

## Lerch, Matyáš: Scholarly works

---

Matyáš Lerch

Nové odvození Legendreova vzorce

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1891), č. 8, 159–165

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501688>

### Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1891

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NOVÉ  
ODVOZENÍ LEGENDREOVA VZORCE

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx \, dx}{\sqrt{1-2a \cos x + a^2}} = a^n \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x \, dx}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 x}}.$$

NAPSAL M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 10. ŘÍJNA 1891.

Vzorec nadepsaný odvodil *Legendre* ve svém klassickém spise o integrálech elliptických v II. sv., str. 536. Týmž vzorcem zabýval se dále *Jacobi*,\* jemuž podobně jako předchůdci jeho ušla jednoduchá podstata tohoto zjevu nikterak neobyčejného. Ukážeme, že vzorec ten plyne bezprostředně pomyslnou substitucí užitím věty Cauchyovy o integraci v oboru pomyslném, a poněvadž jest jen velmi zvláštním případem obecnějšího theoremu, obrátíme se k odvození tohoto.

Budiž  $f(t)$  funkce jednoznačná uvnitř kruhu  $|t| = 1$  v rovině sloužící ku znázornění komplexní proměnné  $t$ , a předpokládejme, že  $f(t)$  připouští integraci podél obvodu tohoto kruhu. Nechť má dále  $f(t)$  uvnitř kruhu pouze konečný počet míst zvláštních, a to póly stupně prvního  $c_1, c_2, \dots, c_m$  o residuích  $R_1, R_2, \dots, R_m$ , různé od místa  $t = 0$ ; konečně znamenej nám  $a$  kladnou veličinu reálnou a menší než 1, tak aby mezera  $(0 \dots a)$  neobsahovala pólů  $c$  funkce  $f(t)$ .

Uvažujme pak integrál

$$J = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{\alpha i\varphi} (1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi,$$

kde  $\beta$  má reálnou část kladnou,  $\alpha$  je celistvé a  $\alpha - \beta$  má reálnou část větší než  $-1$ ; mocnina  $(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{\beta}$  dána jednoznačně řadou binomiální a značí t. zv. hodnotu hlavní.

Substitucí  $e^{i\varphi} = t$  obdrží integrál tvar

$$J = -i \int_{|t|=1} f(t) t^{\alpha-1} (1 - at)^{\beta-1} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^{\beta-1} dt,$$

kde integrace děje se podél kružnice  $|t| = 1$  ve směru kladném.

Funkce  $f(t) (1 - at)^{\beta-1} t^{\alpha-1}$  jest jednoznačnou uvnitř kruhu  $|t| = 1$ , ale funkce  $\left(1 - \frac{a}{t}\right)^{\beta-1}$  jest víceznačnou na místě  $t = a$  i na  $t = 0$ . Vedemeli však řez  $(0 \dots a)$ , čímž kruh přejde v obor  $[t]$ , bude funkce pod

\* Formula transformationis integralium definitorum. Crelleův žurnál sv. 15.

znamením integračním v tomto oboru jednoznačnou. Pro  $|t| > a$  jest funkce  $(1 - \frac{a}{t})^{\beta-1}$  dána binomialním rozvojem a značí tedy hlavní větev mocninové

funkce, t. j. je tvaru  $e^{(\beta-1) \log(1 - \frac{a}{t})}$ , kde logarithmus má pomyslnou část v mezích  $(-\pi \dots \pi)$ . Podržíme-li tuto definici, bude funkce jednoznačnou v oboru  $[t]$ , a má v bodech na levé resp. pravé straně řezu  $(0 \dots a)$  hodnoty

$$e^{(\beta-1) \log(1 - \frac{a}{t+0.i})} = e^{(\beta-1) [\log(\frac{a-t}{t}) + \pi i]} = (\frac{a-t}{t})^{\beta-1} e^{(\beta-1)\pi i}$$

$$e^{(\beta-1) \log(1 - \frac{a}{t-0.i})} = e^{(\beta-1) [\log(\frac{a-t}{t}) - \pi i]} = (\frac{a-t}{t})^{\beta-1} e^{-(\beta-1)\pi i}.$$

Integrál

$$J' = -i \int_{[t]} f(t) t^{\alpha-1} (1-at)^{\beta-1} (1-\frac{a}{t})^{\beta-1} dt$$

vzatý v kladném směru podél obvodu oboru  $[t]$  rovná se dle známé věty Cauchyovy součtu residuí funkce integrované na pólech  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , násobnému  $2\pi i$ , a tedy značíli  $R_1, R_2, \dots, R_m$  residua funkce  $f(t)$  na těchto pólech, které budíž stupně prvního, obdržíme

$$J' = 2\pi \sum_{v=1}^m R_v (1-ac_v)^{\beta-1} \left(1 - \frac{a}{c_v}\right)^{\beta-1} c_v^{\alpha-1}.$$

Avšak integrál  $J'$  skládá se z integrálu podél kruhu  $|t|=1$  a podél řezu  $(0 \dots a)$ , takže

$$J' = J - ie^{(\beta-1)\pi i} \int_a^0 f(t) (1-at)^{\beta-1} (a-t)^{\beta-1} t^{\alpha-\beta} dt \\ - ie^{-(\beta-1)\pi i} \int_0^a f(t) (1-at)^{\beta-1} (a-t)^{\beta-1} t^{\alpha-\beta} dt,$$

takže porovnáním obou hodnot  $J'$  máme po jednoduché modifikaci:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{\alpha i \varphi} (1-2a \cos \varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi \\ & = 2 \sin \beta \pi \int_0^a f(t) t^{\alpha-\beta} (a-t)^{\beta-1} (1-at)^{\beta-1} dt \\ & + 2\pi \sum_{v=1}^m R_v (1-ac_v)^{\beta-1} \left(1 - \frac{a}{c_v}\right)^{\beta-1} c_v^{\alpha-1}. \end{aligned} \right.$$

