Matyáš Lerch

Arithmetické odvození Lejeune-Dirichletových výsledků o počtu tříd kvadratických forem

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 7 (1898), č. 5, 1–51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501507

Arithmetické odvození Lejeune Dirichletových výsledků o počtu tříd kvadratických forem.

Sdílí

M. Lerch.

(Předloženo 17. ledna 1898.)

Kvadratické formy $ax^2+bxy+cy^2$ čili (a, b, c), v nichž součinitelé a, b, c jsou čísla celistvá, byly předmětem studií již v předešlém století; prvními výsledky ceny trvalé proslavili se již Euler a Lagrange. Poslední ukázal, že formy ty, v nichž diskriminant

$$D=b^2-4ac$$

je dané číslo celistvé, rozpadají se v konečný počet tříd; k průkopníkům této zajímavé partie mathematické počítati dlužno též Legendrea, třeba se jemu nebylo vždy podařilo v abstraktním tomto oboru proniknouti až k jádru každého jím studovaného detailu.

Největších zásluh jak o systematické spracování theorie tak o její věcné obohacení dobyl sobě Gauss svými nesmrtelnými Disquisitiones. Gauss modifikoval nejprvé pojem rovnomoci (ekvivalence) forem v ten způsob, že nazval dvě formy (a, b, c), (a', b', c') rovnomocnými, je-li lze docíliti identity

$$ax^2+bxy+cy^2=a'x_1{}^2+b'x_1y_1+c'y_1{}^2$$

linearnou substitucí

$$x=\alpha x_1+\beta y_1\,,\quad y=\gamma x_1+\delta y_1\,,$$

jejíž determinant $\alpha\delta-\beta\gamma$ má hodnotu 1, kdežto Lagrange připouštěl také determinant -1. Toto omezení pojmu ekvivalence, které Gauss rozlišil adjektivy »vlastní« a »nevlastní«, ukázalo se věci přiměřeným mimo jiné též aplikacemi analytickými.

Dvě formy rovnomocné s třetí jsou rovnomocny též vespolek; na základě toho shrnujeme veškery vespolek rovnomocné formy v jednu třídu forem kvadratických. Formy tétéž třídy mají společný diskriminant, naopak ale nejsou vždy formy mající týž diskriminant rovnomocny. Avšak třídy forem odpovídající danému diskriminantu jsou vždy v počtu konečném (Lagrange). Pro stanovení tohoto počtu tříd forem kvadratických podal Gauss mnohé vzácné výzkumy, ale vyjádření jeho analytickými výrazy obecně platnými podal první Lejeune Dirichlet.*) Tento po příkladu Gaussově uvažoval však formy $ax^2+2bxy+cy^2$, v nichž prostřední součinitel je číslo sudé $2b$; že toto omezení jest jednoduchosti theorie na obtíž, poznal Kronecker, jehož příkladu se přidržíme, zabývajíce se formami

$$ax^2+bxy+cy^2,$$

v nichž střední součinitel b je sudý neb lichý.

Bude zde třeba vyložiti smysl některých symbolů, jichž se v této partii téměř všeobecně užívá.

a) Je-li p číslo kmenné, kladné a liché, a číslo celistvé číslem p nedělitelné, bude platit shoda

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon \pmod{p},$$

kde ε je buď 1 aneb -1. Toto číslo ε znamenáme podle Legendrea takto

$$\left(\frac{a}{p}\right).$$

Je-li $\left(\frac{a}{p}\right)=1$, pak shoda druhého stupně

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

je možna; v případě, kdy $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ ale tato shoda nemá řešení.

b) Je-li a číslem kmenným p dělitelno, píšeme

$$\left(\frac{a}{p}\right)=0.$$

c) Je-li nyní n liché číslo kladné aneb záporné, a $n=\pm pp'p''$ jeho rozklad v kmenné činitele, klademe s Jacobiem

*) Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres (Crelleův žurnál, sv. 19 a 21; Lejeune Dirichlet's Werke sv. I., str. 411).

$$\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{p'}\right)\left(\frac{a}{p''}\right)\cdots\cdots$$

Je-li tedy největší společný dělitel čísel a a n větší jedné, bude $\left(\frac{a}{n}\right)$ nullou, v ostatních případech buď $+1$ neb -1.

d) Kronecker připustil ještě za n čísla sudá, i klade v případě

$$n=2^{\alpha}n', \; (n' \text{ liché})$$

$$\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{2^{\alpha}}{a}\right)\left(\frac{a}{n'}\right);$$

při tom se předpokládá, že a jest liché, jinak by společný dělitel čísel a a n byl $\geqq 2$, a tu by se vzalo

$$\left(\frac{a}{n}\right)=0.$$

Tak definováno *znaménko Legendreovo* ve všech případech. Vlastnosti jeho předpokládáme tuto za známé, jako mnoho jiných věcí z elementů; při tom nicméně nebude od místa zmíniti se, že pro lichá n platí rovnice

$$\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \; (n>0)$$

dále

$$\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}, \; (n\gtreqless 0),$$

a že zákon reciprocity

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}\left(\frac{n}{m}\right)$$

platí pro libovolná dvě čísla lichá m a n, je-li aspoň jedno z nich kladné

e) Z tvaru diskriminantu

$$D=b^2-4ac$$

plyne, že je vždy

$$\text{buď } D\equiv 1 \pmod{4} \text{ aneb } D\equiv 0 \pmod{4}.$$

Dle toho nemůže býti každé číslo diskriminantem. Je-li však jedna neb druhá z těchto shod splněna, existují vždy formy diskriminantu D. Neboť v případě $D\equiv 0$ (mod. 4) máme na př. formu diskriminantu D

$$x^2-\frac{D}{4}y^2,$$

kdežto v případě $D \equiv 1$ (mod. 4) nám podává příklad

$$x^2 + xy - \frac{D-1}{4} y^2$$

takovou formu.

Proto pravíme o čísle n, které hoví jedné ze shod těchto

$$n \equiv 1 \pmod{4}, \quad n \equiv 0 \pmod{4},$$

že *má tvar diskriminantní*.

f) Buď nyní D diskriminantem. Je-li D liché, pak znamenejme Q^2 největšího dělitele čísla D, který jest úplným čtvercem, podíl $\frac{D}{Q^2} = D_0$ je celistvé číslo tvaru diskriminantního, jež sestává ze samých lichých činitelů kmenných vespolek různých.

Je-li však D sudé, bude tvaru

$$D = 4 . 2^\nu P Q_1^2$$

kde P je liché a složeno z různých činitelů kmenných, Q_1^2 je největší lichý čtvercový dělitel čísla D, a při tom $\nu \geqq 0$.

Je-li ν liché, položíme

$$D_0 = 8P, \quad Q = 2^{\frac{\nu-1}{2}} Q_1,$$

načež

$$D = D_0 Q^2.$$

Je-li však ν sudé, tu třeba rozeznávati případ

$$P \equiv 1 \pmod{4}$$

od případu druhého

$$P \equiv -1 \pmod{4}.$$

V případě prvním má P tvar diskriminantní, a lze tedy klásti

$$D_0 = P, \quad Q = 2^{1+\frac{\nu}{2}} Q_1,$$

načež

$$D = D_0 Q^2.$$

Ve druhém případě číslo P nemá tvar diskriminantní, ale má jej $4P$ takže lze klásti

$$D_0 = 4P, \quad Q = 2^{\frac{\nu}{2}} Q_1,$$

načež opět

$$D = D_0 Q^2.$$

Ve všech případech podaří se tedy rozklad

$$D = D_0 Q^2,$$

kde číslo D_0 je tvaru diskriminantního, neobsahuje pak žádného lichého činitele čtvercového, obsahuje činitele 4 jen tehdy, je-li toho k zachování jeho tvaru diskriminantního nevyhnutelně potřebí.

Toto číslo D_0 zove se ***diskriminantem hlavním*** či ***základním*** příslušným ku D.

Diskriminant hlavní D_0 je tedy buď číslo liché, prosté činitelů kvadratických, které hoví podmínce

$$D_0 \equiv 1 \text{ (mod. 4)}$$

aneb — je-li to číslo sudé — je $\frac{D_0}{4}$ celistvé číslo prosté činitelů kvadratických, které hoví jedné ze shod

$$\frac{D_0}{4} \equiv -1 \text{ (mod. 4), resp. } \frac{D_0}{4} \equiv 2 \text{ (mod. 4).}$$

O diskriminantech se snadno dokáže, že platí vztahy

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{m}{D}\right),$$

dále v případě kladného diskriminantu ($D > 0$)

$$\left(\frac{D}{D-m}\right) = \left(\frac{D}{m}\right),$$

a v případě záporného diskriminantu $D = -\varDelta$

$$\left(\frac{-\varDelta}{\varDelta - m}\right) = -\left(\frac{-\varDelta}{m}\right), \; 0 < m < \varDelta.$$

Obě rovnice lze sloučiti v jedinou

$$\left(\frac{D}{\varDelta - m}\right) = \left(\frac{D}{m}\right) \text{sgn. } D, \quad (\varDelta = |D|, \; 0 < m < \varDelta),$$

umluvíme-li se klásti

$$\text{sgn. } z = \begin{Bmatrix} 1 \text{ pro } z > 0 \\ 0 \;\;\text{»}\;\; z = 0 \\ -1 \;\;\text{»}\;\; z < 0 \end{Bmatrix}.$$

g) Konečně budeme užívati čísel Möbiusových

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \ldots\ldots,$$

kde $\varepsilon_1 = 1$, a obecně $\varepsilon_n = (-1)^\mu$, je-li číslo n složené ze samých různých činitelů v počtu μ. V tomto případě n nemá činitelů čtercových; má-li však n činitele čtvercové, klademe $\varepsilon_n = 0$.

To předeslavše, vzpomeňme okolnosti, že počet tříd kvadratických forem téhož diskriminantu je konečný. Podržíme-li z každé třídy pouze jednu formu jako její zástupce, obdržíme řadu forem různomocných

$$(a', b', c'),\quad (a'', b'', c''),\quad (a''', b''', c'''), \ldots\ldots (a^{(\omega)}, b^{(\omega)}, c^{(\omega)}),$$

které tvoří *úplnou soustavu forem diskriminantu D,* čili soustavu representantů všech tříd tohoto diskriminantu.

Znamenejme dále symbolem $\psi(D, n)$ počet řešení shody

$$x^2 \equiv D \pmod{n}.$$

V elementech nauky o číslech se dokazuje, že platí

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{2}\psi(D, 4m) =$$
$$\left[\left(\frac{D}{p_1}\right)^{k_1-1} + \left(\frac{D}{p_1}\right)^{k_1}\right] \cdot \left[\left(\frac{D}{p_2}\right)^{k_2-1} + \left(\frac{D}{p_2}\right)^{k_2}\right] \cdot \left[\left(\frac{D}{p_3}\right)^{k_3-1} + \left(\frac{D}{p_3}\right)^{k_3}\right] \cdots$$

kde rovnice

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots .$$

stanoví rozklad čísla (kladného) m v jeho kmenné činitele, takže p_1, p_2, p_3 ... jsou vespolek různá čísla kmenná (z nichž p_1 může býti rovno dvěma), a exponenty jsou kladné. Při tom se předpokládá, že pro $k = 1$ jest

$$\left(\frac{D}{p}\right)^{k-1} = \left(\frac{D}{p}\right)^0 = 1$$

i tehdy, je-li $\left(\frac{D}{p}\right)$ *nullou*, a že číslo m je nesoudělné s Q. Rovnici (1) bude lze též psáti takto:

$$\frac{1}{2}\psi(D, 4m) =$$
$$\text{(1}^a\text{)}\qquad \left(\frac{D}{p_1}\right)^{k_1-1} \left(\frac{D}{p_2}\right)^{k_2-1} \cdots \left[1 + \left(\frac{D}{p_1}\right)\right] \left[1 + \left(\frac{D}{p_2}\right)\right] \cdots$$

Co se tkne forem kvadratických daného diskriminantu, stačí se omeziti na formy primitivní.

