.

$\boldsymbol{U}'$ sei eine Erweiterung von $\boldsymbol{U}$ und $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ein Repräsentant von $\boldsymbol{U}$. Die Trägermengen von $\boldsymbol{U}'$ bzw. $\boldsymbol{U}$ seien M' bzw. M. Man setze $O_{M'}(\mathfrak{U}_\alpha) = \{O_{M'}(U) \mid U \in \mathfrak{U}_\alpha\}$ und $O_{M'}(\mathfrak{U}) = \{O_{M'}(\mathfrak{U}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Die Erweiterung $\boldsymbol{U}'$ heisst *uniform strikt*, wenn $O_{M'}(\mathfrak{U})$ für jeden Repräsentanten $\mathfrak{U}$ von $\boldsymbol{U}$ ein Repräsentant von $\boldsymbol{U}'$ ist.

3.1. *Jede uniform strikte Erweiterung $\boldsymbol{U}'$ von $\boldsymbol{U}$ ist auch topologisch strikt.*

Eine Erweiterung $\boldsymbol{U}'$ von $\boldsymbol{U}$ heisst eine T_0- bzw. *T_1-Erweiterung*, wenn $\tau(\boldsymbol{U}')$ eine T_0- bzw. T_1-Topologie ist. Es ist alsdann auch $\tau(\boldsymbol{U})$ eine T_0- bzw. T_1-Topologie.

Wir konstruieren nunmehr eine topologisch strikte T_0-Erweiterung, die gewisse Vollständigkeitseigenschaften besitzt. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sei Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ auf M und $\tau(\boldsymbol{U})$ sei eine T_0-Topologie. Die Menge aller $\mathfrak{U}$-Filter, die von den Umgebungsfiltern der Punkte $x \in M$ bzgl $\tau(\boldsymbol{U})$ verschieden sind, sei mit $F_\mathfrak{U}$ bezeichnet. Man definiere $E_\mathfrak{U}(X) = X \cup \{\Phi \mid \Phi \in F_\mathfrak{U}, X \in \Phi\}$, wobei X eine beliebige Teilmenge von M ist. Sei $M' = M \cup F_\mathfrak{U}$. Setzen wir $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_\alpha) = \{E_\mathfrak{U}(U) \mid U \in \mathfrak{U}_\alpha\}$, $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}) = \{E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, so zeigt sich, dass $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U})$ Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}' = E_\mathfrak{U}(\boldsymbol{U})$ auf M' ist. Weiter kann man zeigen, dass $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U})$ eine Erweiterung von $\mathfrak{U}$ mit der Trägermenge M' ist; es ist damit auch $\boldsymbol{U}'$ eine Erweiterung von $\boldsymbol{U}$, und es lässt sich beweisen, dass diese Erweiterung topologisch strikt ist. Schliesslich kann man zeigen, dass für $\tau(\boldsymbol{U}')$ das T_0-Trennungsaxiom gilt und dass $\boldsymbol{U}'$ fundamental vollständig ist. Es gilt daher:

3.2. *Zu jedem Repräsentanten $\mathfrak{U}$ einer Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ auf M, deren unterliegende Topologie dem T_0-Axiom genügt, existiert eine fundamental vollständige, topologisch strikte T_0-Erweiterung $E_\mathfrak{U}(\boldsymbol{U})$ von $\boldsymbol{U}$.*

Bemerkung. Ist $\mathfrak{B}$ der volle Repräsentant von $\boldsymbol{U}$, so besteht $F_\mathfrak{B}$ aus den sämtlichen bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$ offenen Fundamentalfiltern von $\boldsymbol{U}$, die von den Umgebungsfiltern der Punkte $x \in M$ verschieden sind. Es ist dann $M \cup F_\mathfrak{U} \subseteqq M \cup F_\mathfrak{B}$ und die $E_\mathfrak{U}(\boldsymbol{U})$ unterliegende Topologie ist gleich der Spur von $\tau(E_\mathfrak{B}(\boldsymbol{U}))$ auf $M \cup F_\mathfrak{U}$. Wir bezeichnen $E_\mathfrak{B}(\boldsymbol{U})$ mit $V_m^0(\boldsymbol{U})$ und nennen $V_m^0(\boldsymbol{U})$ die *maximale T_0-Vervollständigung* von $\boldsymbol{U}$.

