Matyáš Lerch
Sur une intégrale d'Euler

Bull. Sci. Math., II. Sér. 16 (1892), 337–343

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501732

MÉLANGES.

SUR UNE INTÉGRALE D'EULER;

PAR M. LERCH.

L'importance que joue la formule d'Euler

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

justifie d'en chercher une démonstration élémentaire qui n'emprunte rien à des théories étrangères au Calcul intégral. A cet effet, je suppose a réel et alors contenu entre zéro et l'unité, et en partant de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}\,dz}{1 - z e^{i\varphi}},$$

je me borne d'abord à prouver qu'elle ne dépend point du paramètre réel φ supposé entre 0 et 2π. Posons, pour abréger,

$$f(\varphi, z) = \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}}{1 - z e^{i\varphi}},$$

$$f'(\varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = i e^{ai\varphi} z^{a-1}\left(\frac{a}{1 - z e^{i\varphi}} - \frac{z e^{i\varphi}}{(1 - z e^{i\varphi})^2}\right),$$

et observons que

$$f'(\varphi, z)\,dz = i e^{ai\varphi}\, d\,\frac{z^a}{1 - z e^{i\varphi}},$$

où la différentielle est prise par rapport à z. Si l'on applique la règle de la différentiation sous le signe somme, on a évidemment

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \int_0^\infty f'(\varphi, z)\,dz = i e^{ai\varphi} \int_0^\infty d\,\frac{z^a}{1 - z e^{i\varphi}}$$

ou bien

$$\frac{dJ}{d\varphi} = 0.$$

Cette équation prouve que l'intégrale J ne varie pas avec φ, comme nous l'avons affirmé. Mais la rigueur exige une considération plus profonde en ce qui concerne l'égalité que nous venons d'employer

$$(a) \qquad \frac{d}{d\varphi}\int_0^\infty f(\varphi, z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\varphi} f(\varphi, z)\,dz.$$

Pour l'établir, décomposons l'intégrale en la série suivante

$$J = \int_0^\infty f(\varphi, z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(\varphi, z)\,dz;$$

les termes de cette série sont des fonctions continues de la variable φ, supposée entre o et 2π, et admettent la différentiation sous le signe somme, à savoir

$$\frac{d}{d\varphi}\int_n^{n+1} f(\varphi, z)\,dz = \int_n^{n+1} f'(\varphi, z)\,dz.$$

Si nous prouvons alors que la série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f'(\varphi, z)\,dz$$

est uniformément convergente lorsque φ est contenu dans un intervalle $(\varepsilon, \ldots, 2\pi - \varepsilon)$, où ε est une quantité positive inférieure à $\frac{\pi}{2}$, nous aurons l'égalité

$$S = \frac{dJ}{d\varphi},$$

comme il résulte d'un théorème bien connu concernant la différentiation des séries, et puisque la série S n'est autre chose que l'intégrale

$$\int_0^\infty f'(\varphi, z)\,dz,$$

il s'ensuit que l'égalité (a) sera mise hors de doute. Or la convergence de la série S découle de l'inégalité

$$|f'(\varphi, z)| < z^{a-1}\left[\frac{a}{\sqrt{(1 - z\cos\varepsilon)^2 + z^2\sin^2\varepsilon}} + \frac{z}{(1 - z\cos\varepsilon)^2 + z^2\sin^2\varepsilon}\right],$$

qui donne en effet

$$\left|\int_n^{n+1} f'(\varphi, z)\,dz\right| < \int_n^{n+1}\left(\frac{a\,z^{a-1}}{\sqrt{1 - 2z\cos\varepsilon + z^2}} + \frac{z^a}{1 - 2z\cos\varepsilon + z^2}\right)dz,$$

ce qui prouve que les modules des termes de la série S sont inférieurs à des termes correspondants de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{a z^{a-1}}{\sqrt{1-2z\cos\varepsilon+z^2}}+\frac{z^a}{1-2z\cos\varepsilon+z^2}\right)dz$$
$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{a z^{a-1}}{\sqrt{1-2z\cos\varepsilon+z^2}}+\frac{z^a}{1-2z\cos\varepsilon+z^2}\right)dz,$$

termes qui ne dépendent pas de φ. La convergence de S est donc absolue et uniforme par rapport à φ; l'égalité (a) est alors établie et le raisonnement développé plus haut est donc légitime.

Cela étant, prenons dans l'intégrale J une fois $\varphi=\pi$ et l'autre $\varphi=\frac{\pi}{2}$; nous aurons

$$J=e^{ai\pi}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}=e^{\frac{1}{2}ai\pi}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1-iz},$$

d'où

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1-iz}=e^{\frac{1}{2}ai\pi}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}.$$

En égalant les parties réelles, nous aurons

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z^2}=\cos\frac{a\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z},$$

ou bien, en transformant le premier membre par la substitution $z^2=x$,

$$(b)\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{a}{2}-1}\,dx}{1+x}=2\cos\frac{a\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}.$$

Si nous posons alors

$$\varphi(a)=\sin a\pi\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x},$$

l'équation (b) s'écrira $\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\varphi(a)$, et il s'ensuit

$$\varphi(a)=\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\varphi\left(\frac{a}{4}\right)=\varphi\left(\frac{a}{8}\right)=\ldots=\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),$$

d'où enfin

$$\varphi(a)=\lim_{n=\infty}\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

