Matyáš Lerch

Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. [II.]

Monatsh. Math. Phys. (1908), 119–147

Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale.[1])

Von **M. Lerch** in Brünn.

II.

Wie ich der Dissertation Lindhagens (Upsala, 1887) entnehme, steht nach Björling (Elementerna af Algebraiska Analysen) folgender Kettenbruch

$$\cfrac{1}{s - \cfrac{\omega s}{\omega + s + 1 - \cfrac{\omega(s+1)}{\omega + s + 2 - \cfrac{\omega(s+2)}{\omega + s + 3 - \cdot}}}}$$

— vorläufig bloß unter der Annahme $\omega = 1$ — mit der P-Funktion im Zusammenhange; wir wollen dies auch für beliebige ω nachweisen und die Näherungselemente direkt darstellen.

Die auf einander folgenden Näherungsbrüche unseres Kettenbruches sind

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{s}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1(\omega + s + 1) - P_0\,\omega s}{Q_1(\omega + s + 1) - Q_0\,\omega s},$$

und das Bildungsgesetz der Ausdrücke P_n, Q_n besteht in den Formeln

$$(1) \qquad \begin{cases} P_{n+1} = P_n(\omega + s + n) - P_{n-1}\,\omega(s + n - 1), \\ Q_{n+1} = Q_n(\omega + s + n) - Q_{n-1}\,\omega(s + n - 1). \end{cases}$$

Aus demselben folgt für die Näherungsnenner

$$Q_0 = 1, \; Q_1 = s, \; Q_2 = s(s+1), \; Q_3 = s(s+1)(s+2);$$

die allgemeine Gleichung

$$(2) \qquad Q_n = s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)$$

ist vermöge des Bildungsgesetzes leicht zu verifizieren.

Nun ist nach allgemeinen Sätzen

$$\begin{vmatrix} P_{n+1} & P_n \\ Q_{n+1} & Q_n \end{vmatrix} = s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)\,\omega^n$$

---

[1]) Vgl. XVII. Jahrgang, S. 3—18.

und hieraus folgt

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\omega^n}{s(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}.$$

Wird hier über $n = 0, 1, 2, \ldots m-1$ summiert, so ergibt sich folgende Darstellung des m-ten Näherungsbruches

$$(3) \qquad \frac{P_m}{Q_m} = \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s(s+1)} + \frac{\omega^2}{s(s+1)(s+2)} + \quad + \\ + \frac{\omega^{m-1}}{s(s+1) \quad (s+m-1)}.$$

Der Übergang zur Grenze für unendlich wachsendes m ergibt daher die Gleichung

$$(4) \quad \omega^{-s} e^{\omega} P(s, \omega) = \cfrac{1}{s - \cfrac{\omega s}{\omega + s + 1 - \cfrac{\omega(s+1)}{\omega + s + 2 - \cfrac{\omega(s+2)}{\omega + s + 3 -}}}}.$$

wobei übrigens an Stelle der ersten Seite besser zu schreiben wäre

$$(4^a) \qquad e^{\omega} \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\omega^{\nu}}{\nu!(s+\nu)}.$$

Diese Formel ist dem Vorhergehenden nach mit der Eulerschen Reihe

$$\frac{1}{s} + \frac{\omega}{s(s+1)} + \frac{\omega^2}{s(s+1)(s+2)} +$$

identisch, indem die Näherungssummen der letzteren mit den Näherungsbrüchen von (4) zusammenfallen. Immerhin darf die Kettenbruchform der Entwicklung gewisses Interesse beanspruchen. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, daß die Kettenbruchdarstellung der Funktion

$$(5) \qquad \varphi(s) = \omega + \frac{\omega^s}{e^{\omega} P(s, \omega)}$$

nämlich

$$(5^*) \; \varphi(s) = \omega + s - \cfrac{\omega s}{\omega + s + 1 - \cfrac{\omega(s+1)}{\omega + s + 2 - \cfrac{\omega(s+2)}{\omega + s + 3 -}}}$$

regelmäßiger gebaut ist als (4), und daß die Nullstellen von $P(s, \omega)$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(s+1) = 0$$

sind.

Schließlich werde die Identität

$$(6)\qquad P_{n+1} = (s+n)\,P_n + \omega^n$$

erwähnt, welche aus

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = s\,(s+1)\ldots(s+n-1)\,\omega^n$$

verbunden mit (2) unmittelbar folgt, und übrigens nur eine Wiedergabe von (3) ist, nämlich

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{\omega^n}{Q_{n+1}}$$

Setzt man der Kürze wegen für einen Augenblick

$$z_m = \omega^s\,\frac{P_m}{Q_m},$$

so folgt nach (3)

$$z_m = \frac{\omega^s}{s} + \frac{\omega^{s+1}}{s\,(s+1)} + \frac{\omega^{s+2}}{s\,(s+1)(s+2)} + \cdots + \\ + \frac{\omega^{s+m-1}}{s\,(s+1)\quad(s+m-1)}.$$

Eine Differentiation nach ω ergibt

$$\frac{d\,z_m}{d\omega} = \omega^{s-1} + z_{m-1},$$

oder indem man wieder die P und Q einführt, durch ω^{s-1} dividiert und von (2) Gebrauch macht,

$$\omega\,\frac{d\,P_m}{d\omega} + s\,P_m = Q_m + \omega\,(s+m-1)\,P_{m-1};$$

nun ist nach (6)

$$(s+m-1)\,P_{m-1} = P_m - \omega^{m-1},$$

und wir erhalten

$$(7)\qquad \omega\,\frac{d\,P_m}{d\omega} + (s-\omega)\,P_m = Q_m - \omega^m.$$

Das allgemeine Integral dieser linearen Differentialgleichung lautet

$$P_m = \omega^{-s}\,e^{\omega}\left[C + \int (Q_m - \omega^m)\,\omega^{s-1}\,e^{-\omega}\,d\omega\right];$$

nimmt man für das Integral die Potenzentwicklung, welche mit

$$\frac{Q_m\,\omega^s}{s}$$

beginnt (also bei Real. $s > 0$ die untere Integrationsgrenze Null), so muß $C = 0$ genommen werden, damit P_m eine rationale Funktion werde. Es ist daher

$$\omega^s\,e^{-\omega}\,\frac{P_m}{Q_m} = \int \omega^{s-1}\,e^{-\omega}\,d\omega - \frac{1}{Q_m}\int_0 \omega^{s+m-1}\,e^{-\omega}\,d\omega.$$

Die rechte Seite ist $P(s, \omega) - \frac{P(s+m, \omega)}{Q_m}$, und damit haben wir

$$(8) \qquad P(s, \omega) - e^{-\omega}\omega^s \frac{P_m}{Q_m} = \frac{P(s+m, \omega)}{Q_m},$$

was übrigens aus (3) direkt folgt.

Ferner läßt sich obige Integraldarstellung von P_m, sobald wir s reell und positiv annehmen, wie folgt schreiben

$$\int_0^\omega (Q_m - x^m)\, x^{s-1} e^{-x}\, dx = \omega^s e^{-\omega} P_m;$$

drückt man die linke Seite vermöge des ersten Mittelwertsatzes durch

$$(Q_m - \omega_1^m) \int_0^\omega x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

aus, so kommt

$$(8^*) \qquad P(s, \omega) = \omega^s e^{-\omega} \frac{P_m}{Q_m - \omega_1^m}, \quad \begin{pmatrix} 0 < \omega_1 < \omega \\ s > 0 \end{pmatrix}.$$

(Prinzip der schnellsten Konvergenz.) Bei der Untersuchung der Funktionen des elliptischen Zylinders, die ich im letzten Winter anstellte, tauchte mir eine Beweismethode auf, die sich auf mehrere Transzendenten, namentlich auf Besselsche Funktionen und die Gaußsche hypergeometrische Reihe anwenden läßt. Hier will ich das der Methode zu Grunde liegende Prinzip auf den Beweis einer Kettenbruchformel Schlömilchs[2]) benützen.

