Matyáš Lerch
Généralisation du théorème de Frullani

Věstník Král. čes. spol. nauk 1893, č. 30, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501738

XXX.

Généralisation du théorème de Frullani.

Par M. Lerch à Prague-Vinohrady.

(Lu dans la séance du 2 Juin 1898)

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ des constantes positives distinctes, $f(x)$ une fonction intégrable dont nous nous reservons à particulariser la nature aux points $x = 0$ et $x = \infty$, et considérons l'intégrale

$$F_{\delta, n} = \int_\delta^n \frac{dx}{x^p} \begin{vmatrix} f(a_0 x), & f(a_1 x), & \ldots & f(a_p x) \\ 1, & 1, & \ldots & 1 \\ a_0, & a_1, & \ldots & a_p \\ a_0^2, & a_1^2, & \ldots & a_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{p-1}, & a_1^{p-1}, & \ldots & a_p^{p-1} \end{vmatrix},$$

où δ, n sont deux constantes positives, l'une petite, l'autre grande. Cette intégrale peut s'obtenir en intégrant les éléments de la première ligne horizontale du déterminant, ce qui donne, en remplaçant l'intégrale

$$\int_\delta^n f(ax) \frac{dx}{x^p}$$

par sa transformée

$$\int_{a\delta}^{an} f(x) \frac{dx}{x^p} \cdot a^{p-1},$$

$$F_{\delta,n}=\begin{vmatrix} a_0^{p-1}\int\limits_{a_0\delta}^{a_0 n} f(x)\,\frac{dx}{x^p}, & a_1^{p-1}\int\limits_{a_1\delta}^{a_1 n} f(x)\,\frac{dx}{x^p}, & \dots & a_p^{p-1}\int\limits_{a_p\delta}^{a_p n} f(x)\,\frac{dx}{x^p} \\ 1, & 1, & \dots & 1 \\ a_0, & a_1, & \dots & a_p \\ a_0^2, & a_1^2, & \dots & a_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{p-1}, & a_1^{p-1}, & \dots & a_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

Mais on a

$$\int\limits_{a\delta}^{an} f(x)\,\frac{dx}{x^p} = \int\limits_{a\delta}^{\delta} f(x)\,\frac{dx}{x^p} + \int\limits_{\delta}^{n} f(x)\,\frac{dx}{x^p} + \int\limits_{n}^{an} f(x)\,\frac{dx}{x^p},$$

et en substituant dans le déterminant il vient

$$F_{\delta,n}=\begin{vmatrix} a_0^{p-1}\int\limits_{a_0\delta}^{\delta} f(x)\,\frac{dx}{x^p}, & a_1^{p-1}\int\limits_{a_1\delta}^{\delta} f(x)\,\frac{dx}{x^p}, & \dots & a_p^{p-1}\int\limits_{a_p\delta}^{\delta} f(x)\,\frac{dx}{x^p} \\ 1 & 1 & & 1 \\ a_0 & a_1 & & a_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & & a_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_0^{p-1}\int\limits_{n}^{a_0 n} f(x)\,\frac{dx}{x^p}, & a_1^{p-1}\int\limits_{n}^{a_1 n} f(x)\,\frac{dx}{x^p}, & \dots & a_p^{p-1}\int\limits_{n}^{a_p n} f(x)\,\frac{dx}{x^p} \\ 1 & 1 & & 1 \\ a_0 & a_1 & & a_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & & a_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

En transformant de nouveau à l'aide des formules

$$\int\limits_{a\delta}^{\delta} f(x)\,\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{\delta^{p-1}}\int\limits_{a}^{1} f(\delta x)\,\frac{dx}{x^p}\ ,$$

$$\int\limits_{n}^{an} f(x)\,\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{n^{p-1}}\int\limits_{1}^{a} f(nx)\,\frac{dx}{x^p}\ ,$$

on obtient enfin

$$F_{\delta,n} = -\begin{vmatrix} \frac{a_\nu^{p-1}}{\delta^{p-1}} \int_1^{a_\nu} f(\delta x) \frac{dx}{x^p} \\ 1 \\ a_\nu \\ a_\nu^2 \\ \vdots \\ a_\nu^{p-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{a_\nu^{p-1}}{n^{p-1}} \int_1^{a_\nu} f(nx) \frac{dx}{x^p} \\ 1 \\ a_\nu \\ a_\nu^2 \\ \vdots \\ a_\nu^{p-1} \end{vmatrix}$$

où nous avons écrit une seule colonne comme représentant de toutes les autres.

