Ivan R. Prodanov

Компактные представления непрерывных алгебраических структур

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 290--294.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700823

КОМПАКТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

ИВ. ПРОДАНОВ

София

А. Вейль доказал для непрерывных групп аналог теоремы Стоуна-Чеха о компактных расширениях. Мы обобщаем результат Вейля так, что из этого обобщения следует теорема Стоуна-Чеха.

Пусть E и R – топологические пространства (ТП). Непрерывное отображение $\lambda(r_1, \ldots, r_m;\ x_1, \ldots, x_n)$ пространства $R^{(m)} \times E^{(n)}$ в E называется непрерывной алгебраической операцией в E над R. Числа m и n называются порядками операции λ. Любое семейство A непрерывных алгебраических операций в E над R называется непрерывной алгебраической структурой (НАС) в E над R.

Пусть E, F и R – ТП, A – НАС в E над R и B – НАС в F над R. Непрерывное отображение h пространства E в F называется представлением структуры A в B, если оно обладает следующими свойствами:

а) множество $h(E)$ всюду плотно в F;

б) существует взаимно однозначное соответствие $\lambda \leftrightarrow \lambda_h$ между структурами A и B, которое сохраняет порядки и удовлетворяет соотношению

$$h\lambda(r_1, \ldots, r_m;\ x_1, \ldots, x_n) = \lambda_h(r_1, \ldots, r_m;\ h(x_1), \ldots, h(x_n)) \tag{1}$$

для любых $\lambda \in A$, $r_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $x_j \in E$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Если пространство F компактно, мы говорим, что представление h и НАС B компактны.

Пусть E и R – ТП, A – НАС в E над R, F_i – компактное ТП, B_i – НАС в F_i над R, и h_i – представление структуры A в B_i $(i = 1, 2)$. Мы говорим, что h_1 мажорирует h_2, если существует представление χ структуры B_1 в B_2 для которого $h_2 = \chi h_1$. В настоящей работе мы хотим доказать, что для любой НАС A существует компактное представление, мажорирующее все компактные представления структуры A.

Пусть E и R – ТП и A – НАС в E над R. Через A' будем обозначать пересечение всех тех НАС $B \supset A$, которые содержат все суперпозиции своих элементов. Функция $f \in C(E)$ называется A-почти-периодической (A-ПП) если выполнено следующее условие: если $\lambda(r_1, \ldots, r_m;\ x_1, \ldots, x_n) \in A'$ и обобщенные последовательности $\{r_i^{(\alpha)}\}$ $(r_i^{(\alpha)} \in R,\ i = 1, 2, \ldots, m)$ сходятся, то для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ и для каждых обобщенных последовательностей $\{x_j^{(\alpha)}\}$ $(x_j^{(\alpha)} \in E,\ j = 1, 2, \ldots, k)$ из последовательности с общим членом

$$g_\alpha(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f\lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_k^{(\alpha)}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{2}$$

можно выделить равномерно сходящуюся (относительно $x_{k+1}, \ldots, x_n$) обобщенную подпоследовательность.

Лемма 1. *Если f есть A-ПП функция и последовательность* (2) *сходится для всех $x_{k+1}, \ldots, x_n \in E$, то эта последовательность сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть $g(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \lim\limits_{\alpha} g_\alpha(x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Если последовательность (2) не является равномерно сходящейся, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что ко всякому индексу α можно подобрать индекс $\alpha' \geqq \alpha$ и элементы $x_{k+1}^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)} \in E$ так, что выполняется условие

$$|g_{\alpha'}(x_{k+1}^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)}) - g(x_{k+1}^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)})| \geqq \varepsilon_0 \,. \tag{3}$$

Мы получаем, таким образом последовательность $\{g_{\alpha'}\}$ вида (2). Так как f есть A-ПП функция, из последовательности $\{g_{\alpha'}(x_{k+1}, \ldots, x_n)\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, чего не может быть в силу (3).

