Matyáš Lerch
Příspěvky k vlastnostem počtu tříd kvadratických forem záporného diskriminantu

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 17 (1908), č. 6, 1–20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501586

Příspěvky k vlastnostem počtu tříd kvadratických forem záporného diskriminantu.

Sdílí

M. Lerch v Brně.

Předloženo dne 7. února 1908.

I.

Nechť $-\Delta$ značí záporný diskriminant; hledejme součet

$$S = \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \sum_{\alpha=1}^{k-1} (-1)^{E\left(\frac{\alpha\Delta}{k}\right)}$$

V součtu se vyskytnou pouze k nesoudělná s Δ, a ježto $\frac{\alpha}{k} < 1$, nebude žádné $\frac{\alpha\Delta}{k}$ celistvé. Proto lze užiti rovnice

$$(-1)^{E(2x)} = \text{sgn.}\, R(x) = \text{sgn.}\, R^*(x)$$

(význam těchto symbolů vyložen v různých našich publikacích arithmetických, zejmena v pracích níže citovaných), i bude

$$S = \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \sum_{\alpha=1}^{k-1} \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\alpha\Delta}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \sum_{\alpha=0}^{k-1} \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\alpha\Delta}{2k}\right).$$

Jest pak

$$\text{sgn}\, R^*(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l} \frac{\sin 2lx\pi}{l}, \quad (l = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{k-1} \sin\frac{l\alpha\Delta\pi}{k} = \begin{cases} 0, \text{ pro } \Delta \text{ sudé} \\ \text{cotg}\, \frac{\Delta l\pi}{2k}, \text{ pro } \Delta \text{ liché.} \end{cases}$$

Pro sudé Δ tedy $S = 0$.

Předpokládejme nadále Δ *liché*, tedy

$$\sum_{a=0}^{k-1} \operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{\alpha\Delta}{2k}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_l \frac{1}{l} \operatorname{cotg} \frac{\Delta l \pi}{2k} \quad (l = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_l \frac{1}{l_0} \operatorname{cotg} \frac{\Delta l_0 \pi}{2k} \quad (l_0 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots).$$

Položme nyní $l_0 = \lambda + 2k\nu$,

$$(\lambda = 1, 3, \ldots 2k-1;\ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N;\ N = \infty)$$

i vyjde při naznačených podmínkách summačních

$$A_k = \sum_{a=0}^{k-1} \operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{\alpha\Delta}{2k}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_\lambda\sum_\nu \frac{1}{\lambda + 2k\nu} \cot \frac{\Delta\lambda\pi}{2k};$$

sčítání vůči ν provede se na základě známého vzorce $\sum_{-N}^{N} \frac{1}{z+\nu} = \pi \operatorname{cotg} z\pi$

a bude pak

$$A_k = \frac{1}{k}\sum_{\lambda < 2k} \operatorname{cotg} \frac{\lambda\pi}{2k} \operatorname{cotg} \frac{\Delta\lambda\pi}{2k}.$$

Tento výraz lze převésti na jiný tvar našemu účelu přiměřenější; k tomu cíli uvažujme funkci

$$(\alpha) \qquad \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{z^\Delta + 1}{z^\Delta - 1} \cdot \frac{z^{k-1}}{z^k + 1}, \quad (k, \Delta) \sim 1,$$

jejíž póly jsou $z = 1$, $z = \zeta$ a $z = \eta$, kde

$$\zeta^k + 1 = 0, \quad \eta^\Delta - 1 = 0 \quad (\eta \gtrless 1),$$

a vyjadřme, že součet její residuí $= 1$; obdržíme tak rovnici

$$(\beta) \qquad \frac{1}{k}\sum \frac{\zeta+1}{\zeta-1} \cdot \frac{\zeta^\Delta + 1}{\zeta^\Delta - 1} + \frac{2}{\Delta}\sum \frac{\eta+1}{\eta-1}\,\frac{\eta^k}{\eta^k+1} + C = 1,$$

kde C značí residium na dvojnásobném pólu $z = 1$.

Je tedy C stálým členem v rozvoji funkce

$$f(z) = (z+1)\,\frac{z^\Delta + 1}{z^\Delta - 1} \cdot \frac{z^{k-1}}{z^k + 1}$$

dle mocnin rozdílu $z - 1$; položme $z = 1 + u$,

$$f(1+u) = \frac{(2+u)\,(2 + \Delta u + \ldots)\,(1 + \overline{k-1}\,u + \ldots)}{\Delta u\,(1 + \frac{\Delta - 1}{2}u + \ldots)\,(2 + ku + \ldots)}$$

$$= \frac{2}{\Delta u} + \frac{k}{\Delta} + \ldots,$$

tedy

$$C = \frac{k}{\Delta}.$$

Poněvadž

$$\zeta = e^{\frac{\lambda \pi i}{k}}, \ (\lambda = 1, 3, 5, \ldots 2k - 1)$$
$$\eta = e^{\frac{2 \nu \pi i}{\Delta}}, \ (\nu = 1, 2 \ldots \Delta - 1),$$

bude rovnice (β) zníti

$$(\gamma) \quad \frac{-1}{k} \sum_{\lambda} \operatorname{cotg} \frac{\lambda \pi}{2k} \operatorname{cotg} \frac{\Delta \lambda \pi}{2k} + \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu = 1}^{\Delta - 1}{}' \operatorname{cotg} \frac{\nu \pi}{\Delta} \cdot \operatorname{tg} \frac{k \nu \pi}{\Delta} = 1 - \frac{k}{\Delta}$$