Kvadratická forma

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

sluje *primitivní*, nemají-li součinitelé a, b, c společného činitele.

Formy, které nejsou primitivní, jsou tvaru

$$a_1 d x^2 + b_1 d x y + c_1 d y^2 = d(a_1 x^2 + b_1 x y + c_1 y^2)$$

a vzniknou z forem primitivních diskriminantu

$$b_1{}^2 - 4 a_1 c_1 = \frac{D}{d^2}$$

násobením činitelem d.

Je-li dále diskriminant $D = -\Delta$ číslo záporné, lze rozeznávati formy podle znamení prvního a posledního koefficientu. Neboť rovnice $\Delta + b^2 = 4ac$ vyžaduje, aby znamení veličin a a c bylo stejné a substitucí $x = \alpha x_1 + \beta y_1$, $y = \gamma x_1 + \delta y_1$ přejde forma (a, b, c) ve formu (a', b', c'), kde $a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$, kterýžto výraz má totéž znamená co a, neboť

$$4 a a' = (2 a \alpha + b \gamma)^2 + \Delta \gamma^2$$

je kladné. Formy rovnomocné s (a, b, c) mají tedy totéž znamení prvního a posledního činitele. Je-li toto znamení kladné, sluje forma kladnou, v opačném případě zápornou. Záporné formy obdrží se z kladných obrácením znamení v součinitelů, takže počet tříd záporných je týž jako počet tříd kladných. Hodnoty $ax^2 + bxy + cy^2$ jsou u kladné formy vesměs kladné.

Můžeme se tedy omeziti — u záporného diskriminantu $D = -\Delta$ — na stanovení počtu tříd primitivních a kladných; počet ten znamenati budeme $Cl(D)$ či $Cl(-\Delta)$.

V případě kladného diskriminantu roztřídění forem v kladné a záporné není možné; zde budeme znamenati $Cl(D)$ *počet tříd primitivních.*

I.

O formách záporného diskriminantu.

Buďte nyní

(2) $$(a', b', c'),\ (a'', b'', c''),\ \ldots\ (a^{(\omega)}, b^{(\omega)}, c^{(\omega)})$$

representanty různých tříd kladných forem primitivních záporného diskriminantu $-\Delta$, takže jich počet jest

$$\omega = Cl(-\Delta).$$

Bude-li třeba označení společného pro formy (2), užijeme symbolu (a, b, c).

Znamenejme nyní symbolem

$$N\,(l;\ a,\ b,\ c)$$

počet řešení rovnice

(3) $$a x^2 + b x y + c y^2 = l,$$

ve kterých *celistvá čísla* x, y *jsou nesoudělná.*

Pak platí známá věta

(4) $$\sum_{(a,\ b,\ c)} N\,(l;\ a,\ b,\ c) = \frac{\tau}{2}\,\psi\,(-\Delta,\ 4\,l),$$

kde součet v levo vztahuje se ke všem formám $(a,\ b,\ c)$ úplné soustavy (2), dále $\tau = 6$ pro $\Delta = 3$, pak $\tau = 4$ pro $\Delta = 4$ a konečně $\tau = 2$ pro $\Delta > 4$. Vztah tento se v elementech nauky o formách kvadratických dokazuje čistě arithmeticky, i jest základem analytických dedukcí Dirichletových, a též pro následující úvahy jest jediným východiskem.

Abychom dospěli k základní rovnici Dirichletově, bude nám potřebí poněkud upraviti hořejší vzorec (1^a).

Číslo

$$m = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2}\, p_3^{k_3} \ldots .$$

rozložme v činitele $m = m' m''$, kde m'' značí součin $p_1 p_2 p_3 \ldots$ všech různých kmenných činitelů z m, takže

$$m' = p_1^{k_1-1}\, p_2^{k_2-1}\, p_3^{k_3-1} \ldots .$$

Pak bude dle (1^a)

$$\frac{1}{2}\,\psi\,(D,\ 4\,m) = \left(\frac{D}{m'}\right) \prod_p \left(1 + \left(\frac{D}{p}\right)\right);$$

rozvineme-li součin tento, vyjde

$$\frac{1}{2}\,\psi\,(D,\ 4\,m) = \left(\frac{D}{m'}\right) \sum \left(\frac{D}{d''}\right),$$

kde součet se vztahuje ke všem různým dělitelům d'' čísla m''; neboť ty jsou tvaru

$$d'' = p_\alpha\, p_\beta\, p_\gamma \ldots .$$

Při tom musí býti číslo m nesoudělno s číslem Q, t. j.

$$\left(\frac{Q^2}{m}\right) = 1.$$

Tato podmínka odpadne, píše-li se vzorec ten ve tvaru

(5) $$\frac{1}{2}\,\psi\,(D,\ 4\,m)\,.\left(\frac{Q^2}{m}\right) = \left(\frac{Q^2}{m}\right)\left(\frac{D}{m'}\right) \sum_{d''} \left(\frac{D}{d''}\right),$$

V.

jenž platí pro všecka m.

Chci dokázati, že pravá strana splývá se součtem

$$S = \sum \varepsilon_n^2 \left(\frac{Q^2}{n}\right) \left(\frac{D}{n'}\right),$$

jenž se vztahuje ke všem rozkladům n, n' čísla $m = n \cdot n'$. Zde potřebujeme uvažovati pouze členy, v nichž $\varepsilon_n^2 = 1$, poněvadž ostatní jsou nullami. To nastane, je-li číslo n jedním z dělitelů d čísla m''. Klademe-li pak $m'' = d\,d''$, poskytne nám podmínka $m = n\,n'$ čili $m' m'' = n\,n'$ rovnici $m' d\,d'' = n\,n' = d\,n'$, takže bude $n' = m' d''$. Součet S tedy bude zníti

$$S = \sum \left(\frac{Q^2}{d}\right) \left(\frac{D}{m' d''}\right).$$

V případě $\left(\frac{Q^2}{m}\right) = 1$ máme pak

$$\left(\frac{Q^2}{d}\right) = 1$$

a výsledek lze psáti

$$S = \left(\frac{D}{m'}\right) \sum_{d''} \left(\frac{D}{d''}\right),$$

při čemž d'' probíhá veškery dělitele čísla m''.

Tím dokázáno, že součet S splývá s výrazem (5), je-li $\left(\frac{Q^2}{m}\right) = 1$.

V opáčném případě $\left(\frac{Q^2}{m}\right) = 0$ má dle podmínky $n\,n' = m$ vždy buď n s číslem Q, aneb n' s číslem D společného činitele, a tedy

$$\left(\frac{Q^2}{n}\right) \left(\frac{D}{n'}\right) = 0;$$

každý člen součtu S je tedy roven nulle, a $S = 0$.

Platí tedy obecně

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\, \psi\,(D, 4m) \left(\frac{Q^2}{m}\right) = \sum_{n\,n' = m} \varepsilon_n^2 \left(\frac{Q^2}{n}\right) \left(\frac{D}{n'}\right).$$

Buď nyní s libovolné kladné číslo celistvé i znamenejme

$$(7) \qquad \chi(s) = \left(\frac{Q^2}{s}\right) \sum_k \frac{1}{2}\, \psi \left(D, \frac{4s}{k^2}\right),$$

kde součet vztahuje se ke všem čtvercovým dělitelům k^2 čísla s. Patrně dle (6)

$$\chi(s) = \left(\frac{Q^2}{s}\right) \sum \varepsilon_n^2 \left(\frac{Q^2}{n}\right) \left(\frac{D}{n'}\right),$$

kde součet vztahuje se ke všem možným rozkladům

$$s = n n' k^2.$$

Výraz $n k^2 = \delta$ je dělitelem čísla s a naopak lze každého dělitele δ tohoto čísla uvésti na tvar $n k^2$; připojí-li se pak podmínka $\varepsilon_n^2 = 1$, bude to lze provésti jen jedním způsobem. Tudíž máme v případě $\left(\frac{Q^2}{s}\right) = 1$ patrně

$$\left(\frac{Q^2}{n}\right) = \left(\frac{Q^2}{n k^2}\right) = 1$$

a tedy zcela obecně — píšeme-li $n' = d$ —

(8) $$\chi(s) = \left(\frac{Q^2}{s}\right) \sum_d \left(\frac{D}{d}\right),$$

kde součet vztahuje se ke všem kladným dělitelům d čísla s.

To předeslavše, vyšetřme počet všech řešení rovnice

(9) $$a m^2 + b m n + c n^2 = l, \text{ kde } \left(\frac{Q^2}{l}\right) = 1,$$

celistvými čísly m, n. Buď δ největší společný dělitel čísel m a n, a znamenejme $x = \frac{m}{\delta}$, $y = \frac{n}{\delta}$, takže x a y jsou nesoudělna; pak bude

$$a x^2 + b x y + c y^2 = \frac{l}{\delta^2},$$

kterážto rovnice má

$$N\left(\frac{l}{\delta^2}; a, b, c\right)$$

řešení.

Počet řešení rovnice (9) bude tedy

(9a) $$\sum_\delta N\left(\frac{l}{\delta^2}; a, b, c\right) = \overline{N}(l; a, b, c)$$

kde δ^2 probíhá veškery čtvercové dělitele čísla l.

