Matyáš Lerch
Sur une fonction transcendante

Věstník Král. čes. spol. nauk 1893, č. 24, 1–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501758

XXIV.

Sur une fonction transcendante.

Par M. Lerch à Prague-Vinohrady.

(Lu dans la séance du 19 Mai 1898)

Soient $c_1, c_2, \ldots c_p$ diverses quantités avec des parties réelles positives, u une quantité de la même espèce et considérons la fonction de la variable complexe s donnée par l'élément

$$(1) \qquad \begin{cases} P(u;\, v_1,\, v_2,\, \ldots v_p;\, c_1,\, c_2,\, \ldots c_p;\, s) \\ = \sum\limits_{m_1, m_2, \ldots m_p} \dfrac{e^{2\pi i(m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots + m_pv_p)}}{(u + c_1m_1 + c_2m_2 + \ldots + c_pm_p)^s}, \\ \qquad (m_1,\, m_2,\, \ldots m_p = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots) \end{cases}$$

où les parties imaginaires des quantités $v_1, v_2, \ldots v_p$ ne sont jamais négatives, et où la partie réelle de s doit être positive et supérieure à k, si parmi les quantités v k sont réelles.

La puissance d'ordre s qui entre au dénominateur doit être considérée comme la valeur de la fonction z^s définie par l'expression $e^{s \log z}$ où le logarithme est devenu univoque par la condition d'avoir sa partie imaginaire entre $-\pi$ et π.

En nous appyant sur la formule élémentaire

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{s-1} dx$$

nous obtiendrons aisément la formule

$$(2) \qquad P(u;\, v;\, c;\, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-ux} x^{s-1} dx}{\prod\limits_{\alpha=1}^{p} \left(1 - e^{-c_\alpha x + 2v_\alpha \pi i}\right)},$$

dont on déduit aisément que la fonction P est entière par rapport à s, lorsque aucune des quantités v n'est un entier, mais qu'elle a des pôles du premier dégré $s = 1, 2, \ldots k$ en restant uniforme et continue pour les autres valeurs, si parmi les quantités v k ont une valeur entière. Il suffit à cet effet décomposer l'intégrale en

$$\int_0^\omega + \int_\omega^\infty,$$

où ω désigne une quantité positive suffisamment petite, et de remplacer, dans la première intégrale, la fonction par son développement suivant les puissances croissantes de x.

En employant un procédé connu qui est dû à Riemann et qui a été employé par M. Hurwitz[1]) et nous a servi à obtenir de nouveau une formule[2]) due à M. Lipschitz on trouve

$$(3) \quad P(u;\, v;\, c;\, s) = \frac{1}{\Gamma(s)\left(e^{2s\pi i} - 1\right)} \int_{(\infty,\, 0,\, \infty)} \frac{e^{-ux} x^{s-1}\, dx}{\prod\limits_{\alpha=1}^{p} \left(1 - e^{-c_\alpha x + 2v_\alpha \pi i}\right)},$$

où le chemin de l'intégration représenté par le symbole $(\infty, 0, \infty)$ enveloppe, dans le sens positif, la moitié positive de l'axe réel, et peut, par exemple, se composer du segment infini $(\infty \ldots \omega)$ de l'axe réel, du cercle autour de l'origine $|x| = \omega$, et du segment infini $(\omega \ldots \infty)$. Il est aisé de voir que cette expression est valable quel que soit s, et qu'elle doit être regardée comme la continuation et la vraie définition de la fonction P, lorsque la variable u a sa partie réelle positive.

Ce point établi, supposons que la quantité u puisse se mettre sous la forme $u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p$, où les w soient réels et contenus entre 0 et 1, ce qui peut se faire d'une infinité de manières lorsque p surpasse le nombre deux; supposons ensuite que les rapports de deux quelconques parmi les quantités c_α ne sont jamais réels et que les quantités v_α ont été choisies de manière que les zéros des p fonctions

$$1 - e^{-c_\alpha x + 2v_\alpha \pi i}$$

qui sont de la forme $x = 2\pi i \dfrac{v_\alpha + k}{c_\alpha}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ soient

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. 27.

2) Acta mathematica, t. XI.

distinctes. On est ainsi dans le cas où les pôles de la fonction intégrée sont du premier dégré et sont distribués sur p droites différentes en faisant, sur chacune d'elles, une série de points équidistants. On peut ainsi entourer chacun de ces pôles par un cercle d'un rayon constant de la sorte que pour tous les points, très éloignés de l'origine, qui sont en dehors des dits cercles, la fonction intégrée sera très petite comme une exponentielle; cela étant, représentons par $\mathfrak{A}$ un chemin composé d'un segment de l'axe réel $R \ldots \omega$, du petit cercle autour de l'origine $|x| = \omega$, puis du segment $\omega \ldots R$ compté sur le bord négative de la moitié dositive de l'axe, et enfin du cercle parcouru dans le sens négatif $|x| = R$; lorsque ce grand cercle devrait entrer en un des entourages des pôles dont nous avons parlé plus haut, on doit remplacer une partie du grand cercle $|x| = R$ par un arc du cercle qui limite l'entourage considéré du pôle en question. Le chemin $\mathfrak{A}$ étant ainsi défini considérons l'intégrale prise le long de $\mathfrak{A}$