Wir gehen zu dem Zwecke von der Differentialgleichung

$$(9) \qquad x\frac{dz}{dx} = (x - s + 1)\, z + x$$

aus; zu ihrer Integration wird wie üblich $z = uv$ gesetzt und v durch

$$x\frac{dv}{dx} = (x - s + 1)\, v$$

bestimmt, so daß

$$v = e^x x^{1-s}$$

kommt und demnach

$$u = C + \int_0 e^{-x} x^{s-1}\, dx = C + P(s, x),$$

---

[2]) Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 16, p. 261 (1871). Vgl. auch Niels Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig, 1906, p. 218. In der zuletzt genannten Schrift wird auf S. 219 unter (8) eine wie es scheint neue Formel mitgeteilt, die aber nicht richtig sein kann, da die rechte Seite derselben den Wert $-P_a(x)$ und nicht $Q_a(x)$ besitzt.

wobei wir der Kürze wegen annehmen, daß der reelle Teil von s positiv ist; also lautet das allgemeine Integral von (9)

$$z = e^x x^{1-s}\big(C + P(s,\ x)\big), \tag{10}$$

unter C die Integrationskonstante verstanden.

Dies vorausgeschickt, werde $x + \xi$ anstatt x gesetzt und z als Funktion von ξ betrachtet, um deren Entwicklung nach Potenzen von ξ es sich handeln soll. Wir setzen

$$z = f(x + \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \xi^\nu$$

und haben zur Bestimmung der Koeffizienten die Differentialgleichung

$$(x + \xi)\frac{dz}{d\xi} = (x + 1 - s + \xi)\, z + x + \xi; \tag{11}$$

wird hier die unendliche Reihe eingesetzt, so kommt

$$x\sum_0^\infty (\nu + 1) A_{\nu+1} \xi^\nu + \sum_{\nu-0}^\infty \nu A_\nu \xi^\nu =$$

$$= (x + 1 - s)\sum_0^\infty A_\nu \xi^\nu + \sum_1^\infty A_{\nu-1} \xi^\nu + x + \xi,$$

und hieraus erschließt man die Rekursionsformeln:

$$\left\{\begin{aligned} A_1 x &= (x + 1 - s) A_0 + x \\ 2A_2 x &= (x - s) A_1 + A_0 + 1, \\ (\nu + 1) A_{\nu+1} x &= (x + 1 - s - \nu) A_\nu + A_{\nu-1} \quad (\nu \geqq 2). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Setzt man nun allgemein

$$B_\nu = (-1)^\nu \nu!\, x^\nu A_\nu, \tag{13}$$

also im besonderen $B_0 = A_0$, so gehen die Gleichungen (12) in die folgenden über:

$$\left\{\begin{aligned} B_{\nu+1} &= (s + \nu - 1 - x) B_\nu + \nu x B_{\nu-1}, \quad (\nu \geqq 2), \\ B_1 &= (s - 1 - x) B_0 - x, \\ B_2 &= (s - x) B_1 + B_0 x + x. \end{aligned}\right. \tag{13*}$$

Sie liefern nacheinander die Werte von B_1, B_2, . aus-gedrückt als ganze lineare Funktionen der unbestimmten B_0, allgemein [3])

$$B_\nu = P_\nu + Q_\nu B_0, \tag{14}$$

---

[3]) Hier haben die Buchstaben P_ν und Q_ν offenbar eine andere Bedeutung als im vorhergehenden Abschnitt.

und zwar ist

$$P_1 = -x,\ Q_1 = s-1-x,$$
$$P_2 = (s-x)P_1 + x,\ Q_2 = (s-x)Q_1 + x,$$
$$P_3 = (s+1-x)P_2 + 2xP_1,\ Q_3 = (s+1-x)Q_2 + 2xQ_1,$$

allgemein

$$(14^*)\qquad \begin{cases} P_{\nu+1} = (s+\nu-1-x)P_\nu + \nu x P_{\nu-1}, \\ Q_{\nu+1} = (s+\nu-1-x)Q_\nu + \nu x Q_{\nu-1}. \end{cases}$$

Diesen Rekursionsformeln entnehme ich die Tatsache, daß die Quotienten

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu}$$

Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$(15)\quad \mathfrak{K} = 1 + \cfrac{1-s}{s-1-x+\cfrac{x}{s-x+\cfrac{2x}{s+1-x+\cfrac{3x}{s+2-x+\cfrac{4x}{s+3-x+\cdots}}}}}$$

sind. Aus dem Bau desselben ersieht man, daß $\mathfrak{K}$ als Funktion von s und x im Endlichen keine andere als außerwesentliche Singularitäten haben kann, und zwar wird immer mindestens einer der Kettenbrüche

$$\mathfrak{K} \text{ und } \frac{1-s}{\mathfrak{K}-1}$$

konvergieren. Wir schließen jedoch die — notwendig isolierten — Divergenzstellen von $\mathfrak{K}$ aus; alsdann ist $\mathfrak{K}$ eine wohlbestimmte endliche Größe und

$$\mathfrak{K} = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{Q_\nu}.$$

Nach (13) und (14) haben die gesuchten Koeffizienten A_ν die Werte

$$A_\nu = (-1)^\nu \frac{P_\nu + Q_\nu B_0}{\nu!\, x^\nu},$$

und die gesuchte Reihe wird lauten

$$(16)\qquad f(x+\xi) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{P_\nu + Q_\nu B_0}{\nu!\, x^\nu}\, \xi^\nu,$$

als Taylorsche Entwicklung der Funktion

$$f(x) = e^x x^{1-s}\big(C + P(s,\ x)\big). \tag{10*}$$

Die in der Entwicklung vorkommende Größe B_0 hat den Wert

$$B_0 = f(x)$$

und wird so lange unbestimmt bleiben müssen, solange der Wert von C nicht festgestellt bleibt. Wir haben s und x als fest gewählt, wollen aber B_0 und damit für C einen Wert setzen, der für unsere Entwicklung (16) ein möglichst ausgedehntes Gebiet ergibt. Der Koeffizient von ξ^ν in (16) lautet nun

$$(-1)^\nu \frac{Q_\nu}{\nu!\, x^\nu}\left(\frac{P_\nu}{Q_\nu} + B_0\right)$$

und wird sich asymptotisch wie

$$(-1)^\nu \frac{Q_\nu}{\nu!\, x^\nu}(\mathfrak{K} + B_0)$$

verhalten, außer wenn $\mathfrak{K} + B_0 = 0$ ist. Solange dieser Ausnahmefall nicht eintritt, bleibt der Konvergenzradius der Potenzreihe (16) immer der gleiche. Derselbe muß sich auch aus der Beschaffenheit der Funktion (10*) ergeben; nun ist dieselbe

$$f(x) = C e^x x^{1-s} + e^x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu!\,(\nu+s)}$$

und es wird $f(x+\xi)$ so lange den Punkt $\xi = -x$ zur singulären Stelle haben (ausgenommen den Fall, daß s eine ganze Zahl ist), solange C von Null verschieden bleibt; also wird für jedes von Null verschiedene C der Konvergenzradius von (16) den Wert $|x|$ haben, während für $C = 0$ $f(x)$ in eine ganze Transzendente übergeht, in welchem Falle (16) überall konvergiert. In diesem Falle muß also der obige Ausnahmefall eintreten, worin

$$B_0 = -\mathfrak{K}$$

ist. Man hat also im Falle $C = 0$ die Gleichung

$$f(x) = -\mathfrak{K},$$

oder, da hier

$$f(x) = x^{1-s} e^x P(s,\ x)$$

ist,

$$x^{1-s} e^x P(s, x) = \tag{17}$$

$$= -1 + \cfrac{s-1}{s-1-x+\cfrac{x}{s-x+\cfrac{2x}{s+1-x+\cfrac{3x}{s+2-x+\cfrac{4x}{s+3-x+\cdots}}}}}$$

In diesem Beweisverfahren, aus einer (linearen stetigen) Mannigfaltigkeit von Funktionen eine bestimmte Funktion durch die Forderung auszusondern, daß ihre Entwicklung in einem ausgedehnteren Gebiete konvergiere als diejenigen aller übrigen Funktionen der Mannigfaltigkeit, besteht das Wesen des Prinzips der schnellsten Konvergenz.

