О КОМПАКТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВ БЛИЗОСТИ

Н. ХАДЖИИВАНОВ

София

Пусть (X, δ) – пространство близости. Для простоты будем рассматривать такие пространства близости, для которых $x \, \delta \, y \Leftrightarrow x = y$.

Пусть (X, ϱ) – метрическое пространство. Последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда каждые две ее подпоследовательности $\{x_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ близки, т.е. $\varrho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} x_{m_i}, \bigcup_{i=1}^{\infty} x_{n_i}\right) = 0$.

Пространство (X, ϱ) полно тогда и только тогда, когда каждая фундаментальная последовательность сходится.

В. А. Ефремович в [1] предлагает аналогичным образом определить полноту пространства близости.

Обобщенная последовательность $\{x_a\}_A$ элементов пространства (X, δ) называется *фундаментальной*, если любые ее две подпоследовательности близки, т.е. если $\{x_{\varphi(b)}\}_B$ и $\{x_{\psi(c)}\}_C$ подпоследовательности $\{x_a\}_A$, то $(\bigcup_b x_{\varphi(b)}) \, \delta \, (\bigcup_C x_{\psi(c)})$.

Пространство (X, δ) называется полным, если каждая фундаментальная последовательность сходится в топологии, порожденной близостью δ.

Даже в случае метрического пространства новое определение полноты не тождественно с обычным. Например, действительная ось не является полным пространством, хотя она полна в смысле классического определения.

Каждое пространство близости можно погрузить в полное пространство близости. Для этого воспользуемся методом Кантора.

В метрическом случае погружение в полное пространство происходит следующим образом. Вводится отношение эквивалентности в множество фундаментальных последовательностей. Потом в соответствующем фактор-пространстве определяется подходящим образом метрика. Получаем полное метрическое пространство, содержащее данное в качестве всюду плотного подмножества. Оно и называется пополнением первоначально заданного пространства.

Легко доказать, что фундаментальные последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ конфинальны (т.е. $\varrho(x_i, y_i) \to 0$), если каждая подпоследовательность $\{x_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ первой последовательности близка к каждой подпоследовательности $\{y_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ второй последовательности, т.е. $\varrho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} x_{m_i}, \bigcup_{i=1}^{\infty} y_{n_i}\right) = 0$.

Обобщенные фундаментальные последовательности $\{x_a\}_A$ и $\{y_b\}_B$ называются *конфинальными,* если каждая подпоследовательность $\{x_{\varphi(c)}\}_C$ первой последовательности близка к каждой подпоследовательности $\{y_{\psi(d)}\}_D$ второй, т.е. $\bigcup_C x_{\varphi(c)}\ \delta \bigcup_D y_{\psi(d)}$. Для обозначения конфинальности вводим символ $\sim$.

Лемма 1. *Конфинальность есть отношение эквивалентности в множестве фундаментальных последовательностей.*

Доказательство. Очевидно, каждая фундаментальная последовательность конфинальна сама себе, и отношение конфинальности симметрично. Докажем, что отношение конфинальности транзитивно. Действительно, пусть $\{x_a\}_A \sim \{y_b\}_B$ и $\{y_b\}_B \sim \{z_c\}_C$, однако несмотря на это $\{x_a\}_A \nsim \{z_c\}_C$. Тогда существуют подпоследовательности $\{x_{\varphi(a')}\}_{A'}$ и $\{z_{\psi(c')}\}_{C'}$ такие, что $\bigcup_{A'} x_{\varphi(a')}\ \bar{\delta} \bigcup_{C'} z_{\psi(c')}$ Пусть $U \Supset \bigcup_{A'} x_{\varphi(a')}$, $V \Supset \bigcup_{C'} z_{\psi(c')}$ (символ $S \Supset T$, где S и T – подмножества заданного пространства близости (X, δ), означает, что $X \setminus S$ далеко от T) и $U \cap V = \emptyset$. Если существуют произвольно большие индексы b для которых $y_b \notin U$, то существует подпоследовательность $\{y_{\eta(b')}\}_{B'}$ в $X \setminus U$. Тогда $\bigcup_{A'} x_{\varphi(a')}\ \bar{\delta} \bigcup_{B'} y_{\eta(b')}$ и получаем противоречие $\{x_a\}_A \nsim \{y_b\}_B$. Следовательно, существует такое b_1, что $y_b \in U$ для всех $b \succ b_1$. Таким же образом убеждаемся, что существует такое b_2, что $y_b \in V$ для всех $b \succ b_2$. Если $b \succ b_1$ и $b \succ b_2$, то $b \in U \cap V$, а $U \cap V = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает транзитивность.

