

Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Poznámky k teorii funkcí eliptických

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1892), č. 24, 1–18

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501716>

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1892

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I.

TŘÍDA II.

ČÍSLO 24.

POZNÁMKY
K THEORII
FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 13. LISTOPADU 1891.

V PRAZE.

NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1892.

1. Nekonečná řada

$$(1) \quad R(u, \tau | \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2w\pi i}},$$

v níž $q = e^{\tau \pi i}$ značí komplexní veličinu absolutně menší jednotky, konverguje patrně pro všechna u, τ stejnoměrně a jen pro ona τ postrádá smyslu, pro něž mizí jmenovatele jednotlivých členů; jsou to řešení rovnice

$$1 - q^{2n} e^{2w\pi i} = 0, \quad \text{tedy } \tau = m - n\tau, \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

a na těchto místech má uvažovaná řada, považovaná za funkci τ , póly stupně prvního. Součin $R(u, \tau | \tau) \theta_1(\tau | \tau)$ [kde θ_1 značí známou základní transcendentu elliptickou známky (charakteristiky) 11] jest patrně celistvou funkcí transcendentní vůči oběma proměnným u, τ .

Z výrazu (1) patrný jsou rovnice

$$R(u, \tau) = R(u + 1, \tau) = R(u, \tau + 1);$$

další vlastnost funkce R plyne z té okolnosti, že v řadě (1) lze psát $n + 1$ místo n , čímž vznikne

$$R(u, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n+1} e^{2nu\pi i+2u\pi i}}{1 - q^{2n+2} e^{2w\pi i}} = q e^{2u\pi i} R(u + \tau, \tau + \tau)$$

a odtud hledaný vztah

$$(2) \quad R(u + \tau, \tau + \tau) = e^{-\pi i(2u+\tau)} R(u, \tau).$$

Studium vlastností funkce R se usnadní, považujeme-li τ za odvislé od u , tak aby $\tau = u + v$, kde v jest nová neodvisle proměnná; zavedme tedy funkci

$$f(u) = R(u, u + v | \tau),$$

považujice v ní výhradně u za proměnnou, v za parametr. Jest pak $f(u)$ funkce jednoznačná existující v celé rovině (u) a nemající jiných míst zvláštních kromě pólů stupně prvního $u = -v + m + n\tau$, ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), takže součin $f(u) \theta_1(u + v | \tau)$ jest celistvou funkcí transcendentní. Funkce ta hová dále rovnicím

$$f(u + 1) = f(u), \quad f(u + \tau) = e^{-\pi i(2u+v)} f(u),$$

z nichž soudíme, že podíl

$$F(u) = \frac{f(u)}{\vartheta_3(u)}$$

jest funkce dvojperiodická o základních periodách 1, τ . Funkce ta má póly stupně prvního na místech rovnomocných s $-v$ a $\frac{1+\tau}{2}$.

Sestrojíme Weierstrassovu funkci $\wp u$ mající základní periody 1, τ a uvažujme residua dvojperiodické funkce proměnné z ,

$$\Psi(z) = F(z) \frac{\wp' z}{\wp z - \wp u};$$

póly funkce té jsou rovnomocny s místy $z = -v$, $z = 0$, a $z = \pm u$, kdežto na místech rovnomocných s bodem $\frac{1+\tau}{2}$ funkce $\wp' z$ mizí a tedy $\Psi(z)$ má na nich povahu funkcí celistvých.

Residua studované funkce $\Psi(z)$ jsou pak následující:

$$1^\circ \text{ při } z = -v: \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\vartheta_3(v)} \frac{\wp' v}{\wp v - \wp u},$$

$$2^\circ \text{ při } z = 0: \quad -2 F(0),$$

$$3^\circ \text{ při } z = \pm u: \quad F(\pm u).$$

Dle známé základní vlastnosti funkcí elliptických musí býti součet těchto residuí roven nulle, z čehož máme vztah

$$(a) \quad F(u) + F(-u) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\vartheta_3(v)} \frac{\wp' v}{\wp v - \wp u} + 2 F(0).$$

K další relaci dospějeme stanovením residuí funkce dvojperiodické

$$F(z) \frac{1}{\wp z - \wp u},$$

jejíž póly jsou $-v$, $\frac{1+\tau}{2}$, $\pm u$, a jejíž residua jsou následující:

$$1^\circ \text{ při } z = -v: \quad -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\vartheta_3(v)} \cdot \frac{1}{\wp v - \wp u},$$

$$2^\circ \text{ při } z = \frac{1+\tau}{2}: \quad \frac{f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right) - \wp u};$$

$$3^\circ \text{ při } z = \pm u: \quad \pm F(\pm u) \frac{1}{\wp' u}.$$

Annullujíce součet jich obdržíme rovnici

$$(b) \quad \frac{F(u) - F(-u)}{\wp' u} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\vartheta_3(v)} \frac{1}{\wp v - \wp u} - \frac{f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)} \frac{1}{\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right) - \wp u}$$

jejížto spojením s rovnicí (a) plyne pro nás důležitý vztah

$$4\pi i [F(u) - F(0)] = -\frac{1}{\theta_3(v)} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} - 2\pi i \frac{f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\theta_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)} \frac{\wp' u}{\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right) - \wp u},$$

kterým jest náš problém, vyjádřiti funkci $F(u)$ výrazy elliptickými, v podstatě řešen. Zbývat jen ke konečnému upravení výsledku nahraditi $\theta_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)$ hodnotou $i q^{-\frac{1}{4}} \theta'_1$, kde θ'_1 značí veličinu $\theta'_1(0|\tau)$, a stanoviti hodnotu výrazu $f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)$.