Außer der Kettenbruchentwicklung (17) gewinnen wir aber gleichzeitig die Potenzentwicklung (16) in der Form

$$(16^*) \qquad f(x+\xi) = -\mathfrak{R} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{P_\nu - \mathfrak{R}\, Q_\nu}{\nu!\, x^\nu} \xi^\nu$$

wobei

$$(16^0) \qquad f(x) = x^{1-s} e^x P(s, x),$$

und dieser Vorteil ist nicht zu unterschätzen, da man die Größen P_ν, Q_ν, $\mathfrak{R}$ zugleich rechnet und also man mit einem Schlage nicht nur den Wert $f(x)$, sondern auch die Taylorsche Reihe für $f(x+\xi)$ erhält.[4])

Man kann die Koeffizienten der Reihe (16*) in noch anderer Form gewinnen, wenn man mit den A_ν anstatt B_ν operiert. Wir setzen

$$A'_\nu = A_\nu \text{ für } \nu > 0, \; A'_0 = A_0 + 1;$$

alsdann ergibt sich aus den Gleichungen (12) die Beziehung

$$(12^a) \; (\nu+1) A'_{\nu+1} x = (x+1-s-\nu) A'_\nu + A'_{\nu-1} \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wozu noch die einzige Gleichung

$$(12^b) \qquad A'_1 x = A'_0 (x+1-s) + s - 1$$

hinzutritt.

Setzt man nun

$$\frac{A'_{\nu+1}}{A'_\nu} = q_\nu,$$

so folgt aus (12^a)

$$a) \quad q_{\nu-1} = \frac{1}{s+\nu-1-x+(\nu+1)\, x\, q_\nu}, \; (\nu = 1, 2, 3, \quad .)$$

und aus (12^b)

$$A'_0 = A_0 + 1 = \frac{s-1}{s-1-x+x\, q_0};$$

wendet man hier die Gleichung (a) wiederholt an, so kommt

---

[4]) In diesem Falle fällt der Nutzen des Prinzips nicht so ins Auge wie in anderen Fällen, wo es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt.

$$(b)\quad A_0 = -1 + \cfrac{s-1}{s-1-x+\cfrac{x}{s-x+\cfrac{2x}{s+1-x+\cfrac{3x}{s+2-x+\cdot}}}}$$

indem vorläufig der Kettenbruch als etwa mit dem Glied

$$\frac{nx}{s+n-1-x+(n+1)\,x\,q_n}$$

geschlossen gedacht wird.

Hier läßt sich zwar vermuten, daß man die rechte Seite von (b) einfach als einen unendlichen Kettenbruch gelten lassen kann, evident ist dies aber nicht; ein strenger Beweis liegt vielmehr in der obigen Herleitung der Formel (17). Damit ist aber die Gleichung (b) außer Frage gestellt und es gilt zu gleicher Zeit die aus (a) und (b) folgende Beziehung

$$q_{\nu-1} = \cfrac{1}{s+\nu-1-x+\cfrac{(\nu+1)x}{s+\nu-x+\cfrac{(\nu+2)x}{s+\nu+1-x+\cfrac{(\nu+3)x}{s+\nu+2-x+\cdot}}}}$$

Die unendlichen Kettenbrüche ergeben nun

$$A'_\nu = A'_0\, q_0\, q_1\, q_2 \cdots q_{\nu-1},$$

oder

$$A_\nu = (A_0+1)\, q_0\, q_1\, q_2 \cdots q_{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

nachdem A_0 aus (b) bestimmt worden ist.

Damit werden die Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung

$$f(x+\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \xi^\nu$$

in einer Form gewonnen, die sich zur logarithmischen Rechnung besonders eignet.

Nun ist wegen der Funktionalgleichung

$$P(s+1, \omega) + e^{-\omega}\omega^s = s\,P(s, \omega)$$

die Größe

$$A_0 + 1 = 1 + x^{1-s} e^x P(s, x)$$

gleich

$$(c)\qquad (s-1)\,P(s-1, x)\,x^{1-s} e^x = A_0 + 1.$$

Wird dies in (b) eingesetzt und im Resultat $s+1$ anstatt s geschrieben, so kommt der Kettenbruch Schloemilchs

$$(18)\quad x^{-s} e^x P(s,x) = \cfrac{1}{s-x+\cfrac{x}{s+1-x+\cfrac{2x}{s+2-x+\cfrac{3x}{s+3-x+\cdots}}}}$$

zum Vorschein.

Ferner ist

$$f(x+\xi)+1 = (A_0+1)\left[1+q_0\xi+q_0q_1\xi^2+q_0q_1q_2\xi^3+\cdots\right]$$

gleich der Größe

$$(s-1)(x+\xi)^{1-s}e^{x+\xi}P(s-1,x+\xi).$$

Wird dies in die letzte Gleichung eingesetzt, wird ferner von (c) Gebrauch gemacht und $s+1$ an Stelle von s gesetzt, so kommt die Entwicklung

$$(19)\quad \frac{(x+\xi)^{-s}e^{\xi}P(s,x+\xi)}{x^{-s}P(s,x)} = 1+q_0\xi+q_0q_1\xi^2+q_0q_1q_2\xi^3+\cdots,$$

wobei wegen veränderter Bezeichnung die q_ν nunmehr aus

$$(20)\quad q_{\nu-1} = \cfrac{1}{s+\nu-x+\cfrac{(\nu+1)x}{s+\nu+1-x+\cfrac{(\nu+2)x}{s+\nu+2-x+\cdots}}}$$

zu entnehmen sind. Bei dieser Bezeichnung ist also der Kettenbruch (18) mit q_{-1} identisch.

Nun bleibt die linke Seite von (19) an den Stellen $s=0$, -1, -2, synektisch; speziell ist für $s=0$ die linke Seite gleich e^{ξ} und es muß der Kettenbruch (20) den Wert

$$\frac{1}{\nu} = \cfrac{1}{\nu-x+\cfrac{(\nu+1)x}{\nu+1-x+\cfrac{(\nu+2)x}{\nu+2-x+\cdots}}}$$

haben. Ähnlich ist für $s=-1$ die linke Seite von (19)

$$\left(1+\frac{\xi}{x}\right)e^{\xi} = 1+\sum_{0}^{\infty}\frac{\nu+1+x}{(\nu+1)!\,x}\,\xi^{\nu+1}$$

und demnach

$$q_\nu = \frac{\nu + x + 1}{(\nu+1)(\nu+x)} = \cfrac{1}{\nu - x + \cfrac{(\nu+2)\,x}{\nu + 1 - x + \cfrac{(\nu+3)\,x}{\nu + 2 - x + \cdots}}}$$

Allgemein hat man, indem man in (19) $s = -n$ setzt,

$$\left(1 + \frac{\xi}{x}\right)^n e^{\xi} = 1 + q_0\,\xi + q_0\,q_1\,\xi^2 + q_0\,q_1\,q_2\,\xi^3 +$$

wobei die q_ν nach (20) für $s = -n$ gebildet werden.