Этим доказательство леммы закончено.

Через $E(X)$ будем обозначать множество всех классов эквивалентности. Пусть $A \subset X$. Через $E(A)$ будем обозначать множество всех тех элементов из $E(X)$, т.е. классов эквивалентности, которые содержат последовательность, состоящую из элементов множества A. В $Y = E(X)$ вводим близость следующим образом.

Пусть $M \subset Y$ и $N \subset Y$. Будем считать, что $M\ \bar{\Delta}\ N$, если существуют такие A и B, что $A \subset X$, $B \subset X$, $A\ \bar{\delta}\ B$, $M \subset Y \setminus E(X \setminus A)$, $N \subset Y \setminus E(X \setminus B)$.

Лемма 2. (Y, Δ) – *пространство близости.*

Доказательство. 1. Если $M\ \bar{\Delta}\ N$, то $N\ \bar{\Delta}\ M$.

2. $M\ \bar{\Delta}\ (N \cup P)$ тогда и только тогда, когда $M\ \bar{\Delta}\ N$ и $M\ \bar{\Delta}\ P$. – В одном направлении утверждение очевидно. Докажем, что если $M\ \bar{\Delta}\ N$ и $M\ \bar{\Delta}\ P$, то $M\ \bar{\Delta}\ (N \cup P)$. Во-первых, существуют такие A_1 и B_1, A_2 и B_2, что

$$M \subset Y \setminus E(X \setminus A_1), \quad N \subset Y \setminus E(X \setminus B_1), \quad A_1\ \bar{\delta}\ B_1,$$
$$M \subset Y \setminus E(X \setminus A_2), \quad P \subset Y \setminus E(X \setminus B_2), \quad A_2\ \bar{\delta}\ B_2.$$

Положим $A = A_1 \cap A_2$, $B = B_1 \cup B_2$. Тогда $A\ \bar{\delta}\ B$ и

$$M \subset [Y \setminus E(X \setminus A_1)] \cap [Y \setminus E(X \setminus A_2)] = Y \setminus [E(X \setminus A_1) \cup E(X \setminus A_2)] =$$
$$= Y \setminus E[(X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)] = Y \setminus E[X \setminus (A_1 \cap A_2)] = Y \setminus E(X \setminus A).$$

Мы здесь использовали легко устанавливаемое равенство $E(F \cup G) = E(F) \cup \cup E(G)$.

С другой стороны, используя очевидное включение $E(F) \cap E(G) \supset E(F \cap G)$, получаем

$$N \cup P \subset [Y \setminus E(X \setminus B_1)] \cup [Y \setminus E(X \setminus B_2)] = Y \setminus [E(X \setminus B_1) \cap E(X \setminus B_2)] \subset \subset Y \setminus E[(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2)] = Y \setminus E[X \setminus (B_1 \cup B_2)] = Y \setminus E(X \setminus B).$$

Итак, мы доказали, что $M \bar{\varDelta} (N \cup P)$.

3. Если $M \bar{\varDelta} N$, то имеются такие непересекающиеся U и V, что $U \Supset M$ и $V \Supset N$.