Ta jest pak dle definice

$$\varphi(v) = f\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n^2+n}}{1 + q^{2n+1} e^{2v\pi i}}$$

jednoznačnou funkcí proměnné v , jež hová rovnicím

$$(c) \quad \varphi(v+1) = \varphi(v), \quad \varphi(v+\tau) = e^{\pi i(2v+\tau)} \varphi(v).$$

Abychom to dokázali, odvoďme hned vztah obecnější

$$(3) \quad f(u, v+\tau) = e^{\pi i(2v+\tau)} f(u, v) + \theta_3(u).$$

Je tu totiž

$$f(u, v+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n+2} e^{2\pi i(u+v)}},$$

aneb, píšemeli $n-1$ místo n ,

$$f(u, v+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2-2n+1} e^{2nu\pi i - 2u\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2\pi i(u+v)}},$$

odtud pak

$$\begin{aligned} & f(u, v+\tau) - e^{\pi i(2v+\tau)} f(u, v) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2+1} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n+2} e^{2\pi i(u+v)}} \left[e^{-2u\pi i} q^{-2n} - e^{2v\pi i} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2-2n+1} e^{2(n-1)u\pi i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nu\pi i} = \theta_3(u), \end{aligned}$$

čímž vzorec (3) verifikován, a následkem toho též vztah (c).

Z (c) plyne, že součin $\theta_3(v)\varphi(v)$ připouští periody $1, \tau$ a jelikož jest patrně funkcí stále konečnou, musí býti veličinou stálou, tedy

$$\varphi(v) = \frac{C}{\theta_3(v)};$$

konstanta C obdrží se porovnáním residuí při $v = \frac{1+\tau}{2}$, jež poskytne

$$\frac{1}{2\pi i} = \frac{C}{\theta'_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)},$$

takže

$$C = \frac{\vartheta'_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{2\pi i} = \frac{q^{-\frac{1}{4}}\vartheta'_1}{2\pi},$$

a následkem toho máme jako vedlejší výsledek

$$\varphi(v) = \frac{q^{-\frac{1}{4}}\vartheta'_1}{2\pi} \frac{1}{\vartheta_3(v)}$$

čili

$$(4) \quad \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_3(v)} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{(n+\frac{1}{2})^2}}{1+q^{2n+1}e^{2v\pi i}}.$$

Náš hlavní výsledek hořejší obdrží tak tvar definitivní

$$(5) \quad 4\pi i \vartheta_3(v) [F(u) - F(0)] = -\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} + \frac{\wp' u}{\wp u - \wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}$$

který lze ovšem ještě pozměniti.

Poznamenejme, že zde

$$F(u) = \frac{R(u, u+v)}{\vartheta_3(u)},$$

tedy

$$F(0) = \frac{R(0, v)}{\vartheta_3}.$$

Upravme ještě pravou stranu našeho výsledku (5) na tvar součinu, jímž povaha funkce nejpřesněji jest charakterisována.

Uvažme za tím účelem, že dvojperiodická funkce $F(u) - F(0)$ mizí na $u=0$ a má póly stupně prvního na místech nullových funkcí $\vartheta_1(u+v)$, $\vartheta_3(u)$, t. j. na místech $-v$, $\frac{1+\tau}{2}$, a že tedy musí zmizeti ještě na místě $\kappa = -v + \frac{1+\tau}{2}$, z čehož následuje

$$F(u) - F(0) = C \frac{\vartheta_1(u) \vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u) \vartheta_1(u+v)},$$

takže zbývá toliko ustanoviti konstantu C , již obdržíme porovnáním residuí při $u = -v$; plyne tak rovnice

$$-\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\vartheta_3(v)} = -C \frac{\vartheta_1(v) \vartheta_3}{\vartheta_3(v) \vartheta'_1},$$

a odtud

$$C = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i \vartheta_3} \frac{1}{\vartheta_1(v)},$$

tudíž

$$(6) \quad F(u) - F(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\theta'_1 \theta_1(u) \theta_3(u+v)}{\theta_3 \theta_1(v) \theta_3(u) \theta_1(u+v)}.$$

Vyjádřen v původní symbolice zní tento výsledek:

$$(6^*) \quad \theta_3 R(u, v) - \theta_3(u) R(0, v-u) = \frac{\theta'_1}{2\pi i} \frac{\theta_1(u) \theta_3(v)}{\theta_1(v) \theta_1(v-u)}.$$

Z této rovnice lze obdržeti hodnotu funkce $R(0, v)$ ve tvaru omezeného integrálu; píšeme-li ji totiž ve tvaru

$$\theta_3 R(u, u+v) - \theta_3(u) R(0, v) = \frac{\theta'_1}{2\pi i} \frac{\theta_1(u) \theta_3(u+v)}{\theta_1(v) \theta_1(u+v)},$$

obdržíme odtud integraci

$$R(0, v) = \theta_3 \int_0^1 R(u, u+v) du - \frac{\theta'_1}{2\pi i \cdot \theta_1(v)} \int_0^1 \frac{\theta_1(u) \theta_3(u+v)}{\theta_1(u+v)} du.$$

