Matyáš Lerch

Primedbe o teoriji viših involucija

Glas Srpske Kr. Akad. 11 (1889), 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501668

ПРИМЕДБЕ О ТЕОРИЈИ ВИШИХ ИНВОЛУЦИЈА.

од

М. Лерха

у Прагу.

Инволуцијом n-ог реда (ordre) и k-те врсте (rang) зове се скуп система корена $(x_1, x_2, \dots x_n)$ свију оних једначина, које се добијају, кад се у једначини:

$$1)\qquad \sum_{a=0}^{k} \lambda_a f_a(x) = 0,\ k \leqq n$$

параметрима $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_k$ даду све могуће особине вредности. $k+1$ целих функција јесу n-ог реда и лева страна једначине 1) ишчезава идентично (за сваку вредност x-са) само за $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Корени $(x_1, x_2, \dots x_n)$ каже се да чине једну групу једначином 1) одређене инволуције, групу одређену одговарајућим системом параметара $(\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_k)$. Два система параметара $(\lambda'_0, \lambda'_1 \dots \lambda'_k)$ и $(\lambda''_0, \lambda''_1 \dots \lambda''_k)$ сматрају се као равновредни, ако је $\lambda'_0 : \lambda''_0 = \lambda'_1 : \lambda''_1 = \lambda'_2 : \lambda''_2 = \dots$. Јасно је, да двема равновредним системима параметара одговара иста инволуторна група, и обратно системи параметара, који одговарају истој групи, јесу увек и равновредни. Ја ћу означавати са $J(n, k)$ инволуцију онакву, каква је она под 1).

Уопште свака група инволуције $J(n, k)$ потпуно је одређена са k ма којих елемената својих. И да би смо добили једну ма коју групу инволуције $J(n, k)$, можемо са свим по вољи узети k ма којих елемената њених, и тада су $(n - k)$ осталих једнозначно одређени.

Више инволуције уведене су у науку г. г. Le Paige-ом и Emil-ом Weyr-ом, али су проучаване биле само са геометријског гледишта, коме се има и благодарити за њин проналазак. Међу тим оне се могу јавити и у радовима алгебре, и ја ћу показати једну примену истих, која је у стању подићи им важност.

Ја узимам алгебарску једначину n-ог реда са неодређеним сачиниоцима (промењљиви и независни):

$$\Phi(x) = \varphi_0 x^n - \varphi_1 x^{n-1} + \varphi_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \varphi_n = 0.$$

Корени њени нека су $x_1, x_2, \ldots x_n$. Услов, који треба да је испуњен, па да ова једначина има ϱ више стручних (multiple) корена са казаљкама више стручности $1 + r_1$, $1 + r_2$, $\ldots$ $1 + r_\varrho$, исказан је једним системом алгебарских хомогених једначина између сачинилаца $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ облика:

$$2) \quad F_1(\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n) = 0, \; F_2(\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n) = 0, \ldots\ldots$$

где су леве стране целе и хомогене функције елемената $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ са бројним сачиниоцима, које смемо предпоставити као целе.

Ако узмемо $\varrho = 1$, $r_1 = 1$, онда се систем 2) своди на једну само једначину $F = 0$, чија се лева страна зове дискриминанта опште једначине $\Phi = 0$.

Систем 2) зацело је заплетен, али ја ћу се ипак потрудити, да одредим његов степен, то ће рећи степен његове решавајуће једначине. Стављајући $k = r_1 + r_2 + \ldots + r_\rho$ напомињем, да је степен N система 2) одређен бројем *пресека* (заједничких разрешења) система 2) и једног произвољног система од $n - k$ линеарних и хомогених једначина са непознатима φ_0, $\varphi_1, \ldots \varphi_n$. Како се овај последњи систем може представити у облику:

$$3) \qquad \varphi_\beta = \sum_{\alpha=0}^{k} A_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha, \quad (\beta = 0,\ 1,\ 2, \ldots n),$$

где су $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_k$ неодређене количине, којих избацај даје првобитни систем од $n - k$ сматраних једначина, то треба тражити само број N пресека система 2) са системом 3). Ове пресеке добићемо очевидно, ако избацимо непознате φ_0, $\varphi_1, \ldots \varphi_n$, што даје:

$$4) \quad F_\nu \left[\sum_{\alpha=0}^{k} A_{\alpha,0} \lambda_\alpha, \sum_{\alpha=0}^{k} A_{\alpha,1} \lambda_\alpha, \ldots \sum_{\alpha=0}^{k} A_{\alpha\, n} \lambda_\alpha \right] = 0, \ (\nu = 1,\ 2, \ldots)$$

и ако затим решимо систем 4) по $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_k$. Ако је $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots \lambda'_k$ једно разрешење система 4), количине

$$\varphi'_\beta = \sum_{\alpha=0}^{k} A_{\alpha\beta} \lambda'_\alpha, \quad (\beta = 0,\ 1,\ 2, \ldots n)$$

даће једно разрешење система 2) и система од $(n - k)$ помоћних линеарних једначина. Одатле се види, да је тражени број N једнак броју разрешења једначина 4), где разуме се равновредни системи параметара λ имају се сматрати као једно разрешење.