Так как $M \bar{\varDelta} N$, то существуют A и B такие, что $M \subset Y \setminus E(X \setminus A)$, $N \subset \subset Y \setminus E(X \setminus B)$ и $A \bar{\delta} B$. Подберем непересекающиеся множества C и D так, что $C \Supset A$ и $D \Supset B$. Положим $U = Y \setminus E(X \setminus C)$, $V = Y \setminus E(X \setminus D)$. Тогда

$$U \cap V = [Y \setminus E(X \setminus C)] \cap [Y \setminus E(X \setminus D)] = Y \setminus [E(X \setminus C) \cup E(X \setminus D)] = = Y \setminus E[(X \setminus C) \cup (X \setminus D)] = Y \setminus E[X \setminus (C \cap D)] = Y \setminus E(X) = \emptyset.$$

Докажем еще, что $M \Subset U$, $N \Subset V$. Займемся первым соотношением. Итак, нам нужно доказать, что $M \bar{\varDelta}\ Y \setminus U = E(X \setminus C)$. Пусть K множество такое, что $A \Subset \Subset K \Subset C$. Тогда имеем $E(X \setminus C) \subset Y \setminus E[X \setminus (X \setminus K)] = Y \setminus E(K)$, так как $E(X \setminus C) \cap E(K) = \emptyset$. Последнее соотношение верно, так как если допустим, что это не так, то существует точка $\xi \in E(X \setminus C) \cap E(K)$, следовательно, ξ имеет представителей в $X \setminus C$ и в K, а это невозможно, так как $K \bar{\delta} X \setminus \setminus C$, а каждые два представителя ξ конфинальны и тем более близки. С другой стороны $M \subset Y \setminus E(X \setminus A)$. Окончательно $M \subset Y \setminus E(X \setminus A)$, $E(X \setminus C) \subset \subset Y \setminus E[X \setminus (X \setminus K)]$ а $A \bar{\delta} X \setminus K$. Следовательно $M \bar{\varDelta} E(X \setminus C)$, т.е. $M \Subset U$.

Таким же образом доказываем, что $N \Subset V$.

4. $\xi \bar{\delta} \eta$ тогда и только тогда, когда $\xi \neq \eta$.

Пусть $\xi \bar{\delta} \eta$. Тогда существуют A и $B : A \bar{\delta} B$, $\xi \in Y \setminus E(X \setminus A)$, $\eta \in Y \setminus \setminus E(X \setminus B)$. Однако

$$[Y \setminus E(X \setminus A)] \cap [Y \setminus E(X \setminus B)] = Y \setminus [E(X \setminus A) \cup E(X \setminus B)] = = Y \setminus E[(X \setminus A) \cup (X \setminus B)] = Y \setminus E[X \setminus (A \cap B)] = Y \setminus E(X) = \emptyset.$$

Следовательно, $\xi \neq \eta$.

Пусть теперь $\xi \neq \eta$ и пусть $\{x_a\}_A$ представитель ξ, а $\{y_b\}_B$ — представитель η. Тогда $\{x_a\}_A \nsim \{y_b\}_B$ и следовательно, существуют далекие подпоследовательности этих двух последовательностей. Для простоты сохраним для них те же обозначения. Итак, $\bigcup\limits_A x_a \bar{\delta} \bigcup\limits_B y_b$. Пусть U и V удовлетворяют условиям $U \Supset \bigcup\limits_A x_a$, $V \Supset \bigcup\limits_B y_b$, $U \bar{\delta} V$. Легко доказать, что $\xi \in Y \setminus E(X \setminus U)$ и $\eta \in V \setminus \setminus E(X \setminus V)$. Действительно, если допустим, что $\xi \in E(X \setminus U)$, то существует представитель $\{z_c\}_C$ класса ξ в $X \setminus U$. Так как $\bigcup_C z_c \subset X - U$, то $\bigcup_A x_a \bar{\delta} \bigcup_C z_c$. Это противоречит тому, что $\{x_a\}_A$ и $\{z_c\}_C$ являются представителями ξ.

Аналогичным образом можно доказать, что $\eta \in Y \setminus E(X \setminus V)$. Итак, мы получаем $\xi \bar{\delta} \eta$.