Při integraci jest u reálné a předpokládáme-li pomyslnou část veličiny v v mezích pomyslných částí veličin $\alpha\tau$, $(\alpha+1)\tau$, kde α je číslo celistvé, obdržíme z definice

$$R(u, u+v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2\pi i(u+v)}}$$

rozvinutím členů rozloženého součtu

$$R(u, u+v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2\pi i(u+v)}} = \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n} e^{2nu\pi i - 2\pi i(u+v)}}{1 - q^{2n} e^{-2\pi i(u+v)}}$$

dvojnásobné řady

$$R(u, u+v) = \sum_{n, m} q^{n^2+2mn} e^{2\pi i(m+n)u + 2\pi i m v} = \sum_{n', m'} q^{n'^2+2m'n'} e^{-2\pi i(m'+n')u + 2\pi i m' v},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 0, 1, 2, 3, \dots \infty \\ n = -\alpha, -\alpha+1, -\alpha+2, \dots \infty \\ m' = 1, 2, 3, \dots \infty \\ n' = \alpha+1, \alpha+2, \dots \infty. \end{array} \right.$$

V tomto rozvoji přicházejí členy nezávislé na u , jež přísluší řešením $m+n=0$, resp. $m'+n'=0$. A sice tu existují řešení rovnice pouze první, jeli $\alpha > 0$, naopak má pouze druhá rovnice řešení, jeli $\alpha < 0$.

Jsou pak tato řešení

$$n = -m = 0, -1, -2, \dots -\alpha,$$

resp.

$$n' = -m' = -1, -2, \dots \alpha+1.$$

Součet členů stálých bude tedy

$$\sum_{m=0}^{\alpha} q^{-m^2} e^{2mv\pi i} \quad \text{pro } \alpha \geq 0,$$

a

$$- \sum_{m=1}^{-\alpha-1} q^{-m^2} e^{-2mv\pi i} \quad \text{pro } \alpha < 0.$$

Dle toho přejde hořejší rovnice v následující:

$$(7) \quad R(0, v) = A_v \vartheta_3 - \frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(u) \vartheta_3(u+v)}{\vartheta_1(u+v)} du,$$

kde

$$A_v = \sum_{m=0}^{\alpha} q^{-m^2} e^{2mv\pi i} \quad \text{pro } \alpha \geq 0,$$

ale

$$A_v = - \sum_{m=1}^{-\alpha-1} q^{-m^2} e^{-2mv\pi i} \quad \text{pro } \alpha < 0,$$

při čemž α značí celistvé číslo, dané nerovnostmi*):

$$\text{Im.}(\alpha\tau) < \text{Im.}v < \text{Im.}(\alpha+1)\tau.$$

Jeli tedy zvláště pomyslná část v obsažena v mezích 0 a $\text{Im.}\tau$, bude $\alpha = 0$, $A_v = 1$.

Poznamenejme, že vzorcem (6*) redukována funkce tří proměnných $R(u, w | \tau)$ na funkci dvou proměnných $R(0, w - u | \tau)$ a na funkci elliptickou, a že vzorec (7) vyjadřuje se stanoviska formálního toliko rozvoj integrálu na pravé straně.

2. Uvažujme součin

$$(8) \quad \psi(w, u) = \vartheta_1(w) R(u, w),$$

jenž jest funkcí celistvou, a poněvadž dle (3)

$$(3) \quad R(u, w + \tau) = e^{\pi i(2w - 2u + \tau)} R(u, w) + \vartheta_3(u),$$

hová funkce (8) relacím:

$$(8a) \quad \begin{cases} \psi(w + 1, u) = -\psi(w, u), \\ \psi(w + \tau, u) = -\psi(w, u) e^{-2u\pi i} + \vartheta_3(u) \vartheta_1(w + \tau). \end{cases}$$

Z uvedených vlastností funkce $\psi(w, u)$ plyne, že ji lze vyjádřiti řadou stále konvergentní

$$\psi(w, u) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v e^{(2v+1)w\pi i},$$

*) Symbolem $\text{Im.}v$ znamenáme pomyslnou část veličiny v , tedy $\text{Im.}(a + bi) = b$.

kde součinitelé A se určí pomocí druhé relace (8^a). A sice obdržíme z rovnice této

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (q^{2\nu+1} + e^{-2u\pi i}) e^{(2\nu+1)w\pi i} \\ &= -i\vartheta_3(u) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu q^{(\nu+\frac{1}{2})^2} e^{(2\nu+1)(w+\tau)\pi i}. \end{aligned}$$

Odtud plyne srovnáním součinitelů

$$A_\nu = -i\vartheta_3(u) e^{2u\pi i} \frac{(-1)^\nu q^{(\nu+\frac{1}{2})^2+2\nu+1}}{1+q^{2\nu+1}e^{2u\pi i}}$$

a tedy po dosazení do řady:

$$\psi(w, u) = i\vartheta_3(u) \cdot e^{\pi i(2u-w-\tau)} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu q^{\nu^2+\nu+\frac{1}{2}} e^{2\nu w\pi i}}{1+q^{2\nu-1}e^{2u\pi i}};$$

poněvadž lze pravou stranu psáti

$$i\vartheta_3(u) e^{\pi i(2u-w-\tau)} R\left(\tau w + \frac{1+\tau}{2}, u - \frac{1+\tau}{2}\right),$$

nacházíme vztah velmi zajímavý:

$$(9) \quad R(u, \tau w) = i \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3(\tau w)} e^{\pi i(2u-w-\tau)} R\left(\tau w + \frac{1+\tau}{2}, u - \frac{1+\tau}{2}\right).$$

Odtud máme vůči (3):

$$R(u+\tau, w) = e^{2w\pi i} R(u, w) + i \frac{\vartheta_3(u)\vartheta_3\left(\tau w + \frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_3(w)} e^{-\pi i(w-\frac{1}{2}\tau)},$$

čili

$$(10) \quad R(u+\tau, w) = e^{-2w\pi i} R(u, w) - \vartheta_3(u) e^{-2w\pi i},$$

vztah, jež lze též přímo verifikovati.