Rovnice ta podává

$$A_k = -1 + \frac{k}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu = 1}^{\Delta - 1}{}' \operatorname{cotg} \frac{\nu \pi}{\Delta} \cdot \operatorname{tg} \frac{k \nu \pi}{\Delta}$$

a náš součet

$$S = \sum_{k = 1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) A_k$$

bude lze psáti

$$(\delta) \quad S = -\sum_{1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) + \sum_{1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) \frac{k}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu = 1}^{\Delta - 1} \operatorname{cotg} \frac{\nu \pi}{\Delta} \sum_{k = 1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) \operatorname{tg} \frac{k \nu \pi}{\Delta}.$$

Tu platí pak pro všecky záporné diskriminanty známé rovnice

$$\sum_{k = 1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) = 0.$$

$$(1) \qquad \sum_{\nu = 1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{\nu} \right) \operatorname{cotg} \frac{\nu \pi}{\Delta} = \frac{4 \sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta),$$

dále pro veškery diskriminanty liché (a pro sudé základní)

$$(2) \quad \sum_{k = 1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) \operatorname{tg} \frac{k \pi}{\Delta} = \frac{4 \sqrt{\Delta}}{\tau} (1 - 2 \varepsilon) Cl(-\Delta); \ \varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta} \right).$$

Položíme pak k vůli stručnosti psaní

$$-\sum_{k = 1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) \frac{k}{\Delta} = H \qquad \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = K$$

Zjednodušení výrazu (δ) vyžaduje znalost součtu

$$B_m = \sum_{k = 1}^{\Delta - 1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k} \right) \operatorname{tg} \frac{k m \pi}{\Delta}.$$

Je-li m nesoudělno s Δ, bude

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) B_m = \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{km}\right) \operatorname{tg} \frac{k m \pi}{\Delta},$$

a v pravo lze součiny km nahraditi jejich zbytky dle modulu Δ, takže vyjde

$$(3) \quad B_m = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \operatorname{tg} \frac{h\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) 2 \sqrt{\Delta}\, (1-2\,\varepsilon)\, K.$$

Je-li však největší společný dělitel čísel m a Δ větší jedné, přestává poslední úvaha a nutno vyšetřiti zda i pro ten případ platí rovnice (3), která by pak nabyla jednoduššího tvaru $B_m = 0$. Pišme tu k vůli pohodlí $d\,m$ za m, kde d jest největší společný dělitel čísel $d\,m$ a Δ, tedy Δ, m nesoudělná čísla. Pak bude

$$B_{dm} = \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \operatorname{tg} \frac{k\, d\, m\, \pi}{\Delta},$$

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) B_{dm} = \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k\,m}\right) \operatorname{tg} \frac{k\, m\, d\, \pi}{\Delta}$$

a poslední výraz podobně jako předešle možno zjednodušiti substitucí $k\,m = h$ na

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) B_{dm} = B' = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \operatorname{tg} \frac{h\, d\, \pi}{\Delta}.$$

Zde bude $-\Delta = -\,d d'$ součin dvou diskriminantů různého znamení $\mp d'$, $\pm d$, a tedy

$$B' = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\pm d}{h}\right) \left(\frac{\mp d'}{h}\right) \operatorname{tg} \frac{h\pi}{d'}.$$

Substitucí

$$h = \nu + \mu\, d' \quad (\nu = 1,\ 2, \ldots d';\ \mu = 0,\ 1, \ldots d-1)$$

obdrží B' tvar

$$B' = \sum_{\nu=1}^{d'} \left(\frac{\mp d'}{\nu}\right) \operatorname{tg} \frac{\nu\pi}{d'} \sum_{\mu=0}^{d-1} \left(\frac{\pm d}{\nu + \mu\, d'}\right).$$

Není-li d úplným čtvercem, je-li tedy skutečným diskriminantem, a jsou-li při tom d a d' čísla nesoudělná, bude lze psáti

$$\nu + \mu\, d' \equiv \mu' \pmod{d},$$

načež

$$(\varphi) \quad \sum_{\mu=0}^{d-1} \left(\frac{\pm d}{\nu + \mu\, d'}\right) = \sum_{\mu'=0}^{d-1} \left(\frac{\pm d}{\mu'}\right) = 0,$$

a bude tedy $B' = 0$ a následkem toho též $B = 0$. Je-li Δ absolutní hodnota diskriminantu základního, t. j. je-li Δ součinem různých čísel kmenných, budou pro každý rozklad $\Delta = dd'$ čísla d, d' nesoudělná, a d nebude čtvercem; tedy rovnice (3) má obecnou plastnost pro diskriminanty hlavní.

Je-li však $\Delta = \Delta_0\, Q^2$ dělitelno čtvercem Q^2, budou vždy existovati rozklady $\Delta = dd'$, kde buď d jest čtvercem aneb kde d a d' nejsou nesoudělná; rovnice (φ) pak není správnou pro tyto případy (d, d') a tím také rovnice (3) pozbývá platnosti pro čísla m, která jsou násobky takových dělitelů d. Proto se omezíme na diskriminanty hlavní; pro takové jest $H = K$, načež v rovnici (δ)

$$S = -K + \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}{}' \operatorname{cotg} \frac{\nu\pi}{\Delta} \sum_{k=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \operatorname{tg} \frac{k\nu\pi}{\Delta}$$

se vnitřní součet vyčíslí dle vzorce (3)

$$\sum_{k=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \operatorname{tg} \frac{k\nu\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) 2\sqrt{\Delta}\,(1-2\varepsilon)\,K,$$

a po vřadění této hodnoty přejde S na

$$S = -K + \frac{2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\,(1-2\varepsilon)\,K \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \operatorname{cotg} \frac{\nu\pi}{\Delta},$$

tedy dle rovnice (1)

$$S = 4\,(1-2\varepsilon)\,K^2 - K.$$

Tím dokázán vzorec*)

$$\sum_{k=2}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \sum_{a=1}^{k-1} (-1)^{\left[\frac{a\Delta}{k}\right]} = 4\,(1-2\varepsilon)\,K^2 - K \tag{4}$$

$$\left[-\Delta \text{ hlavní diskriminant lichý, } \varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta}\right), K = \frac{2}{\tau}\, Cl\,(-\Delta)\right]$$

Poznamenejme ještě, že pro $\Delta = 3$ jest $K = \frac{1}{3}$, kdežto pro $\Delta > 3$ bude $\tau = 2$, tedy $K = Cl\,(-\Delta)$ splývá s počtem tříd kvadratických forem kladných typu

$$a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2,$$

*) Význam přicházejících tu symbolů nalezne čtenář v různých mých rozpravách o theorii kvadratických forem, zejména v Mémoires présentés par divers savants à l' Académie des Sciences de l'Institut de France, T. XXXIII., n° 2, neb v Acta mathematica, T. 29.