$$J = \int\limits_{\mathfrak{A}} \frac{e^{-ux} x^{s-1} dx}{\prod\limits_{\alpha=1}^{p} \left(1 - e^{-c_\alpha x + 2v_\alpha \pi i}\right)};$$

la fonction intégrée étant uniforme à l'intérieur du contour de l'intégration, la valeur de J sera égale à $-2\pi i$ fois la somme des résidus correspondants aux divers pôles de la fonction intégrée, contenus dans l'intérieur de $\mathfrak{A}$. Le résidu relatif au pôle

$$x = 2\pi i \frac{v_\alpha + k}{c_\alpha}$$

ayant pour valeur

$$\frac{(2\pi)^{s-1}}{c_\alpha} \cdot \frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_\alpha}(v_\alpha + k)} \left(i \frac{v_\alpha + k}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod\limits_\beta' \left[1 - e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha - k c_\beta)}\right]}, (\beta = 1, 2, \ldots \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots p)$$

on aura par conséquent

$$J = -2\pi i \,.\, (2\pi)^{s-1} \sum_{k,\,\alpha} \frac{1}{c_\alpha} \frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_\alpha}(v_\alpha + k)} \left(i \frac{v_\alpha + k}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod\limits_\beta' \left[1 - e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha - k c_\beta)}\right]},$$

où la somme se rattache aux divers pôles représentés par l'indice sommatoir k (qui est un des nombres $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) et par l'indice α qui reçoit les valeurs $\alpha = 1, 2, 3, \ldots p$. Il faut remarquer encore que la puissance

$$\left(i\frac{v_\alpha + k}{c_\alpha}\right)^{s-1}$$

est définie d'une manière univoque comme la valeur de la fonction z^{s-1} rapportée à la coupure $0 \ldots \infty$, de la sorte que $z^{s-1} = e^{(s-1)\log z}$, où la partie imaginaire du logarithme est contenue entre zéro et 2π.

Or, en faisant R croître indéfiniment, l'intégrale J tend vers l'intégrale prise le long du chemin $(\infty, 0, \infty)$ puisque sa composante prise le long de la circonférence $|x| = R$ devient infiniment petite et on a ainsi, d'après l'équation (3), la formule que nous voulions obtenir

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^{s-1}}\,\frac{e^{2s\pi i}-1}{2\pi i}\,P(u;\ v;\ c;\ s) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{c_\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_\alpha}(v_\alpha+k)}\left(i\dfrac{v_\alpha+k}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod\limits_{\beta=1}^{p}{}'\left[1-e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha - kc_\beta)}\right]}\right\}, \end{aligned}\right.$$

où il faut, dans le produit Π', excepter le facteur nul $\beta = \alpha$.

Dans le cas le plus simple $p = 2$ ce résultat s'écrit sous la forme

$$\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^{s-1}}\,\frac{1-e^{2s\pi i}}{2\pi i}\sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m_1 v_1 + m_2 v_2)}}{(u + c_1 m_1 + c_2 m_2)^s}$$

$$= \frac{1}{c_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_1}(v_1+k)}\left(i\dfrac{v_1+k}{c_1}\right)^{s-1}}{1-e^{\frac{2\pi i}{c_1}(c_1 v_2 - c_2 v_1 - kc_2)}}$$

$$+ \frac{1}{c_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_2}(v_2+k)}\left(i\dfrac{v_2+k}{c_2}\right)^{s-1}}{1-e^{\frac{2\pi i}{c_2}(c_2 v_1 - c_1 v_2 - kc_1)}}.$$

On parvient à une représentation remarquable de la fonction P en remplaçant u par l'expression $u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p$, où les w_α sont réels et contenus entre zéro et l'unité, et en développant par la série de Fourier. Supposons à cet effet que tous les éléments v_α ont une partie imaginaire positive pourque la série P soit absolument convergente.

Posons

$$e^{2\pi i \Sigma^* v_\alpha w_\alpha} P(u\,;\ v\,;\ c\,;\ s)$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots n_p = -\infty}^{\infty} A_{n_1 n_2 \ldots n_p} e^{2\pi i(n_1 w_1 + n_2 w_2 + \ldots + n_p w_p)},$$

en signifiant par Σ^* une sommation par rapport à l'indice

$$\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ p,$$

les coefficients A seront donnés par la formule

$$A_{n_1 \ldots n_p} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 e^{2\pi i \Sigma^* v_\alpha w_\alpha} P(u\,;\ v\,;\ c\,;\ s)\, e^{-2\pi i \Sigma^* n_\alpha w_\alpha}\, dw_1 \ldots dw_p.$$