Poznamenejme, že relacemi (8^a) jest celistvá funkce $\psi(w)$ úplně definována, podobně jako relací (10) funkce $R(u)$.

3. Funkce $R(u, \tau w)$ patří ku kategorii výrazů, které do theorie funkcí elliptických zavedl p. Appell, aby obdržel rozklad dvojperiodických funkcí druhu třetího v prvky jednoduché a tím také jejich trigonometrické rozvoje. Chceme ukázati, že naše relace (6) či (6*) obsahuje jako bezprostřední konsekvence či lépe jakožto zvláštní případy celou řadu interessantních rozvojevů, jakéž ve své thesi studoval p. Biehler,*⁾ z nichž mnohé hrají podstatnou roli v krásných arithmetických studiích slavného matematika p. Hermitea.**⁾

*⁾ Thésés présentées à la Faculté des Sciences de Paris. Gauthier — Villars, 1879.

**⁾ Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. (Mélanges mathém. et astronomiques tirées du Bulletin de l'Académie de St.

Klademeli ve vzorci

$$(6^*) \quad \vartheta_3 R(u, w) - \vartheta_3(u) R(0, w - u) = \frac{\vartheta_1'}{2\pi i} \frac{\vartheta_1(u) \vartheta_3(w)}{\vartheta_1(w) \vartheta_1(w - u)}$$

$u = \frac{1+\tau}{2}$, obdržíme

$$(A^0) \quad \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1(w)} = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} + n e^{w\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2w\pi i}},$$

z kteréhožto vzorce plynou rozvoje pro $\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_\alpha(w)}$ ($\alpha = 0, 2, 3$) pouhou substitucí hodnot $w + \frac{1}{2}$, $w + \frac{\tau}{2}$, $w + \frac{1+\tau}{2}$ za w .

Differencujeme (6) vůči u a klademeli $u = 0$ u výsledku, nalezneme

$$(A^1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\vartheta_1'^2 \vartheta_3(w)}{\vartheta_3 \vartheta_1^2(w)} \\ = -\frac{1}{2}\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n q^{n^2}}{1 - q^{2n} e^{2w\pi i}} - 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2 + 2n} e^{2w\pi i}}{(1 - q^{2n} e^{2w\pi i})^2} \end{array} \right.$$

Klademeli $w = u + \frac{1}{2}$, $u + \frac{\tau}{2}$, $u + \frac{1+\tau}{2}$, obdržíme ze vzorce (6*):

$$(A^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_0 \frac{\vartheta_0(u) \vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = 2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 + q^{2n} e^{2u\pi i}} - i \vartheta_3(u), \\ q^{\frac{1}{2}} \vartheta_2 \frac{\vartheta_1(u) \vartheta_2(u)}{\vartheta_0(u)} = 2i \vartheta_3(u) - 2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n+1} e^{2u\pi i}}, \\ q^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0 \vartheta_2}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_1^2(u)}{\vartheta_3(u)} = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 + q^{2n+1} e^{2u\pi i}} - 2 \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{1 + q^{2n+1}} \end{array} \right.$$

Při tom jsme užili vzorců

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{1 + q^{2n}} = \frac{1}{2} \vartheta_3, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{1 - q^{2n+1}} = \vartheta_3,$$

Petersbourg, tome VI), otištěno též v Acta math. sv. V, dále Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques (Journal für die reine und angewandte Mathematik sv. 100). Tamtéž nalezneme čtenář údaje literární o starších pracích slavného matematika, z nichž připomínáme publikaci v Liouvilleově žurnálu z r. 1862. Že mnohé výsledky p. Appella již dříve známy byly p. Hermiteovi, dosvědčuje onen ve své práci o trigonometrických rozvoji funkcí druhu třetího, uveřejněné v druhém svazku třetí série časopisu Annales de l'Ecole Normale Supérieure (r. 1885). Pan Hermite uveřejnil o svých studiích toliko krátkou poznámku v slavnostním spise In Memoriam Dominici Chelini Collectanea Mathematica (Milán, 1881), a v té se vyskytuje ku konci vztah, jenž se s naším vzorcem (9) takměř kreje.

kteřé lze následujícím způsobem dokázati; znamenáme-li součty řad těchto s_1 a s_2 , obdržíme z výrazů těchto píšíce $-n$, resp. $-n-1$ za n , rovnice:

$$s_1 = \sum \frac{q^{n^2+2n}}{1+q^{2n}},$$

$$s_2 = -\sum \frac{q^{n^2+4n+2}}{1-q^{2n+1}},$$

a tedy součtem obou druhů řad:

$$2s_1 = \sum \frac{q^{n^2}}{1+q^{2n}} + \sum \frac{q^{n^2+2n}}{1+q^{2n}} = \sum q^{n^2},$$

$$2s_2 = \sum \frac{q^{n^2}}{1-q^{2n+1}} - \sum \frac{q^{n^2+4n+2}}{1-q^{2n+1}}$$

$$= \sum q^{n^2}(1+q^{2n+1}) = \sum q^{n^2} + \sum q^{(n+1)^2},$$

takže patrně

$$2s_1 = \vartheta_3, \quad 2s_2 = 2\vartheta_3,$$

jak výše tvrzeno.

Z každé z rovnic (A^2) obdržíme tři další, nahradíme-li n hodnotami $n + \frac{1}{2}$, $n + \frac{\tau}{2}$, $n + \frac{1+\tau}{2}$.