Итак, мы доказали, что (Y, Δ) — пространство близости.

Теперь погрузим (X, δ) в (Y, Δ). Пусть $x \in X$. Положим $\varphi(x) = E(x)$.

Лемма 3. $\varphi(x)$ *отображает* (X, δ) *близостно гомеоморфно в* (Y, Δ).

Доказательство. Если $x \neq y$, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Докажем, что φ — близостно непрерывное отображение. Пусть $\varphi(A) \bar{\Delta} \varphi(B)$. Докажем, что $A \bar{\delta} B$. Действительно

(1) $\varphi(A) \subset Y \setminus E(X \setminus A')$ и $\varphi(B) \subset Y \setminus E(X \setminus B')$, где

(2) $A' \bar{\delta} B'$.

Докажем, что $A \cap (X \setminus A') = \emptyset$. В противном случае существует $x \in A \cap (X \setminus A')$. Тогда $\varphi(x) \in \varphi(A)$, $\varphi(x) \in \varphi(X \setminus A') \subset E(X \setminus A')$, и следовательно, $\varphi(A) \cap E(X \setminus A') \neq \emptyset$, что противоречит (1). Итак, $A \subset A'$. Таким же образом $B \subset B'$. Из (2) следует $A \bar{\delta} B$.

Докажем, что φ^{-1} близостно непрерывно. Пусть $A \bar{\delta} B$. Докажем, что $\varphi(A) \bar{\Delta} \varphi(B)$. Действительно, существуют C и D такие, что $C \Supset A$, $D \Supset B$, $C \cap D = \emptyset$. $A \bar{\delta} X \setminus C$, $B \bar{\delta} X \setminus D$. Следовательно, $E(A) \cap E(X \setminus C) = \emptyset$, $E(B) \cap E(X \setminus D) = \emptyset$. Так как $\varphi(A) \subset E(A)$ и $\varphi(B) \subset E(B)$, то $\varphi(A) \subset Y \setminus E(X \setminus C)$ и $\varphi(B) \subset Y \setminus E(X \setminus D)$. Следовательно, $\varphi(A) \bar{\Delta} \varphi(B)$.

Здесь мы использовали тот факт, что из $K \bar{\delta} L$ следует $E(K) \cap E(L) = \emptyset$. Действительно, если $\xi \in E(K) \cap E(L)$, то $K \delta L$, так как ξ имеет представителей и в K и в L.

Итак φ является близостным гомеоморфизмом.

Лемма 4. $\varphi(X)$ *всюду плотно* в (Y, Δ).

Доказательство. Установим, что если $\{x_a\}_A$ — представитель некоторого элемента $\xi \in Y$, то $\{\varphi(x_a)\}_A \to \xi$. Сначала докажем, что $\xi \Delta \bigcup_A \varphi(x_a)$. Если допустим, что $\xi \bar{\Delta} \bigcup_A \varphi(x_a)$, то существуют такие A и B, что $A \bar{\delta} B$, $\xi \in Y \setminus E(X \setminus A)$ и $\varphi(\bigcup_A X_a) = \bigcup_A \varphi(x_a) \subset Y \setminus E(X \setminus B)$. Положим $L = \bigcup_A x_a$. Так как $\varphi(L) \cap E(X \setminus B) = \emptyset$, то $L \cap (X \setminus B) = \emptyset$. Следовательно, $L \subset B$. Очевидно $\xi \in E(L) \subset E(B)$. Однако $L \subset B \subset X \setminus A$ и, следовательно, $\xi \in E(X \setminus A)$. Из этого получаем противоречие $\xi \notin Y \setminus E(X \setminus A)$.