Pokud se týče rovnice (2), bude oduvodněna níže přímo.

příslušných k diskriminantu $-\Delta$, a lze též K charakterisovati jako dvojnásobný počet rozkladů

$$\Delta = 4\,ac - b^2, \quad (o < b < a < c)$$

zvětšený o počet rozkladů téhož tvaru, v nichž buď $b = a$, neb $a = c$.

II.

K rovnici (4) lze dospěti též přímo cestou elementarnou, užije-li se našeho vzorce *) platného pro hlavní diskriminanty

$$\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right] K = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) \tag{5}$$

získaného ovšem rovněž cestou analytickou.

Tu budeme náš součet S psáti ve tvaru

$$S = \mathop{\mathbf{m}}_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\Delta\alpha}{2k}\right) = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) A_k\,,$$

a užijeme rovnice elementarné

$$1 - \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\alpha\Delta}{2k}\right) = 2\,E\left(\frac{\Delta\alpha}{k}\right) - 4\,E\left(\frac{\Delta\alpha}{2k}\right),$$

která nám pro veličinu

$$A_k = \sum_{\alpha=1}^{k-1} \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\Delta\alpha}{2k}\right)$$

podá vyjádření

$$A_k = k - 1 - 2\sum_{\alpha=1}^{k-1} E\left(\frac{\Delta\alpha}{k}\right) + 4\sum_{\alpha=1}^{k-1} E\left(\frac{\Delta\alpha}{2k}\right). \tag{ψ}$$

Ježto symbol $\left(\frac{-\Delta}{k}\right)$ vymizí, jakmile k, Δ nejsou čísla nesoudělná, přicházejí v úvahu pouze hodnoty k s Δ nesoudělné a pro takové součet celků

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1} E\left(\frac{\Delta\alpha}{k}\right)$$

se obdrží, odečte-li se od součtu zlomků

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1} \frac{\Delta\alpha}{k} = \Delta\,\frac{k-1}{2}$$

*) Bulletin des Sciences mathématiques (vydávaný p. Darboux), 2. serie, sv. XXI. (1897).

součet zbytků

$$\sum_{1}^{k-1} \frac{\alpha}{k} = \frac{k-1}{2}\,.$$

takže

$$(\chi) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k-1} E\left(\frac{\Delta\,\alpha}{k}\right) = \frac{(\Delta-1)\,(k-1)}{2}\,.$$

jak ostatně již Hermitem, Sternem a j. dávno uvedeno ve známost.

Třeba ještě stanoviti součet

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1} E\left(\frac{\Delta\,\alpha}{2\,k}\right);$$

ten dle významu funkce E nic jiného není než počet dvojic kladných celistvých čísel α, β hovících podmínkám

$$\frac{\Delta\,\alpha}{2\,k} \geqq \beta\,,\quad \alpha \leqq k-1.$$

kteréž lze takto vyjádřiti

$$\frac{2\,k\,\beta}{\Delta} \leqq \alpha \leqq k-1.$$

Čísla β zůstávají pod $\frac{\Delta}{2}$, a každé takové β lze spojiti s hodnotami α v naznačených mezích; počet těchto α obnáší přesně

$$k-1-E\left(\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}\right).$$

poněvadž

$$\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}$$

se nestane celistvým číslem pro naše hodnoty β.

Je tedy

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1} E\left(\frac{\Delta\,\alpha}{2\,k}\right) = \sum_{\beta=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} \left\{k-1-E\left(\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}\right)\right\}$$

$$= \frac{(k-1)\,(\Delta-1)}{2} - \sum_{\beta=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} E\left(\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}\right).$$

Následkem tohoto výsledku a rovnice (χ) obdrží rovnice (ψ) tvar

$$A_k = (k-1) + (k-1)\,(\Delta-1) - 4 \sum_{\beta=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} E\left(\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}\right).$$

VI.

čili

$$A_k = \Delta\,(k-1) - 4 \sum_{\beta=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} E\left(\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}\right).$$

Náš součet S bude tedy

$$S = \sum_{k=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) A_k = \Delta \sum_{1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) k - \Delta \sum_{1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right)$$

$$- 4 \sum_{\beta=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} \sum_{k=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) E\left(\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}\right).$$

Dosadíme-li sem hodnoty

$$\sum_{1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) k = -\Delta K\,, \quad \sum_{k=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) = 0\,,$$

a hodnotu plynoucí ze vzorce (5)

$$\sum_{k=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{k}\right) E\left(\frac{2\,k\,\beta}{\Delta}\right) = -\left[2\,\beta - \left(\frac{-\Delta}{2\,\beta}\right)\right] K\,,$$

obdržíme při stálém významu litery $\varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta}\right)$

$$S = -\Delta^2 K + 4\,K \sum_{\beta=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} \left[2\,\beta - \varepsilon \left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)\right];$$

zde jest

$$\sum 2\,\beta = \frac{\Delta^2-1}{4}\,, \quad \sum \left(\frac{-\Delta}{\beta}\right) = (2-\varepsilon)\,K\,,$$

a tedy bude náš poslední výraz po redukci

$$S = -K + 4\,K\,.\,(1 - 2\,\varepsilon)\,K\,,$$

což jest právě rovnice (4).