Další zvláštní případy rovnice (6^*), jež chceme uvést, odpovídají hodnotám

$$n = \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2},$$

jsou to vzorce:

$$(A^3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_2^2 \frac{\vartheta_3(\tau w)}{\vartheta_1(\tau w) \vartheta_2(\tau w)} = \frac{2i}{\vartheta_3} \sum \frac{q^{n^2}}{1+q^{2n} e^{2w\pi i}} \\ \quad - \frac{2i}{\vartheta_0} \sum \frac{(-1)^n q^{n^2}}{1-q^{2n} e^{2w\pi i}}, \\ q^{\frac{1}{2}} \vartheta_0^2 \frac{\vartheta_3(w)}{\vartheta_0(w) \vartheta_1(w)} = \frac{2i}{\vartheta_3} \sum \frac{q^{n^2} e^{w\pi i}}{1-q^{2n-1} e^{2w\pi i}} \\ \quad - \frac{2i}{\vartheta_2} \sum \frac{q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{w\pi i}}{1-q^{2n} e^{2w\pi i}}, \end{array} \right.$$

z kterýchžto vzorců lze substitucí $w + \frac{1}{2}$, $w + \frac{\tau}{2}$, $w + \frac{1+\tau}{2}$ za w odvoditi dalších šest rovnic.

4. Zavedme nyní funkce

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(u, v | \tau) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u\pi i}}{1-q^{2n} e^{2\pi i(u+v)}}, \\ f_2(u, v | \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u\pi i}}{1-q^{2n} e^{2\pi i(u+v)}}, \end{array} \right.$$

2*

$$(11) \quad \begin{cases} f_3(u, v | \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2\pi i n u}}{1 - q^{2n} e^{2\pi i (u+v)}}, \\ f_0(u, v | \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n u}}{1 - q^{2n} e^{2\pi i (u+v)}}, \end{cases}$$

z nichž $f_3(u, v)$ splývá s funkcí $f(u, v)$ výše studovanou.

Z výrazů těchto patrně, že existují především relace

$$\begin{aligned} f_0(u+1) &= f_0(u), & f_1(u+1) &= -f_1(u), \\ f_2(u+1) &= -f_2(u), & f_3(u+1) &= f(u), \end{aligned}$$

a píšeme-li v řadách $n+1$ místo n , obdržíme relace další:

$$\begin{aligned} f_0(u+\tau) &= -f_0(u) e^{-\pi i (2u+\tau)}, \\ f_1(u+\tau) &= -f_1(u) e^{-\pi i (2u+\tau)}, \\ f_2(u+\tau) &= f_2(u) e^{-\pi i (2u+\tau)}, \\ f_3(u+\tau) &= f_3(u) e^{-\pi i (2u+\tau)}; \end{aligned}$$

tedy každá z našich funkcí $f_a(u, v | \tau)$ hovoří rovnicím tvaru:

$$f_a(u+1) = (-1)^g f_a(u), \quad f_a(u+\tau) = (-1)^h f_a(u) e^{-\pi i (2u+\tau)},$$

kde čísla g/h pak tvoří známku (charakteristiku) funkce f_a . Dlužno si pamatovati, že známka funkce f_a je též jako známka funkce $\vartheta_a(u)$ týmž indexem a opatřená.

Ze vztahů těchto jest patrně, že podíly

$$(12) \quad F_a(u, v | \tau) = \frac{f_a(u, v | \tau)}{\vartheta_a(u | \tau)}$$

jsou dvojperiodické funkce stupně 2. o základních periodách $1, \tau$.

Póly funkce $F_a(u)$ jsou jednak nullovými místy funkce $\vartheta_a(u)$, jednak shodny s $-v$.

Funkce

$$F_a(u) - F_a(w),$$

kde w je konstanta, má tytéž vlastnosti a mizí při $u=w$; jakožto funkce stupně druhého mizí ještě na jednom místě, kteréž má hodnotu $u_0 = -w - v + c_a$, kde c_a značí nullové místo funkce ϑ_a , takže $\vartheta_1(u - u_0) = \vartheta_1(u + v + w - c_a)$ liší se od $\vartheta_a(u + v + w)$ pouze činitelem exponenciálním. Bude tudíž

$$F_a(u) - F_a(w) = A_a \frac{\vartheta_1(u - w) \vartheta_a(u + v + w)}{\vartheta_a(u) \cdot \vartheta_1(u + v)},$$

kde A_a nezávisí na u . Abychom je určili, porovnáme residua při $u = -v$; obdržíme tak

$$A_a = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \frac{V_a}{\vartheta_1(v + w) \vartheta_a(w)},$$

kde

$$V_1 = -i q^{\frac{1}{2}} e^{-v\pi i}, \quad V_2 = q^{\frac{1}{2}} e^{-v\pi i}, \\ V_0 = V_3 = 1.$$

Nacházíme tedy obecný vzorec

$$(13) \quad F_\alpha(u, v) - F_\alpha(\tau w, v) = \frac{\vartheta'_1 V_\alpha}{2\pi i} \frac{\vartheta_1(u-w) \vartheta_\alpha(u+v+w)}{\vartheta_\alpha(u) \vartheta_\alpha(\tau w) \vartheta_1(u+v) \vartheta_1(\tau w+v)},$$

který pro $\alpha = 3, w = 0$ přejde u výsledek (6), a z něhož máme integraci dle u v mezích 0 a 1,

$$F_\alpha(\tau w, v) = 1 - \frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \frac{1}{\vartheta_\alpha(\tau w) \vartheta_1(v+\tau w)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(u-w) \vartheta_1(u+v+w)}{\vartheta_1(u+v)} du,$$

pokud $\alpha = 0, 3$ a $0 < \text{Im. } v < \text{Im. } \tau$.