Wir gehen nun zur expliziten Darstellung der Näherungsnenner des Kettenbruches (18) über, in welchem wir ω an Stelle von x schreiben:

$$(18^*)\quad \omega^{-s} e^{\omega} P(s, \omega) = \cfrac{1}{s - \omega + \cfrac{\omega}{s + 1 - \omega + \cfrac{2\,\omega}{s + 2 - \omega + \cfrac{3\,\omega}{s + 3 - \omega + \cdots}}}}$$

Es ist

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{s - \omega}$$

und die folgenden P, Q werden mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$(d)\qquad \begin{aligned} P_{\nu+1} &= P_\nu\,(s + \nu - \omega) + P_{\nu-1}\,\nu\,\omega, \\ Q_{\nu+1} &= Q_\nu\,(s + \nu - \omega) + Q_{\nu-1}\,\nu\,\omega \end{aligned}$$

bestimmt, welche aus (14*) durch Substitution von $s+1$ anstatt s hervorgehen. Wir bilden nun die erzeugende Funktion der Q_ν, nämlich die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{Q_\nu}{\nu!}\,z^\nu,$$

deren Konvergenz im Bereiche $|z| < 1$ leicht festzustellen ist. Die Gleichung (d) für die Q_ν ergibt die Identität[1])

$$\sum_0^\infty \frac{Q_{\nu+1}}{\nu!}\,z^\nu = \sum_0^\infty \frac{(s-\omega)\,Q_\nu}{\nu!}\,z^\nu + \sum_0^\infty \frac{\nu\,Q_\nu}{\nu!}\,z^\nu + \sum_1^\infty \frac{\omega\,\nu\,Q_{\nu-1}}{\nu!}\,z^\nu;$$

---

[1]) Die Gleichung (d) findet nämlich statt auch für $\nu = 0$, wenn man darin $Q_{-1} = 0$ setzt.

in derselben ist nun die linke Seite gleich $f'(z)$, während die einzelnen Reihen rechts die Werte

$$(s-\omega)f(z),\quad zf'(z)\quad \text{und}\quad \omega z f(z)$$

haben; dies gibt die Differentialgleichung

$$(z-1)f'(z)+(\omega z+s-\omega)f(z)=0,$$

deren Integral durch die Anfangsbedingung $f(0)=1$ vollkommen bestimmt ist. Es kommt

$$f(z)=(1-z)^{-s}e^{-\omega z}$$

und daher die gesuchte Gleichung

$$(21)\qquad (1-z)^{-s}e^{-\omega z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Q_\nu}{\nu!}z^\nu,$$

mit der Bestimmung

$$(21^0)\quad Q_0=1,\ Q_1=s-\omega;\ Q_{\nu+1}=Q_\nu(s+\nu-\omega)+Q_{\nu-1}\nu\omega.$$

Durch Multiplikation der Reihen

$$(1-z)^{-s}=\sum_0^\infty(-1)^\nu\binom{-s}{\nu}z^\nu,\quad e^{-\omega z}=\sum_0^\infty(-1)^\mu\frac{\omega^\mu z^\mu}{\mu!}$$

erhält man für den Koeffizienten von z^n in (21) den Ausdruck

$$\frac{Q_n}{n!}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{-s}{\nu}(-1)^{n-\nu}\frac{\omega^{n-\nu}}{(n-\nu)!}$$

oder

$$(22)\quad Q_n=(-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\omega^{n-\nu}s(s+1)(s+2)\cdots(s+\nu-1),$$

was man auch

$$(22^0)\qquad Q_n=(-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\omega^{n-\nu}\frac{\Gamma(s+\nu)}{\Gamma(s)}$$

schreiben kann, und dies ist im Falle, daß der reelle Teil von s positiv sei, dem Integral

$$(22^1)\qquad Q_n=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-x}(x-\omega)^n x^{s-1}\,dx$$

gleich.

Wenn man die Bezeichnung

$$u_\nu = \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+\nu-1)}{\omega^\nu},$$

also $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{s}{\omega}$, einführt, so wird nach (22) sich Q_n durch Differenzen ausdrücken lassen, nämlich

$$(22^2) \qquad Q_n = \omega^n \Delta^n u_0,$$

mit anderen Worten, die Größe

$$\frac{Q_n}{\omega^n}$$

ist dem ersten Gliede der n^{ten} Differenzenreihe von

$$(22^3) \qquad 1, \frac{s}{\omega}, \frac{s(s+1)}{\omega^2}, \frac{s(s+1)(s+2)}{\omega^3}, \ldots$$

gleich.

Aus dem Determinantensatze

$$\begin{vmatrix} P_{n+1} & P_n \\ Q_{n+1} & Q_n \end{vmatrix} = (-1)^n n!\, \omega^n$$

folgt

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{n!\, \omega^n}{Q_n\, Q_{n+1}}$$

und demnach geht die Schloemilchsche Gleichung (18*) in

$$(23) \qquad \omega^{-s} e^{\omega} P(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!\, \omega^n}{Q_n\, Q_{n+1}}$$

über, wobei die Koeffizienten durch (21)—(22²) definiert sind.

Gegenüber der Eulerschen Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}$$

bietet die Reihe (23) kaum wesentliche Vorteile, solange ω positiv bleibt; ist dagegen ω negativ, so leistet die Formel (23), nämlich

$$e^{\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\omega^\nu}{\nu!\,(s+\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!\, \omega^n}{Q_n\, Q_{n+1}}$$

ganz wesentliche Dienste, indem sie namentlich für größere ω gut brauchbar wird, während die linke Seite sich der Anwendung tatsächlich entzieht. In dem Falle, wo $\omega < 0$, $s > 0$, wechseln die Glieder der Reihe (22^3) ihre Vorzeichen regelmäßig ab und die Glieder der sukzessiven Differenzenreihen werden eigentlich durch Additionen gebildet. Die absoluten Beträge der Größen u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, . bilden eine wachsende Folge und die Größen $Q_n = \omega^n \Delta^n u_0$ nehmen schnell zu. Wird der besseren Klarheit wegen $\omega = -v\,(v > 0)$ geschrieben, so ist nach (22^1)

$$(24^0) \qquad Q_n = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-x} (x+v)^n x^{s-1}\, dx$$

größer als

$$v^n + s(s+1)\cdots(s+n-1)$$

und daher das allgemeinere Glied von (23) rechts

$$\frac{n!\, v^n}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{n!\, v^n}{\left[v^n + n!\binom{s+n-1}{n}\right]\left[v^{n+1} + (n+1)!\binom{s+n}{n+1}\right]}$$

Mit dieser Ungleichung läßt sich die Konvergenz leicht beurteilen; die Funktion, welche man hier entwickelt, ist

$$e^{-v} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{v^\nu}{\nu!\,(s+\nu)} = v^{-s} . e^{-v} \int_0^v e^x x^{s-1}\, dx,$$

und die gewonnene Formel also

$$(24) \qquad \int_0^v e^x x^{s-1}\, dx = e^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, v^{n+s}}{Q_n Q_{n+1}},$$

wobei die Q durch (24^0) definiert sind.

Die erzeugende Funktion der P_ν

$$(25) \qquad F(z) = \sum_0^\infty \frac{P_\nu}{\nu!} z^\nu$$

befriedigt die Differentialgleichung

$$(25^1) \qquad (z-1) F'(z) + (\omega z + s - \omega) F(z) + 1 = 0$$

und hat den Wert

$$(25^2) \qquad F(z) = (1-z)^{-s} e^{-\omega z} \int_0^z (1-z)^{s-1} e^{\omega z}\, dz.$$

Die explizite Darstellung von P_ν, welche man dieser Formel entnehmen kann, ist zu kompliziert und bietet der rekursiven Bestimmung gegenüber keine wesentlichen Vorteile, vielmehr gebührt der letzteren der Vorzug. Ich notiere bloß die Beziehung

$$(26) \qquad P_n = \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n}{\mu+1} Q'_\mu \, Q_{n-\mu-1},$$

wobei Q'_μ genau so mit $1-s$ und $-\omega$ gebildet wird, wie Q_μ mit s und ω.

Die Gleichung (25^2) gestattet immerhin eine einfache Folgerung, die zwar nicht die Darstellung von P_n liefert, wohl aber mit der Funktion $P(s, \omega)$ zusammenhängt.

Wir haben zunächst

$$\int_0 (1-z)^{s-1} e^{\omega z} dz = e^\omega \int_0 dz \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\omega^\nu}{\nu!} (1-z)^{s+\nu-1} =$$

$$= e^\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} \frac{(1-z)^{s+\nu}-1}{s+\nu},$$

d. h.

$$\int_0 (1-z)^{s-1} e^{\omega z} dz = e^\omega \omega^{-s} P(s, \omega) - e^\omega \omega^{-s} P(s, \omega - \omega z);$$

hieraus folgt

$$F(z) = (1-z)^{-s} e^{-\omega z} . \omega^{-s} e^\omega P(s, \omega) -$$

$$-(\omega - \omega z)^{-s} e^{\omega - \omega z} P(s, \omega - \omega z);$$

wegen der Eulerschen Gleichung

$$x^{-s} e^x P(s, x) = \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+\nu)}$$

kann man dies in die Form setzen

$$F(z) = (1-z)^{-s} e^{-\omega z} \sum_0^\infty \frac{\omega^\nu}{s(s+1) \quad (s+\nu)} - \sum_0^\infty \frac{\omega^\nu (1-z)^\nu}{s(s+1)\cdots(s+\nu)}.$$

Von der zweiten Reihe spalten wir den von z unabhängigen Teil ab und vereinigen ihn mit der ersten; so kommt schließlich

$$F(z) = \left[(1-z)^{-s} e^{-\omega z} - 1\right] \sum_0^\infty \frac{\omega^\nu}{s(s+1)\cdots(s+\nu)} -$$

$$-\sum_{\mu, \nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \frac{\omega^\nu z^\mu}{s(s+1)\cdots(s+\nu)}.$$

Vergleicht man die Koeffizienten von z^n, so hat man mit Rücksicht auf (21) und (25)

$$P_n = Q_n \cdot \omega^{-s} e^{\omega} P(s, \omega) + (-1)^{n-1} n! \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \frac{\omega^{\nu}}{s(s+1)\cdots(s+\nu)}$$

oder

$$\omega^{-s} e^{\omega} P(s, \omega) - \frac{P_n}{Q_n} = \tag{26}$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{Q_n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \frac{\omega^{\nu}}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+\nu)}.$$

Diese Formel gibt einerseits über den Annäherungsgrad der Kettenbruchentwicklung Aufschluß, anderseits bietet sie ein Hilfsmittel, die Annäherung zu beliebigem Grade hin zu ergänzen, indem die Berechnung der einzelnen Glieder mit Hilfe der Stirlingschen Formel sich leicht bewerkstelligen läßt.

Nach Beseitigung des Nenners Q_n bleibt auf der rechten Seite von (26) ein Ausdruck, der nichts anderes ist als das Produkt von $(-1)^n \omega^n$ mit der n^{ten} Ableitung nach ω der Größe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{\nu}}{s(s+1)\cdots(s+\nu)} = \omega^{-s} e^{\omega} P(s, \omega).$$

Wir haben daher den Satz:

„Wird mit $\Phi(\omega)$ die ganze Funktion

$$\omega^{-s} e^{\omega} P(s, \omega)$$

bezeichnet, so besteht für den Rest der Schloemilchschen Kettenbruchentwicklung die Darstellung

$$\Phi(\omega) - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-\omega)^n}{Q_n} \Phi^{(n)}(\omega). \text{“} \tag{26*}$$

Dies ist aber mit der Gleichung

$$\Phi(\omega+\xi) = \Phi(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{Q_n \Phi(\omega) - P_n}{n!\, \omega^n} \xi^n \tag{27}$$

gleichbedeutend und letztere ist nur eine Modifikation der Formel (16*), in welcher die Buchstaben P_{ν} und Q_{ν} eine etwas abweichende Bedeutung haben.

Wir betrachten nun das Integral

$$\Phi(a) = \int_0^1 e^{-\frac{ux}{1-x}} x^{a-1} (1-x)^{c-1} dx, \tag{28}$$

in welchem die Parameter u und a ihre reellen Teile positiv haben; wird hier

$$\frac{x}{1-x} = z$$

gesetzt, so kommt

$$\Phi(a) = \int_0^\infty e^{-uz} \frac{z^{a-1}\, dz}{(1+z)^{a+c}}, \tag{29}$$

und dieses Integral drückt sich im Falle $a=1$ sowie im Falle $a+c=1$ durch die Q-Funktion aus.

Wir machen von (28) Gebrauch, indem wir die Identität

$$d\left[e^{-\frac{ux}{1-x}} x^a (1-x)^{c+1}\right] =$$

$$= e^{-\frac{ux}{1-x}}\left[a x^{a-1} - (2a+c+u+1)\, x^a + (a+c+1)\, x^{a+1}\right](1-x)^{c-1} dx$$

zwischen $x=0$ und $x=1$ integrieren; wir erhalten so die Relation

$$a\Phi(a) - (u+2a+c+1)\,\Phi(a+1) + (a+c+1)\,\Phi(a+2) = 0; \tag{30}$$

setzt man nun

$$X_a = \frac{\Phi(a)}{\Phi(a+1)}, \tag{31}$$

so geht (30) über in

$$a X_a = u + 2a + c + 1 - \frac{a+c+1}{X_{a+1}}, \tag{32}$$

eine Relation, durch deren wiederholte Anwendung sich der Kettenbruch ergibt

$$a X_a = \tag{33}$$

$$= u+c+2a+1 - \cfrac{(c+a+1)(a+1)}{u+c+2a+3 - \cfrac{(c+a+2)(a+2)}{u+c+2a+5 - \cfrac{(c+a+3)(a+3)}{u+c+2a+7 - \cdots}}}$$

der durch das Glied

$$-\frac{(c+a+\nu)(a+\nu)}{u+c+2a+2\nu+1-\dfrac{c+a+\nu+1}{X_{a+\nu+1}}}$$

schließt.