Volímeli  $f(t) = t^n$ , kde  $n$  je kladné celistvé číslo, odpadají veškerý pólý  $c$  a tedy všecka  $R_v = 0$ , takže nacházíme pro  $a = 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{n i \varphi} (1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi \\ = 2 \sin \beta \pi \cdot \int_0^a t^{n-\beta} (a-t)^{\beta-1} (1-at)^{\beta-1} dt,$$

aneb jinak psáno:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi} \cos n \varphi \cdot (1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi \\ = \sin \beta \pi \cdot \int_0^a t^{n-\beta} (a-t)^{\beta-1} (1-at)^{\beta-1} dt; \end{array} \right.$$

klademeli zde  $\beta = \frac{1}{2}$  a přetvořímeli integrál substitucí  $t = a \sin^2 x$ , obdržíme vzorec Legendreův uvedený v titulu, který se jeví tedy jako zvláštní případ vzorce (2).

Pomocí vzorce (2) snadno nalezneme

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^a \frac{(1-t^2)t^{-\beta}(a-t)^{\beta-1}(1-at)^{\beta-1} dt}{1-2t \cos x + t^2} \\ = \frac{\pi}{\sin \beta \pi} (1-2a \cos x + a^2)^{\beta-1}, \end{array} \right.$$

kde  $\beta$  má realnou část v mezích  $(0 \dots 1)$ .

Ve zvláštním případě  $\beta = \frac{1}{2}$  plyne odtud při označení  $\cos x = b$  po jednoduché transformaci

$$(3^*) \quad \int_0^1 \frac{(1-a^2 t^2) dt}{(1-2ab t + a^2 t^2) \sqrt{t(1-t)(1-a^2 t)}} = \frac{\pi}{1-2ab + a^2}.$$

Vzorec ten platí pro všecka  $b$ , pro něž obě strany existují.

Volímeli dále  $f(t) = \frac{1}{t-az}$ , kde  $z$  je uvnitř kruhu  $|t| = a^{-1}$ , avšak mimo intervall  $(0 \dots 1)$ , obdržíme z (1) pro  $a = 0$  vzorec:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \frac{(1-2a \cos \varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi}{e^{i \varphi} - az} \\ = \frac{2 \sin \beta \pi}{a} \int_0^1 \frac{t^{-\beta} (1-t)^{\beta-1} (1-a^2 t)^{\beta-1} dt}{t-z} \\ + \frac{2\pi}{az} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\beta-1} (1-a^2 z)^{\beta-1}. \end{array} \right.$$

## Déduction nouvelle de la formule de Legendre

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx \, dx}{\sqrt{1 - 2a \cos x + a^2}} = a^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x \, dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}$$

Dans cette note nous avons établi le théorème suivant dont la formule précédente est un cas très particulier :

$f(t)$  désignant une fonction uniforme à l'intérieur du cercle  $|t| = 1$ , n'y ayant que des pôles simples différents de zéro  $c_1, c_2, \dots, c_m$  avec les résidus correspondants  $R_1, R_2, \dots, R_m$ , en représentant ensuite par  $a$  une fraction positive telle que l'intervalle  $(0 \dots a)$  ne contient aucun des pôles  $c_1, c_2, \dots, c_m$  on a la formule

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{\alpha i\varphi} (1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi \\ &= 2 \sin \beta \pi \int_0^a f(t) t^{\alpha-\beta} (a-t)^{\beta-1} (1-at)^{\beta-1} dt \\ &+ 2\pi \sum_{\nu=1}^m R_\nu (1-ac_\nu)^{\beta-1} \left(1 - \frac{a}{c_\nu}\right)^{\beta-1} c_\nu^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

dans laquelle  $\alpha$  est un entier nul ou positif tel que la partie réelle de  $\alpha - \beta$  soit supérieure à  $-1$ .

En prenant  $f(t) = t^n$ ,  $\alpha = 0$ , on a la formule

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \cos n\varphi \cdot (1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi \\ &= \sin \beta \pi \int_0^a t^{n-\beta} (a-t)^{\beta-1} (1-at)^{\beta-1} dt \end{aligned}$$

qui pour  $\beta = \frac{1}{2}$  devient celle de Legendre.

On en déduit

$$\int_0^a \frac{(1-t^2)t^{-\beta} (a-t)^{\beta-1} (1-at)^{\beta-1} dt}{1-2t \cos x + t^2} = \frac{\pi}{\sin \beta \pi} (1-2a \cos x + a^2)^{\beta-1},$$

et en prenant  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\cos x = b$ ,

$$\int_0^1 \frac{(1-a^2t^2)dt}{(1-2abt+a^2t^2)\sqrt{t(1-t)(1-a^2t)}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ab+a^2}}.$$

On a signalé aussi l'application qui résulte pour  $f(t) = \frac{1}{t-az}$ ,  $z$  étant contenu dans le cercle  $t = \frac{1}{a}$ .

La démonstration de la formule fondamentale consiste dans une substitution imaginaire.