III.

Při této příležitosti podám důkazy některých vzorců, které jsem v citovaných pracích toliko uvedl, a které mohou míti svou zajímavost. Nejprvé ustanovím hodnotu součtu

$$A = \sum_{h=1}^{\Delta-1}{}' \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \operatorname{tg} \frac{h\,\pi}{\Delta}\,,$$

předpokládaje, že $-\Delta$ jest jakýkoli diskriminant záporný.

VI.

Vyčíslení provedeme na základě rozvoje

$$\pi \operatorname{tg} x\pi = -\sum_{\lambda} \frac{1}{\frac{\lambda}{2} + x}, \quad (\lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm N;\ N = \infty).$$

Tak obdržíme nejprvé

$$A\pi = -\sum_{\lambda, h} \left(\frac{-\varDelta}{h}\right) \frac{1}{\frac{\lambda}{2} + \frac{h}{\varDelta}}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots \varDelta - 1;\ \lambda = \pm 1, \pm 3, \ldots \pm N \\ N = \infty \end{pmatrix}$$

Přetvoření tohoto součtu provedeme nyní pro lichá $\varDelta$ a pro sudá $\varDelta$ zvlášť.

1) Buď $\varDelta$ liché.

Pak bude lze psáti místo (1)

$$A\pi = -\left(\frac{2}{\varDelta}\right) \sum_{\lambda, h} \left(\frac{-\varDelta}{2h}\right) \frac{2\varDelta}{2h + \lambda\varDelta}, \quad \begin{pmatrix} 0 < h < \varDelta;\ \lambda = \pm 1, \pm 3, \ldots \pm N \\ N = \infty \end{pmatrix}$$

Výraz $2h + \lambda\varDelta = k$ probíhá lichá čísla intervallu $(-N\varDelta + 2 \ldots N\varDelta + 2\varDelta - 2)$, dále bude dle známých vlastností Legendreova symbolu

$$\left(\frac{-\varDelta}{2h}\right) = \left(\frac{-\varDelta}{k}\right) \operatorname{sgn.} k,$$

tedy

$$\left(\frac{-\varDelta}{2h}\right) \frac{1}{2h + \lambda\varDelta} = \left(\frac{-\varDelta}{k}\right) \frac{1}{|k|},$$

a dle toho při $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

$$A\pi = -\left(\frac{2}{\varDelta}\right) \sum_{k} \left(\frac{-\varDelta}{k}\right) \frac{2\varDelta}{|k|};$$

členy příslušné hodnotám $k = \lambda$ a $k = -\lambda$ jsou stejny, tedy

$$A\pi = -\left(\frac{2}{\varDelta}\right) \sum_{\lambda} \left(\frac{-\varDelta}{\lambda}\right) \frac{4\varDelta}{\lambda}, \quad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots)$$

Abychom mohli za λ klásti veškera čísla celistvá kladná, vzpomeňme, že

$$\left(\frac{-4\varDelta}{\lambda}\right) = \left(\frac{-\varDelta}{\lambda}\right)$$

pro lichá λ, ale zmizí pro λ sudá:

$$A\pi = -\left(\frac{2}{\varDelta}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4\varDelta}{n}\right) \frac{4\varDelta}{n}.$$

Jest však

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{-4\Delta}{n}\right)\frac{\sqrt{4\Delta}}{n\pi} = Cl\,(-4\Delta),$$

a tedy

$$A = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)2\sqrt{\Delta}\,Cl\,(-4\Delta),$$

a odtud po dosazení hodnoty

$$Cl\,(-4\Delta) = (2-\varepsilon)\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta)\,,\ \varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta}\right),$$

$$A = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}(1-2\varepsilon)\ Cl\,(-\Delta)\,,$$

t. j.

$$(2)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}(1-2\varepsilon)\ Cl\,(-\Delta),$$

($-\Delta$ libovolný záporný diskriminant lichý; $\varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta}\right)$)

Dále nechť jest

$$2)\ \Delta = 4P,\ P \equiv 1\ (\text{mod. } 4).$$

Tu bude pro lichá λ

$$\left(\frac{-\Delta}{h+\frac{\Delta\lambda}{2}}\right) = \left(\frac{-4P}{h+2\lambda P}\right) = \left(\frac{-4}{h+2\lambda P}\right)\left(\frac{P}{h+2\lambda P}\right);$$

a však

$$\left(\frac{P}{h+2\lambda P}\right) = \left(\frac{P}{h}\right),\ \left(\frac{-4}{h+2\lambda P}\right) = \left(\frac{-4}{h+2}\right)\operatorname{sgn.}(h+2\lambda P)\,,$$

tedy při $k = h + 2\lambda P$

$$\left(\frac{-\Delta}{k}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn.} k\,,$$

ježto

$$\left(\frac{-4}{h+2}\right) = -\left(\frac{-4}{h}\right).$$

Bude tedy

$$(\alpha)\qquad \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\Delta}{h+\frac{\Delta\lambda}{2}} = -\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{\Delta}{|k|}\,,$$

a výraz $k = h + 2\lambda P = h + 2P + \nu\Delta$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm + 2, \ldots$) probíhá veškera čísla celistvá mimo $k = \mu\Delta + 2P$. Při odvození rovnice (α) mohli jsme předpokládati h nesoudělno s P, a pak k zůstane od nully různo; vyjde tak

$$A\,\pi = +\sum\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{\Delta}{|k|} = 2\,\Delta\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n},$$

odtud

$$A = 2\sqrt{\Delta}\,K,$$

tedy

$$(\beta)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,Cl\,(-\Delta)\,.$$

V případě

$$3)\qquad \Delta = 4\,P,\ P \equiv -1\ (\mathrm{mod.}\ 4)$$

jest $-P$ diskriminantem a tedy

$$\left(\frac{-\Delta}{h+\frac{\Delta\lambda}{2}}\right) = \left(\frac{4}{h+2\lambda P}\right)\left(\frac{-P}{h+2\lambda P}\right) = \left(\frac{4}{h}\right)\left(\frac{-P}{h}\right)\operatorname{sgn.}(h+2\lambda P)$$

tedy při substituci $h + 2\lambda P = k$.