Али у једначинама 4) исказано је, да једначина:

$$5) \qquad \sum_{\alpha=0}^{k} \lambda_\alpha f_\alpha(x) = 0, \quad \text{где је} \quad f_\alpha(x) = \sum_{\beta=0}^{n} A_{\alpha\beta}\, x^{n-\beta}$$

има један систем од ρ вишестручних корена са казаљкама вишестручности $1+r_1$, $1+r_2$, . . $1+r_\rho$, где је $r_1+r_2+\ldots+r_\rho=k$. Па како је једначином 5) одређена једна инволуција $J(n, k)$, то је задатак сведен на то, да се нађу групе једне инволуције $J(n, k)$, у којих има ρ вишестручних елемената типа карактерисаног бројевима $1+r_1$, $1+r_2$, . . . $1+r_\rho$, и број тих значајних група јесте баш број N, који се тражи. А тај број ми смо дали у једној краткој белешци штампаној у часопису Краљевско-Ческог Ученог Друштва[1]. Наш образац доказао је на други начин врсни белгијски математичар г. François Deruyts[2]. По том је обрасцу:

$$6) \quad N=\rho!\binom{n-k}{\rho}(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_\rho)=$$

$$=(n-k)(n-k+1)\ldots(n-k-\rho+1)(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_\rho).$$

Приметимо још, да су два особена случаја овог обрасца пронађена пре нас, и то случај $\rho=1$, $r_1=k$ г. Le Paige-ом и случај $\rho=k$, $r_1=r_2=\ldots=r_\rho=1$ г. Emil-ом Weyr-ом[3].

2. Сад ћемо учинити још неколико примедаба о *неутралним системима.*

Уопште сваки систем са k елемената одређује само једну групу инволуције $J(n, k)$. Међутим има

[1] Bestimmung der Anzahl merkwürdigen Gruppen ein·r allgemeinen Involution N-er Ordnung und, K-er Klasse.

[2] Sur la représentation des involutions unicursal·s (Bulletin de l' Academie royale be Belgique 3-ème série, t. XIV, n° 8, 1887).

[3] Über Involutionen n-er Ordnung u. K-er Stufe. Sitsungs berichte der kais. Academie in Wien, 17. April 1879). Beiträge zür Curren lehre Wien 1880.

изузетних система са k елемената, који припадају бесконачно многим групама инволуције $J(n, k)$. Такве системе зове Emil Weyr неутралним групама. У овоме што иде, ја ћу да их објасним и да им у исти мах смисао проширим. Нека је:

$$\sum_{\alpha=0}^{k} \lambda_\alpha f_\alpha(x) = 0$$

једначина инволуције $J(n, k)$, $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ нека су ма какве количине и нека је $\nu \geqq k$. Уопште једначина:

$$\sum_{\alpha=0}^{k} \lambda_\alpha f_\alpha(a_\beta) = 0, \ (\beta = 1, 2, \ldots \nu) \tag{1}$$

неће моћи заједно опстати за $\nu > k$, а ако је $\nu = k$, оне потпуно одређују параметре $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_k$ сем једног заједничког им чиниоца. У првом случају ($\nu > k$) нема ниједне групе, у којој би се налазили елементи $a_1, a_2, \ldots a_\nu$; а у другом случају ови елементи припадају само једној групи. Али се количине $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ могу одредити тако, да међу једначинама 1) има само $\varrho\ (< k)$ једначина, које су међу собом независне. И доиста овде треба само ставити једнаке нули све детерминанте $(\varrho + 1)$-ог реда и којих су врсте и стубови састојци правоугаоног система:

$$\begin{matrix} f_0(a_1), & f_1(a_1), & f_2(a_1), & \ldots & f_k(a_1) \\ f_0(a_2), & f_1(a_2), & f_2(a_2), & \ldots & f_k(a_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_0(a_\nu), & f_1(a_\nu), & f_2(a_\nu), & \ldots & f_k(a_\nu). \end{matrix} \tag{2}$$