Итак, $\xi \Delta \bigcup_A \varphi(x_a)$ если $\{x_a\}_A \in \xi$. Отсюда следует, что $\{\varphi(x_a)\}_A \to \xi$. Действительно, пусть $U \Supset \xi$. Если для произвольно больших a имеем $\varphi(x_a) \notin U$, то существует такая подпоследовательность $\{x_{\eta(b)}\}_B$, что $\bigcup_B \varphi(x_{\eta(b)}) \cap U = \emptyset$. Тогда

$\xi \bar{\Delta} \bigcup\limits_{B} \varphi(x_{\eta(b)})$, а $\{x_{\eta(b)}\}_B \sim \{x_a\}_A$, т.е. $\{x_{\eta(b)}\}_B \in \xi$. Это противоречит доказанному выше.

Итак, $\varphi(X)$ всюду плотно в (Y, Δ).

Лемма 5. (Y, Δ) *полно.*

Доказательство. Пусть $\{\xi_a\}_A$ – фундаментальная последовательность элементов из (Y, Δ). Пусть $U \Supset \bigcup\limits_{a' \succ a} \xi_{a'}$. Обозначим через Γ множество всех пар $\gamma = (a, U)$, где $a \in A$, $U \Supset \bigcup\limits_{a' \succ a} \xi_{a'}$. Введем в Γ порядок $\prec$ следующим образом: $\gamma_1 = (a_1, U_1) \prec \gamma_2 = (a_2, U_2)$, если $a_1 \prec a_2$ и $U_2 \subset U_1$. Легко установить, что Γ – направленная система.

Пусть теперь $\gamma_0 \in \Gamma$. Тогда $\gamma_0 = (a_0, U_0)$, $U_0 \Supset \bigcup\limits_{a \succ a_0} \xi_a$. Значит $U_0 \cap \varphi(X) \neq \emptyset$. Следовательно, существует такое $x \in X$, что $\varphi(x) \in U_0$. Обозначим его через x_{γ_0}.

Докажем, что полученная последовательность $\{\varphi(x_\gamma)\}_\Gamma$ конфинальна с $\{\xi_a\}_A$. Пусть $\{\varphi(x_{\psi(b)})\}_B$ подпоследовательность первой последовательности, а $\{\xi_{\eta(c)}\}_C$ подпоследовательность второй последовательности. Если допустим, что они далеки, то существуют M и N такие, что $M \Supset \bigcup\limits_{B} \varphi(x_{\psi(b)})$, $N \Supset \bigcup\limits_{C} \xi_{\eta(c)}$, $M \cap N = \emptyset$, $M \cup N = Y$. Существует такое a_0, что $\bigcup\limits_{a \succ a_0} \xi_a \subset N$, так как в противном случае можно выбрать подпоследовательность последовательности $\{\xi_a\}_A$, которая содержится в M и, следовательно, будет далека от последовательности $\{\xi_{\eta(c)}\}_C$, что противоречит фундаментальности $\{\xi_a\}_A$. Имеем $N \bar{\Delta} \bigcup\limits_{B} \varphi(x_{\psi(b)})$ и, следовательно, существуют U_0 и T такие, что $U_0 \cap T = \emptyset$, $N \Subset U_0$, $\bigcup\limits_{B} \varphi(x_{\psi(b)}) \subset T$. Положим $\gamma_0 = (a_0, U_0)$. Пусть $\gamma' = \psi(b_0) \succ \gamma_0$. $\gamma' = (a', U')$. Имеем $a' \succ a_0$, $U' \subset U_0$ и $\varphi(x_{\psi(b_0)}) = \varphi(x_{\gamma'}) \in U' \subset U_0$. С другой стороны $\varphi(x_{\gamma'}) \in \bigcup\limits_{B} \varphi(x_{\psi(b)}) \subset T$, т.е. $\varphi(x_{\gamma'}) \in T \cap U_0$, что дает противоречие.

Так как $\{\varphi(x_\gamma)\}_\Gamma \sim \{\xi_a\}_A$, то $\{\varphi(x_\gamma)\}_\Gamma$ фундаментальна и, следовательно, $\{x_\gamma\}_\Gamma$ фундаментальна, так как φ близостный гомеоморфизм. Пусть ξ – элемент Y, имеющий представителем $\{x_\gamma\}_\Gamma$. Как известно из доказательства предыдущей леммы, $\{\varphi(x_\gamma)\}_\Gamma \to \xi$, и, следовательно, $\{\xi_a\}_A \to \xi$.

