Matyáš Lerch

Sur une fonction discontinue

Batt. G. 26 (1888), 375–376

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501644

SUR UNE FONCTION DISCONTINUE

PAR

M. LERCH

à Prague--Vinohrady.

Nous allons développer un exemple de série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

dont les termes sont des fonctions continues d'une variable réelle x et dont la somme est une fonction partout discontinue de cette variable. La série que nous allons étudier se compose des termes de la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \sin^2(x - a_\nu) \cos^n(x - a_\nu) \,, \tag{1}$$

les quantités c_ν étant des termes d'une série absolument convergente et les a_ν étant des quantités réelles représentées par des points dont l'ensemble est condensé dans toute la partie de l'intervalle $(0 \ldots 2\pi)$. Je suppose ensuite que les a_ν sont différents entre eux et qu'aucune des différences $a_p - a_q$ n'équivaut à π.

Cela étant on voit facilement que chacune des fonctions $\varphi_n(x)$, $(n=0,1,2,\ldots)$ est finie et continue dans l'intervalle $(0 \ldots 2\pi)$ et que la somme $\Sigma \varphi_n(x)$ est convergente et peut se mettre sous la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_\nu) \cos^n(x - a_\nu). \tag{2}$$

Soit maintenant x un nombre appartenant à l'intervalle $(0 \ldots 2\pi)$ et tel qu'aucune des différences $x - a_\nu$, $x - a_\nu \pm \pi$ ne s'évanouit. Dans ce cas toutes les quantités $\cos(x - a_\nu)$ seront moindres que l'unité et nous aurons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_\nu) \cos^n(x - a_\nu) = 2 \cos^2 \frac{x - a_\nu}{2} \,,$$

et par conséquent

$$f(x) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos^2 \frac{x - a_\nu}{2}. \tag{3}$$

Soit en second lieu $x = a_p$. Comme aucune des différences $a_\nu - a_p$, $a_\nu - a_p \pm \pi$ ne devra s'évanouir il est clair que toutes les quantités $\cos(x - a_\nu)$ sauf $\cos(x - a_p)$ seront moindres que l'unité (en valeur absolue), de sorte qu'il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_p) \cos^n(x - a_p) = 0\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x - a_\nu) \cos^n(x - a_\nu) = 2\cos^2 \frac{x - a_\nu}{2}, \quad \nu \gtrless p.$$

Il s'ensuit alors

$$f(a_p) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos^2 \frac{a_p - a_\nu}{2} - 2c_p \tag{4}$$

et les formules (3) et (4) font voir qu'en prenant les quantités x, a_p assez voisines la différence $f(x) - f(a_p)$ ne diffère de $2c_p$ que d'une quantité aussi petite que l'on veut, de sorte que la fonction $f(x)$ définie par la série $\Sigma\, \varphi_n(x)$ est discontinue aux points de la forme $x = a_p$ qui se présentent dans chaque partie de l'intervalle $(0 \ldots 2\pi)$; en d'autres mots cette fonction est partout discontinue.

Il est intéressant d'observer que la convergence de la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

ne peut être uniforme dans aucune partie du domaine de la variable x sans quoi la fonction serait continue.

Černý Kostelec en Bohême, le 9 Septembre 1888.