Nun ist

$$(a)\qquad \Phi(2)=\int_0^\infty e^{-uz}\frac{z\,dz}{(1+z)^{c+2}}=\int_0^\infty e^{-uz}\frac{dz}{(1+z)^{c+1}}-\int_0^\infty e^{-uz}\frac{dz}{(1+z)^{c+2}},$$

während eine partielle Integration die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-uz}\frac{dz}{(1+z)^{c+2}}=\frac{1}{c+1}-\frac{u}{c+1}\int_0^\infty e^{-uz}\frac{dz}{(1+z)^{c+1}}$$

ergibt; wird dies in (a) eingesetzt, so kommt

$$(c+1)\,\Phi(2)=(u+c+1)\,\Phi(1)-1,$$

hieraus ferner

$$\frac{1}{\Phi(1)}=u+c+1-\frac{c+1}{X_1}$$

$$(33^1)\qquad \Phi(1)=\frac{1}{u+c+1-\dfrac{c+1}{X_1}}.$$

Nun geht

$$\Phi(1)=\int_0^\infty e^{-uz}\frac{dz}{(1+z)^{c+1}}=e^u\int_1^\infty e^{-uz}\frac{dz}{z^{c+1}}$$

nach Substitution $z=\dfrac{x}{u}$ in

$$\Phi(1)=e^u\,u^c\int_u^\infty e^{-x}\frac{dx}{x^{c+1}}$$

d. h. in

$$(33^2)\qquad \Phi(1)=u^c\,e^u\,Q(-c,u)$$

über.

Wird dies in (33^1) eingesetzt und darin X_1 nach (33) für $a=1$ ausgedrückt, so kommt die etwas vereinfachte Eulersche Kettenbruchdarstellung der Q-Funktion zum Vorschein, die für den

Fall $\omega = 1$ von Herrn Tannery gegeben und eingehend behandelt wurde.[6])

$$(34) \qquad u^c e^u Q(-c, u) =$$

$$= \cfrac{1}{u+c+1-\cfrac{1(c+1)}{u+c+3-\cfrac{2(c+2)}{u+c+5-\cfrac{3(c+3)}{u+c+7-}}}}$$

wobei mit

$$(34^1) \qquad -\cfrac{\nu(c+\nu)}{u+c+2\nu+1-\cfrac{c+\nu+1}{X_{\nu+1}}}$$

zu schließen ist.

Nun ist

$$\frac{c+n}{X_n} = (c+n)\frac{\Phi(n+1)}{\Phi(n)},$$

$$\Phi(n) = \int_0^\infty e^{-uz}\frac{z^{n-1}dz}{(1+z)^{c+n}},$$

also bei reellen u und c wegen

$$\frac{z}{1+z} < 1$$

offenbar

$$0 < \frac{\Phi(n+1)}{\Phi(n)} < 1,$$

und demnach ist

$$0 < \frac{c+n}{X_n} < c+n.$$

Wir setzen nun

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1; \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = u+c+1,$$

und allgemein

$$(35) \qquad \begin{cases} P_{\nu+1} = (u+c+2\nu+1)P_\nu - \nu(c+\nu)P_{\nu-1}, \\ Q_{\nu+1} = (u+c+2\nu+1)Q_\nu - \nu(c+\nu)Q_{\nu-1}; \end{cases}$$

[6]) Comptes Rendus, Bd. 94, p. 1698; Bd. 95, p. 75 (1882).

alsdann wird

$$(35^0)\quad \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \cfrac{1}{u+c+1-\cfrac{1\,(c+1)}{u+c+3-\cdot\;\;\cdot\;-\cfrac{(\nu-1)(c+\nu-1)}{u+c+2\nu-1}}}.$$

Der Kettenbruch (34) mit den Schlußgliedern (34^1) hat dann den Wert

$$(35^1)\qquad \frac{P_{\nu+1}-\dfrac{c+\nu+1}{X_{\nu+1}}P_\nu}{Q_{\nu+1}-\dfrac{c+\nu+1}{X_{\nu+1}}Q_\nu}.$$

Um diese Größe zu untersuchen, wollen wir uns vorher eine explizite Darstellung der Polynome Q_ν verschaffen, was wieder durch die Methode der erzeugenden Funktion geschehen kann. Ich schreibe

$$a_n = \frac{\Gamma(c)\,Q_n}{n!\,\Gamma(c+n)},$$

und setze in die Rekursionsformel (35) ein; dadurch kommt

$$(36)\qquad (n+1)\,a_{n+1} = \frac{u+c+2n+1}{c+n}\,a_n - \frac{a_{n-1}}{c+n-1};$$

$$a_0 = 1,\; a_1 = \frac{u+c+1}{c}.$$

Setzt man $a_{-1}=0$, so besteht (36) noch für $n=0$.

Ich setze nun unter vorläufiger Annahme der Konvergenz

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n x^n}{c+n},$$

dann folgt aus (36)

$$\sum_{n=0}^\infty (n+1)\,a_{n+1}\,x^n = \sum_0^\infty \frac{u+c+2n+1}{c+n}\,a_n x^n - \sum_0^\infty \frac{a_n x^{n+1}}{c+n} =$$

$$= (u-c+1)\sum_0^\infty \frac{a_n x^n}{c+n} + 2\sum_0^\infty a_n x^n - \sum_0^\infty \frac{a_n x^{n+1}}{c+n}.$$

Hier ist nun

$$\sum_0^\infty a_n x^n = x^{1-c}[f(x)x^c]' = x f'(x) + c f(x),$$

$$\sum_0^\infty (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} = x f''(x) + (c+1) f'(x)$$

und wir gelangen zur Differentialgleichung

$$x f''(x) + (c+1-2x) f'(x) - (u+c+1-x) f(x) = 0.$$

Wird hier

$$f(x) = e^x y$$

gesetzt, so geht die Differentialgleichung in die einfachere über

$$x y'' + (c+1) y' - u y = 0,$$

welche durch die Besselsche Funktion

$$y = C \sum_0^\infty \frac{u^\mu x^\mu}{\mu!\,\Gamma(c+\mu+1)}$$

befriedigt wird. Dies ist zugleich die einzige im Nullpunkt synektische Lösung und wir erhalten daher

$$f(x) = C e^x \sum_0^\infty \frac{u^\mu x^\mu}{\mu!\,\Gamma(c+\mu+1)};$$

weil $f(0)$ den Wert

$$\frac{a_0}{c} = \frac{1}{c}$$

haben soll, muß

$$C = \Gamma(c)$$

gesetzt werden, und daher ist

$$(37) \qquad \sum_0^\infty \frac{a_n x^n}{c+n} = e^x \sum_0^\infty \frac{u^\mu x^\mu}{\mu!\, c(c+1)(c+2) \cdots (c+\mu)}.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise

$$\frac{n!\,a_n}{c+n}=\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}u^{\mu}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+\mu+1)}$$

oder da

$$n!\,a_n=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\,Q_n\,,$$

(38)
$$Q_n=\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}u^{\mu}\frac{\Gamma(c+n+1)}{\Gamma(c+\mu+1)}=$$
$$=\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}u^{\mu}(c+\mu+1)(c+\mu+2)\cdots(c+n).$$

Ich bilde nun die Differenz

$$\Delta=Q_{\nu+1}-(c+\nu+1)\,Q_\nu\,,$$

die vermöge der Gleichung (35) wie folgt geschrieben werden kann

$$\Delta=(u+\nu)\,Q_\nu-\nu\,(c+\nu)\,Q_{\nu-1}.$$

Es kommt, wenn man von (38) Gebrauch macht,

$$\Delta=u\,Q_\nu+\nu\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}u^{\mu}(c+\mu+1)(c+\mu+2)\cdots(c+\nu)-$$
$$-\nu\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{\mu}u^{\mu}(c+\mu+1)(c+\mu+2)\cdots(c+\nu)$$

oder wegen

$$\binom{\nu}{\mu}-\binom{\nu-1}{\mu}=\binom{\nu-1}{\mu-1},$$

$$\Delta=u\,Q_\nu+\nu\,u^{\nu}+\nu\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{\mu-1}u^{\mu}(c+\mu+1)\cdots(c+\nu).$$