Лемма 2. *Пусть f — функция, определенная на E. Если к каждому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такую A-ПП функцию φ, что для всех $x \in E$ выполнялось неравенство $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, то f есть A-ПП функция.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность (2). Пусть

$$\lambda_\alpha(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_k^{(\alpha)}, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,, \tag{4}$$

$\{\lambda_{\alpha_\beta}\}$ — универсальная подпоследовательность последовательности $\{\lambda_\alpha\}$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через φ A-ПП функцию, для которой $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Так как функция φ ограничена, последовательность $\varphi(\lambda_{\alpha_\beta})$ сходится для всех $x_{k+1}, \ldots, x_n \in E$. В силу леммы 1 эта последовательность сходится равномерно. Следовательно существует такой индекс β_0, что для всех $\gamma, \delta \geqq \beta_0$ и $x_{k+1}, \ldots, x_n \in E$ выполняется неравенство $|\varphi(\lambda_{\alpha_\gamma}) - \varphi(\lambda_{\alpha_\delta})| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |f(\lambda_{\alpha_\gamma}) - f(\lambda_{\alpha_\delta})| &\leqq |f(\lambda_{\alpha_\gamma}) - \varphi(\lambda_{\alpha_\gamma})| + |\varphi(\lambda_{\alpha_\gamma}) - \varphi(\lambda_{\alpha_\delta})| + \\ &+ |\varphi(\lambda_{\alpha_\delta}) - f(\lambda_{\alpha_\delta})| \leqq 3\varepsilon \quad (\gamma, \delta \geqq \beta_0)\,. \end{aligned}$$

Этим лемма доказана.

Пусть E и R — ТП и A — НАС в E над R. Пусть Σ — полная относительно равномерной нормы и содержащая все константы алгебра A-ПП функций. Мы назовем алгебру Σ A-модулем, если она обладает свойством: если $f \in \Sigma$, $\lambda(r_1, \ldots, r_m; x_1, \ldots, x_n) \in A'$, $r_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $x_j \in E$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и $k = 1, 2, \ldots, n$, то функция

$$g(x) = f\lambda(r_1, \ldots, r_m;\ x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{5}$$

принадлежит Σ.

Теорема 1. *Пусть E и P — ТП и A — НАС в E над R. Тогда множество Σ_A всех A-ПП функций является A-модулем.*

Доказательство. Очевидно, что Σ_A есть алгебра, содержащая все константы. В силу леммы (2) эта алгебра полная. С другой стороны, для всякой функции $f \in \Sigma_A$ функция g, определенная равенством (5), есть A-ПП функция, так как A' содержит все суперпозиции своих элементов.

Пусть E — ТП, F — компактное пространство и h — непрерывное отображение пространства E в F. Через Σ_h будем обозначать множество всех функций вида

$$f = \varphi h \quad (\varphi \in C(F)) . \tag{6}$$

Очевидно, Σ_h — полная относительно равномерной нормы и содержащая все константы подалгебра алгебры $C(E)$.

Теорема 2. *Пусть E и R — ТП и A — НАС в E над R. Если h — представление структуры A в некоторой компактной НАС B, то Σ_h есть A-модуль. Наоборот, для каждого A-модуля Σ существует такое компактное представление h структуры A, что $\Sigma_h = \Sigma$.*

Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть F — то компактное пространство, в котором определена НАС B и $f \in \Sigma_h$. Тогда

$$f = \varphi h \quad (\varphi \in C(F)) . \tag{7}$$

Покажем, что f есть A-ПП функция. Пусть $\lambda(r_1, \ldots, r_m; x_1, \ldots, x_n) \in A'$, последовательность $\{r_i^{(\alpha)}\}$ $(r_i^{(\alpha)} \in R,\ i = 1, 2, \ldots, m)$ сходится и $0 \leqq k \leqq n$. Так как пространство F компактно, то для любых последовательностей $\{x_j^{(\alpha)}\}$ $(x_j^{(\alpha)} \in E,$ $j = 1, 2, \ldots, k)$ из последовательности

$$\{\varphi\lambda_h(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ h(x_1^{(\alpha)}), \ldots, h(x_k^{(\alpha)}), h(x_{k+1}), \ldots, h(x_n))\}$$

можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. В силу (7) и (1) из этого следует, что из последовательности

$$\{f\lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_k^{(\alpha)}, x_{k+1}, \ldots, x_n)\}$$

можно выделить равномерно сходящуюся (относительно $x_{k+1}, \ldots, x_n$) подпоследовательность. Следовательно, f есть A-ПП функция.