Um die Existenz einer uniform strikten Erweiterung zu zeigen, führen wir folgende Konstruktion durch: $\boldsymbol{U}$ sei eine Überdeckungsstruktur auf M und $\tau(\boldsymbol{U})$ eine T_0-Topologie. Statt $F_\mathfrak{U}$ legen wir die Menge $F_{\boldsymbol{U}}$ aller $\boldsymbol{U}$-Filter zugrunde, die von den Umgebungsfiltern aller Punkte $x \in M$ verschieden sind. Sei $M'' = M \cup F_{\boldsymbol{U}}$. Den auf M'' eingeschränkten Operator $E_{\mathfrak{U}}$ bezeichnen wir mit E_U also $E_U(X) = X \cup \cup \{\Phi \mid \Phi \in F_U, X \in \Phi\}$ für $X \subseteqq M$. Für jeden Repräsentanten $\mathfrak{U}$ von $\boldsymbol{U}$ erhalten wir so die Erweiterung $F_U(\mathfrak{U})$, die Spur der Erweiterung $E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U})$ auf M''. Mann kann zeigen, dass $E_U(\mathfrak{U})$ unabhängig vom gewählten Represäntanten $\mathfrak{U}$ auf M'' eine Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}''$ definiert, die eine uniform strikte Erweiterung und gleichzeitig eine T_0-Erweiterung von $\boldsymbol{U}$ ist. Schliesslich beweist man, dass $\boldsymbol{U}''$ schwach fundamental vollständig ist. Wir bezeichnen diese Erweiterung $\boldsymbol{U}''$ mit $V^0(\boldsymbol{U})$, die strikte T_0-Vervollständigung von $\boldsymbol{U}$.

3.3. *Zur jeder Überdeckungsstruktur U auf M, deren unterliegende Topologie dem T_0-Axiom genügt, existiert eine schwach fundamental vollständige, uniform strikte T_0-Erweiterung $V^0(\boldsymbol{U})$.*

Die strikten T_0-Erweiterungen werden gleichmässig stetig in die vorher beschriebene Erweiterung abgebildet, wie der folgende Satz zeigt:

3.4. *$\tilde{\boldsymbol{U}}$ sei eine topologisch strikte T_0-Erweiterung von $\boldsymbol{U}$. Dann existiert eine bezüglich $\tilde{\boldsymbol{U}}$, $V_m^0(\boldsymbol{U})$ gleichmässig stetige und bezüglich $\tau(\tilde{\boldsymbol{U}})$, $\tau(V_m^0(\boldsymbol{U}))$ topologische Abbildung von $|\tilde{\boldsymbol{U}}|$ in $|V_m^0(\boldsymbol{U})|$, welche die Punkte von $|\boldsymbol{U}|$ festlässt.*

Dabei wird die in 3.4 erwähnte Abbildung in der Weise definiert, dass einem Punkte $x \in |\tilde{\boldsymbol{U}}| - |\boldsymbol{U}|$ die Spur des Umgebungsfilters von x auf M zugeordnet wird.

3.5. *$\tilde{\boldsymbol{U}}$ sei eine uniform strikte T_0-Erweiterung von $\boldsymbol{U}$. Dann existiert ein uniformer Isomorphismus bezüglich $\tilde{\boldsymbol{U}}$, $V^0(\boldsymbol{U})$ von $|\tilde{\boldsymbol{U}}|$ in $|V^0(\boldsymbol{U})|$.*

4. In diesem Abschnitt konstruieren wir eine T_1-Vervollständigung. Wir gehen von einer schwach regulären Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}$ auf M aus. Die unterliegende Topologie $\tau(\boldsymbol{U})$ sei eine T_1-Topologie. F_s bezeichne die Menge aller schwachen Sternfilter bezüglich $\boldsymbol{U}$, die bezüglich $\tau(\boldsymbol{U})$ nicht konvergieren. Dann ist $F_s \subseteqq F_U$. Es sei $E_s(X) = X \cup \{\Phi \mid \Phi \in F_s, X \in \Phi\}$ die Einschränkung des Operators E_U und damit auch $E_{\mathfrak{U}}$ ($\mathfrak{U}$ Repräsentant von $\boldsymbol{U}$) auf $M \cup F_s$. Es ergibt sich, dass $E_s(\mathfrak{U})$ unabhängig vom Repräsentanten $\mathfrak{U} \in \boldsymbol{U}$ eindeutig eine Überdeckungsstruktur $\boldsymbol{U}' = E_s(\boldsymbol{U})$ auf $M \cup F_s$ definiert und dass $\boldsymbol{U}'$ eine uniform strikte T_0-Erweiterung von $\boldsymbol{U}$ ist. Man kann zeigen, dass $\boldsymbol{U}'$ schwach regulär ist. Mithin ist $\tau(\boldsymbol{U}')$ eine schwach reguläre T_0-Topologie und somit eine T_1-Topologie. Schliesslich kann man beweisen, dass $\boldsymbol{U}'$ stark vollständig ist.