Dies zeigt, daß für reelle positive c, u die Größe Δ positiv ist; der Ausdruck

$$Q_{\nu+1}-\xi\,Q_\nu$$

nimmt daher lauter positive Werte an, wenn ξ von Null bis $c+\nu+1$ variiert, und erhält den kleinsten Wert für $\xi = c+\nu+1$; es ist daher

$$Q_{\nu+1} - \frac{c+\nu+1}{X_{\nu+1}} Q_\nu > \Delta > 0,$$

d. h. der Nenner des Quotienten (35^1) bleibt positiv und derselbe Quotient bleibt zwischen den Grenzen

$$(39) \qquad \frac{P_{\nu+1}}{Q_{\nu+1}}, \qquad \frac{P_{\nu+1}-(c+\nu+1)P_\nu}{Q_{\nu+1}-(c+\nu+1)Q_\nu}$$

enthalten, weil eine lineare Funktion immer im gleichen Sinne variiert.

Der Unterschied der beiden Größen (39) ist nun

$$(39^0) \qquad \frac{(P_{\nu+1}Q_\nu - P_\nu Q_{\nu+1})(c+\nu+1)}{Q_{\nu+1}\Delta},$$

und weil

$$(40) \qquad P_{\nu+1}Q_\nu - P_\nu Q_{\nu+1} = \nu!(c+1)(c+2) \qquad (c+\nu)$$

ist, so lautet die Größe (39^0)

$$(39^1) \qquad \frac{\nu!(c+1)(c+2)\ldots(c+\nu+1)}{Q_{\nu+1}\Delta}.$$

Nun folgt aus der oben gegebenen Darstellung von Δ die Ungleichung

$$\Delta > u\,Q_\nu,$$

und somit ist mit Rücksicht auf (34) und (35^1),

$$(39^2) \quad 0 < u^c e^u Q(-c,u) - \frac{P_{\nu+1}}{Q_{\nu+1}} < \frac{\nu!(c+1)(c+2)\ldots(c+\nu+1)}{u\,Q_\nu\,Q_{\nu+1}}.$$

Nun ist

$$(\alpha) \qquad \frac{Q_{\nu+1}}{(c+1)(c+2) \qquad (c+\nu+1)} =$$

$$= 1 + \frac{\nu+1}{c+1}u + \frac{(\nu+1)\nu}{2!(c+1)(c+2)}u^2 + \frac{(\nu+1)\nu(\nu-1)}{3!(c+1)(c+2)(c+3)}u^3 + \ldots,$$

$$(\beta) \quad \frac{Q_\nu}{\nu!} = \frac{c+1}{1}\cdot\frac{c+2}{2}\cdots\frac{c+\nu}{\nu} + \frac{\nu}{1^2}\cdot\frac{c+2}{2}\cdot\frac{c+3}{3}\cdots\frac{c+\nu}{\nu}u +$$

$$+ \frac{\nu(\nu-1)}{1^2.\,2^2}\,\frac{c+3}{3}\cdot\frac{c+4}{4}\cdots\frac{c+\nu}{\nu}u^2 + \ldots,$$

also wachsen beide Quotienten

$$\frac{Q_\nu}{\nu!} \text{ und } \frac{Q_{\nu+1}}{(c+1)(c+2)\quad (c+\nu+1)}$$

mit ν über alle Grenzen, und das letzte Glied der Ungleichung (39^2) hat den Grenzwert Null; damit ist bewiesen, daß für positive u und c

$$(41)\qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{P_{\nu+1}}{Q_{\nu+1}} = u^c\, e^u\, Q(-c, u),$$

d. h. daß man in der Gleichung (34) den unendlichen Kettenbruch setzen darf; dabei war eigentlich nur vorausgesetzt, daß c nicht negativ ist, so daß der Wert $c=0$ mit inbegriffen ist.

Für negative c bemerke ich zunächst, daß der Kettenbruch (34) von selbst schließt, wenn c eine negative ganze Zahl ist, so daß wir diesen Fall ausschließen dürfen. Für sonstige negative c bleibt dann bei hinreichend großen ν der Satz (39) bestehen, die Ungleichung (39^2) wird in Kraft bleiben, falls man eventuell die Vorzeichen einzelner Teile ändert. Nun werden die Quotienten (α) und (β) auch dann mit ν unendlich groß, wenn c negativ wird, und somit bleibt die Gleichung (41) auch in diesem Falle bestehen.

Aus (40) und (41) folgt nun

$$(42)\qquad u^c\, e^u\, Q(-c, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!\,(c+1)(c+2)\ldots(c+\nu)}{Q_\nu\, Q_{\nu+1}}$$

mit der Darstellung (38) der Q_ν.

Setzt man in (34) $c=0$, so geht die Kettenbruchdarstellung von **L a g u e r r e** für den Integrallogarithmus hervor

$$(43)\quad e^u \int_u^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} = \cfrac{1}{u+1-\cfrac{1.1}{u+3-\cfrac{2.2}{u+5-\cfrac{3.3}{u+7-}}}}$$

die hier in nur unwesentlich veränderter Form wiedergegeben ist.

Die Gleichung (38) gibt für die Näherungsnenner die Formel

$$Q_n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \frac{n!\,u^\mu}{\mu!},$$

die ebenfalls bei **L a g u e r r e** vorkommt. Setzt man daher, um Mißverständnissen vorzubeugen,

$$\varphi_n(u) = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \frac{u^\mu}{\mu!}, \quad \varphi_0 = 1,$$

so folgt aus (42) für $c = 0$ die Entwicklung

$$e^u \int_u^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)\,\varphi_\nu(u)\,\varphi_{\nu+1}(u)}. \tag{44}$$

Für $c = -\frac{1}{2}$ wird

$$Q\left(\frac{1}{2}, u\right) = \int_u^\infty e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_{\sqrt{u}}^\infty e^{-z^2} dz;$$

setzt man daher $u = v^2$, so folgt nach leichter Umformung

$$e^{v^2} \int_v^\infty e^{-x^2} dx = \cfrac{v}{2v^2 + 1 - \cfrac{1\,.\,2}{2v^2 + 5 - \cfrac{3\,.\,4}{2v^2 + 9 - \cfrac{5\,.\,6}{2v^2 + 13 - \dots}}}} \tag{45}$$

oder in der Gestalt von (42)

$$(46)\quad \begin{cases} e^{v^2} \displaystyle\int_v^\infty e^{-z^2} dz = \frac{v}{2} \sum_0^\infty \frac{(2\nu)!}{2^\nu Q_\nu Q_{\nu+1}}, \\ Q_\nu = \displaystyle\sum_0^n \binom{n}{\mu} v^{2\mu} \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \frac{3}{2}\right) \quad \left(\mu + \frac{2\nu - 1}{2}\right), \\ Q_0 = 1. \end{cases}$$

In Bezug auf (38) möge noch die Bemerkung stattfinden, daß

$$Q_n = \sum_{\mu=0}^{n} \mu! \binom{n}{\mu} \binom{c+n}{\mu} u^{n-\mu}$$

oder

$$Q_n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{c+n}{\mu} D_u^\mu u^n;$$

dies läßt sich symbolisch so ausdrücken

$$Q_n = (1 + D_u)^{c+n} u^n \tag{38*}$$

und gestattet die Folgerung

$$u^n = (1 + D_u)^{-c-n} Q_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-c-n}{\nu} Q_n^{(\nu)}. \tag{47}$$