Остается доказать, что Σ_h — A-модуль. Пусть $f \in \Sigma_h$,

$$\lambda(r_1, \ldots, r_m; x_1, \ldots, x_n) \in A' , \quad r_i \in R \quad (i = 1, 2, \ldots, m) ,$$
$$x_j \in E \quad (j = 1, 2, \ldots, n) , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

и g функция, определенная равенством (5). В силу (6) $g = f\lambda = \varphi h\lambda$ $(\varphi \in C(F))$ и на основании (1)

$$g = \gamma h \tag{8}$$
$$(\gamma(\xi) = \varphi\lambda_h(r_1, \ldots, r_m;\ \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)) .$$

Так как $\gamma \in C(F)$, то из (8) следует, что $g \in \Sigma_h$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть Σ — A-модуль. Так как алгебра Σ является полной относительно равномерной нормы и содержит все константы, то существует компактное пространство F и непрерывное отображение h пространства E в F, для которого $h(E)$ всюду плотно в F и $\Sigma_h = \Sigma$ [3].

Теперь нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\lambda(r_1, \ldots, r_m;\ x_1, \ldots, x_n) \in A$. *Тогда для любых сходящихся последовательностей* $\{r_i^{(\alpha)}\}$ $(r_i^{(\alpha)} \in R,\ i = 1, 2, \ldots, m)$, $\{h(x_j^{(\alpha)})\}$ $(x_j^{(\alpha)} \in E,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ *последовательность* $\{h\lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)})\}$ *сходится.*

Так как F компактное пространство, в силу (6) достаточно доказать, что для всякой функции $f \in \Sigma$ последовательность $\{f\lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)})\}$ сходится. Докажем индукцией, что для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ последовательность с общим членом

$$g_\alpha(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f\lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_k^{(\alpha)}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

равномерно сходится (относительно $x_{k+1}, \ldots, x_n$). При $k = 0$ это следует из леммы 1. Предположим, что утверждение верно для некоторого $k = 0, 1, \ldots, \ldots, n - 1$ и докажем, что тогда оно верно и для $k + 1$. Пусть $\lim\limits_\alpha g_\alpha(x_{k+1}, \ldots, x_n) = g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ и $x_{k+2}, \ldots, x_n \in E$. Рассмотрим функции $l_\alpha(\xi) = g_\alpha(\xi, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, $l(\xi) = g(\xi, x_{k+2}, \ldots, x_n)$. Так как $f \in \Sigma$ и Σ — A-модуль, то $l_\alpha(\xi) \in \Sigma$. Но $\{l_\alpha(\xi)\}$ равномерно сходится к $l(\xi)$ и, следовательно, $l \in \Sigma$. Тогда $l = \varphi h$ $(\varphi \in C(F))$ и так как последовательность $\{h(x_{k+1}^{(\alpha)})\}$ сходится, последовательность $\{l(x_{k+1}^{(\alpha)})\}$ тоже сходится. Мы доказали, что последовательность $\{g(x_{k+1}^{(\alpha)}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\}$ сходится. С другой стороны, из равномерной сходимости $\{g_\alpha\}$ следует, что

$$\{g_\alpha(x_{k+1}^{(\alpha)}, x_{k+2}, \ldots, x_n) - g(x_{k+1}^{(\alpha)}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\} \to 0\,.$$

Следовательно, последовательность с общим членом

$$g_\alpha(x_{k+1}^{(\alpha)}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = f\lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_{k+1}^{(\alpha)}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$$

сходится для любых $x_{k+2}, \ldots, x_n \in E$. Из леммы 1 следует, что сходимость равномерная. Следовательно утверждение верно для $k + 1$ и лемма доказана.

Из этой леммы следует, что для любых $r_1, \ldots, r_m \in R$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n \in F$ можно подобрать такой элемент $\lambda_h(r_1, \ldots, r_m;\ \xi_1, \ldots, \xi_n)$ множества F, что выполняется условие: если $\{r_i^{(\alpha)}\} \to r_i$ $(r_i^{(\alpha)} \in R,\ i = 1, 2, \ldots, m)$ и $\{h(x_j^{(\alpha)})\} \to \xi_j$ $(x_j^{(\alpha)} \in E,\ j = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\{h\lambda(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)})\} \to \lambda_h(r_1, \ldots, r_m;\ \xi_1, \ldots, \xi_n)\,.$$

Так мы получили отображение λ_h пространства $R^{(m)} \times F^{(n)}$ в F. Из определения λ_h следует равенство (1). Из (1) следует, что выполнено условие: если $\{r_i^{(\alpha)}\} \to r_i$ $(r_i^{(\alpha)} \in R, i = 1, 2, \ldots, m)$, $\{\xi_j^{(\alpha)}\} \to \xi_j$ $(\xi_j^{(\alpha)} \in h(E),\ \xi_j \in F,\ j = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\{\lambda_h(r_1^{(\alpha)}, \ldots, r_m^{(\alpha)};\ \xi_1^{(\alpha)}, \ldots, \xi_n^{(\alpha)})\} \to \lambda_h(r_1, \ldots, r_m;\ \xi_1, \ldots, \xi_n)\,.$$

Так как $h(E)$ всюду плотно в F, из этого следует, что отображение λ_h непрерывно [1]. Следовательно, λ_h – непрерывная алгебраическая операция в F над R. Тогда множество B всех λ_h $(\lambda \in A)$ – НАС в F над R, для которой h является представлением A в B. Этим теорема доказана.

Пусть E и R – ТП, A – НАС в E над R, F_i – компактное пространство, B_i – НАС в F_i над R и h_i – представление структуры A в B $(i = 1, 2)$. Можно доказать, что представление h_1 мажорирует представление h_2 тогда и только тогда, когда $\Sigma_{h_1} \supset \Sigma_{h_2}$. Представления h_1 и h_2 называются эквивалентными, если каждое из них мажорирует другое. Представления h_1 и h_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Sigma_{h_1} = \Sigma_{h_2}$.

Теорема 3. *Пусть E и R –* ТП *и A –* НАС *в E над R. Тогда существует компактное пространство F,* НАС *B в F над R и представление h структуры A в B, для которых выполнено условие: если h_1 – представление A в некоторую компактную* НАС *B_1, то существует такое представление χ структуры B в B_1, что $h_1 = \chi h$.*

С точностью до эквивалентности это представление единствено.

Доказательство. В силу теоремы 1 множество Σ_A всех A-ПП функций в E является A-модулем. В силу теоремы 2 существует компактное пространство F, НАС B в F и представление h структуры A в B, для которых $\Sigma_h = \Sigma_A$.

Пусть h_1 – компактное представление структуры A. В силу теоремы 2 $\Sigma_{h_1} \subset \Sigma_A = \Sigma_h$. Следовательно, представление h мажорирует представление h_1.

Единственность следует из замечания перед теоремой 3.

Если A – группа, эта теорема дает нам результат Вейля [2], а если A – пустая алгебраическая структура, то получаем теорему Стоуна-Чеха.

Цитированная литература

[1] *Н. Бурбаки:* Общая топология. Основные структуры. Москва 1958.

[2] *А. Вейль:* Интегрирование в топологических группах и его применения. Москва 1950.

[3] *И. Гельфанд, Д. Райков, Г. Шилов:* Комутативные нормированные кольца. Москва 1960.