En remplaçant P par la série qui le définit on a

$$A_{n_1 \ldots n_p} = \sum_{(m)} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \Sigma^* (w_\alpha + m_\alpha) v_\alpha - 2\pi i \Sigma^* n_\alpha w_\alpha}}{[c_1(w_1 + m_1) + \ldots + c_p(w_p + m_p)]^s}\, dw_1 \ldots dw_p\,;$$

dans le terme général écrivons $w_1 + m_1 = x_1, \ldots w_p + m_p = x_p$, les intégrales aurons les limites $(m_1 \ldots m_1 + 1), \ldots (m_p \ldots m_p + 1)$ de la sorte qu'en employant l'identité

$$\sum_0^\infty \int_m^{m+1} = \int_0^\infty$$

on aura

$$A_{n_1 \ldots n_p} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i \Sigma^* v_\alpha x_\alpha - 2\pi i \Sigma^* n_\alpha v_\alpha}}{(c_1 x_1 + \ldots + c_p x_p)^s}\, dx_1 \ldots dx_p$$

et il ne reste qu'à obtenir cette intégrale sous forme finie. Comme il ne s'agit que d'une transformation d'une fonction analytique on peut supposer que la partie réelle de s soit positive ce qui permet d'employer la formule

$$\frac{1}{(c_1 x_1 + \ldots + c_p x_p)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-z(c_1 x_1 + \ldots + c_p x_p)} z^{s-1} dz\,;$$

en substituant cette valeur dans l'expression de $A_{n_1\ldots n_p}$, on aura, après changement de l'ordre des intégrations,

$$A_{n_1\ldots n_p}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty z^{s-1}dz\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-z\Sigma^* c_\alpha x_\alpha+2\pi i\Sigma^*(v_\alpha-n_\alpha)x_\alpha}dx_1\ldots dx_p$$

ou après avoir effectué les intégrations par rapport aux x,

$$A_{n_1\ldots n_p}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{z^{s-1}dz}{[c_1z+2\pi i(n_1-v_1)]\ldots[c_pz+2\pi i(n_p-v_p)]}.$$

Pour évaluer cette intégrale employons la décomposition en fractions simples

$$\frac{1}{[c_1z+2\pi i(n_1-v_1)]\ldots[c_pz+2\pi i(n_p-v_p)]}=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{C_\alpha}{z+\frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha-v_\alpha)},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$C_\alpha=\frac{1}{c_1c_2\ldots c_p}\;\frac{1}{\prod\limits_{\beta=1}^{p}{}'\left[\frac{2\pi i}{c_\beta}(n_\beta-v_\beta)-\frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha-v_\alpha)\right]},$$

où il faut excepter le facteur nul $\beta=\alpha$.

On aura ainsi

$$A_{n_1\ldots n_p}=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{\alpha=1}^{p}C_\alpha\int_0^\infty\frac{z^{s-1}dz}{z+\frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha-v_\alpha)},$$

ou bien

$$A_{n_1\ldots n_p}=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{\alpha=1}^{p}C_\alpha\frac{\pi}{\sin s\pi}\left[\frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha-v_\alpha)\right]^{s-1},$$

en convenant de représenter par $[z]^s$ la quantité $e^{(s-1)\log z}$ où la partie imaginaire du logarithme est contenue entre $-\pi$ et π.

Cette formule établissant une relation entre deux fonctions analytiques aura lieu quel que soit s, pourvu que les deux membres ont un sens précis et univoque; on peut alors substituer cette valeur de A dans le développement cherché qui devient

$$
(5)\begin{cases} e^{2\pi i\Sigma^* v_\alpha w_\alpha} P(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p;\ v;\ c;\ s) \\ = \dfrac{(2\pi)^{s-p}\Gamma(1-s)}{c_1 c_2 \ldots c_p \,.\, i^{p-1}} \end{cases}
$$

$$
\times \sum_{n_1, \ldots n_p = -\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\left(i\dfrac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod\limits_{\beta=1}^{\alpha}{}' \left(\dfrac{n_\beta - v_\beta}{c_\beta} - \dfrac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)} \right\} e^{2\pi i(n_1 w_1 + \ldots + n_p w_p)}
$$

Cette formule qui dans le cas de $p > 2$ contient un certain nombre des indéterminées $w_1 \ldots w_p$, devient univoque dans le cas de $p = 2$, car ici les cordonnées $w_1 w_2$ de la quantités u, définies par l'équation $u = c_1 w_1 + c_2 w_2$, sont bien déterminées.

La formule se simplifie d'ailleurs, dans ce cas particulier, et on a

$$
P(c_1 w_1 + c_2 w_2;\ v_1,\ v_2;\ c_1,\ c_2;\ s) e^{2\pi i(v_1 w_1 + v_2 w_2)}
$$

$$
= i\frac{(2\pi)^{s-2}\Gamma(1-s)}{c_1 c_2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\left(i\dfrac{n_1 - v_1}{c_1}\right)^{s-1} - \left(i\dfrac{n_2 - v_2}{c_2}\right)^{s-1}}{\dfrac{n_1 - v_1}{c_1} - \dfrac{n_2 - v_2}{c_2}} \times e^{2\pi i(n_1 w_1 + n_2 w_2)} \right\}.
$$

Remarquons encore que la convergence exige que le rapport $\frac{c_2}{c_1}$ ne soit pas réel.

Nákladem Král. České Společnosti Náuk. — Tiskem dra. Ed. Grégra v Praze 1893.