Тако добијамо извесан број једначина са непознатима $a_1, a_2, \ldots a_\nu$, и лако је увидети, да се све те једначине своде на $(\nu - \varrho)(k - \varrho + 1)$ једначина, које су уопште међу собом независне. Да би те једначине могле заједно опстати, треба само предпоставити, да је:

$$3)\qquad \nu \geqq (\nu - \varrho)\ (k - \varrho + 1).$$

Ако представимо, да је $\nu < k$, једначине 1) никад се некосе и елементи $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ припадаће увек бесконачно многим групама инволуције $J(n, k)$. Али се може десити, да све једначине 1) нису међу собом независне, да дакле извесан број $\nu - \varrho$ истих следује из ϱ осталих. Све што смо рекли о тим једначинама у два мало пре проматрана случаја, стоји и сада, и у овом дакле случају треба предпоставити, да је услов 3) испуњен. Међутим има изузетних случајева, где $(\nu - \varrho)\ (k - \varrho + 1)$ горе поменутих једначина између количина $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ нису међу собом независне, тако да услов 3) није потребан. Ми напуштамо овај случај, а на крају ћемо додати један пример за-њ.

Како се узима, да је увек $\varrho < k$, то ставимо у неједначини 3) $k - \varrho = \delta$, па ће се неједначина претворити у

$$3^*)\qquad \nu \leqq \frac{(k - \delta)\ (\delta + 1)}{\delta},\ \varrho = k - \delta,\ \nu > \varrho.$$

Такав један систем елемената, који је на показани начин карактерисан бројевима ϱ, ν, зовем ја неутралним системом, типа (ϱ, ν), инволуције $J(n, k)$. Број ϱ мора бити мањи од k, број ν несме бити већи од n, и мора испунити услове 3*).

Да број неутралних система типа (ϱ, ν) буде коначан, треба само да је у општем случају:

$$\varrho < \nu = \frac{(k-\delta)(\delta+1)}{\delta}, \quad \delta = k - \varrho,$$

одакле следује, да $\delta (< k)$ мора бити делилац броја k. Дакле стоји теорема:

Општа инволуција $J(n, k)$ има онолико типова неутралних система, који се јављају у коначном броју, колико правих делилаца (мањих од k) има број k. Ако означимо са δ таквог једног делиоца, одговарајући је тип

$$(\varrho, \nu) \quad \text{или} \quad \varrho = k - \delta, \ \nu = \frac{(k-\delta)\ (\delta+1)}{\delta}$$

Неутрални системи свију осталих типова јављају се у бесконачно великом броју.

Примери. Узмимо једну равну и рационалну криву линију C_n n-га реда и посматрајмо системе од n тачака захваћених на C_n произвољном правом. Скуп тих група алгебарски се тумачи једном инволуцијом $J(n, 2)$ и обратно свака инволуција $J(n, 2)$ геометријски се тумачи скупом *правих група* (groupes droits) једне линије C_n. У овом случају има само неутралних система типа $(1, 2)$ и број им је ограничен. Елементи сваке од ових група одговарају двема тачкама, које су бесконачно блиске једној од двојних тачака линије C_n. Са свим опширно о овоме може се наћи у радовима г. г. Le Paige-a и Emil-a Weyr-a.

Још ћу узети случај $k = 3$. Тада једини неутрални системи, који се у коначном броју јављају, јесу типа $(2, 4)$ и сваки се од њих састоји из 4 елемента. Свака $J(n, k)$ може бити представљена скупом *равних* група (groupes plans) на једној рационалној витоперој (gauche) линији C_n n-га реда. Нека су сада a_1, a_2, a_3, a_4 четири тачке линије C_n, које одговарају једном неутралном систему типа (2, 4). Пошто свака раван, која пролази кроз две од тих тачака, мора пролазити и кроз остале две, то је онда јасно, да те 4 тачке морају лежати на једној правој, одакле се види, да неутрални системи одговарају квадрисекантама линије C_8 у простору.

Најзад да бих навео и један од многих изузетних случајева, где се општа теорија неда применити, проматрајмо инволуцију $J(2n, 9)$ састављену из група, које су начињене на једној C_8 у простору свима могућим квадричним површинама. Ако су a_1, a_2, a_3, a_4 тачке на C_8, које припадају једној квадрисеканти, онда свака квадрична површина, која пролази кроз 3 од тих тачака, пролази и кроз четврту, одакле следује, да ова 4 елемента чине један неутрални систем типа (3, 4). Но како је у овом случају $(\nu - \rho)(k - \rho + 1)$ једнак броју 7, то услов 3) није испуњен. Сматрана инволуција $J(2n, 9)$ спада дакле у ред оних, које смо искључили и које се одликују нарочитим својствима.