Podle vzorce základního (4) bude pak

$$\sum_{(a, b, c)} \overline{N}(l; a, b, c) = \frac{\tau}{2} \sum_\delta \psi\left(-\Delta, \frac{4 l}{\delta^2}\right)$$

aneb dle (7)

$$(10) \qquad \sum_{(a,\, b,\, c)} \overline{N}(l;\; a,\, b,\, c)\left(\frac{Q^2}{l}\right) = \tau\chi(l)$$

čili dle výsledku (8) — ježto zde $D = -\varDelta$ —

$$\left(\frac{Q^2}{l}\right) \sum_{(a,\, b,\, c)} \overline{N}\,(l;\; a,\, b,\, c) = \tau\left(\frac{Q^2}{l}\right) \sum_{\lambda} \left(\frac{-\varDelta}{\lambda}\right),$$

při čemž v pravo sčítati dlužno vůči všem dělitelům λ čísla l. Znamenáme-li $\lambda' = \frac{l}{\lambda}$, máme

$$\left(\frac{Q^2}{l}\right) = \left(\frac{Q^2}{\lambda'}\right) \left(\frac{Q^2}{\lambda}\right),$$

a poněvadž

$$\left(\frac{Q^2}{\lambda}\right) \left(\frac{-\varDelta}{\lambda}\right) = \left(\frac{-\varDelta}{\lambda}\right),$$

vyjde

$$(10^*) \qquad \left(\frac{Q^2}{l}\right) \sum_{(a,\, b,\, c)} \overline{N}\,(l;\; a,\, b,\, c) = \tau \sum_{\lambda\lambda' = l} \left(\frac{-\varDelta}{\lambda}\right) \left(\frac{Q^2}{\lambda'}\right).$$

Tato rovnice je právě základním vztahem Dirichletovým, neboť vyjadřuje právě tolik co rovnice

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{(a,\, b,\, c)} \sum_{m,\, n}{}' \left(\frac{Q}{a m^2 + b m n + c n^2}\right) F\,(a m^2 + b m n + c n^2) \\ &\quad = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) \left(\frac{-\varDelta}{h}\right) F\,(h k), \end{aligned} \right.$$

při čemž součet na levé straně vztahuje se jednak ke všem formám (a, b, c) úplné soustavy (2), jednak ke všem celistvým (kladným i záporným) hodnotám čísel m, n, s výjimkou jediné kombinace $m = n = 0$.

Že zde užito nekonečných řad, nemůže překážeti arithmetikovi, poněvadž existuje nekonečná rozmanitost funkcí $F(z)$ majících pouze konečný počet hodnot od nully různých, takže se tu obě strany rovnice (11) redukují na konečný počet členů.

Buď nyní dána kladná veličina X i položme $F(z) = 1$, pokud $z \leqq X$, ale $F(z) = 0$ pro $z > X$. Pak se levá strana rovnice (11) redukuje na součet

$$\sum_{(a,\, b,\, c)} P_{a,\, b,\, c}\,(X)$$

ve kterém $P_{a,\, b,\, c}$ značí počet soustav m, n celistvých čísel, pro něž výraz $a m^2 + b m n + c n^2$ je nesoudělný s Q a nepřevyšuje hodnotu X. Jinými slovy, $P_{a,\, b,\, c}(X)$ vyjadřuje počet bodů s celistvými souřadnicemi ležícími uvnitř neb na obvodě ellipsy

$$a^2 + bxy + cy^2 = X,$$

pro něž levá strana rovnice je nesoudělna s Q.

Na pravé straně přejde řada v součet

$$\sum_{h=1}^{X} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{k=1}^{\left[\frac{X}{h}\right]} \left(\frac{Q^2}{k}\right).$$

Znamenáme-li

$$\varphi\,(z,\ Q)$$

počet čísel nepřevyšujících z a nesoudělných s Q, bude

$$\varphi\,(z,\ Q) = \sum_{k=1}^{[z]} \left(\frac{Q^2}{k}\right), \tag{12}$$

takže pravá strana rovnice (11) bude zníti

$$\tau \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{X}{h},\ Q\right),$$

a tedy obdržíme vztah

$$\sum_{(a,\ b,\ c)} P_{a,b,c}(X) = \tau \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{X}{h},\ Q\right). \tag{13}$$

Ve zvláštních případech, zejmena kdy počet tříd rovná se jedné, rovnice tato podává zajímavé vztahy arithmetické. Je-li totiž $-\Delta$ diskriminant hlavní, bude $Q = 1$, načež se $P_{a,b,c}(X)$ redukuje na počet bodů s celistvými souřadnicemi a od počátku soustavy souřadnic se lišícími, které leží uvnitř neb na obvodě ellipsy

$$ax^2 + bxy + cy^2 = X;$$

dále je v tomto případě $\Delta = \Delta_0$

$$\varphi\left(\frac{X}{h},\ Q\right) = \varphi\left(\frac{X}{h},\ 1\right) = \left[\frac{X}{h}\right],$$

znamenáme-li $\left[\frac{X}{h}\right]$ celky čísla $\frac{X}{h}$. Zde tedy zní rovnice (13) takto:

$$\sum_{(a,\ b,\ c)} P_{a,b,c}(X) = \tau \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \left[\frac{X}{h}\right]. \tag{14}$$

V.

Ve zvláštním případě $\Delta_0 = 4$ máme pouze jednu třídu, kterou representuje na př. forma (1, 0, 1) t. j. $x^2 + y^2$; výraz $P(X)$ bude roven počtu »celistvých« bodů ležících na ploše kruhu

$$x^2 + y^2 = X,$$

a tedy roven veličině

$$4[\sqrt{X}] + 4 \sum_{a=1,2,3,\ldots} [\sqrt{X - a^2}];$$

poněvadž zároveň $\tau = 4$, obdržíme po krácení čtyřmi vztah

$$(15) \qquad \sum_{a=0}^{\sqrt{X}} [\sqrt{X - a^2}] = \sum_{\lambda=1,3,5,7,9,\ldots} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \left[\frac{X}{\lambda}\right];$$

tak na př. pro $X = 15$ máme v levo součet

$$3 + 3 + 3 + 2 = 11,$$

v pravo ale

$$15 - 5 + 3 - 2 + 1 - 1 + 1 - 1 = 11.$$

Pro $\Delta_0 = 8$ máme taktéž pouze jednu třídu, za jejíž představitele lze voliti formu $x^2 + 2y^2$; zde bude

$$P(X) = 2[\sqrt{X}] + 2\left[\sqrt{\frac{X}{2}}\right] + 4 \sum_{a=1}^{\sqrt{\frac{1}{2}X}} [\sqrt{X - 2a^2}],$$

a tedy vyjde

$$(16) \qquad [\sqrt{X}] + [\sqrt{\tfrac{1}{2}X}] + 2 \sum_{a=1}^{\sqrt{\frac{1}{2}X}} [\sqrt{X - 2a^2}] = \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8} + \frac{\lambda-1}{2}} \left[\frac{X}{\lambda}\right].$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

Tak máme na př. pro $X = 26$ v levo

$$5 + 3 + 2(4 + 4 + 2) = 28,$$

v pravo pak

$$26 + 8 - 5 - 3 + 2 + 2 - 2 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 28.$$

Obraťme se nyní k rovnici (14); z té plyne

$$(14^a) \qquad \sum_{(a,b,c)} \lim_{X=\infty} \frac{P_{a,b,c}(X)}{X} = \tau \lim_{X=\infty} \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \left[\frac{X}{h}\right],$$

předpokláda-li se, že limity v levo i v pravo existují.

V.

O existenci limity

$$\lim_{X=\infty} \frac{P_{a,b,c}(X)}{X}$$

přesvědčíme se velmi snadno.

Jeť čitatel $P_{a,b,c}(X)$ o jednotku menší než počet bodů s celistvými součiniteli obsažených uvnitř a na obvodě ellipsy

$$a x^2 + b x y + c y^2 = X$$

aneb což totéž jest,

$$(E) \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{X}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{X}}.$$

Obklopíme-li každý z těchto bodů čtvercem, jehož střed je v onom bodě a jehož strany jsou s osami souřadnic souběžny a mají délku $\frac{1}{\sqrt{X}}$, bude plocha ellipsy (E) pokryta jednoduše těmito čtverečky, pouze jisté proužky podél malého obvodu zůstanou prázdny, na jiných místech budou podél malého proužku plošného čtverečky ty z plochy (E) částečně vystupovati. Znamenáme-li (F) obrazec zaplněný těmito čtverečky, (E) obsah stejnojmenné ellipsy, budou plochy (E) a (F) lišiti se o veličinu, kterou lze učiniti tak malou jak libo, zvolí-li se X dosti velikým. Tudíž bude

$$\lim_{X=\infty} (F) = (E);$$

avšak

$$(F) = P_{a,b,c}(X) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 = \frac{P_{a,b,c}(X)}{X},$$

a tedy nacházíme výsledek

$$\lim_{X=\infty} \frac{P_{a,b,c}(X)}{X} = (E),$$

kde (E) značí plochu ellipsy, jejíž rovnice zní

$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1;$$

tu lze stanoviti buď elementární cestou analytické geometrie, aneb přímo dvojnásobným integrálem

$$(E) = \iint d\xi\, d\eta, \quad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1.$$

Podmínku integrační lze psáti

$$(2a\xi + b\eta)^2 + \Delta\eta^2 \leqq 4a, \quad (\Delta = 4ac - b^2),$$

a zavedeme-li na místě ξ proměnnou

$$x = 2a\xi + b\eta,$$

vyjde

$$(E) = \frac{1}{2a} \int d\eta \int dx, \quad x^2 + \Delta\eta^2 \leqq 4a$$

kterýžto dvojnásobný integrál vyjadřuje plochu ellipsy

$$x^2 + \Delta y^2 = 4a,$$

jejíž polouosy mají hodnoty $2\sqrt{a}$, $2\sqrt{\frac{a}{\Delta}}$; plocha tedy bude

$$\frac{4a\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

z čehož

$$(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

a tedy konečně

$$\lim_{X=\infty} \frac{P_{a,b,c}(X)}{X} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}. \tag{17}$$

Hodnota levé strany rovnice (14^a) bude tedy obnášeti tolikráte veličinu $\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$, kolik existuje forem (a, b, c) v naší soustavě, t. j. bude rovna

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}} Cl(-\Delta_0). \tag{14^b}$$

Abychom obdrželi pravou stranu rovnice (14^a), vyšetřujme raději obecný tvar

$$S = \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{D}{h}\right) \left[\frac{X}{h}\right], \tag{18^a}$$

abychom výsledků tak nabytých mohli použiti též v ostatních případech. Znamenejme $\Delta = |D|$, takže Δ je buď D neb $-D$, a uvažme, že

$$\left(\frac{D}{k + \Delta\nu}\right) = \left(\frac{D}{k}\right).$$

Položme tedy

$$h = k + \Delta\nu, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots \Delta;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots N-1),$$

a volme $X = N\Delta$; pak bude

$$(18^b) \qquad S = \sum_{k=1}^{\varDelta} \left(\frac{D}{k}\right) \sum_{\nu=0}^{N-1} \left[\frac{N\varDelta}{k+\varDelta\nu}\right],$$

a vše se redukuje na vyšetření součtu

$$\mathfrak{S}_k = \sum_{\nu=0}^{N-1} \left[\frac{N\varDelta}{k+\varDelta\nu}\right] = \sum_{\nu=0}^{N-1} \left[\frac{N}{\frac{k}{\varDelta}+\nu}\right]$$

pro veliké hodnoty N. Tento je tvaru

$$\mathfrak{S} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{N}{u+\nu}\right];$$

abychom tento výraz přetvořili, znamenejme n libovolné kladné celistvé číslo a rozložme jak následuje

$$\mathfrak{S} = \sum_{\nu=0}^{n} \left[\frac{N}{u+\nu}\right] + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left[\frac{N}{u+\nu}\right] = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$$

Součet

$$\mathfrak{S}'' = \sum_{n+1}^{\infty} \left[\frac{N}{u+\nu}\right]$$

rovná se počtu případů, kdy platí nerovnost

$$\frac{N}{u+\nu} \geqq \mu, \quad (\mu \geqq 1, \ \nu > n);$$

znamenáme-li pak $\nu = n + \nu'$, máme nerovnost

$$\frac{N}{\mu} - n - u \geqq \nu', \quad (\mu, \ \nu' = 1, 2, 3, \ldots),$$

z čehož soudíme, že bude

$$\mathfrak{S}'' = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{N}{\mu} - n - u\right],$$

kde se v řadě jde tak daleko, dokud se neobjeví záporné hodnoty uzávorkovaného výrazu, tedy vlastně až k hodnotě $\mu \leqq \dfrac{N-1}{n+u}$.

Máme tedy

$$\mathfrak{S}'' = \sum_{\mu=1}^{r} \left[\frac{N}{\mu} - u\right] - rn, \qquad r = \left[\frac{N-1}{n+u}\right].$$

Odtud plyne identita

$$(19)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{N}{u+\nu}\right]=\sum_{\nu=0}^{n}\left[\frac{N}{u+\nu}\right]+\sum_{\mu=1}^{r}\left[\frac{N}{\mu}-u\right]-rn,$$

ve které

$$r=\left[\frac{N-1}{n+u}\right].$$

Volme nyní $n=[\sqrt{N}]$, pak bude při $0<u<1$ výraz

$$\frac{N-1}{n+u}$$

obsažen mezi

$$\frac{N-1}{\sqrt{N}+u}\text{ a }\frac{N-1}{\sqrt{N}-(1-u)},$$

tudíž bude v mezích tvaru

$$\sqrt{N}-u+\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\quad\text{a}\quad\sqrt{N}+(1-u)+\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

kde $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ značí veličinu, jejíž součin s $\sqrt{N}$ zůstává konečným. Bude tedy pro dosti veliká N

$$r=(n-1\;\ldots\;n+1),$$

t. j.

$$n-1\leqq r\leqq n+1.$$

Užije-li se dále okolnosti, že se veličina

$$\frac{N}{u+\nu}\text{ liší od }\left[\frac{N}{u+\nu}\right]$$

o méně něž o jednu, vyjde z pravé strany rovnice (19)

$$(19^a)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{N}{u+\nu}\right]=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{N}{u+\nu}+\sum_{\mu=1}^{r}\left(\frac{N}{\mu}-u\right)-rn+\vartheta(n+1),$$

kde ϑ značí neznámý pravý kladný zlomek; tedy

$$(19^b)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{N}{u+\nu}\right]=N\sum_{\nu=0}^{\sqrt{N}}\frac{1}{u+\nu}+N\sum_{\mu=1}^{(\sqrt{N}\pm1)}\frac{1}{\mu}-u(\sqrt{N}\pm1)$$
$$-N\left\{1+\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right\},$$

z čehož plyne

$$(19_c)\qquad \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{N}{u+\nu}\right]=\sum_{\nu=0}^{\sqrt{N}}\frac{1}{u+\nu}+\sum_{\mu=1}^{\sqrt{N}}\frac{1}{\mu}-1+\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

kde vždy značí $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ veličinu, jejíž součin s $\sqrt{N}$ zůstává v konečných mezích.

Pomocí tohoto výsledku obdržíme z rovnic (18^a) a (18^b) výraz

$$\frac{1}{X}\sum_{h=1}^{X}\left(\frac{D}{h}\right)\left[\frac{X}{h}\right]=\frac{1}{\varDelta}\sum_{k=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N-1}\left[\frac{N}{\frac{k}{\varDelta}+\nu}\right]$$

$$=\frac{1}{\varDelta}\sum_{k=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{D}{k}\right)\cdot\left\{\sum_{\nu=0}^{\sqrt{N}}\frac{1}{\frac{k}{\varDelta}+\nu}+\sum_{\mu=1}^{\sqrt{N}}\frac{1}{\mu}-1\right\}+\left(\frac{1}{N}\right).$$

Veličina v závorce $\{\ \}$ roste zároveň s N přes všecky meze; má-li tedy pravá strana býti konečná, musí

$$(20)\qquad \sum_{k=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{D}{k}\right)=0.$$

Pomocí této rovnice vychází

$$(21)\qquad \frac{1}{X}\sum_{h=1}^{X}\left(\frac{D}{h}\right)\left[\frac{X}{h}\right]=\frac{1}{\varDelta}\sum_{k=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{D}{k}\right)\sum_{\nu=1}^{\sqrt{N}}\frac{1}{\frac{k}{\varDelta}+\nu}$$

a odtud taktéž pomocí (20)

$$\frac{1}{X}\sum_{h=1}^{X}\left(\frac{D}{h}\right)\left[\frac{X}{h}\right]=\frac{1}{\varDelta}\sum_{k=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{D}{k}\right)\sum_{\nu=0}^{\sqrt{N}}\left(\frac{1}{\frac{k}{\varDelta}+\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

Řada na pravé straně se vyskytující konverguje pro $N=\infty$, i obdržíme tedy

$$(22)\qquad \lim_{X=\infty}\frac{1}{X}\sum_{h=1}^{X}\left(\frac{D}{h}\right)\left[\frac{X}{h}\right]=\frac{1}{\varDelta}\sum_{k=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{D}{k}\right)\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{k}{\varDelta}+\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

Píše-li se konečně pravá strana rovnice (21) ve tvaru

$$\sum_{h=1}^{\varDelta[\sqrt{N}+1]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{1}{h},$$

v nějž přejde substitucí

$$k + \nu \Delta = h,$$

plyne z existence limity její výraz

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h} = P(D), \tag{22a}$$

který jsme znamenali $P(D)$.

Pravá strana rovnice (14[a]) má tedy hodnotu

$$\tau P(-\Delta_0),$$

a tím rovnice ta vzhledem k výsledku (14[b]) nabývá konečného tvaru

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}} Cl(-\Delta_0) = P(-\Delta_0), \tag{23}$$

který ač svojí podstatou náleží analysi, zde vyvinut prostředky vesměs arithmetickými.

Abychom podobného výsledku nabyli v obecnějším případě vzorce (13), potřebujeme přiměřený výraz součtu

$$\varphi(z, Q) = \sum_{k=1}^{z} \left(\frac{Q^2}{k}\right).$$

Toho docílíme pomocí identity

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) f(m) = \sum_{d} \varepsilon_d \sum_{n=1}^{\infty} f(n d), \tag{24}$$

ve které d probíhá veškery dělitele čísla Q.

V našem případě jest

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } x \leqq z \\ 0 \quad \text{»} \quad x > z \end{cases};$$

tedy bude

$$\sum_{1}^{\infty} f(n d) = \left[\frac{z}{d}\right]$$

$$\varphi(z, Q) = \sum_{m=1}^{z} \left(\frac{Q^2}{m}\right) = \sum_{d} \varepsilon_d \left[\frac{z}{d}\right]. \tag{12a}$$

Abychom také výrazům $P_{a, b, c}(X)$ uděliti mohli jednoduchý tvar, zařiďme volbu representantů (2) tak, aby vždy a bylo nesoudělno s Q, ale aby b i c obsahovalo veškery kmenné činitele z Q. Pak bude

$$\left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right)=\left(\frac{Q^2}{am^2}\right)=\left(\frac{Q^2}{m}\right),$$

takže pak rovnice Dirichletova zní

$$(11^*)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{(a,\,b,\,c)}\sum_{m,\,n}{}'\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)\\ &=\tau\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)\left(\frac{-\Delta}{h}\right)F(hk),\end{aligned}\right.$$

a výrazy $P_{a,\,b,\,c}$ budou zníti

$$P_{a,\,b,\,c}\ (X)=\sum_{m,\,n}{}'\left(\frac{Q^2}{m}\right),\ (am^2+bmn+cn^2\leqq X).$$

Podle rovnice (24) tedy bude

$$P_{a,\,b,\,c}\ (X)=\sum_{d}\varepsilon_d\,P^0_{ad^2,\,ba,\,c}\ (X),$$

značí-li nám $P^0_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}}\ (X)$ počet řešení nerovnosti

$$\mathfrak{a}x^2+\mathfrak{b}xy+\mathfrak{c}y^2\leqq X\ \text{(vyjma } x=y=0).$$

Tu pak bude dle vzorce (17)

$$\lim_{X=\infty}\frac{P^0_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}}\ (X)}{X}=\frac{2\pi}{\sqrt{4\mathfrak{a}\mathfrak{c}-\mathfrak{b}^2}},$$

a tedy

$$\lim_{X=\infty}\frac{P_{a,\,b,\,c}\ (X)}{X}=\sum_{d}\frac{2\pi\,\varepsilon_d}{\sqrt{(4ac-b^2)d^2}},$$

což splývá s výrazem

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\sum_{d}\frac{\varepsilon_d}{d}=\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{\varphi(Q)}{Q},$$

kde $\varphi(Q)$ má známý v arithmetice význam počtu čísel menších než Q a nesoudělných s Q. Tudíž

$$(13^*)\qquad \lim_{X=\infty}\frac{P_{a,\,b,\,c}\ (X)}{X}=\frac{\varphi(Q)}{Q}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

a z rovnice (13) plynoucí rovnice

$$(13^a)\quad \sum_{(a,\,b,\,c)}\lim_{X=\infty}\frac{P_{a,\,b,\,c}\ (X)}{X}=\tau\lim_{X=\infty}\frac{1}{X}\sum_{1}^{X}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{X}{h},Q\right)$$

má na levé straně veličinu

V.

$$(13^b) \qquad \frac{\varphi(Q)}{Q} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \, Cl(-\Delta).$$

Podle rovnice (12^a)

$$\varphi(z, Q) = \sum_d \varepsilon_d \left[\frac{z}{d}\right], \quad (d d' = Q),$$

obdrží pravá strana rovnice (13^a) tvar

$$\tau \lim_{X=\infty} \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_d \varepsilon_d \left[\frac{X}{dh}\right],$$

kde d probíhá dělitele čísla Q. Výraz ten lze psáti

$$\tau \sum_d \frac{\varepsilon_d}{d} \lim \frac{d}{X} \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \left[\frac{X}{dh}\right],$$

a má tedy dle (22) hodnotu

$$(13^c) \qquad \tau \sum_d \frac{\varepsilon_d}{d} \cdot P(-\Delta) = \tau \frac{\varphi(Q)}{Q} P(-\Delta).$$

Toť hodnota pravé strany (13^a). Srovnáním výrazů (13^b) a (13^c) odpadne činitel $\frac{\varphi(Q)}{Q}$ a zbude rovnice Dirichletova

$$(23^*) \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta) = \tau P(-\Delta),$$

kterou jsme dříve dokázali pro případ diskriminantu hlavního a nyní obecně; možno ji též psáti

$$(23^{**}) \qquad Cl(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2 h \pi}.$$

II.

O formách kladného diskriminantu.

Theorie forem kladného diskriminantu D souvisí úzce s rovnicí t. zv Pellovou, která má tvar

$$t^2 - D u^2 = 4,$$

jde-li o formy primitivní. Rovnice tato má jeden pár T, U řešení kladných (různý od nezajímavého řešení $t = 2$, $u = 0$), které jest z nejmenších čísel složeno a udílí výrazu $t + u\sqrt{D}$ hodnotu nejmenší; řešení to sluje hlavním či základním a ostatní se z něho obdrží pomocí rovnice

$$\frac{t+u\sqrt{D}}{2}=\pm\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n,\quad n=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,$$

Rovnice

$$a x^2+b x y+c y^2=l,\qquad (l>0),$$

ve které (a, b, c) je forma kladného diskriminantu, má buď nekonečný počet řešení, aneb nemá žádných.

Z nekonečného počtu řešení této rovnice, a sice nesoudělnými čísly x a y lze vymeziti řešení v konečném počtu, podrobí-li se neznámé x a y podmínkám

(1) $$x>gy,\ y\geqq 0;$$

při tom značí g veličinu racionalnou

$$g=-\frac{T-bU}{2aU},$$

i předpokládá se, že součinitel a je kladný.

Řešení tato nazveme základními. Znamenejme $N(l;\ a, b, c)$ počet takovýchto »hlavních« řešení.

Buď nyní

(2) $$(a', b', c'),\ (a'', b'', c''),\ \ldots\ (a^{(\omega)}, b^{(\omega)}, c^{(\omega)})$$

úplná soustava forem primitivních kladného diskriminantu D, tak volená, aby čísla a', a'', ... byla kladná.

Pak platí známá identita

$$\sum_{(a,\, b,\, c)} N(l;\ a, b, c)=\frac{1}{2}\,\psi(D, 4l),$$

která se v elementech dokazuje ryze arithmeticky.

Znamenejme nyní

$$\overline{N}(l;\ a, b, c)$$

počet řešení rovnice

$$am^2+bmn+cn^2=l,$$

celistvými čísly m, n, která mohou míti společného dělitele, ale hoví nerovnostem

$$m>gn,\quad n\geqq 0.$$

Pak bude

$$\overline{N}(l;\ a, b, c)=\sum_d N\left(\frac{l}{d^2};\ a, b, c\right),$$

kde součet se vztahuje ke všem čtvercovým dělitelům d^2 čísla l. Odtud se obdrží jako výše rovnice

V.

$$(3) \qquad \left(\frac{Q^2}{l}\right) \sum_{(a,\,b,\,c)} \bar{N}(l;\, a,\, b,\, c) = \sum_{\lambda\lambda' = l} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \left(\frac{Q^2}{\lambda'}\right),$$

jež nevyjadřuje nic jiného, než rovnice Dirichletova

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{(a,\,b,\,c)} \sum_{m,\,n}^{*} \left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) \left(\frac{D}{h}\right) F(hk), \end{aligned} \right.$$

ve které součet v levo se vztahuje jednak ke všem representantům a, b, c různých tříd primitivních diskriminantu D, a jednak k číslům m, n, jež mají hoviti nerovnostem

$$(4^a) \qquad m > gn, \; n \geqq 0; \; g = \frac{T - bU}{2aU}.$$

Zvolíme-li representanty $(a,\, b,\, c)$ tak, aby a bylo nesoudělno s Q, ale b a c obsahovala veškery kmenné činitele z Q, bude

$$\left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) = \left(\frac{Q^2}{m}\right),$$

a rovnici (4) bude lze psáti při týchž podmínkách (4^a)

$$(4^*) \qquad \sum_{(a,\,b,\,c)} \sum_{m,\,n}^{*} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) = \sum_{h,\,k} \left(\frac{Q^2}{h}\right) \left(\frac{D}{k}\right) F(hk).$$

Buď nyní X libovolná kladná veličina, a volme

$$F(z) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{pro} & z \leqq X \\ 0 & \text{»} & z > X \end{matrix} \right\};$$

pak bude rovnice (4*) zníti

$$(5) \qquad \sum_{(a,\,b,\,c)} P_{a,\,b,\,c}\,(X) = \sum_{h=1}^{X} \left(\frac{D}{h}\right) \varphi\left(\frac{X}{h},\, Q\right),$$

při čemž $P_{a,\,b,\,c}\,(X)$ značí počet čísel m, n, pro něž platí podmínky

$$am^2 + bmn + cn^2 \leqq X, \left(\frac{Q^2}{m}\right) = 1,$$

$$m > gn, \; n \leqq 0; \; g = \frac{T - bU}{2aU}.$$

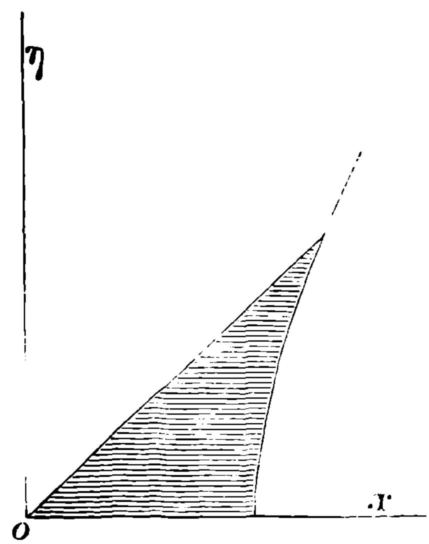
Bude pak lze opětně rovnici

$$P_{a,\,b,\,c}\,(X) = \sum_{m,\,n}^{*} \left(\frac{Q^2}{m}\right)$$

přetvořiti ve vzorec

$$P_{a,b,c}(X) = \sum_d \varepsilon_d P^0_{ad^2,\, bd,\, c}(X),$$

ve které součet se vztahuje ke všem dělitelům d čísla Q, při čemž $P^0_{ad^2,\,bd,\,c}(X)$ značí počet čísel m, n hovících podmínkám



$$a d^2 m^2 + b d m n + c n^2 \leqq X$$
$$m d > g n, \quad n \geqq 0.$$

Odtud plyne, že bude limita

$$\lim_{X=\infty} \frac{P^0_{ad^2,\,bd,\,c}(X)}{X} = F$$

rovnati se plošnému obsahu obrazce omezenému hyperbolou

$$a d^2 \xi^2 + b d \xi \eta + c \eta^2 \leqq 1,$$

dále přímkou

$$d \xi \geqq g \eta$$

a osou úseček $\eta \geqq 0$.

Bude tedy

$$F = \iint \delta \xi \delta \eta,$$

a zavedeme-li $\dfrac{\xi}{d}$ za ξ, vyjde

$$F = \frac{1}{d} \iint \delta \xi \delta \eta; \quad a \xi^2 + b \xi \eta + c \eta^2 \leqq 1, \quad \xi \geqq g \eta, \quad \eta \geqq 0.$$

Tento integrál po substituci $2 a \xi + b \eta = x$ bude zníti

$$F = \frac{1}{2ad} \int \delta \eta \int \delta x, \quad x^2 - D \eta^2 \leqq 4a, \quad x \geqq \frac{T}{U} \eta, \quad \eta \geqq 0.$$

Meze integrační pro x jsou tedy

$$\left(\frac{T}{U} \eta \ldots \sqrt{4a + D\eta^2} \right),$$

pro η pak

$$(0 \ldots U\sqrt{a}),$$

takže

$$F = \frac{1}{2ad} \int_0^{U\sqrt{a}} \left(\sqrt{4a + D\eta^2} - \frac{T}{U} \eta \right) d\eta,$$

což po substituci $D\eta^2 = 4 a x^2$ obdrží tvar

$$\frac{2}{d\sqrt{D}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}U\sqrt{D}}\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{T}{U\sqrt{D}}x\right)dx\,;$$

elementarný vzorec

$$\int\sqrt{x1+{}^2}d=x\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right.$$

poskytne tu vzhledem k okolnosti, že

$$\sqrt{1+\frac{DU^2}{4}}=\frac{T}{2},$$

výsledek velmi jednoduchý

$$F=\frac{1}{d\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\,;$$

tedy bude

$$\lim_{X=\infty}\frac{P_{a,\,b,\,c}\,(X)}{X}=\sum_d\frac{\varepsilon_d}{d}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2},$$

čili

$$\lim_{X=\infty}\frac{P_{a,\,b,\,c}\,(X)}{X}=\frac{\varphi(Q)}{Q\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}. \tag{5^a}$$

Užije-li se vzorce (12^a)

$$\varphi\left(\frac{X}{h},Q\right)=\sum_d\varepsilon_d\left[\frac{X}{hd}\right],$$

obdrží rovnice (5) tvar

$$\sum_{(a,\,b,\,c)}P_{a,\,b,\,c}\,(X)=\sum_d\varepsilon_d\sum_{h=1}^{X}\left(\frac{D}{h}\right)\left[\frac{X}{hd}\right]. \tag{5*}$$

Dělíme-li zde na obou stranách veličinou X a přejdeme k limitě pro $X=\infty$, vyjde dle (5^a)

$$\frac{\varphi(Q)}{Q\sqrt{D}}\,Cl(D)\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}=\sum_d\frac{\varepsilon_d}{d}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{1}{h},$$

čili

$$\frac{Cl(D)}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}=P(D)=\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{1}{h}. \tag{6}$$

Je-li ve zvláštním případě $D=D_0$, tedy $Q=1$, počet tříd roven jedné, lze za representant zvoliti (v případě $D_0\equiv 0$ [mod. 4]) formu

$$x^2-\frac{D_0}{4}y^2.$$

V.

Výraz $P(X)$ značí pak počet řešení nerovností

$$x^2-\frac{D_0}{4}y^2 \leqq X, \quad x>\frac{T}{2U}y \geqq 0$$

a udává tedy počet bodů položených mezi osou x, přímkou $x=\frac{T}{2U}y$ a hyperbolou, v prvním kvadrantu, při čemž se body na ose x počítají, na přímce nikoli. Počet ten bude

$$P(X)=[\sqrt{X}]+\sum_{\nu=1}^{[U\sqrt{X}]}\left[\sqrt{X+\frac{1}{4}D_0\nu^2}\right]-\sum_{\nu=1}^{[U\sqrt{X}]}\left[\frac{T}{2U}\nu\right]$$

a tedy máme vztah

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned}&[\sqrt{X}]+\sum_{\nu=1}^{[U\sqrt{X}]}\left[\sqrt{X+\frac{1}{4}D_0\nu^2}\right]-\sum_{\nu=1}^{[U\sqrt{X}]}\left[\frac{T\nu}{2U}\right]\\ &=\sum_{h=1,3,5\ldots}\left(\frac{D_0}{h}\right)\left[\frac{X}{h}\right];\end{aligned}$$

podmínky jeho jsou, aby D_0 byl sudý diskriminant základní a počet tříd rovnal se jedné.

Podmínky ty jsou splněny při $D_0=8$; tu tedy bude

$$\text{(7}^a\text{)}\quad [\sqrt{X}]+\sum_{\nu=1}^{2\sqrt{X}}[\sqrt{X+2\nu^2}]-\sum_{\nu=1}^{2\sqrt{X}}\left[\frac{3\nu}{2}\right]=\sum_{h=1,3,5\ldots}(-1)^{\frac{h^2-1}{8}}\left[\frac{X}{h}\right].$$

III.

Po tomto odbočení vraťme se k rovnicím (23**) článku I. a (6) článku II., totiž

$$\text{(1)}\qquad Cl(-\Delta)=\tau\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{2h\pi},$$

$$\text{(2)}\qquad Cl(D)\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}=\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{\sqrt{D}}{h}.$$

Transformace, jimž je podrobíme, nejsou více rázu čistě arithmetického, jako byly methody vedoucí jich k odvození.

Znamenáme-li nyní D kladný neb záporný diskriminant, $\Delta=|D|$, bude nám studovati řadu

$$\text{(3)}\qquad P(D)=\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{1}{h}.$$

V.

Použitím řady

$$\sum \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h^s}$$

dokazuje se tu, že platí identita — znamená-li se $D = D_0\, Q^2$ —

$$(4) \qquad P(D_0\, Q^2) = P(D_0) . \prod_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right),$$

kde součin se vztahuje ke všem různým kmenným činitelům q čísla Q.

V případě $D_0 = -\varDelta_0$ znamenejme τ_0 číslo příslušné ku $\varDelta_0$; poněvadž tu pak $\varDelta = \varDelta_0\, Q^2 > 4$, musí $\tau = 2$, a tedy obdržíme z (1) a (4)

$$(5) \qquad Cl(-\varDelta_0\, Q^2) = \frac{2\, Q}{\tau_0} . \prod_q \left(1 - \left(\frac{-\varDelta_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right) . Cl(-\varDelta_0).$$

dále z (2) a (5) podobně pro $D = D_0\, Q^2$

$$(6) \qquad \begin{aligned} & Cl(D) \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2} \\ & = Q \prod_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right) . Cl(D_0) \log \frac{T_0 + U\sqrt{D_0}}{2}. \end{aligned}$$

což lze též psáti

$$(6^*) \qquad Cl(D) = Q \prod_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right) . Cl(D_0) . \frac{\log \dfrac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}}{\log \dfrac{T + U\sqrt{D}}{2}}.$$

Veličina

$$\mu = \frac{\log \dfrac{T + U\sqrt{D}}{2}}{\log \dfrac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}},$$

jejíž obrácená hodnota se vyskytuje jako činitel na pravé straně, je kladné celistvé číslo. Neboť rovnici

$$T^2 - D\, U^2 = 4$$

lze psáti

$$T^2 - D_0\, (Q\, U)^2 = 4,$$

z čehož plyne, že čísla $t = T$, $u = Q\, U$ hoví Pellově rovnici

$$t^2 - D_0\, u^2 = 4$$

příslušné ku diskriminantu D_0, a tedy bude

V.

$$\frac{T + Q U \sqrt{D_0}}{2} = \left(\frac{T_0 + U_0 \sqrt{D_0}}{2}\right)^{\mu},$$

kde μ je kladné celistvé číslo, čímž tvrzení dokázano. Toto číslo, jehož stanovení je velmi důležité, bude rovno jednotce jen tehdy, je-li číslo Q dělitelem čísla U_0.

Rovnicemi (5) a (6) převedeno stanovení počtu tříd na problem jednodušší, kdy diskriminant $-\Delta_0$ neb D_0 je hlavním či základním. V tomto případě lze totiž řadu $P(D)$ sečísti pomocí funkcí elementárných ve tvaru zakončeném. O této otázce chceme nyní pojednati, způsobem ovšem různým od method běžných.

Již výše bylo uvedeno, že platí vztah

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{D}{k}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{k}{\Delta} + \nu} - \frac{1}{\nu + 1}\right).$$

Podle známého vzorce z theorie funkce gamma jest však

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} = \Gamma'(1) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{u + \nu} - \frac{1}{\nu + 1}\right),$$

a pomocí tohoto vzorce lze poslední výraz takto psáti

$$(7) \qquad \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{D}{k}\right) \frac{\Gamma'\left(\frac{k}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\Delta}\right)},$$

neboť konstanta $\Gamma'(1)$ vypadne, ježto jest násobena výrazem

$$\sum_{1}^{\Delta - 1} \left(\frac{D}{k}\right) = 0.$$

Pravou stranu rovnice (7) lze pak vyjádřiti ve tvaru zakončeném, užije-li se vzorce Gaussova*)

$$(8) \qquad \frac{\Gamma'\left(\frac{k}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\Delta}\right)} - \Gamma'(1) = -\log 2\Delta - \frac{\pi}{2} \cot \frac{k\pi}{\Delta} + \sum_{a=1}^{\Delta - 1} \cos \frac{2 a k \pi}{\Delta} . \log \sin \frac{a \pi}{\Delta} .$$

*) Jeho rychlé odvození viz v Rozpravách II. třídy, v čísle 14. pátého ročníku.

Tím způsobem obdrží rovnice (7) tvar

$$\varDelta\, P(D) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{D}{k}\right) \cot \frac{k\pi}{\varDelta} - \sum_{a=1}^{\varDelta-1} \log \sin \frac{a\pi}{\varDelta} \sum_{k=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{D}{k}\right) \cos \frac{2\,a\,k\,\pi}{\varDelta}.$$

Je-li $D = -\varDelta$ záporné číslo, tu se členové součtu

$$\sum_{k=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{-\varDelta}{k}\right) \cos \frac{2\,a\,k\,\pi}{\varDelta}$$

dvou ruší, poněvadž

$$\left(\frac{-\varDelta}{\varDelta-k}\right) = -\left(\frac{-\varDelta}{k}\right),$$

a tedy zbývá

$$P(-\varDelta) = \frac{\pi}{2\,\varDelta} \sum_{k=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{-\varDelta}{k}\right) \cot \frac{k\,\pi}{\varDelta}; \tag{9}$$

vzorec tento bychom však mnohem pohodlněji vyvinuli z rovnice (7), kdybychom užili vztahu

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} - \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} = -\pi \cot u\,\pi.$$

Je-li dále diskriminant D kladný, ruší se po dvou členové v součtu

$$\sum \left(\frac{D}{k}\right) \cot \frac{k\,\pi}{D},$$

a zbývá rovnice

$$D\,P(D) = -\sum_{a=1}^{D-1} \log \sin \frac{a\,\pi}{D} \cdot \sum_{k=1}^{D-1} \left(\frac{D}{k}\right) \cos \frac{2\,k\,a\,\pi}{D}. \tag{10}$$

Zabývejme se nyní zvláštním případem, kdy $D = D_0$ je diskriminant základní. Tvrdíme, že součet

$$s = \sum_{k=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) \cos \frac{2\,k\,m\,\pi}{D_0}$$

vymizí, mají-li čísla m a D_0 společného dělitele většího než jedna.

Předpokládejme, že obě čísla m i D_0 obsahují liché číslo d, a zvolme znamení $\varepsilon = \pm 1$ tak, aby výraz $\varepsilon\,d$ byl diskriminantem; klademe-li pak $D_0 = \varepsilon\,d\,D_1$, bude též D_1 diskriminantem, a při tom

$$\left(\frac{D_0}{k}\right) = \left(\frac{\varepsilon\,d}{k}\right) \left(\frac{D_1}{k}\right).$$

Znamenejme $\frac{m}{d} = m'$, $|D_1| = \Delta'$, a položme

$$k = \varrho + \Delta' \nu; \; (\varrho = 1, 2, \ldots \Delta'; \nu = 0, 1, \ldots d - 1);$$

tím se výraz

$$s = \sum_{k=1}^{D_0} \left(\frac{D_1}{k}\right) \left(\frac{\varepsilon d}{k}\right) \cos \frac{2 k m' \pi}{\Delta'}$$

přemění v následující

$$s = \sum_{\varrho=1}^{\Delta'} \left(\frac{D_1}{\varrho}\right) \cos \frac{2 k m' \pi}{\Delta'} \sum_{\nu=0}^{d-1} \left(\frac{\varepsilon d}{\varrho + \Delta' \nu}\right).$$

Číslo Δ' nemůže obsahovati žádného z kmenných činitelů čísla d poněvadž D_0 je diskriminant základní a tedy nemá lichých dělitelů čtvercových; tudíž jsou d a Δ' čísla nesoudělná, takže výraz $\varrho + \Delta' \nu$ probíhá úplnou soustavu modulo d, z čehož plyne, že

$$\sum_{\nu=0}^{d-1} \left(\frac{\varepsilon d}{\varrho + \Delta' \nu}\right) = 0,$$

a tedy též $s = 0$.

Zbývá ještě vyšetřiti případ, kdy m a D_0 jsou obě sudá čísla. Tu třeba rozeznávati dva tvary diskriminantu D_0, t. j. $4P$ a $8P$.

V případě $D_0 = 8P$ máme součet

$$s = \sum_{k=1}^{8P} \left(\frac{2P}{k}\right) \cos \frac{2 k m' \pi}{4P}, \; (k \text{ liché}),$$

takže substituce $k = \varrho + 4 \nu P$, $(\varrho = 1, 3, \ldots 4P; \nu = 0, 1)$, nám poskytne

$$s = \sum_{\varrho} \left(\frac{P}{\varrho}\right) \cos \frac{2 \varrho m' \pi}{4P} \left[\left(\frac{2}{\varrho}\right) + \left(\frac{2}{\varrho + 4P}\right)\right],$$

a tu je zřejmo, že výraz v hranaté závorce rovná se nulle, tedy $s = 0$

Je-li dále $D_0 = 4P$, $P \equiv -1$ (mod. 4), bude náš součet zníti

$$s = \sum_{k=1, 3, 5 \ldots 4P-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) \cos \frac{2 k m' \pi}{2P}$$

i lze jej psáti

$$s = \sum_{\varrho=1, 3, \ldots 2P-1} \left[\left(\frac{P}{\varrho}\right) + \left(\frac{P}{\varrho + 2P}\right)\right] \cos \frac{2 k m' \pi}{2P},$$

a tu jest opět

$$\left(\frac{P}{\varrho}\right) + \left(\frac{P}{\varrho + 2P}\right) = 0.$$

Výraz

$$s_m = \sum_{k=1}^{D_0 - 1} \left(\frac{D_0}{k}\right) \cos \frac{2 k m \pi}{D_0}$$

liší se tedy od nully pouze v případě, kdy m a D_0 jsou nesoudělna. Píšeme-li rovnici tuto ve tvaru

$$\left(\frac{D_0}{m}\right) s_m = \sum_k \left(\frac{D_0}{k\, m}\right) \cos \frac{2 k m \pi}{D_0},$$

kde k probíhá pouze čísla s D_0 nesoudělná, stačí uvážiti, že $k m$ probíhá taktéž čísla s D_0 nesoudělná a modulo D_0 různá, z čehož plyne

$$\left(\frac{D_0}{m}\right) s_m = \sum \left(\frac{D_0}{k}\right) \cos \frac{2 k \pi}{D_0} = s_1,$$

a tedy

(a)
$$\sum_{k=1}^{D-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) \cos \frac{2 k m \pi}{D_0} = \left(\frac{D_0}{m}\right) s_1,$$

kde číslo s_1 závisí pouze na D_0.

Z rovnice této plyne, že rovnice (10) v případě $D = D_0$ zjednoduší se jak následuje

(b)
$$D_0 P(D_0) = - s_1 \sum_{\alpha = 1}^{D_0 - 1} \left(\frac{D_0}{\alpha}\right) \log \sin \frac{\alpha \pi}{D_0}.$$

Užijme nyní k vyjádření pravé strany rovnice z elementů známé

$$-\log 2 \sin x \pi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2 m x \pi}{m},$$

a vzpomeňme identity

$$\sum_{\alpha=1}^{D_0 - 1} \left(\frac{D_0}{\alpha}\right) = 0.$$

Tak obdržíme nejprve

$$D_0 P(D_0) = s_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^{D_0 - 1} \left(\frac{D_0}{\alpha}\right) \cos \frac{2 m \alpha \pi}{D_0};$$

vnitřní součet má dle rovnice (a) hodnotu $\left(\frac{D_0}{m}\right) s_1$, a tedy vyjde

$$D_0 P(D_0) = s_1^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D_0}{m}\right) \frac{1}{m} = s_1^2 P(D_0),$$

V.

z čehož

$$s_1{}^2 = D_0\,,\; s_1 = +\sqrt{D_0}\,.$$

Absolutní hodnota výrazu s_1 by nám zde dostačila; my však k vůli úplnosti poukážeme na theorii Gaussových součtů, která dokazuje, že s_1 je vždy kladné. Dle toho bude

$$\sum_{k=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{k}\right)\cos\frac{2\,k\,m\,\pi}{D_0} = \left(\frac{D_0}{m}\right)\sqrt{D_0}\,, \tag{11}$$

a obdobná rovnice platí pro hlavní diskriminanty záporné

$$\sum_{k=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{k}\right)\sin\frac{2\,k\,m\,\pi}{\Delta_0} = \left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)\sqrt{\Delta_0}\,, \tag{11^a}$$

při čemž celistvé číslo m musí býti kladné. Rovnice (b) tedy zní

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D_0}{h}\right)\frac{\sqrt{D_0}}{h} = -\sum_{k=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\sin\frac{k\pi}{D_0}\,, \tag{12}$$

a z toho dle (2) výsledek Dirichletův

$$Cl(D_0)\log\frac{T_0+U_0\sqrt{D_0}}{2} = -\sum_{k=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\sin\frac{k\pi}{D_0}\,. \tag{13}$$

Tato rovnice je zvláštním případem rovnice (10), totiž vztahu

$$\begin{aligned} &Cl(D)\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2} \\ &= -\sum_{k=1}^{D-1}\log\sin\frac{\alpha\pi}{D}\cdot\frac{1}{\sqrt{D}}\sum_{k=1}^{D-1}\left(\frac{D}{k}\right)\cos\frac{2\,k\,\alpha\,\pi}{D}\,, \end{aligned} \tag{14}$$

který platí pro všecky diskriminanty.

Podle rovnice (6) obdržíme z výsledků (13) a (14) vztah

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{D-1}\log\sin\frac{k\pi}{D}\cdot\frac{1}{\sqrt{D}}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2\,h\,k\,\pi}{D} \\ &= Q\prod_q\left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\sum_{k=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\sin\frac{k\pi}{D_0}\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Zajímavý příklad bude $D_0 = p$, $Q = q$, kde p, q jsou různá čísla kmenná; při tom ovšem musí býti $p \equiv 1$ (mod. 4), poněvadž jinak by p nebylo diskriminantem. Rovnice (16) podá v tomto případě

$$
(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{pq^2-1}\log\sin\frac{k\pi}{pq^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{h=1}^{pq^2-1}\left(\frac{pq^2}{h}\right)\cos\frac{2hk\pi}{pq^2}\\
&=q^2\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{p}{k}\right)\log\sin\frac{k\pi}{p}.
\end{aligned}\right.
$$

Na levé straně rozlišme hodnoty k dělitelné na q^2 od ostatních, které znamenejme k'. Pak bude levá strana zníti

$$
\sum_{k'}\log\sin\frac{k'\pi}{pq^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{h=1}^{pq^2-1}\left(\frac{pq^2}{h}\right)\cos\frac{2hk'\pi}{pq^2}+S,
$$

kde

$$
S=\sum_{\nu=1}^{p-1}\log\sin\frac{\nu\pi}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{h=1}^{pq^2-1}\left(\frac{pq^2}{h}\right)\cos\frac{2h\nu\pi}{p}.
$$

Tu jest pak po substituci $h=\varrho+\mu p$, $(\varrho=1,2,\ldots p;\ \mu=0,1,\ldots q^2-1)$

$$
\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{h=1}^{pq^2-1}\left(\frac{pq^2}{h}\right)\cos\frac{2h\nu\pi}{p}=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\varrho=1}^{p}\left(\frac{p}{\varrho}\right)\cos\frac{2\varrho\nu\pi}{p}\sum_{\mu=0}^{q^2-1}\left(\frac{q^2}{\varrho+\mu p}\right).
$$

Ježto p a q^2 jsou nesoudělná, probíhá při $\mu=0,1,\ldots q^2-1$ výraz $\varrho+\mu p$ veškery zbytky modulo q^2, a tedy bude

$$
\sum_{\mu=0}^{q^2-1}\left(\frac{q^2}{\varrho+\mu p}\right)=\varphi(q^2)=q^2\left(1-\frac{1}{q}\right),
$$

z čehož plyne, že náš součet

$$
\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{h=1}^{pq^2-1}\left(\frac{pq^2}{h}\right)\cos\frac{2h\nu\pi}{p}
$$

má hodnotu

$$
q^2\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\varrho=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\varrho}\right)\cos\frac{2\varrho\nu\pi}{p},
$$

t. j. dle vzorce (11)

$$
q^2\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdot\left(\frac{p}{\nu}\right);
$$

dle toho bude tedy

$$
S=q^2\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\nu}\right)\log\sin\frac{\nu\pi}{p};
$$

vynecháme-li tento součet na obou stranách rovnice (α), vznikne rovnice

$$(\beta)\quad \begin{cases} \sum_{k'} \log \sin \dfrac{k'\pi}{pq^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{p}} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\dfrac{pq^2}{h}\right) \cos \dfrac{2hk'\pi}{pq^2} \\ = q\left(1-\left(\dfrac{p}{q}\right)\right) \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\dfrac{p}{\nu}\right) \log \sin \dfrac{\nu\pi}{p}. \end{cases}$$

Čísla k' jsou pak dvojí; buď jsou na q nedělitelna aneb obsahují q; první znamenejme k'', druhá budou tvaru $k''' q$, kde $0 < k''' < pq$, a při tom k''' na q nedělitelno.

Levá strana tedy bude

$$(\beta')\quad \begin{cases} \sum_{k''} \log \sin \dfrac{k''\pi}{pq^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{p}} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\dfrac{pq^2}{h}\right) \cos \dfrac{2hk''\pi}{pq^2} \\ + \sum_{k'''} \log \sin \dfrac{k'''\pi}{pq} \dfrac{1}{\sqrt{p}} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\dfrac{pq^2}{h}\right) \cos \dfrac{2hk'''\pi}{pq}; \end{cases}$$

v tomto výraze druhá část může býti uvedena na tvar

$$(\beta'')\quad \sum_{k'''} \log \sin \frac{k'''\pi}{pq} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\varrho=1}^{pq-1} \left(\frac{pq\varepsilon}{\varrho}\right) \cos \frac{2\varrho k'''\pi}{pq} \cdot \sum_{\mu=0}^{q-1} \left(\frac{q\varepsilon}{\varrho+\mu pq}\right)$$

kde se předpokládá znamení $\varepsilon = \pm 1$ tak voleno, aby εq bylo diskriminantem, t. j. $\varepsilon q \equiv 1 \pmod{4}$; za této supposice bude dále

$$\sum_{\mu=0}^{q-1} \left(\frac{\varepsilon q}{\varrho + \mu pq}\right) = q\left(\frac{\varepsilon q}{\varrho}\right),$$

a tedy poslední výraz bude

$$(\gamma)\qquad S = q\sum_{k'''} \log \sin \frac{k'''\pi}{pq} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\varrho=1}^{pq-1} \left(\frac{pq^2}{\varrho}\right) \cos \frac{2\varrho k'''\pi}{pq}$$

Zde položme

$$\varrho = \sigma + q\nu, (\sigma = 1, 2, \ldots q;\ \nu = 0, 1, \ldots p-1),$$

i vyjde

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varrho=1}^{pq-1} \left(\frac{pq^2}{\varrho}\right) \cos \frac{2\varrho k'''\pi}{pq} = \sum_{\sigma=1}^{q-1} \sum_{\nu=0}^{p-1} \left(\frac{p}{\sigma + q\nu}\right) \cos \frac{2k'''\pi(\sigma + q\nu)}{pq}$$

tedy

$$\mathfrak{S} = \sum_{\sigma=1}^{q-1} \sum_{\nu=0}^{p-1} \left(\frac{p}{\sigma + q\nu}\right) \left\{ \cos \frac{2k'''\sigma\pi}{pq} \cos \frac{2k'''\nu\pi}{p} - \sin \frac{2k'''\sigma\pi}{pq} \sin \frac{2k'''\nu\pi}{p} \right\}.$$

Buď nyní q' kladné řešení shody

$$q\,q' \equiv 1 \pmod{p},$$

i položme

$$\sigma + q\,\nu \equiv h \pmod{p},$$

takže

$$\nu \equiv q'(h - \sigma) \pmod{p};$$

následkem toho lze psáti

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} \left(\frac{p}{\sigma + q\nu}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\frac{2k'''\nu\pi}{p}\right) = \sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{p}{h}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\frac{2k'''q'(h-\sigma)\pi}{p}\right)$$
$$= \left(\frac{p}{q'k'''}\right) \sqrt{p} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\frac{-2k'''q'\sigma\pi}{p}\right).$$

Následkem toho výraz $\mathfrak{S}$ obdrží tvar

$$\mathfrak{S} = \sum_{\sigma=1}^{q-1} \left(\frac{p}{q'k'''}\right) \sqrt{p}\,.\cos \frac{2k'''\sigma\pi}{p} \left(\frac{1}{q} - q'\right);$$

poněvadž $\frac{q\,q' - 1}{p} = q''$ je číslo celistvé, máme

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{p}{q'k'''}\right) \sqrt{p} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \cos \frac{2k'''q''\sigma\pi}{q}.$$

Z definice

$$q\,q' - 1 = p\,q''$$

plyne, že q'' je nesoudělno s q, a že tedy — ježto ani k''' neobsahuje q —

$$\sum_{\sigma=1}^{q} \cos \frac{2k'''q''\sigma\pi}{q} = 0,$$

a odtud

$$\mathfrak{S} = -\left(\frac{p}{q'k'''}\right) \sqrt{p}$$

Ježto p je diskriminantní číslo, bude dále

$$\left(\frac{p}{q'k'''}\right) = \left(\frac{q'k'''}{p}\right) = \left(\frac{q'}{p}\right)\left(\frac{k'''}{p}\right),$$

ze shody

$$q\, q' \equiv 1 \pmod{p}$$

pak soudíme, že bude

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q'}{p}\right),$$

a tedy

$$\mathfrak{S} = -\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{k'''}{p}\right)\sqrt{p} = -\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{k'''}\right)\sqrt{p}$$

Výraz S, t. j. veličina (γ) má podle toho hodnotu

$$S = -\left(\frac{p}{q}\right) q \sum_{k'''}\left(\frac{p}{k'''}\right) \log \sin \frac{k''' \pi}{p\, q},$$

kde summační přípona k''' je v mezích $0 < k''' < p\, q$ a je nesoudělna s q; proto lze psáti

$$(\gamma') \qquad S = -\left(\frac{p}{q}\right) q \sum_{k=1}^{p\, q}\left(\frac{p\, q^2}{k}\right) \log \sin \frac{k\, \pi}{p\, q}.$$

Substituce $k = \varrho + \nu\, p$ $(\varrho = 1, 2, \ldots p;\ \nu = 0, 1, \ldots q - 1)$ poskytne tvar

$$S = -\left(\frac{p}{q}\right) q \sum_{\varrho=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\varrho}\right) \sum_{\nu=0}^{q-1}\left(\frac{q^2}{\varrho + \nu\, p}\right) \log \sin \left(\frac{\varrho}{p} + \nu\right)\frac{\pi}{q},$$

čili

$$(\gamma'') \qquad S = -\left(\frac{p}{q}\right) q \sum_{\varrho=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\varrho}\right) \log f\left(\frac{\varrho}{p}\right),$$

kde

$$f\left(\frac{\varrho}{p}\right) = \prod_{\nu}{}' \sin\left(\frac{\varrho}{p} + \nu\right)\frac{\pi}{q},$$

při čemž v součinu probíhá index ν hodnoty z intervallu $0 \leqq \nu < q$, pro něž $\varrho + \nu q$ neobsahuje q.