Cela étant, supposons que la fonction $f(x)$ puisse se mettre, pour des petites valeurs de x, sous la forme

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots \\ + f^{(p-1)}(0)\frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \varphi(x)x^{p-1},$$

$\varphi(x)$ étant infiniment petite en même temps que x. Nous aurons

$$f(\delta x) = f(0) + f'(0)\delta x + f''(0)\frac{\delta^2 x^2}{2!} + \dots \\ + f^{(p-1)}(0)\frac{\delta^{p-1}x^{p-1}}{(p-1)!} + \varphi(\delta x)\delta^{p-1}x^{p-1},$$

d'où

$$\int_1^a f(\delta x)\frac{dx}{x^p} = \sum_{\mu=0}^{p-2} \frac{f^{\mu}(0)}{\mu!}\,\frac{1-a^{\mu+1-p}}{p-\mu-1}\,\delta^\mu \\ + \frac{f^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}\,\delta^{p-1}\,.\,\log a + \delta^{p-1}\int_1^a \varphi(\delta x)\frac{dx}{x}\,.$$

L'intégrale

$$\int_1^a \varphi(\delta x)\frac{dx}{x}$$

étant infiniment petite en même temps que δ il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_\nu^{p-1}}{\delta^{p-1}} \displaystyle\int_1^{a_\nu} f(\delta x)\, \frac{dx}{x^p} \\ 1 \\ a_\nu \\ a_\nu^2 \\ \vdots \\ a_\nu^{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\nu^{p-1} \log a_\nu \\ 1 \\ a_\nu \\ a_\nu^2 \\ \vdots \\ a_\nu^{p-1} \end{vmatrix} \cdot \frac{f^{(p-1)}(0)}{(p-1)!} + \psi_\delta,$$

où ψ_δ représente une quantité qui s'évanouit avec δ.

Supposons ensuite que pour des grandes valeurs de x on a

$$f(x) = A\, x^{p-1} + \chi(x),$$
$$\lim_{x=\infty} \frac{\chi(x)}{x^{p-1}} = 0,$$

nous aurons

$$\frac{1}{n^{p-1}} \int_1^a f(nx)\, \frac{dx}{x^p} = A \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^a \frac{\chi(nx)}{n^{p-1} x^p}\, dx,$$

et l'intégrale

$$\int_1^a \frac{\chi(nx)}{n^{p-1} x^p}\, dx$$

sera infiniment petite pour n infiniment grand; on a donc, en représentant par ψ'_n une quantité infiniment petite,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_\nu^{p-1}}{n^{p-1}} \displaystyle\int_1^a f(nx)\, \frac{dx}{x^p} \\ 1 \\ a_\nu \\ a_\nu^2 \\ \vdots \\ a_\nu^{p-1} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_\nu^{p-1} \log a_\nu \\ 1 \\ a_\nu \\ a_\nu^2 \\ \vdots \\ a_\nu^{p-1} \end{vmatrix} + \psi'_n;$$

la quantité $F_{\delta,n}$ a donc pour valeur

$$F_{\delta,n} =$$

$$\begin{vmatrix} a_0^{p-1}\log a_0, & a_1^{p-1}\log a_1, & \dots & a_p^{p-1}\log a_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \end{vmatrix} \left(A - \frac{f^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}\right) + \overline{\Psi}_{\delta,n}$$

où $\overline{\Psi}_{\delta,n}$ disparaît pour $\delta = 0$ et $n = \infty$; on a par conséquent la formule qui généralise le théorème de Frullani:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p} \begin{vmatrix} f(a_0x), & f(a_1x), & \dots & f(a_px) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left[A - \frac{f^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}\right] \cdot \begin{vmatrix} a_0^{p-1}\log a_0, & a_1^{p-1}\log a_1, & \dots & a_p^{p-1}\log a_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

où la fonction $f(x)$ n'a été soumise à d'autres conditions que celle d'intégrabilité et d'admettre un développement de la forme

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$$
$$+ f^{(p-1)}(0)\frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \varphi(x)x^{p-1},$$

où $\lim\limits_{x=0} \varphi(x) = 0$, et d'admettre la limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x^{p-1}} = A.$$

C'est là une extension du théorème de Frullani, différente de celle que nous avons donnée l'année précédante dans une note présenté à l'Académie tchèque,[1]) et qui consiste dans la considération de l'intégrale

$$\int_a^b [f(x) - f(\varphi)\varphi'(x)]dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ étant soumise à condition de coïncider avec x aux limites de l'intégration a, b.

---

[1]) Rozpravy České Akademie, 1e année, 2e classe, No. 8; 1891.

Nákladem královské české společnosti náuk. — Tiskem dra Edv. Grégra v Praze 1898.