Итак, мы доказали часть следующей теоремы:

Теорема 1. *Пространство близости может быть близостно гомеоморфно отображено на некоторое всюду плотное подмножество полного пространства близости. Последнее мы называем пополнением первоначально заданного пространства близости.*

Пополнение близостного пространства единственно с точностью до близостного гомеоморфизма, сохраняющего на месте точки пространства (X, δ).

Прежде чем доказать вторую часть теоремы, займемся доказательством следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть (X, δ) и (X', δ') – пространства близости, и притом второе из них полное. Тогда каждому близостно непрерывному отображению f пространства (X, δ) в (X', δ') можно сопоставить близостно непрерывное отображение f' пополнения (Y, Δ) пространства (X, δ) в (X', δ'), являющееся продолжением отображения f.*

Доказательство. Пусть $\xi \in Y$, и $\{x_a\}_A$ – представитель ξ. Положим $\lim_A f(x_a) = f'(\xi)$. Нетрудно доказать, что этот предел существует и не зависит от выбора представителя $\{x_a\}_A$. Во-первых, его существование следует из близостной непрерывности отображения f и из того, что пространство (X', δ') полное: действительно, $\{f(x_a)\}_A$ фундаментальная последовательность в (X', δ') и, следовательно, она сходится. Пусть $\{y_b\}_B$ – другой представитель ξ. Тогда $\{x_a\}_A \sim \{y_b\}_B$ и, следовательно, $\{f(x_a)\}_A \sim \{f(y_b)\}_B$, так как f близостно непрерывно. Следовательно, $\{f(x_a)\}_A$ и $\{f(y_b)\}_B$ имеют общий предел. Очевидно, если $\xi = x \in X$, то $f'(\xi) = f(x)$. Итак, f' является продолжением f. Нужно доказать, что f' близостно непрерывно. Для этого достаточно отметить, что δ' индуцирует вполне регулярное и, тем более, регулярное, топологическое пространство; следовательно, f' непрерывно[1]). Однако (Y, Δ) полно, и, как докажем в следующей теореме, оно компактно. Следовательно f' близостно непрерывно.

Этим теорема 2 доказана.

Теперь перейдем к вопросу об единственности в предшествующей теореме.

Пусть (Y_1, Δ_1) и (Y_2, Δ_2) два пополнения пространства (X, δ), т.е. они – полные пространства, содержащие (X, δ) как всюду плотное подмножество. Пусть $e(x) = x$ для всех $x \in X$. Тогда $e(x)$ отображает близостно непрерывно (X, δ) в (Y_2, Δ_2), и это отображение можно продолжить до $e'(x)$, отображающего (Y_1, Δ_1) в (Y_2, Δ_2) близостно непрерывно. Докажем, что $e'(Y_1) = Y_2$. Действительно, пусть $\eta \in Y_2$ и пусть последовательность $\{x_a\}_A$ элементов из (X, δ) сходится в (Y_2, Δ_2) к η. Тогда $\{e(x_a)\}_A \to e'(\xi)$, где ξ элемент Y_1,представляющий предел последовательности $\{x_a\}_A$ в (Y_1, Δ_1). Из единственности предела имеем $e'(\xi) = \eta$. Остается еще доказать, что e' – взаимно однозначное отображение. Действительно, пусть $\xi_1 \in Y_1$, $\xi_2 \in Y_1$. В Y_2 имеем следующие предельные соотношения

$$e'(\xi_1) = \lim_{\substack{\{x_a\} \to \xi_1 \\ x_a \in X}} e(x_a), \quad e'(\xi_2) = \lim_{\substack{\{y_b\} \to \xi_2 \\ y_b \in X}} e(y_b).$$

Если допустим, что $e'(\xi_1) = e'(\xi_2)$, то $\{x_a\}_A \sim \{y_b\}_B$ в (Y_2, Δ_2) и следовательно $\{x_a\}_A \sim \{y_b\}_B$ в (Y_1, Δ_1). Отсюда следует $\xi_1 = \xi_2$.