Užijeme-li ve vzorci (13) při $\alpha = 1, 3$ vztahů

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = -i \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{x^2 \pi i}{\tau}} \vartheta_1(x|\tau), \\ \vartheta'_1\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = -\tau i \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta'_1(0|\tau), \\ \vartheta_3\left(\frac{x}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{x^2 \pi i}{\tau}} \vartheta_3(x|\tau),$$

obdržíme

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & F_3\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) - F_3\left(\frac{w}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \\ & \quad = i \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} [F_3(u, v|\tau) - F_3(\tau w, v|\tau)], \\ & F_1\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) - F_1\left(\frac{w}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \\ & \quad = -\sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{-\frac{v^2 - v(1+\tau)}{\tau} \pi i - \frac{\pi i}{4} \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)} [F_1(u, v|\tau) - F_1(\tau w, v|\tau)]. \end{aligned} \right.$$

Odtud následuje, že výraz

$$(15) \quad \Phi(v, \tau) = F_3\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) - i \sqrt{\frac{\tau}{i}} F_3(u, v|\tau) e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}},$$

nezávisí na u ; odtud máme

$$(15^a) \quad \Phi(v, \tau) \vartheta_3(u) \sqrt{\frac{\tau}{i}} = f_3\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{u^2 \pi i}{\tau}} - \tau f_3(u, v|\tau) e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}}$$

Integrujme dle u v mezích 0 a 1, předpokládajíc $0 < \text{Im. } v < \text{Im. } \tau$; i obdržíme

$$\Phi(v, \tau) \sqrt{\frac{\tau}{i}} = -\tau e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} + \int_0^1 f_3\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{u^2 \pi i}{\tau}} du.$$

Avšak

$$f_3\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{u^2 \pi i}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u-n)^2}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(u-n) + \frac{2v\pi i}{\tau}}}$$

a následovně

$$\int_0^1 f_3\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{u^2 \pi i}{\tau}} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2 \pi i}{\tau}} dx}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}x + \frac{2v\pi i}{\tau}}}$$

Náš výsledek lze tedy psát

$$(15^b) \quad \psi(v, \tau) \sqrt{\frac{\tau}{i}} + \tau c^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau} x^2} dx}{1 - e^{\frac{2v\pi i}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau} x}}$$

Pišme na okamžik $\frac{i}{\tau} = c$, $v = ri$, předpokládajíc c reálné a kladné, a r rovněž reálné; hořejší podmínka $0 < \text{Im } v < \text{Im } \tau$ vyžaduje $r > 0$, $cr < 1$. Náš integrál lze pak psát po substituci $x = \frac{z}{c} - ri$

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{c}(z - cri)^2} \frac{dz}{1 - e^{2\pi i z}}$$

kde integrace se děje podél přímky $z = c(x + ri)$; integrál se však (dle podmínky $cr < 1$) nezmění, volímeli za cestu integrační příčku $z = x + \frac{i}{2}$, čímž obdržíme výraz (15^b) ve tvaru

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{c}(x + \frac{i}{2} - cri)^2} \frac{dx}{1 + e^{2\pi i x}}$$

čili vrátímeli se k původnímu označení :

$$(15^c) \quad \psi(v, \tau) \sqrt{\frac{\tau}{i}} + \tau c^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} = \frac{\tau}{i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau \pi i (x + \frac{i}{2} - \frac{v i}{\tau})^2} \frac{dx}{1 + e^{2\pi i x}}$$

Připomeňme, že z (14^a) máme pro $u = 0$ rozvoj

$$(15^d) \quad \psi(v, \tau) \theta_3 \sqrt{\frac{\tau}{i}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2 \pi i}{\tau}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(v-n)}} = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{n^2 \tau \pi i - \frac{v^2 \pi i}{\tau}}}{1 - e^{2\pi i(v+n\tau)}}$$

Klademeli mimo to $u = -v$ ve vzorci (15^d), obdržíme

$$(15^e) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(v, \tau) \vartheta_3(v) \sqrt{\tau} &= \left(\frac{1}{2} - v - \frac{\tau}{2}\right) e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2}}{1 - e^{-\frac{2n\pi i}{\tau}}} \\ &- \tau e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(n^2 \tau - 2nv) \pi i}}{1 - e^{\frac{2n\tau \pi i}{\tau}}} \end{aligned} \right.$$

při čemž čárka u znamení Σ vyjadřuje vynechání členů $n = 0$.

Ze vzorce (15^e) vysvitá, že $\Phi(v, \tau)$ je vůči v funkcí celistvou, což se též snadno dokáže ze vzorce (15^d), vypočtouli se residua na místech $v = m\tau + n$, která se ukážou býti nullami.

Porovnáním (15^d) a (15^e) máme týž výsledek, neboť dle (15^d) může míti Φ pouze póly $m\tau + n$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), na kterýchžto místech však dle (15^e) Φ jest konečno.

5. Úvahy podobné předešlým lze provést při obecnější funkci

$$(I) \quad A(u, v, \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2} e^{2\nu n u \pi i}}{1 - q^{2\nu} e^{2\pi i(u+\nu)}} ,$$

kterou do theorie funkcí elliptických zavedl pan *Appell* ve svých studiích o funkcích dvojperiodických druhu třetího uveřejněných v *Annales de l'École Normale Supérieure**) (III. řada, sv. 1, 2, 3).

Tato jest jednoznačnou a má pouze póly stupně prvního $u = m + \nu\tau$, ($m, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), při čemž $q = e^{\tau \pi i}$, $|q| < 1$, tedy $\text{Im. } \tau > 0$. Tato funkce hová rovnicím

$$(II) \quad \begin{cases} A(u+1) = A(u) \\ A(u+\tau) = e^{-n\pi i(u+\tau)} A(u) \end{cases} ,$$

jimž hová též funkce theta řádu n , známky 00.