Der angeblich von Euler stammende, mir aus Legendres Werken bekannte Kettenbruch für die Q-Funktion hat die Gestalt

$$(48)\quad \frac{e^u}{u^a}Q(a,u)=\cfrac{\zeta}{1+\cfrac{(1-a)\zeta}{1+\cfrac{\zeta}{1+\cfrac{(2-a)\zeta}{1+\cfrac{2\zeta}{1+\cfrac{(3-a)\zeta}{1+\cfrac{3\zeta}{1+}}}}}}}$$

wobei $\zeta=\frac{1}{u}$, und kann offenbar in der Form

$$(48^1)\qquad \cfrac{1}{u+\cfrac{1-a}{1+\cfrac{1}{u+\cfrac{2-a}{1+\cfrac{2}{u+\cfrac{3-a}{1+\cfrac{3}{u+\cdot}}}}}}}$$

geschrieben werden; wir ersetzen ihn durch die Gleichungskette, indem wir ihn mit ξ bezeichnen,

$$\xi=\frac{1}{u+\xi_1},\quad \xi_1=\frac{1-a}{1+\xi_2},\quad .\ \xi_{2\nu-1}=\frac{\nu-a}{1+\xi_{2\nu}},\quad \xi_{2\nu}=\frac{\nu}{u+\xi_{2\nu+1}}.$$

Wird $\xi_{2\nu}$ eliminiert, so entsteht

$$\xi_{2\nu-1}=\cfrac{\nu-a}{1+\cfrac{\nu}{u+\xi_{2\nu+1}}}=\nu-a-\frac{\nu(\nu-a)}{u+\nu+\xi_{2\nu+1}};$$

dies gibt

$$(48^2)\quad \xi=\cfrac{1}{u+1-a-\cfrac{1(1-a)}{u+3-a-\cfrac{2(2-a)}{u+5-a-\cfrac{3(3-a)}{u+7-a-}}}}$$

wobei mit

$$-\frac{\nu(\nu-a)}{u+\nu+\xi_{2\nu+1}}$$

zu schließen ist.

Schreibt man die Näherungsbrüche von (48[1])

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{Q}_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{Q}_1} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{Q}_2}, \ldots$$

so entsteht $\frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu}$ aus ξ vermöge unserer Gleichungskette, wenn man darin $\xi_\nu = 0$ setzt.

Wird nun $\xi_{2\nu+2} = 0$ gesetzt, so wird unser Schlußausdruck zu (48[2]) lauten

$$-\frac{\nu(\nu - a)}{u + 2\nu + 1 - a}$$

und dies beweist, daß man in früherer Bezeichnung

$$\frac{\mathfrak{P}_{2\nu+2}}{\mathfrak{Q}_{2\nu+2}} = \frac{P_{\nu+1}}{Q_{\nu+1}} \quad (c = -a)$$

hat; mit anderen Worten, die Näherungsbrüche von (34) — geschrieben für $c = -a$ — stimmen mit Näherungsbrüchen gerader Rangzahl im Euler-Legendreschen Kettenbruch (48[1]).

Für $a < 1$ ist nun

$$\frac{\mathfrak{P}_{2\nu}}{\mathfrak{Q}_{2\nu}} < \xi < \frac{\mathfrak{P}_{2\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{2\nu+1}},$$

und es hat sein Interesse, den Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{P}_{2\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{2\nu+1}}$$

bilden zu können, ohne die vorhergehenden Näherungsbrüche ungerader Rangzahl zu berechnen. Dieser Näherungsbruch entsteht aus (48[2]) durch Annahme $\xi_{2\nu+1} = 0$ und wir haben daher

$$\frac{\mathfrak{P}_{2\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{2\nu+1}} = \cfrac{1}{u + 1 - a - \cfrac{1(1-a)}{u + 3 - a - \cfrac{2(2-a)}{u + 5 - a - \cfrac{3(3-a)}{u + 7 - a - \cdots}}}}$$

geschlossen mit $-\frac{\nu(\nu - a)}{u + \nu}$; wir benützen nun die etwas übersichtlichere Schreibweise, um das Ergebnis der letzten Betrachtung zu formulieren:

$$\frac{1}{u+1-a-}\,\frac{1\,(1-a)}{u+3-a-}\,\frac{2\,(2-a)}{u+5-a-}\cdot\;\cdot\frac{(\nu-1)\,(\nu-1-a)}{u+2\nu-1-a}$$

$$< u^{-a}\,e^{u}\,Q\,(a,\,u)$$

$$<\frac{1}{u+1-a-}\,\frac{1\,(1-a)}{u+3-a-}\,\frac{2\,(2-a)}{u+5-a-}\cdots\frac{(\nu-1)\,(\nu-1-a)}{u+2\nu-1-a-}\,\frac{\nu\,(\nu-a)}{u+\nu}.$$

Man kann auch schreiben

$$(48^{3})\qquad \frac{\mathfrak{P}_{2\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{2\nu+1}}=\frac{P_{\nu}-\dfrac{\nu\,(\nu-a)}{u+\nu}P_{\nu-1}}{Q_{\nu}-\dfrac{\nu\,(\nu-a)}{u+\nu}Q_{\nu-1}}.$$

Speziell ist für den Kettenbruch (43)

$$(43^{0})\qquad \frac{P_{\nu}}{Q_{\nu}}<e^{u}\int_{u}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}<\frac{P_{\nu}\,(u+\nu)-\nu^{2}P_{\nu-1}}{Q_{\nu}\,(u+\nu)-\nu^{2}Q_{\nu-1}};$$

dabei wird der Näherungsbruch $\frac{P_{\nu}}{Q_{\nu}}$ mit Behaltung von bloß ν Nennern $u+1,\ u+3,\ldots u+2\nu-1$ gebildet.

Wir gehen nun auf das Laplacesche Integral

$$\int_{v}^{\infty}e^{-x^{2}}\,dx=\frac{1}{2}\,Q\left(\frac{1}{2},\,v^{2}\right)$$

zurück, indem wir es mit (48) ausdrücken.

Darin ist $a=\frac{1}{2}$ zu setzen und die sukzessiven Zähler

$$(1-a)\zeta,\ \zeta,\ (2-a)\,\zeta,\ 2\,\zeta,\ (3-a)\,\zeta,\ 3\,\zeta,\ldots$$

haben die Werte

$$\frac{\zeta}{2},\ \frac{2\,\zeta}{2},\ \frac{3\,\zeta}{2},\ \frac{4\,\zeta}{2},\ \frac{5\,\zeta}{2},\ \frac{6\,\zeta}{2},$$

Schreibt man daher

$$(49^{0})\qquad q=\frac{1}{2\,v^{2}},$$

so folgt der Kettenbruch von **Laplace** in der Gestalt **Jacobis**

$$(49)\qquad 2ve^{v^2}\int_v^\infty e^{-x^2}\,dx = \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+}}}}}$$

Dividiert man durch $2v$, so entsteht nach einfacher Modifikation

$$(49^1)\qquad e^{v^2}\int_v^\infty e^{-x^2}\,dx = \cfrac{1}{2v+\cfrac{2}{2v+\cfrac{4}{2v+\cfrac{6}{2v+\cfrac{8}{2v+\cdots}}}}}$$

Da diese Kettenbrüche aus (48) ohne Reduktion hervorgingen, so kann nicht überraschen, daß der Kettenbruch (45) viel schneller konvergiert.

Die hier gegebene Ableitung der Formel (34) habe ich im Sommer 1905 im hiesigen Seminar auseinandergesetzt.