Si la fonction $\varphi(a)$ est finie et continue au point $a = 0$, cette limite-ci sera évidemment égale à $\varphi(0)$, de manière que nous aurons

$$(c) \qquad \varphi(a) = \varphi(0).$$

Mais on a

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x},$$

et puis

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \left(x^{a-1} - \frac{x^a}{1+x}\right) dx,$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{1}{a} - \int_0^1 \frac{x^a\,dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{1}{a} + f(a),$$

en représentant par $f(a)$ les deux autres termes qui figurent au second membre et qui sont des fonctions finies et continues au point $a = 0$. Nous aurons alors

$$\varphi(a) = \frac{\sin a\pi}{a} + \sin a\pi\, f(a),$$

ce qui met en évidence la continuité de la fonction $\varphi(a)$ au point $a = 0$ et donne en même temps $\varphi(0) = \pi$; l'égalité (c) devient alors

$$\varphi(a) = \pi$$

ou bien

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

L'équation à laquelle nous sommes ainsi parvenu

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1 - z e^{i\varphi}} = \frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi}, \qquad 0 < \varphi < 2\pi$$

est d'une grande importance, puisqu'elle donne presque immédiatement un développement bien connu qui contient plusieurs formules fondamentales de l'Analyse et a rendu de grands services dans quelques belles études de M. Kronecker [1].

Cette intégrale peut s'écrire en effet

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1}\,dz}{1-ze^{i\varphi}} + \int_1^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1-ze^{i\varphi}}$$

ou, en transformant le second terme à l'aide de la substitution $z = \frac{1}{x}$,

$$(3)\qquad \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{e^{-i\varphi}x^{-a}}{1-xe^{-i\varphi}}\right)dx = \frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi},$$

d'où l'on tire, en employant les développements,

$$\frac{1}{1-xe^{\pm i\varphi}} = \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu e^{\pm\nu i\varphi} + \frac{x^n e^{\pm ni\varphi}}{1-xe^{\pm i\varphi}},$$

la formule suivante

$$\begin{aligned}\frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi} &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{-(\nu+1)i\varphi}}{a-\nu-1}\\ &+ \int_0^1 \left(\frac{x^{n+a-1}e^{ni\varphi}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{x^{n-a}e^{-(n+1)i\varphi}}{1-xe^{-i\varphi}}\right)dx;\end{aligned}$$

en passant à la limite de n infini, on voit aisément que la dernière intégrale disparaît, de sorte qu'il vient l'équation demandée

$$\frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu i\varphi}}{a-\nu},$$

qui recevra une forme plus élégante en écrivant $2\pi - \varphi = 2u\pi$, à savoir

$$(4)\qquad 2\pi i\,\frac{e^{2au\pi i}}{e^{2a\pi i}-1} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu u\pi i}}{a-\nu},$$

où il faut ajouter la condition nécessaire $0 < u < 1$.

Dans le cours de la démonstration, nous avons supposé qu'aussi

---

[1] *Voir* notre remarque publiée dans le *Journal de M. Teixeira* (t. X, p. 103; 1892).

la quantité a était réelle et entre o et 1, mais, puisque les deux membres de l'équation (4) sont des fonctions analytiques uniformes de a, cette équation subsistera pour chaque valeur de la variable complexe.

Parmi les conséquences auxquelles conduit la formule (4) nous signalerons la suivante; en comparant les parties réelles, il vient

$$\frac{\pi \cos a\pi(2u-1)}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a \cos 2\nu u\pi}{a^2-\nu^2};$$

le second membre étant uniformément convergent par rapport à u, il est permis de passer à la limite de $u=1$, ce qui donne

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-\nu^2}$$

ou bien

$$\pi \cot a\pi = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{a+\nu}. \tag{5}$$

2. Cette formule conduit aisément à la formule d'Euler

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}\,dz = \pi \cot a\pi; \tag{6}$$

si nous voulons l'obtenir sans employer les développements en séries, il suffit d'employer la formule (2)

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}\,dz}{1-z e^{i\varphi}} = \frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi}$$

et la suivante, qui s'en déduit en remplaçant a par $1-a$,

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{-a}\,dz}{1-z e^{i\varphi}} = \frac{\pi e^{i(1-a)(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi}.$$

En retranchant, il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z e^{i\varphi}}\,dz = \frac{\pi}{\sin a\pi}\left[e^{ai(\pi-\varphi)} - e^{i(1-a)(\pi-\varphi)}\right];$$

ici il est permis de passer à la limite de $\varphi=0$, ce qui donne

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}\,dz = \frac{\pi}{\sin a\pi}(e^{ai\pi}+e^{-ai\pi}) = 2\pi \cot a\pi.$$

En décomposant l'intégrale en

$$\int_0^1 + \int_1^\infty,$$

et en écrivant $z = \frac{1}{x}$ dans la seconde partie, nous aurons

$$2\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx = 2\pi \cot a\pi,$$

ce qui est bien la formule (6).

Une seconde voie conduit aussi directement aux valeurs des intégrales (1) et (6). L'intégrale J considérée plus haut, qui peut s'écrire, comme nous avons remarqué,

$$\mathrm{J} = e^{ai\varphi}\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{e^{-i\varphi}x^{-a}}{1-xe^{-i\varphi}}\right)dx,$$

a pour valeur

$$\mathrm{J} = e^{ai\pi}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x},$$

car nous avons fait voir qu'elle ne dépend pas de φ. En passant à la limite de $\varphi = 0$, on trouve après une digression que nous avons développée en détail dans une Note tchèque publiée dans le *Časopis pro pěstování Mathematiky a Fysiky*, que l'on a

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx + \pi i.$$

On a ainsi l'égalité

$$e^{ai\pi}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} + \pi i,$$

et la comparaison des parties réelles et des parties imaginaires donne

$$\cos a\pi \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx,$$

$$\sin a\pi \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \pi,$$

ce qui donne immédiatement les équations (1) et (6).