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \left(\frac{-\Delta}{k}\right)\ \operatorname{sgn}.\ k,$$

takže zde vyjde

$$(\beta')\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = -\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,Cl\,(-\Delta)\,;$$

oba případy 2) a 3) se shrnují ve vzorec

$$(3)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \pm\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,Cl\,(-\Delta),\quad (\Delta \equiv \pm 4\ \mathrm{mod.}\ 16)$$

V dalším případě

$$4)\qquad \Delta = 8\,P,$$

kde P je liché, máme při $k = h + 4\lambda P$

$$\left(\frac{-\Delta}{h+\frac{\lambda\Delta}{2}}\right) = \left(\frac{-\Delta}{k}\right) = \left(\frac{-8\,P}{h+4\,P\lambda}\right) = \left(\frac{\mp 8}{h+4\lambda P}\right)\left(\frac{\pm P}{h+4\lambda P}\right),$$

kde

$$\pm 1 = (-1)^{\frac{P-1}{2}}$$

takže $\pm P$ je diskriminant.

Tu jest pak poslední výraz

$$\left(\frac{-\Delta}{k}\right) = \left(\frac{\mp 8}{h+4}\right)\left(\frac{\pm P}{h}\right)\operatorname{sgn}.\ k = -\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn}.\ k.$$

a tedy

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\Delta}{h+\frac{\Delta\lambda}{2}} = -\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{\Delta}{|k|},$$

načež plyne z (1)

$$A\pi = \sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{2\Delta}{n}$$

$$(\beta'') \qquad A = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\, Cl(-\Delta).$$

Současně vyšetříme případ $\Delta = 2^r P$, $P \equiv \pm 1$ (mod. 4), $r > 3$. Tu bude při $k = h + \frac{\lambda\Delta}{2}$

$$\left(\frac{-\Delta}{k}\right) = \left(\frac{\mp 2^r}{h + 2^{r-1}\lambda P}\right)\left(\frac{\mp P}{h + 2^{r-1}\lambda P}\right).$$

Platí-li hořejší znamení, bude

$$\left(\frac{P}{h + 2^{r-1}\lambda P}\right) = \left(\frac{P}{h}\right).$$

$$\left(\frac{-2^r}{h + 2^{r-1}\lambda P}\right) = \left(\frac{2^r}{h}\right)\operatorname{sgn}.k,$$

takže vyjde

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{-\Delta}{k}\right) = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn}.k.$$

Platí-li však dolejší znamení, bude

$$\left(\frac{2^r}{h + 2^{r-1}\lambda P}\right) = \left(\frac{2^r}{h}\right), \quad \left(\frac{-P}{h + 2^{r-1}\lambda P}\right) = \left(\frac{-P}{h}\right)\operatorname{sgn}.k,$$

tedy opět rovnice (γ), takže tu

$$A\pi = -\sum\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{\Delta}{|k|} = -\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{2\Delta}{n}$$

$$A = -\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\, Cl(-\Delta).$$

Porovnáme-li se vzorcem (β''), kde $\frac{\Delta}{8}$ je liché, náš případ, kde $\frac{\Delta}{8}$ je sudé, nacházíme obecný vzorec

$$(4) \qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = (-1)^{\frac{\Delta}{8}-1}\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\, Cl(-\Delta),\ (\Delta \equiv 0 \text{ mod. } 8).$$

V těchto vzorcích ponechali jsme symbol τ, jakkoli jest $\tau = 2$ ve všech případech vzorce (4).

VI.

IV.

Též součty

$$B = \sum_{h=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \operatorname{cotg} \left(\frac{h}{\Delta} - \frac{r}{s}\right) \pi$$

připouštějí jednoduché vyjádření, a sice budou výsledky obecnější, operujeme-li přímo s řadou

$$\pi \operatorname{cotg} x \pi = \sum_{\nu = -N}^{N} \frac{1}{x + \nu}, \quad N = \infty ,$$

nežli kdybychom užívali jiných vztahů platných pouze pro hlavní diskriminanty, jaké jsme vyložili ve výše citovaných rozpravách.

Nejprvé máme

$$B \pi = \sum_{\nu, h} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\Delta}{h + \Delta \nu - \frac{\Delta r}{s}},$$

a klademe-li $h + \Delta \nu = - k$, tedy

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{k}\right) \operatorname{sgn} k ,$$

vyjde

$$B \pi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{\Delta \operatorname{sgn} . k}{k + \frac{\Delta r}{s}} \tag{5}$$

Uvažujme nejprvé případ $s = 3$, $r = 1$ neb 2, předpokládajíce Δ nedělitelné třemi:

$$(\Delta, 3) \sim 1;$$

položme $3 k + \Delta r = m$, i bude

$$\left(\frac{3 \Delta}{m}\right) = \left(\frac{-3}{3 k + \Delta r}\right) \left(\frac{-\Delta}{3 k + \Delta r}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{3 k + \Delta r}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta r}\right) \operatorname{sgn} . m, \left(\frac{-3}{3 k + \Delta r}\right) = \left(\frac{-\Delta}{3 k}\right) \operatorname{sgn}. m k ,$$

tedy

$$\left(\frac{3 \Delta}{m}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta r}\right) \left(\frac{-\Delta}{3 k}\right) \operatorname{sgn} . k,$$

aneb ježto

$$\left(\frac{-3}{\Delta}\right) \left(\frac{-\Delta}{3}\right) = -1 ,$$

$$\left(\frac{3 \Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-3}{r}\right) \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \operatorname{sgn}. k = -\left(\frac{r}{3}\right) \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \operatorname{sgn}. k ,$$

tedy

$$\left(\frac{-\Delta}{k}\right) sgn.\ k = -\left(\frac{r}{3}\right)\left(\frac{3\Delta}{m.}\right).$$

