Matyáš Lerch

Sur une amélioration de la méthode d'approximation de Newton

Enseign. Math. 6 (1904), 292–293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501561

SUR UNE AMÉLIORATION
DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON

Etant donné un système d'équations analytiques à n inconnues

$$f_1 = 0 , f_2 = 0 , \ldots , f_n = 0 , \tag{1}$$

dont on connaît une solution approchée $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$, on trouve un système de valeurs avec l'approximation plus avancée

$$x_1 + \delta x_1 , x_2 + \delta x_2 , \ldots , x_n + \delta x_n , \tag{2}$$

si l'on détermine les corrections δx_ν au moyen des équations linéaires

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + f_\mu (x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = 0 , \ (\mu = 1 , 2 , 3 , \ldots , n) . \tag{2*}$$

C'est la méthode de Newton. Cela posé, pour juger l'approximation obtenue, on calcule les valeurs

$$f_\mu (x_1 + \delta x_1 , x_2 + \delta x_2 , \ldots , x_n + \delta x_n) ;$$

je dis qu'on perfectionne considérablement les résultats, si au moyen des quantités qu'on vient d'obtenir on détermine les corrections secondes $\delta' x_\nu$ par les équations

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_\mu (x_1 , x_2 , \ldots x_n) \delta' x_\nu + f_\mu (x_1 + \delta x_1 , x_2 + \delta x_2 , \ldots) = 0 \tag{3}$$

et qu'on prenne $x_\nu + \delta x_\nu + \delta' x_\nu$ comme les valeurs des inconnues.

Démonstration. — En écrivant les inconnues sous la forme $x_\nu + dx_\nu$, et faisant usage du théorème de Taylor, on aura les équations exactes

$$0 = f_\mu (x_1 , x_2 , \ldots x_n) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} d^p f_\mu . \tag{4}$$

En supprimant les séries qui figurent aux deuxièmes membres, on aura un système linéaire pour les inconnues $dx_\nu = \delta x_\nu$ qui est exactement le système d'équations de Newton (2*).

Cela posé, j'obtiendrai une solution plus satisfaisante, si au lieu de supprimer les séries dans les équations (4), je leur substitue des valeurs approchées formées au moyen des différentielles $dx_\nu = \delta x_\nu$. Or on a, dans cette hypothèse,

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} d^p f_\mu = f_\mu(\ldots x_\nu + \delta x_\nu \ldots) - f_\mu(\ldots x_\nu \ldots) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu ;$$

en substituant ces valeurs, les équations (4) deviennent

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} (dx_\nu - \delta x_\nu) + f_\mu(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots x_n + \delta x_n) = 0 ,$$

d'où il vient le système (3), si l'on fait $dx_\nu - \delta x_\nu = \delta' x_\nu$, ce qui achève la démonstration.

Dans le cas d'une seule inconnue, la méthode s'exprime par les deux équations

$$\delta x = -\frac{f(x)}{f'(x)} , \quad \delta' x = -\frac{f(x + \delta x)}{f'(x)} ,$$

x étant la valeur approchée donnée, et $x + \delta x + \delta' x$ la valeur améliorée obtenue par la méthode.

Pour éclaircir sur un exemple, je prends l'équation $x^3 - 5 = 0$ qui a la solution $1,7099759$; je fais $x = 1,71$ et je détermine les valeurs

$$f(x) = 0,000211 , \qquad f'(x) = 8,7723 ,$$

d'où

$$\delta x = -0,000024052 ,$$
$$x + \delta x = 1,709975948 .$$

Je détermine ensuite pour le contrôle

$$f(x + \delta x) = -\frac{29679}{10^{18}} ,$$

d'où

$$\delta' x = -\frac{f(x + \delta x)}{f'(x)} = \frac{30755}{10^{14}} ,$$

ce qui donne la valeur de l'inconnue

$$x + \delta x + \delta' x = 1,70997594769245 .$$

M. Lerch (Fribourg, Suisse).