Die Erweiterung $\boldsymbol{U}'$ werde mit $V^1(\boldsymbol{U})$ bezeichnet und heisse die *T_1-Vervollständigung* von $\boldsymbol{U}$.

4.1. *U sei eine schwach reguläre Überdeckungsstruktur auf M, deren unterliegende Topologie dem T_1-Trennungsaxiom genügt. Dann existiert eine stark vollständige, schwach reguläre, uniform strikte T_1-Erweiterung $V^1(\boldsymbol{U})$ von $\boldsymbol{U}$.*

4.2. *$\tilde{U}$ sei eine stark vollständige, schwach reguläre, topologisch strikte T_1-Erweiterung von U. Dann existiert eine bezüglich $\tilde{U}$ und $V_m^0(U)$ gleichmässig stetige und bezüglich $\tau(\tilde{U})$, $\tau(V_m^0(U))$ topologische Abbildung φ von $|\tilde{U}|$ in $|V_m^0(U)|$ mit $\varphi(x) = x$ für $x \in M$ und $|V^1(U)| \subseteqq \varphi(\tilde{M})$. Ist U überdies uniform strikt, so ist φ ein uniformer Isomorphismus von $|\tilde{U}|$ auf $|V^1(U)|$.*

Bemerkung. Aus 4.2 folgt durch Vergleich mit Theorem 1 und 2 aus Morita [1, II], S. 167, dass die durch einen transfiniten Prozess erzeugte Vervollständigung von Morita uniform isomorph unter Festhaltung der Punkte von $|U|$ in $|V^1(U)|$ abgebildet werden kann.

4.3. *$(\tilde{M}, \tilde{T})$ sei ein T_0-Raum und eine strikte T_0-Erweiterung des T_0-Raumes (M, T). Dann existiert auf M eine mit T verträgliche uniforme Struktur U und eine topologische Abbildung φ von $\tilde{M}$ in $|V_m^0(U)|$, die die Punkte von M festlässt. Ist $(\tilde{M}, \tilde{T})$ ein T_1-Raum und eine strikte T_1-Erweiterung von (M, T), so existiert eine mit T verträgliche schwach reguläre Überdeckungsstruktur U und eine topologische Abbildung φ von $\tilde{M}$ auf $|V^1(U)|$, die die Punkte von M festlässt. $V^1(U)$ ist dabei fundamental vollständig.*

Dabei wird U in natürlicher Weise als die Spur der durch das System aller offenen Überdeckungen von $(\tilde{M}, \tilde{T})$ bestimmten Struktur $\tilde{U}$ erklärt.

Bemerkung. 1) Eine Überdeckungsstruktur U heisst *finit*, wenn sie einen Repräsentanten $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ besitzt, so dass U_α für jedes $\alpha \in A$ nur aus endlich vielen Elementen besteht. Einen derartigen Repräsentanten nennen wir finit. Es lässt sich dann folgender Zusatz zu 4.3 formulieren: Ist $(\tilde{M}, \tilde{T})$ kompakt, so kann die Überdeckungsstruktur U finit gewählt werden.

2) Ist U eine beliebige finite Überdeckungsstruktur, so ist $\tau(V_m^0(U))$ kompakt.

Literatur

[1] *K. Morita:* On the simple extension of a space with respect to a uniformity. I, II, III, IV. Proceedings Japan. Acad. *27* (1951), 65—72, 130—137, 166—171, 632—636.

[2] *N. A. Shanin:* Über Trennung in topologischen Räumen. (Russ.) Doklady Akad. Nauk SSSR *38* (1943), 110—113.

[3] *J. Suzuki:* On the metrisation and the completion of a space with respect to a uniformity. Proceedings Japan. Acad. *27* (1951), 217—223.

[4] *J. W. Tukey:* Convergence and uniformity in topology. 1940.