Vzorec (5) bude tedy zníti

$$B\pi = -\left(\frac{r}{3}\right) 3\Delta \sum_m \left(\frac{3\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}$$

kde m probíhá kladná i záporná čísla hovící podmínce

$$m \equiv \Delta r \pmod{3}.$$

Lišíme-li čísla kladná m a záporná $m = -n$, máme

$$-\left(\frac{r}{3}\right) B\frac{\pi}{3\Delta} = \sum\left(\frac{3\Delta}{m}\right)\frac{1}{m} + \sum\left(\frac{3\Delta}{n}\right)\frac{-1}{n} \begin{pmatrix} m > 0,\ n > 0 \\ m \equiv \Delta r,\ n \equiv -\Delta r \bmod. 3. \end{pmatrix}$$

Ježto

$$\left(\frac{-3}{m\Delta r}\right) = 1, \left(\frac{-3}{n\Delta r}\right) = -1,$$

můžeme náš výsledek vyjádřiti jednodušeji takto

$$-\left(\frac{r}{3}\right) B\frac{\pi}{3\Delta} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3\Delta}{k}\right)\left(\frac{-3}{k\Delta r}\right)\frac{1}{k},$$

a odtud

$$-B\frac{\pi}{3\Delta}\cdot\left(\frac{-3}{\Delta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3\Delta}{k}\right)\left(\frac{-3}{k}\right)\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-9\Delta}{k}\right)\frac{1}{k}$$

Ježto

$$\frac{3\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-9\Delta}{k}\right)\frac{1}{k} = Cl(-9\Delta),$$

nacházíme

$$B = -\left(\frac{-3}{\Delta}\right)\sqrt{\Delta}\, Cl(-9\Delta) = -\left(\frac{-3}{\Delta}\right) 3\left(1 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)\frac{1}{3}\right) K\sqrt{\Delta}$$

čili

$$(6) \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{r}{3}\right)\pi = -\left[1 - 3\left(\frac{-\Delta}{3}\right)\right]\cdot\frac{2\sqrt{\Delta}}{\pi} Cl(-\Delta),$$

($-\Delta$ libovolný záporný diskriminant nedělitelný devíti; $r = 1$ neb $r = 2$).

Ukážeme ihned, že tento vzorec platí i pro Δ dělitelné třemi.

VI.

Je-li $\varDelta$ dělitelno třemi, bude $\varDelta = 3\,D$, kde D jest kladný diskriminant, rovnice (5) zní

$$B\,\pi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-3\,D}{k}\right) \frac{\varDelta \operatorname{sgn.} k}{k + r\,D},$$

tedy

$$B\,\frac{\pi}{\varDelta} = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-3}{n}\right)\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n + D\,r} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-3}{n}\right)\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n - D\,r}$$

$$= S = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-3}{n}\right)\left(\frac{D}{n + D\,r}\right)\frac{1}{n + D\,r} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-3}{n}\right)\left(\frac{D}{n - D\,r}\right)\frac{1}{n - D\,r}.$$

Předpokládejme $D\,r \equiv 1 \pmod{3}$, a položme

$$n + D\,r = m \;,\; n - D\,r = m'' \;,\; \text{je-li } n \equiv 1 \pmod{3}$$
$$n + D\,r = m' \;,\; n - D\,r = m''' \;,\; \text{je-li } n \equiv 2 \pmod{3},$$

takže

$$m \equiv 2 \;,\; m'' \equiv 0 \;,\; m' \equiv 0 \;,\; m''' \equiv 1 \pmod{3},$$

a při tom $m > D\,r$, $m' > D\,r$, $m'' > -D\,r$, $m''' > -D\,r$; tím se naše dvě řady pro S rozpadnou na

$$S = \sum \left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} - \sum \left(\frac{D}{m'}\right)\frac{1}{m'} + \sum \left(\frac{D}{m''}\right)\frac{1}{m''} - \sum \left(\frac{D}{m'''}\right)\frac{1}{m'''}.$$

Záporné hodnoty m''' lze psáti $-m$, $m \equiv 2 \pmod{3}$, a tedy se příslušné členy řady čtvrté sloučí s řadou první, podobně záporné hodnoty m'' jsou tvaru $-m'$ a příslušné členy řady třetí lze vložiti do řady druhé, takže se budou řady druhá a třetí po této modifikaci rušiti, i zbude

$$S = \sum_{m} \left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} - \sum_{n} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} \quad \left(\begin{matrix} m \,.\, n > 0, \\ m \equiv 2 \,,\, n \equiv 1 \bmod. 3 \end{matrix}\right)$$

a tento aggregát lze psáti jednoduše takto

$$S = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-3\,D}{k}\right)\frac{1}{k}.$$

Kdyby bylo $D\,r \equiv -1 \pmod{3}$, byly by naše čtyři řady psány s příponami

$$m \equiv 0 \;,\; m' \equiv 1 \;,\; m'' \equiv 2 \;,\; m''' \equiv 0 \pmod{3},$$

a zbylo by

$$S = -\sum \left(\frac{D}{m'}\right)\frac{1}{m'} + \sum \left(\frac{D}{m''}\right)\frac{1}{m''} \qquad (m' > 0 \,,\, m'' > 0)$$

jako předešle, takže v obou případech

$$S = -\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\varDelta}{k}\right)\frac{1}{k} = -K\,.\,\frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}},$$

VI.

a odtud

$$B = -\frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau}\, Cl(-\Delta)$$

čili

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{3}\right)\pi = -Cl\,(-\Delta)\sqrt{\Delta}\,;$$

zde pravá strana splývá s výrazem (6), uváží-li se, že tu $\left(\frac{-\Delta}{3}\right) = 0$, $\tau = 2$. Je tedy tento případ obsažen ve vzorci (6).