Итак e' отображает (Y_1, Δ_1) взаимно однозначно и близостно непрерывно на (Y_2, Δ_2).

Отображение e' непрерывно, и так как Y_1 компактно, то e'^{-1} непрерывно. Из компактности Y_2 следует, что e'^{-1} близостно непрерывно.

---

[1]) См. напр. Бурбаки, Н. Общая топология, Москва 1958, стр. 71.

Итак, мы построили близостный гомеоморфизм пространства $(Y_1, \varDelta_1)$ на пространство $(Y_2, \varDelta_2)$ сохраняющий на месте точки пространства (X, δ).

Этим также доказана единственность в теореме 1.

Выше мы неоднократно пользовались следующим результатом:

Теорема 3. *Пространство близости (X, δ) полно тогда и только тогда, когда оно компактно.*

Доказательство. Пусть пространство компактно. Тогда из каждой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Это относится конечно и к произвольной фундаментальной последовательности. Следовательно любая фундаментальная последовательность сходится.

Наоборот пусть пространство полное, и Φ есть ультрафильтр. Возьмем произвольно $x_N \in N$. Любые две подпоследовательности обобщенной последовательности $\{x_N\}_\Phi$ пересекаются и следовательно $\{x_N\}_\Phi$ фундаментальна. Действительно, пусть $\{x_{\varphi(a)}\}_A$ — подпоследовательность последовательности $\{x_N\}_\Phi$. Для любого $N \in \Phi$ существует такое $a \in A$, что $\varphi(a) \subset N$. Из $x_{\varphi(a)} \in \varphi(a) \subset \subset N$ следует $\bigcup\limits_A x_{\varphi(a)} \cap N \neq \emptyset$. Отсюда заключаем, что $\bigcup\limits_A x_{\varphi(a)} \in \Phi$. Каждая другая подпоследовательность тоже содержится в Φ и следовательно каждые две последовательности пересекаются.

Итак $\{x_N\}_\Phi$ фундаментальна. Пусть $\{x_N\}_\Phi \to x$. Теперь докажем, что ультрафильтр Φ сходится к x. Пусть $U \Supset x$. Тогда существует такое N_0, что для $N \subset N_0$ имеем $x_N \in U$. Пусть N — произвольный элемент Φ. Тогда $N \cap N_0 \subset N$, и следовательно $x_{N \cap N_0} \in U$ и так как $x_{N \cap N_0} \in N \cap N_0 \subset N$, то $U \cap N \neq \emptyset$. Так как N произвольный элемент ультрафильтра, то $U \in \Phi$.

Этим компактность доказана.

Результаты, которые мы получили, дают нам возможность построить другим образом теорию компактных расширений. На этом мы не будем останавливаться.

Итак, путь, предложенный Ефремовичем в его работе [1], которым как он предполагал, можно ввести понятие полноты пространств близости, не приводить к цели даже в случае метрических пространств, а приводит к понятию компактности. Другой путь, предложенный тем же автором и проделанный Смирновым в его работе [2] (основную роль при этом играют центрированные системы) привел к тому же результату.

Как известно, понятие полноты, обладающее желательными свойствами, ввел Смирнов в своей работе [3].

Литература

[1] *В. А. Ефремович:* Геометрия близости. I. Матем. сб. *31* (*73*) 1 (1952), 189—200.

[2] *Ю. М. Смирнов:* О пространствах близости. Матем. сб. *31* (*73*) 3 (1952), 543—574.

[3] *Ю. М. Смирнов:* О полноте пространства близости. Труды Моск. Мат. Общ. *3* (1954), 271—306.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ СОФИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА