Matyáš Lerch

Theorie funkce gamma. [II.]

Věstník Čes. Akademie cís. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 2 (1893), 305–317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501770

Theorie funkce gamma.

Napsal *M. Lerch.*

(Pokračování.)

Abychom ukázali důležitost charakteristické vlastnosti funkce gamma posledně uvažované, studujme integrál

$$F(a)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx\,,$$

jenž má konečnou hodnotu, jak mile realná část veličiny a jest kladna. Částečnou integrací obdržíme

$$F(a)=\left|\frac{x^a}{a}e^{-x}\right|_{x=0}^{x=\infty}+\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x}\,x^a\,dx\,,$$

tedy $F(a)=\frac{1}{a}\,F(a+1$.

Rozkladem integrační cesty máme

$$F(a)=\int_0^1 e^{-x}\,x^{a-1}\,dx+\int_1^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx.$$

První integrál se vypočte pomocí řady

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,$$

tak že bude

$$\int_0^1 e^{-x}\,x^{a-1}\,dx=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2!\,(a+2)}-\frac{1}{3!\,(a+3)}+\ldots=P(a)\,,$$

což jest funkce analytická jednoznačná proměnné a. Druhý integrál

$$Q(a)=\int_1^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx$$

jest konečný pro všecka a, a zbývá ukázati, že je funkcí celistvou. To provésti lze rozkladem

$$Q(a)=\int_1^2+\int_2^3+\int_3^4+\ldots.$$

t. j.

$$Q(a)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_\nu^{\nu+1} e^{-x}\,x^{a-1}\,dx\,,$$

tak že bude nutno zjistiti dvě věci:

1° že tato řada konverguje stejnoměrně (vzhledem k a);
2° že každý její člen je celistvá funkce.

Stejnoměrnost konvergence dokáže se takto: Uvažujme hodnoty a, které jsou prostým obnosem menší než jistá konstanta R; pak bude

$$\left|\int_{\nu}^{\nu+1} e^{-x} x^{a-1} dx\right| < \int_{\nu}^{\nu+1} e^{-x} x^{R-1} dx,$$

a poněvadž řada

$$\sum \int_{\nu}^{\nu+1} e^{-x} x^{R-1} dx = \int_{1}^{\infty} e^{-x} x^{R-1} dx$$

konverguje, je stejnoměrnost (i absolutnost) konvergence zjištěna.

Podobně snadně se dokáže druhý punkt; neboť řada

$$e^{-x} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

konverguje stejnoměrně v oboru $(\nu \ldots \nu + 1)$; tedy obdržíme

$$\int_{\nu}^{\nu+1} e^{-x} x^{a-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left|\frac{x^{n+a}}{n!(n+a)}\right|_{x=\nu}^{x=\nu+1},$$

t. j.

$$\int_{\nu}^{\nu+1} e^{-x} x^{a-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(\nu+1)^{n+a} - \nu^{n+a}}{n!(n+a)},$$

a členové této stejnoměrně konvergentní řady jsou funkce celistvé; tím také věc 2° odbyta.

Jinak bychom mohli také dokázati celistvost funkce $Q(a)$ přetvořice integrál $Q(a)$ substitucí $x = \log \frac{1}{t}$, jež dává

$$Q(a) = \int_{0}^{\frac{1}{e}} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{a-1} dt.$$

Integrál $F(a)$ obdrželi jsme jako součet dvou funkcí jednoznačných $P(a) + Q(a)$, a tento součet znamenejme nyní $F(a)$; je to jednoznačná funkce, jež nemá jiných míst zvláštních mimo poly stupně prvního $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$; pro a s kladnou částí realnou je tato funkce rovna integrálu

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Klademe-li $a = \xi + i\eta$, $\quad 1 \leqq \xi \leqq 2$, jest

$$|F(\xi + i\eta)| \leqq \int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{\xi-1} dx = F(\xi).$$

Poněvadž $F(\xi)$ je konečné pro $1 \leqq \xi \leqq 2$, bude tedy

$$|F(\xi + i\eta)| < A,$$

a poněvadž tato funkce hoví rovnici $F(w+1) = w\,F(w)$, máme dle věty charakteristické v tomto odstavci dokázané

$$\frac{F(w)}{\Gamma(w)} = \text{const.}$$

Pro $w = 1$ je patrně

$$F(w) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

a tedy

$$F(w) = \Gamma(w).$$

Máme tedy výsledek

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx = \Gamma(a), \tag{8}$$

který Legendreovi sloužil za definici funkce $\Gamma(a)$, již nazval integrálem Eulerovým druhého způsobu. Dlužno však poznamenati, že oba integrály konvergují pouze za supposice Real. $a > 0$,[1]) kdežto funkce gamma existuje v celé rovině.

3. Z definice (2*) a (2ᵃ) máme logarithmickým derivováním

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} = -\frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{w+n}\right], \tag{9}$$

dále

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} = -C - \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{w+n}\right),$$

což lze též psáti

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} = -C + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{w+\nu}\right). \tag{9a}$$

Tím zároveň nacházíme (pro $w = 1$), že Eulerova konstanta má význam

$$C = -\Gamma'(1).$$

Bude tedy

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} = \Gamma'(1) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+w}\right), \tag{9b}$$

kteréhožto vzorce nejčastěji budeme užívati. Místo (9) možno psáti

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} = \lim_{n=\infty}\left[\log n - \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{w+\nu}\right]. \tag{9c}$$

---

[1]) Symbolem Real. a znamenáme realnou část veličiny a; podobně budeme psáti Im. a, abychom naznačili pomyslnou část veličiny a; na příklad Real. $(2+3i) = 2$, Im. $(2+3i) = 3$.

Opětným derivováním máme na př. z (9^b)

$$(10) \qquad D^2_w \log \Gamma(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^2}.$$

Řadu (9^b) můžeme snadně vyjádřiti omezeným integrálem, užijeme-li vzorce

$$\int_0^1 x^{a+n-1}\,dx = \frac{1}{a+n};$$

bude pak za supposice Real. $a > 0$

$$\sum_{n=0}^{p-1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+a}\right) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{p-1} (x^n - x^{a+n-1})\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1-x^p}{1-x} - \frac{x^{a-1} - x^{a+p-1}}{1-x}\right) dx,$$

tak že máme

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{p=\infty} \cdot \left\{\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx - \int_0^1 x^p \cdot \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx\right\}$$

čili

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx - \lim_{p=\infty} \int_0^1 x^p \cdot \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx.$$

Předpokládejme raději Real. $a > 1$; pak bude v posledním integrálu funkce $\frac{1-x^{a-1}}{1-x}$ stále konečna, a tedy má hodnotu menší než jistá konstanta A. Odtud plyne

$$\left|\int_0^1 x^p \cdot \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx\right| < A\int_0^1 x^p\,dx = \frac{A}{p+1},$$

a tedy

$$\lim_{p=\infty} \int_0^1 x^p \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx = 0.$$

Máme tudíž vzorec

$$(11) \qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx,$$

jenž platí, jak mile Real. $a > 0$; neboť obě strany jsou funkce analytické a splývají při Real. $a > 1$, a tedy splývají v celém oboru konvergenčním.

Tento vzorec (1) rovněž podal Legendre.

Integrací dle a v mezích 1 a a máme odtud

$$\log \Gamma(a) = \Gamma'(1) \, . \, (a-1) + \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}-1}{x-1} \cdot \frac{1}{\log x} - \frac{a-1}{x-1} \right) dx$$

a odtud pro $a = 2$

$$0 = \Gamma'(1) + \int_0^1 \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) dx \, ; \tag{12}$$

násobíme-li $(a-1)$ a odečteme-li od rovnice předešlé, máme vzorec Cauchy-ův a Liouville-ův

$$\log \Gamma(a) = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}-1}{x-1} - (a-1) \right) \frac{dx}{\log x} \, ; \tag{13}$$

jeho derivace

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = - \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{1}{\log x} \right) dx$$

označuje se jako vzorec Gaussův.

Vzorec (13) psává se též, po substituci $x = e^t$, takto

$$\log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{at}-e^t}{e^t-1} - (a-1) \, e^t \right] \frac{dt}{t} \tag{13ᵃ}$$

anebo po substituci $x = e^{-t}$

$$\log \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1) \, e^{-t} - \frac{e^{-t}-e^{-at}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} \, . \tag{13ᵇ}$$

Píšeme-li vzorec Gaussův ve tvaru

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = - \lim_{\varepsilon = 1} \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{x^{a-1} \, dx}{1-x} + \int_0^\varepsilon \frac{dy}{\log y} \right\},$$

můžeme výrazy tyto přetvořiti substitucemi

$$x = \frac{1}{1+z} \, , \qquad y = e^{-t} \, ,$$

i obdržíme jakožto hodnotu závorky $\{\}$ výraz

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}-1}^\infty \frac{1}{(1+z)^a} \frac{dz}{z} - \int_{\log \frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} \, .$$

Znamenejme nyní $\frac{1}{\varepsilon} - 1 = \delta$, tedy $\frac{1}{\varepsilon} = 1 + \delta$; pak máme

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{\delta=0}\left\{\int\limits_{\log(1+\delta)}^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{t} - \int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{1}{(1+z)^a}\frac{dz}{z}\right\}.$$

čili

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{\delta=0}\left\{\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{t} - \int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{1}{(1+z)^a}\frac{dz}{z}\right\} + \lim_{\delta=0}\int\limits_{\log(1+\delta)}^{\delta} e^{-t}\frac{dt}{t}.$$

Tu je však

$$\frac{e^{-t}}{t} = \frac{1}{t} - 1 + \frac{t}{2!} - \frac{t^2}{3!} + \ldots = \frac{1}{t} + \varphi(t)$$

a odtud

$$\int\limits_{\log(1+\delta)}^{\delta} e^{-t}\frac{dt}{t} = \log\delta - \log\log(1+\delta) + \int\limits_{\log(1+\delta)}^{\delta}\varphi(t)\,dt.$$

Poněvadž $\log(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \ldots$, máme $\log\log(1+\delta) =$ $\log\delta + \log\left(1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{3} - \ldots\right)$ a odtud

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_{\log(1+\delta)}^{\delta} e^{-t}\frac{dt}{t} = 0;$$

nacházíme tak vzorec Dirichletův

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int\limits_0^{\infty}\left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a}\right]\frac{dz}{z}. \tag{14}$$

Jiného druhu jest výraz, na nějž mne právě upozornil pan Hermite dopisem ze dne 5. května t. r. Slavný analysta vychází ze vzorce

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)(n^2+x^2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{a+n}, \tag{a}$$

jejž lze takto dokázati. Integrál možno psáti

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)(n^2+x^2)} = \frac{a^2}{n^2-a^2}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{a^2+x^2} - \frac{1}{n^2+x^2}\right)dx,$$

tak že má hodnotu

$$\frac{a^2}{n^2-a^2}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n}\right]_{x=0}^{x=\infty}$$

čili

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{a^2}{n^2-a^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{a}{n(a+n)},$$

odkudž plyne bezprostředně vzorec (a).

Klademe-li u vzorci (a) pořadem $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ a sečteme-li, obdržíme

$$\text{(b)} \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a^2 f(x)}{a^2+x^2}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right),$$

kde psáno

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \ldots = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+x^2}.$$

Při tom jsme předpokládali, že platí

$$\lim_{N=\infty} \int_0^\infty \frac{a^2\,dx}{a^2+x^2} \sum_{n=N}^\infty \frac{1}{n^2+x^2} = 0;$$

věc ta je samozřejma, neboť

$$\sum_{n=N}^\infty \frac{1}{n^2+x^2} < \sum_N^\infty \frac{1}{n^2} < \sum_N^\infty \frac{1}{n(n-1)} = \sum_N^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

t. j.

$$\sum_{n=N}^\infty \frac{1}{n^2+x^2} < \frac{1}{N-1}$$

a tedy

$$\int_0^\infty \frac{a^2\,dx}{a^2+x^2} \sum_{n=N}^\infty \frac{1}{n^2+x^2} < \frac{1}{N-1} \int_0^\infty \frac{a^2\,dx}{a^2+x^2},$$

a pravá strana blíží se nulle, roste-li N přes všecky meze.

Rovnici (b) kterou jsme nyní přesně dokázali, poněkud přetvoříme. Především pravá strana má dle (9^b) hodnotu

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} - \Gamma'(1);$$

dále možno funkci $f(x)$ vyjádřiti v zakončeném tvaru. Píšeme-li totiž ve vzorci

$$\pi \cot w\pi = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{w+n} + \frac{1}{w-n}\right)$$

$w = -ix$, obdržíme po krátké redukci

$$\pi\,\frac{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{n^2+x^2},$$

tak že

$$f(x) = \frac{\pi}{2x}\left(\frac{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}} - \frac{1}{x\pi}\right);$$

vzorec Hermite-ův obdrží tak tvar

$$\text{(15)} \qquad \frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \Gamma'(1) + \int_0^\infty \frac{a^2}{a^2+x^2}\left(\frac{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}} - \frac{1}{x\pi}\right)\frac{dx}{x}.$$

Abychom jej přetvořili, pokládejme integrál v pravo za limitu výrazu

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \frac{a^2}{a^2+x^2}\left(\frac{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}} - \frac{1}{x\pi}\right)\frac{dx}{x}$$

pro $\varepsilon = 0$. Tu však máme rozkladem

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \frac{a^2}{a^2+x^2}\,\frac{e^{x\pi}+e^{-x\pi}}{e^{x\pi}-e^{-x\pi}}\,\frac{dx}{x} - \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\infty \frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)\,x^2}$$

čili po rozložení opětném

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \frac{a^2 x\,dx}{(a^2+x^2)\,x^2} + \int_\varepsilon^\infty \frac{2a^2 x}{(a^2+x^2)\,x^2}\,\frac{dx}{e^{2x\pi}-1} - \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\infty \frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)\,x^2}.$$

Pomocí vzorce

$$\frac{a^2}{(a^2+x^2)\,x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}$$

plyne odtud

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right) x\,dx - \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right) dx$$

$$+ \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right)\frac{2x\,dx}{e^{2x\pi}-1},$$

a provedeme-li integrace,

$$J_\varepsilon = -\frac{1}{2}\log\frac{\varepsilon^2}{a^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon\pi} + \frac{1}{2a} + \int_\varepsilon^\infty \frac{2}{e^{2x\pi}-1}\,\frac{dx}{x}$$

$$- \int_\varepsilon^\infty \frac{2x}{e^{2x\pi}-1}\,\frac{dx}{a^2+x^2} + (\varepsilon),$$

kde (ε) značí veličinu zároveň s ε nekonečně malou.

Odtud máme

$$J_\varepsilon = \log a + \frac{1}{2a} - \log\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon\pi} + \int_\varepsilon^\infty \frac{2}{e^{2x\pi}-1}\,\frac{dx}{x}$$

$$- \int_0^\infty \frac{2x}{e^{2x\pi}-1}\,\frac{dx}{a^2+x^2} + (\varepsilon).$$

Přechodem k limitě pro $\varepsilon = 0$ vychází

$$J_0 = \log a + \frac{1}{2a} + A - \int_0^\infty \frac{2x}{e^{2x\pi}-1}\,\frac{dx}{a^2+x^2},$$

kde kladeno

$$\text{(c)}\qquad A = \lim_{\varepsilon=0}\left[-\log\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon\pi} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2}{e^{2x\pi}-1}\frac{dx}{x}\right].$$

Tuto hodnotu za J_0 vložme do vzorce (15) a užijme zároveň vztahu $\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{1}{a} + \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$, i bude tak

$$\text{(d)}\qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \log(a) - \frac{1}{2a} + A + \Gamma'(1) - \int_0^{\infty}\frac{2x}{e^{2x\pi}-1}\frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Zbývá ještě určiti konstantu A, definovanou rovnicí (c).

Jde především o veličinu

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{e^{2x\pi}-1}\frac{dx}{x} = V$$

pro malá ε; tu máme substitucí $x = \frac{z}{2\pi}$

$$V = \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{e^{2x\pi}-1}\frac{dx}{x} = \int_{2\pi\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{e^{z}-1}\frac{dz}{z}.$$

Můžeme však také psáti

$$V = \int_{\varepsilon\pi}^{\infty}\frac{1}{e^{2z}-1}\frac{dz}{z}$$

a provésti rozklad

$$V = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\pi}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{z}-1} - \frac{1}{e^{z}+1}\right)\frac{dz}{z},$$

čímž obdržíme rovnici

$$V = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\pi}^{2\varepsilon\pi}\frac{1}{e^{z}-1}\frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\pi}^{\infty}\frac{1}{e^{z}+1}\frac{dz}{z},$$

a odtud

$$V = \int_{\varepsilon\pi}^{2\varepsilon\pi}\frac{1}{e^{z}-1}\frac{dz}{z} - \int_{\varepsilon\pi}^{\infty}\frac{1}{e^{z}+1}\frac{dz}{z};$$

prvý člen v pravo lze vyčísliti ve tvaru zakončeném pomocí řady

$$\frac{1}{e^{z}-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} + az + a'z^2 + \ldots,$$

z níž plyne

$$\int_{\varepsilon\pi}^{2\varepsilon\pi}\frac{1}{e^{z}-1}\frac{dz}{z} = -\left(\frac{1}{2\varepsilon\pi} - \frac{1}{\varepsilon\pi}\right) - \frac{1}{2}\log 2 + (\varepsilon),$$

t. j.

$$\int_{\varepsilon\pi}^{2\varepsilon\pi} \frac{1}{e^z-1}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\varepsilon\pi} - \frac{1}{2}\log 2 + (\varepsilon),$$

tak že máme výsledek

$$\text{(e)} \qquad \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{e^{2x\pi}-1}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\varepsilon\pi} - \frac{1}{2}\log 2 - \int_{\varepsilon\pi}^{\infty} \frac{1}{e^z+1}\frac{dz}{z}\cdot$$

Rovnice (13^b) poskytuje dále pro $a = \frac{1}{2}$

$$\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{1+e^{\frac{1}{2}t}}\right)\frac{dt}{t}$$

čili pro $t = 2z$

$$\log\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^z+1} - \frac{1}{2}e^{-2z}\right)\frac{dz}{z}.$$

Odtud plyne

$$\int_{\varepsilon\pi}^{\infty}\frac{1}{e^z+1}\frac{dz}{z} = \log\sqrt{\pi} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\pi}^{\infty} e^{-2z}\frac{dz}{z} + (\varepsilon),$$

a přetvoříme-li poslední integrál částečnou integrací, máme

$$\int_{\varepsilon\pi}^{\infty} e^{-2z}\frac{dz}{z} = \int_{2\varepsilon\pi}^{\infty} e^{-z}\frac{dz}{z} = -e^{-2\varepsilon\pi}\log 2\varepsilon\pi + \int_{2\varepsilon\pi}^{\infty} e^{-z}\log z\,dz,$$

tedy konečně

$$\int_{\varepsilon\pi}^{\infty}\frac{1}{e^z+1}\frac{dz}{z} = \log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\varepsilon + \int_0^{\infty} e^{-z}\log z\,dz + (\varepsilon).$$

Differencujeme-li vzorec (8), máme

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\log x\,dx = \Gamma'(a),$$

a tedy pro $a = 1$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\log x\,dx = \Gamma'(1);$$

náš výsledek tedy jest

$$\int_{\varepsilon\pi}^{\infty}\frac{1}{e^z+1}\frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\varepsilon + \Gamma'(1) + (\varepsilon),$$

a vzorec (e) obdrží tvar

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{e^{2x\pi}-1}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\varepsilon\pi} + \frac{1}{2}\log\varepsilon - \Gamma'(1) + (\varepsilon)\,;$$

rovnice (c) poskytne tedy hledaný výraz

$$A = -\,\Gamma'(1)\,,$$

a následkem toho naše rovnice (d) obdrží tvar

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \log a - \frac{1}{2a} - \int_0^\infty \frac{2x}{e^{2x\pi}-1}\,\frac{dx}{a^2+x^2}\,. \tag{16}$$

Integrací dle a v mezích $1\,, a$ máme odtud

$$\log\Gamma(a) = \left(a-\frac{1}{2}\right)\log a - a + 1 - \int_0^\infty \frac{2}{e^{2x\pi}-1}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx\,.$$

Integrál v pravo lze psáti

$$\int_0^\infty \frac{2}{e^{2x\pi}-1}\left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)dx\,,$$

a tedy máme

$$\log\Gamma(a) = B + \left(a-\frac{1}{2}\right)\log a - a + \int_0^\infty \frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{e^{2x\pi}-1}\,dx\;.$$

Abychom určili konstantu B, vyšetřme povahu obou stran pro malá a.

Za tím účelem přetvořme integrál částečnou integrací, abychom obdrželi

$$\int_0^\infty \frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{e^{2x\pi}-1} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log\left(1-e^{-2x\pi}\right)\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\,.$$

Rozložme integrál dle schematu

$$\int_0^\infty = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty\,;$$

v prvém členu možno místo $\log\left(1-e^{-2x\pi}\right)$ psáti $\log 2x\pi - x\pi + \ldots$ a bude

$$\int_0^\varepsilon \log\left(1-e^{-2x\pi}\right)\frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^\varepsilon \frac{\log 2x\pi\,.\,a\,dx}{a^2+x^2} - \int_0^\varepsilon \frac{a\,x\,\pi\,dx}{a^2+x^2} + (\varepsilon\,, a)\,,$$

kde veličina $(\varepsilon\,, a)$ má konečnou limitu pro $a=0$, která pro malá ε je rovněž malou; dále má $\int_\varepsilon^\infty$ pro nekonečně malá a hodnotu nekonečně malou.

a tedy zbývá

$$\int_0^\infty \frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{e^{2x\pi}-1} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \log 2x\pi \,.\, \frac{a\,dx}{a^2+x^2} + \int_0^\varepsilon \frac{a x\,dx}{a^2+x^2} + [\varepsilon, a],$$

kde $[\varepsilon, a]$ je malé pro malá a, ε.

Avšak substitucí $x = az$ máme

$$\int_0^\varepsilon \log 2x\pi \,.\, \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{\frac{\varepsilon}{a}} \log 2az\pi \,.\, \frac{dz}{1+z^2} = \log 2a\pi \,.\, \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\varepsilon}{a}} \frac{\log z\,dz}{1+z^2},$$

dále

$$\int_0^\varepsilon \frac{a x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\,a \log \frac{a^2+\varepsilon^2}{a^2},$$

což pro malá a je nepatrné. Poněvadž

$$\int_0^{\frac{\varepsilon}{a}} \frac{\log z\,dz}{1+z^2} = \int_0^\infty \frac{\log z\,dz}{1+z^2} + (a),$$

kde (a) je nepatrné, je-li $\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)$ veliké, a mimo to substitucí $z = \frac{1}{x}$ máme

$$\int_0^\infty \frac{\log z\,dz}{1+z^2} = -\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{1+x^2}, \text{ tedy} = 0,$$

plyne výsledek, že

$$\int_0^{\frac{\varepsilon}{a}} \frac{\log z\,dz}{1+z^2} = (a),$$

tak že shrnutím všeho vychází, že

$$\int_0^\infty \frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{e^{2x\pi}-1}\,dx = -\frac{1}{2}\log 2a\pi + \{\varepsilon, a\},$$

kde $\{\varepsilon, a\}$ jest veličina malá, jsou-li obě veličiny a, ε malé, a poměr $\frac{a}{\varepsilon}$ velmi malý.

Avšak

$$\log \Gamma(a) = -\log a + \log \Gamma(a+1),$$
$$\log \Gamma(a+1) = a \,.\, \Gamma'(1) + \ldots;$$

tedy máme po dosazení výše nalezeného výrazu za $\log \Gamma(a)$

$$-\log a = B + \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a - \frac{1}{2}\log 2a\pi + \{\varepsilon, a\},$$

čili

$$B - \frac{1}{2}\log 2\pi = \{\varepsilon, a\},$$

z čehož plyne $B - \frac{1}{2} \log 2\pi = 0$, poněvadž tato veličina nezávisí na ε, a a může se státi libovolně malou. Máme tedy $B = \frac{1}{2} \log 2\pi$, tak že

$$(17^a) \quad \log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{e^{2x\pi} - 1} dx$$

aneb též

$$(17^b) \quad \log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2 + x^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2x\pi}},$$

jak byl Binet nalezl. Integrál v pravo pozbývá smyslu, stává-li se $a^2 + x^2 = 0$, t. j. $a = \pm ix$, a tudíž dlužno předpokládati, že proměnná a nikdy neproběhne hodnotami ryze pomyslnými. Okolnost tu je zvykem takto vyjadřovati: Rovina komplexní proměnné a rozdělí se podél celé pomyslné osy, (která pak sluje řezem), tak že se rozpadne ve dvě polovice; bod a pak probíhati může toliko polovici pravou, an nikdy nesmí překročiti řez.

(Pokračování.)

Grundriss der germanischen Philologie.

Herausgegeben von Hermann Paul. (II. sv. I. odděl.)

Referuje *V. E. Mourek.*

(Dokončení.)

B. *Švédsko-dánská* literatura stará nikterak s islandsko-norvéžskou nemůže se měřiti a Henrik Schück ji odbývá na 16 stránkách (proti 78 str. isl. norvéž.). — Liší dobu pohanskou a středověk křesťanský do reformace ve 2. čtvrti stol. XVI.

Poesii eddskou, jak je zachována, uznává za užší majetek islandsko-norvéžský; ale dokazuje, že i v Dánsku a Švédsku souběžná poesie byla, ač se z ní nic nezachovalo mimo hubené nápisy runové a latinské parafrase u Saxa Grammatika.

Vše tedy, co zachováno, náleží středověku. Jsou to nejprve díla theologická, překlad či spíše parafrase biblí, způsobená popudem sv. Birgitty (1303—1373), od níž jest také 8 knih t. řeč. Revelationes extravagantes, prvotně po švédsku sepsaných, po té do latiny a ještě před koncem XIV. stol. zase do švédštiny přeložených. Takto převedeny jsou také Meditationes Bonaventurae, Horologium od německého mystika Susa (Seuse), spis De imitatione Christi od Tomáše Kempenského a jiné ze sv. Bernharda, z Alana de Rupe a pod. Dále dochovány jsou postilly a legendy. Ze světských prací vynikají t. řeč. Eufemiavisor (t. řeč. dle norvéžské královny Eufemie), totiž Ivan Lejonriddareu (asi z r. 1303), Hertig Fredrik af Normandie (1308), jehož německý (z frančiny přeložený) prvopis se ztratil, Flores och Blanzeflor (1312). Jim podobné jsou Alexander (ca. 1380), Carl Magnus v několika vzděláních, a Olger Danskes Krönike (1534) od Dána Christierna Pedersena; þidrekssaga af Bern z norvéžštiny převedena na švédský jazyk asi 1454, na sklonku století z frančiny Valentin och Namnlös — po té do