Kdyby konečně $D \equiv 0$ (mod. 3), t. j. kdyby Δ bylo násobkem devíti, měli bychom

$$\left(\frac{-3}{k}\right)\operatorname{sgn} k = \left(\frac{-3}{k+rD}\right)\operatorname{sgn}\,(k+rD) = \left(\frac{-3}{m}\right)\operatorname{sgn} m \text{ při } m = k + D\,r,$$

a tedy

$$B\,\frac{\pi}{\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|\,m\,|} = 2\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\Delta}}\;Cl\,(-\Delta),$$

takže zde

$$B = 2\sqrt{\Delta}\;Cl\,(-\Delta)$$

$$\text{(7)}\qquad \sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{3}\right)\pi = 2\sqrt{\Delta}\;Cl\,(-\Delta)\;\left(\underset{r\,=\,1\text{ neb }r\,=\,2}{\Delta \equiv 0 \text{ mod. } 9}\right).$$

Přistupme k případu $s = 4$, tedy $r = 1$ neb $r = 3$. Je-li Δ liché, bude dle (5)

$$B\,\frac{\pi}{4\,\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{\operatorname{sgn}.\,k}{4\,k+\Delta\,r},$$

a $m = 4\,k + \Delta\,r$ bude liché; jest pak

$$\left(\frac{4\,\Delta}{m}\right) = \left(\frac{-4}{m}\right)\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = \left(\frac{-4}{\Delta\,r}\right)\left(\frac{-\Delta}{4\,k}\right)\operatorname{sgn}.\,k\,,$$

tedy ježto

$$\left(\frac{-\Delta}{4}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\operatorname{sgn} k = \left(\frac{-4}{\Delta\,r}\right)\left(\frac{4\,\Delta}{m}\right),$$

a odtud plyne

$$B\,\frac{\pi}{4\,\Delta} = \left(\frac{-4}{\Delta\,r}\right)\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*}\left(\frac{4\,\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\,,\quad (m \equiv r\,\Delta \text{ mod. } 4).$$

Lišíce kladná m od záporných, máme

$$B\,\frac{\pi}{4\,\Delta} = S = \left(\frac{-4}{r\,\Delta}\right)\sum_{m>0}\left(\frac{4\,\Delta}{m}\right)\frac{1}{m} - \left(\frac{-4}{r\,\Delta}\right)\sum_{n>0}\left(\frac{4\,\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}\,,$$

$$(m \equiv r\Delta,\ n \equiv -r\Delta \bmod. 4)$$

Ježto

$$\left(\frac{-4}{r\Delta}\right)\left(\frac{4}{m}\right) = 1,\ \left(\frac{-4}{r\Delta}\right)\left(\frac{-4}{n}\right) = -1$$

vychází

$$S = \sum \left(\frac{-4\Delta}{m}\right)\frac{1}{m} + \sum \left(\frac{-4\Delta}{n}\right)\frac{1}{n} \qquad (m \equiv -n \equiv r\Delta \pmod{4}).$$

Zde m, n dohromady probíhají veškera čísla lichá, i bude lze psáti

$$S = \sum_1^{\infty} \left(\frac{-4\Delta}{k}\right)\frac{1}{k} = \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}\, Cl(-4\Delta),$$

takže

$$B = 2\sqrt{\Delta}\, Cl(-4\Delta) = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta)$$

čili

$$(8) \qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{r}{4}\right)\pi = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta)$$

($-\Delta$ libovolný lichý diskriminant záporný; $r = 1$ neb $r = 3$).

Buď dále $\Delta = 4D$, $D \equiv 1$ (mod. 4), tedy dle (5)

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-4D}{k}\right)\frac{sgn.\,k}{k + Dr} = S.$$

Číslo $k + Dr$ bude ruzné parity od k, tedy sudé; rozložme S jak následuje

$$S = \sum_{n>0} \left(\frac{-4}{n}\right)\left(\frac{D}{n + rD}\right)\frac{1}{n + rD} + \sum_{n<0} \left(\frac{-4}{n}\right)\left(\frac{D}{n - rD}\right)\frac{1}{n - rD},$$

a kladouce $n + rD = m$, resp. $n - rD = m$, $\left(\frac{-4}{r}\right) = \varrho$, rozeznávejme hodnoty n dle znamení $\left(\frac{-4}{n}\right)$. Tak obdržíme

$$S = \varrho \sum \left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} - \varrho \sum \left(\frac{D}{m'}\right)\frac{1}{m'} + \varrho \left(\frac{D}{m''}\right)\frac{1}{m''} - \varrho \sum \left(\frac{D}{m'''}\right)\frac{1}{m'''},$$

kde $m \equiv 2r$, $m' \equiv m'' \equiv 0$, $m''' \equiv 2r$ (mod. 4), dále $m > rD$, $m' > rD$, $m'' < -rD$, $m''' \geqslant rD$; členy o $m''' < 0$ se sloučí s řadou první, podobně členy o $m'' < 0$ s řadou druhou a po této úpravě se výrazy na pravé straně po dvou ruší, takže

$$S = 0,$$

t. j.

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{r}{4}\right)\pi = 0$$

Kdyby bylo $\Delta = 4P$, $P \equiv 3$ (mod. 4), měli bychom

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \sum \left(\frac{4}{k}\right)\left(\frac{-P}{k}\right)\frac{sgn\,.\,k}{k+Pr}$$

$$k + Pr = 2m\,,\ \left(\frac{4}{k}\right) = 1,\ \left(\frac{-P}{k}\right) = \left(\frac{-P}{2m}\right) \mathrm{sgn}\,.\,(mk),$$

tedy

$$\left(\frac{-P}{k}\right) sgn\,.\,k = \left(\frac{-P}{2m}\right) sgn\,.\,m,$$

z čehož vychází

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-P}{2m}\right)\frac{1}{|2m|} = \left(\frac{2}{P}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-P}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(\frac{2}{P}\right)\frac{2\pi}{\tau}\frac{Cl(-P)}{\sqrt{P}},$$

a vzhledem k tomu, že $\dfrac{\Delta}{\sqrt{P}} = 2\sqrt{\Delta}$,

$$B = \left(\frac{2}{P}\right)\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,Cl(-P).$$

Zde

$$\frac{2}{\tau}\,Cl(-P) = \frac{Cl(-4P)}{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}$$

tedy

$$B = \left(\frac{2}{P}\right)\frac{2\sqrt{\Delta}}{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}\,Cl(-\Delta)\,.$$

V předešlém případě bylo $\Delta = 4P$, $P \equiv 1$ (mod. 4), $B = 0$; oba případy lze shrnouti ve vzorec společný

$$B = \frac{1 - \left(\frac{-4}{P}\right)}{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}\left(\frac{2}{P}\right) Cl(-\Delta)\sqrt{\Delta}$$

t. j.

$$(9)\quad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{r}{4}\right)\pi = \frac{1 - \left(\frac{-4}{P}\right)}{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}\left(\frac{2}{P}\right) Cl(-\Delta)\sqrt{\Delta}$$

($\Delta = 4P$, P liché; $r = 1$ neb $r = 3$).

Buď dále $\Delta = 8P$, $P \equiv 1$ (mod. 4), $s = 4$, $r = 1$ neb $r = 3$; rovnice (5) poskytne

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-8}{k}\right)\left(\frac{P}{k}\right)\frac{\operatorname{sgn} k}{k+2Pr} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{8}{k}\right)\left(\frac{P}{k+2rP}\right)\frac{1}{k+2rP}$$

a substitucí $k+2rP=m$ obdržíme odtud vzhledem k identitám

$$\left(\frac{8}{k}\right) = (-1)^{\frac{r-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{8}{m}\right),\quad (-1)^{\frac{k-1}{2}} = -(-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

z nichž vychází

$$(-1)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{8}{k}\right) = -\left(\frac{-4}{r}\right)\left(\frac{8}{m}\right).$$

výsledek:

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \pm\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{8P}{m}\right)\frac{1}{m} = 0.$$

Dále jest pro $\Delta = 8P$, $P \equiv -1 \pmod{4}$

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{8}{k}\right)\left(\frac{-P}{k}\right)\frac{\operatorname{sgn} k}{k+2Pr}$$

a klade-li se $k+2Pr=m$,

$$\left(\frac{-P}{k}\right)\operatorname{sgn}.k = \left(\frac{-P}{m}\right)\operatorname{sgn}.m,\quad \left(\frac{8}{k}\right) = \left(\frac{4}{r}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{8}{m}\right)$$

tedy

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \left(\frac{-4}{r}\right)\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{8}{m}\right)\left(\frac{-P}{m}\right)\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}\operatorname{sgn}.m}{m} =$$

$$\pm\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-4}{m}\right)\left(\frac{8}{m}\right)\left(\frac{-P}{m}\right)\frac{1}{m} = 0;$$

je tedy v obou případech $B=0$, t. j.

(10) $$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{4}\right)\pi = 0.\quad (\Delta = 8P,\ P \text{ liché}).$$

Konečně buď

$$\Delta = 2^a P,\ P \text{ liché},\ a > 3;$$

pak bude

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mp 2^a}{k}\right)\left(\frac{\pm P}{k}\right)\frac{\operatorname{sgn}.k}{k+2^{a-2}rP}$$

Položíme $k + 2^{a-2}rP = m$; v případě hořejších znamení máme pak

$$\left(\frac{-1}{k}\right)\operatorname{sgn}.k = (-1)^{\frac{k-1}{2}},\ \left(\frac{P}{k}\right) = \left(\frac{P}{m}\right).\left(\frac{2^a}{k}\right) = \left(\frac{2^a}{m}\right);$$

tedy

$$\left(\frac{-2^a}{k}\right)\left(\frac{P}{k}\right)\frac{\operatorname{sgn}.k}{m} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{2^a}{m}\right)\left(\frac{P}{m}\right)\frac{1}{m} =$$

$$\left(\frac{-4}{m}\right)\left(\frac{2^a}{m}\right)\left(\frac{P}{m}\right)\frac{1}{|m|} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|}.$$

tedy

$$B\frac{\pi}{\Delta} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}$$

V případě znamení dolejších pak rovněž

$$\left(\frac{2^a}{k}\right) = \left(\frac{2^a}{m}\right).\left(\frac{-P}{k}\right)\operatorname{sgn}.k = \left(\frac{-P}{m}\right)\operatorname{sgn}.m$$

a tedy

$$B\frac{\pi}{\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2^a}{m}\right)\left(\frac{-P}{m}\right)\frac{1}{|m|} = 2\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m};$$

v obou případech je tudíž

$$B = 2\sqrt{\Delta}\,Cl(-\Delta),$$

t. j.

$$(11)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{h}{\Delta}\quad\frac{r}{4}\right)\pi = 2\sqrt{\Delta}\,Cl(-\Delta)\ ;\ (\Delta \equiv 0 \bmod. 16).$$

Poznamenejme ještě, aby odstraněno bylo veškeré nedorozumění, že symbolem $Cl(-\Delta)$ je tu veskrze značen počet forem primitivních, takže se tu formy dělitelné číslem nějakým jednotku převyšujícím nečítají. Tak na př. jest $Cl(-16) = 1$, poněvadž k diskriminantu -16 přísluší pouze jedna třída primitivní $(1, 0, 4)$, kdežto druhá třída $(2, 0, 2)$ není více primitivní.