Z těchto funkcí theta řádu n známky 00 vždy existuje n lineárně neodvislých; znamenejme

$$\Theta_1(u), \Theta_2(u), \dots, \Theta_n(u)$$

takovouto soustavu n lineárně neodvislých funkcí theta řádu n , známky 00, a uvažujme determinant

$$(III) \quad A(u) = \begin{vmatrix} A(u) & A(\tau w_1) & A(\tau w_2) & \dots & A(\tau w_n) \\ \Theta_1(u) & \Theta_1(\tau w_1) & \Theta_1(\tau w_2) & \dots & \Theta_1(\tau w_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_n(u) & \Theta_n(\tau w_1) & \Theta_n(\tau w_2) & \dots & \Theta_n(\tau w_n) \end{vmatrix} ,$$

*) Viz též poslední odstavce knihy *Halphenovy* (*Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*; Paris, 1886) v dílu prvé. Jak p. *Appell* uvádí, byly tyto výrazy již dříve známy p. *Hermiteovi*, o čemž viz poznámku výše učiněnou.

kde w_1, w_2, \dots, w_n značí libovolné stálé. Tento determinant jest funkcí u , která hová rovnicím (II), a podíl $A(u) : \vartheta_3^n(u)$ je tedy elliptickou funkcí a sice $(n+1)^{h_0}$ stupně. Jelikož $A(u)$ zmizí na w_1, w_2, \dots, w_n , a má pól jednoduchý $u = -v$ a n -násobný $u = \frac{1+\tau}{2}$, musí tato funkce elliptická též mizeti na místě

$$w_0 = -v - \sum_{\alpha=1}^n w_\alpha + n \frac{1+\tau}{2}.$$

Jeli tedy n liché, nalezneme

$$A(u) = C \frac{\prod_{\alpha=1}^n \vartheta_1(u - w_\alpha) \cdot \vartheta_3(u + v + w_1 + w_2 + \dots + w_n)}{\vartheta_1(u + v)},$$

kde C nezávisí na u ; tuto stálou obdržíme porovnáním residuí při $u = -v$; a sice bude

$$\frac{1}{2\pi i} \Theta_\alpha(w_\beta) = C \frac{\prod \vartheta_1(v + w_\alpha) \cdot \vartheta_3(w_1 + w_2 + \dots + w_n)}{\vartheta_1},$$

kde $|\Theta_\alpha(w_\beta)|$ vyjadřuje determinant

$$D(w_1, w_2, \dots, w_n) = \begin{vmatrix} \Theta_1(w_1) & \Theta_1(w_2) & \dots & \Theta_1(w_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_n(w_1) & \Theta_n(w_2) & \dots & \Theta_n(w_n) \end{vmatrix}.$$

Tím tedy dokázána relace

$$(IV) \quad A(u) = \frac{\vartheta_1'}{2\pi i} \frac{D(w_1, w_2, \dots, w_n) \vartheta_3(u + v + w_1 + w_2 + \dots + w_n) \prod \vartheta_1(u - w_\alpha)}{\vartheta_1(u + v) \vartheta_3(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \prod \vartheta_1(v + w_\alpha)},$$

kteřá podstatně zobecňuje výsledky předešlé.

Determinant $D(w_1, w_2, \dots, w_n)$ jest vůči každé z liter w funkcí theta řádu n o známce ∞ a zmizí na $n-1$ místech daných; vůči w_1 na př. na místech w_2, w_3, \dots, w_n , i bude (ano n jest liché)

$$D(w_1, w_2, \dots, w_n) = \gamma \vartheta_3(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \prod_{\alpha < \beta} \vartheta_1(w_\alpha - w_\beta) \\ (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, n),$$

při čemž konstanta γ závisí toliko na volbě základní soustavy funkcí $\Theta_1 \dots \Theta_n$.

Následkem toho můžeme výsledek (IV) uvést na tvar

$$A(u) = \frac{\gamma \vartheta_1'}{2\pi i} \frac{\vartheta_3(u + v + w_1 + \dots + w_n) \cdot \prod \vartheta_1(u - w_\alpha) \cdot \prod \vartheta_1(w_\alpha - w_\beta)}{\vartheta_1(u + v) \prod \vartheta_1(v + w_\alpha)}, \\ (\alpha, \beta = 1, 2, n \dots; \alpha < \beta),$$

aneb změnímei poněkud označení, na tvar přehlednější:

$$(IV^*) \quad \begin{vmatrix} A(w_0) & A(w_1) & A(w_2) & \dots & A(w_n) \\ \Theta_1(w_0) & \Theta_1(w_1) & \Theta_1(w_2) & \dots & \Theta_1(w_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_n(w_0) & \Theta_n(w_1) & \Theta_n(w_2) & \dots & \Theta_n(w_n) \end{vmatrix} \\ = \frac{\gamma \vartheta_1'}{2\pi i} \frac{\vartheta_3(v + w_0 + w_1 + \dots + w_n) \prod \vartheta_1(w_\alpha - w_\beta)}{\prod \vartheta_1(v + w_\alpha)}, \\ (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, n; \alpha < \beta).$$

Další vlastnost funkce $A(u, v)$ podá nám známý vzorec*)

$$(V) \quad A(u, v + \tau) = A(u, v) e^{n\pi i(2v + \tau)} + \sum_{s=0}^{n-1} e^{2s\pi i(u + v + \tau)} \theta_3(nu + s\tau | n\tau),$$

který zle vzhledem k důležitosti předmětu a v zájmu úplnosti této práce chceme krátce odůvodnit. Pišeme-li $\xi = e^{2u\pi i}$, $\eta = e^{2v\pi i}$, máme dle definice

$$A(u, v) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} \xi^{nr}}{1 - q^{2r} \xi \eta},$$

$$A(u, v + \tau) = \sum_r \frac{q^{n^2} \xi^{nr}}{1 - q^{2r+2} \xi \eta};$$

pišeme-li u vzorci prvním $r+1$ za r , obdržíme

$$A(u, v) q^n \eta^n = \sum_r \frac{q^{n^2} \xi^{nr}}{1 - q^{2r+2} \xi \eta} q^{n(2r+2)} \xi^n \eta^n$$

a následkem toho rozdíl posledních dvou výrazů

$$\begin{aligned} A(u, v + \tau) - A(u, v) q^n \eta^n &= \sum_r q^{n^2} \xi^{nr} \frac{1 - q^{n(2r+2)} \xi^n \eta^n}{1 - q^{2r+2} \xi \eta} \\ &= \sum_r q^{n^2} \xi^{nr} \sum_{s=1}^{n-1} q^{s(2r+2)} \xi^s \eta^s, \end{aligned}$$

čímž vzorec (V) dokázán.

Pišeme-li u výrazu $A(u, v)$ w místo $u+v$, přejde tento v řadu

$$R_n(u, w | \tau) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nv\pi i}}{1 - q^{2v} e^{2w\pi i}},$$

a vzorec (V) obdrží tvar

$$(V') \quad R_n(u, w + \tau) = R_n(u, w | \tau) e^{n\pi i(2w - 2u + \tau)} + \sum_{s=0}^{n-1} e^{2s\pi i(w + \tau)} \theta_3(nu + s\tau | n\tau).$$

Součin

$$\Psi(w) = R_n(u, w | \tau) \theta_1(nw | n\tau)$$

je celistvá funkce transcendentní a hovář relaci**) plynoucí z (V'):

$$(V'') \quad \begin{aligned} &\Psi(w + \tau) \\ &= -\Psi(w) e^{-2nu\pi i} + \sum_{s=0}^{n-1} \theta_3(nu + s\tau | n\tau) e^{2s\pi i(w + \tau)} \theta_1(nw + n\tau | n\tau). \end{aligned}$$

Jelikož $\Psi(v+1) = -\Psi(v)$, existuje rozvoj stále konvergentní:

$$\Psi(w) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} A_{\sigma} e^{(2\sigma+1)w\pi i}.$$

*) Viz citovanou knihu Halphenovu.

**) Stále předpokládáme, že n je liché.

Vložíme-li jež do relace (V''), obdržíme vztah

$$\sum A_{\sigma} (e^{-2nu\pi i} + q^{2\sigma+1}) e^{(2\sigma+1)w\pi i} \\ = -i \sum_{s=0}^{n-1} \vartheta_3(nu + s\tau | n\tau) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} q^{n(\nu+\frac{1}{2})^2} e^{(2\nu+n+2s)(w+\tau)\pi i},$$

kde jsme užili definice

$$\vartheta_1(x | \tau) = -i \sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{(\nu+\frac{1}{2})^2} e^{(2\nu+1)\tau\pi i}.$$

Porovnávajíc podobné členy obou stran kladme

$$2\sigma + 1 = 2n\nu + 2s + n,$$

tedy

$$\sigma = n\nu + s + \frac{n-1}{2},$$

i bude

$$A_{s+\frac{n-1}{2}+n\nu} = \frac{-i(-1)^{\nu} q^{(\nu+\frac{1}{2})^2+2n\nu+n+2s}}{e^{-2nu\pi i} + q^{n+2s+2n\nu}} \vartheta_3(nu + s\tau | n\tau).$$

Částečný součet

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{s+\frac{n-1}{2}+n\nu} e^{(n+2s+2n\nu)w\pi i}$$

má tedy hodnotu:

$$-i \cdot q^{2s+n+\frac{1}{2}} e^{2nu\pi i + (n+2s)w\pi i} \vartheta_3(nu + s\tau | n\tau) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{q^{n\nu^2+2n\nu} e^{2\nu n w \pi i}}{1 + q^{n+2s+2n\nu} e^{2nu\pi i}} \\ = i q^{2s-2n+\frac{1}{2}} e^{2nu\pi i + (2s-n)w\pi i} \vartheta_3(nu + s\tau | n\tau) \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{q^{n\nu^2+n\nu} e^{2\nu n w \pi i}}{1 + q^{2s-n+2n\nu} e^{2nu\pi i}};$$

nekonečná řada shoduje se dle zavedeného označení s výrazem

$$R_1(nw + n\frac{1+\tau}{2}, nu + s\tau - n\frac{1+\tau}{2} | n\tau)$$

a tedy obdržíme shrnutím všech výsledků:

$$\psi^r(w) = i \sum_{s=0}^{n-1} q^{2s-2n+\frac{1}{2}} e^{2nu\pi i + (2s-n)w\pi i} \\ \cdot \vartheta_3(nu + s\tau | n\tau) R_1(nw + \frac{n+n\tau}{2}, nu + s\tau - \frac{n+n\tau}{2} | n\tau).$$

aneb konečně

$$(VI) \left\{ \begin{array}{l} R_n(u, w | \tau) \vartheta_1(nw | n\tau) q^{2n-\frac{1}{2}} e^{(nw-2nu)\pi i} \\ = i \sum_{s=0}^{n-1} q^{2s} e^{2s w \pi i} \vartheta_3(nu + s\tau | n\tau) R_1(nw + \frac{n+n\tau}{2}, nu + s\tau - \frac{n+n\tau}{2} | n\tau). \end{array} \right.$$