Pro neurčité u bude

$$f(u) = \prod_{\nu}{}' \sin(u + \nu)\frac{\pi}{q}, \quad \varrho + \nu\, p \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

Je-li $\nu = a$ hodnota $(0 < a < q)$, pro niž $\varrho + a p \equiv 0 \pmod{q}$, bude

$$f(u) = \frac{\prod\limits^{0 \ldots q-1} \sin(u + \nu)\dfrac{\pi}{q}}{\sin(u + a)\dfrac{\pi}{q}}.$$

Čítatel jest však roven veličině

V.

$$\frac{\sin u\pi}{2^{q-1}},$$

tedy

$$f(u) = \frac{1}{2^{q-1}}\,\frac{\sin u\pi}{\sin(a+u)\frac{\pi}{q}},$$

odkudž pro $u = \frac{\varrho}{p}$ vyjde

$$f\left(\frac{\varrho}{p}\right) = \frac{1}{2^{q-1}}\cdot\frac{\sin\frac{\varrho\pi}{p}}{\sin\frac{(\varrho+ap)\pi}{pq}}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (γ''), obdrží se

$$S = -\left(\frac{p}{q}\right) q \sum_{\varrho=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\varrho}\right)\log\sin\frac{\varrho\pi}{p}$$
$$+\, q\left(\frac{p}{q}\right)\sum_{\varrho=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\varrho}\right)\log\sin\frac{(\varrho+a_\varrho p)\pi}{pq},$$

kde a_ϱ je definováno shodou

$$\varrho + a_\varrho\, p \equiv 0 \pmod{q}.$$

Znamenejme

$$\varrho + a_\varrho\, p = b_\varrho\, q,\ (0 < b_\varrho < p),$$

takže

$$\left(\frac{p}{b_\varrho q}\right) = \left(\frac{p}{\varrho}\right),$$

tedy

$$\sum_\varrho\left(\frac{p}{\varrho}\right)\log\sin\frac{b_\varrho\pi}{p} = \sum\left(\frac{p}{q\,b_\varrho}\right)\log\sin\frac{b_\varrho\pi}{p}$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right)\sum_{\sigma=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\sigma}\right)\log\sin\frac{\sigma\pi}{p};$$

tudíž vyjde jakožto hodnota součtu (γ)

$$S = \left[q - \left(\frac{p}{q}\right)q\right]\sum_{\varrho=1}^{p-1}\left(\frac{p}{\varrho}\right)\log\sin\frac{\varrho\pi}{p}.$$

Tento výsledek rovná se však veličině na pravé straně rovnice (β) stojící, a tedy se rovnice (β) redukuje na svůj obsah nejjednodušší

$$\sum_{k''}\log\sin\frac{k''\pi}{pq^2}\sum_{h=1}^{pq^2-1}\left(\frac{pq^2}{h}\right)\cos\frac{2hk''\pi}{pq^2} = 0,$$

V.

kde součet se vztahuje k hodnotám k'' nesoudělným s q a obsaženým v mezích $0 < k'' < p q^2$, což lze též vyjádřiti pohodlněji takto

$$\sum_{k=1}^{pq^2-1} \left(\frac{q^2}{k}\right) \log \sin \frac{k\pi}{pq^2} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2hk\pi}{pq^2} = 0.$$

Poněvadž

$$\sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2hk''\pi}{pq^2} = \left(\frac{pq^2}{k''}\right) \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2h\pi}{pq^2},$$

bude lze výsledek ten psáti

$$\sum_{k=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \log \sin \frac{k\pi}{pq^2} \cdot \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2h\pi}{pq^2} = 0,$$

a odtud soudíme, že jedna z veličin

$$(16) \qquad \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2h\pi}{pq^2} \qquad \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{pq^2}$$

musí vymizeti. Ukážeme v dodatku, že to jest veličina první.

Výsledky této úvahy lze takto vyjádřiti:

Jsou-li p a q dvě různá kmenná čísla, $p \equiv 1$ (mod. 4), platí rovnice

$$(17) \qquad \sum_{\varrho=1}^{pq-1} \left(\frac{pq^2}{\varrho}\right) \cos \frac{2m\varrho\pi}{pq} = -\left(\frac{p}{mq}\right) \sqrt{p},$$

je-li číslo m nesoudělno s q.

Jako doplněk vzorce (17) uveďme ještě

$$(17^a) \qquad \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2hm\pi}{pq} = -\left(\frac{p}{mq}\right) q \sqrt{p}, \quad \left(\frac{q^2}{m}\right) = 1,$$

$$(17^b) \qquad \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2hm\pi}{p} = q(q-1) \left(\frac{p}{m}\right) \sqrt{p}$$

Předpokládejme, jak tomu skutečně jest, že mizí první z výrazů (16), t. j.

$$\sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2h\pi}{pq^2} = 0;$$

pak bude též

$$(\delta) \qquad \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2\,m\,h\,\pi}{p\,q^2} = 0, \text{ je-li } \left(\frac{q^2}{m}\right) = 1\,.$$

Pomocí řady

$$\log \sin x\,\pi = -\log 2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\,m\,x\,\pi}{m}$$

vypočteme výraz

$$A = \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \log \sin \frac{h\,\pi}{p\,q^2}$$

ve tvaru

$$A = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2\,m\,h\,\pi}{p\,q^2}\,.$$

Řadu rozdělme ve tři části, z nichž jedna obsahuje členy, v nichž m je nesoudělno s q, druhá členy, kde $m = m'\,q$, třetí pak sestává ze členů $m = m''\,q^2$; při tom jest m'' libovolné, ale m$'$ jest s q nesoudělno; tak vznikne

$$A = S_0 + S_1 + S_2\,;$$

kde

$$S_0 = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^2}{m}\right) \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2\,h\,m\,\pi}{p\,q^2} = 0,$$

$$S_1 = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^2}{m}\right) \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2\,h\,m\,\pi}{p\,q}\,,$$

$$S_2 = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{q^2} \sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \cos \frac{2\,h\,m\,\pi}{p}\,.$$

Řady S_1 a S_2 lze sečísti na základě vzorců (17^a) a (17^b), a sice obdrží se tak výrazy

$$S_1 = +\left(\frac{p}{q}\right) \sqrt{p} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{pq^2}{m}\right) \frac{1}{m} = +\left(\frac{p}{q}\right) \sqrt{p}\,.\,P(p\,q^2),$$

$$S_2 = -\left(1 - \frac{1}{q}\right) \sqrt{p}\,.\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{p}{m}\right) \frac{1}{m} = -\left(1 - \frac{1}{q}\right) \sqrt{p}\,.\,P(p).$$

Podle vzorce (4) však bude

$$P(p\,q^2) = \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right) \frac{1}{q}\right) P(p),$$

a tedy

$$S_1 + S_2 = -\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right)\sqrt{p} \,.\, P(p).$$

Druhý z výrazů (16) má tedy hodnotu

$$\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right)\sqrt{p}\; P(p),$$

i bude též roven nulle, jakmile $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$.

Je-li kmenné číslo p tvaru $4n + 1$ a kmenné číslo q jeho kvadratickým zbytkem, bude

$$\sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{pq^2} = 0.$$

Je-li však q nezbytkem dle p, bude součet

$$\sum_{h=1}^{pq^2-1} \left(\frac{pq^2}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{pq^2}$$

od nully rozný, i jest jeho hodnota

$$-2\, Cl\,(p) \log \frac{t + u\sqrt{p}}{2};$$

při tom značí t, u základní řešení Pellovy rovnice

$$t^2 - p u^2 = 4,$$

kde p a q jsou různá čísla kmenná a p tvaru $4n + 1$.

Obraťme se nyní k případu záporného diskriminantu, pro který jsme obdrželi rovnici (9)

$$P(-\Delta) = \frac{\pi}{2\Delta} \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \cot \frac{k\pi}{\Delta}.$$

Poněvadž

$$\cot \frac{k\pi}{\Delta} = i\, \frac{\xi^k + 1}{\xi^k - 1}, \quad \xi = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}},$$

obdržíme

$$\frac{2\Delta}{\pi} P(-\Delta) = i \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{\xi^k + 1}{\xi^k - 1} = 2i \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{1}{\xi^k - 1}.$$

Součin

$$\prod_{k=1}^{\Delta-1}(1-\xi^k)$$

má hodnotu Δ, poněvadž výraz

$$f(x)=\prod_k (x-\xi^k)$$

má hodnotu

$$f(x)=x^{\Delta-1}+x^{\Delta-2}+\ldots+x^2+x+1.$$

Násobíme-li tedy hodnotou $\Delta=f(1)$, máme

$$2\frac{\Delta^2}{\pi}P(-\Delta)=2i\sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{f(1)}{\xi^k-1}=$$

$$-2i\left\{\sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{f(x)}{x-\xi^k}\right\}_{x=1},$$

i bude potřebí pouze provésti dělení

$$\frac{f(x)}{x-\xi^k};$$

výraz ten lze však psáti

$$\frac{f(x)-f(\xi^k)}{x-\xi^k}=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\frac{x^h-\xi^{hk}}{x-\xi^k}=\sum_{h=1}^{\Delta-1}(x^{h-1}+x^{h-2}\xi^k+x^{h-3}\xi^{2k}+\ldots+\xi^{(h-1)k})$$

Odtud pro $x=1$ plyne

$$\frac{f(1)}{1-\xi^k}=\sum_{h=1}^{\Delta-1}(1+\xi^k+\xi^{2k}+\ldots+\xi^{(h-1)k})=\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}(\Delta-\nu)\,\xi^{(\nu-1)k}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do hořejšího vzorce, obdržíme

$$\frac{\Delta^2}{\pi}P(-\Delta)=i\sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}(\nu-\Delta)\,\xi^{(\nu-1)k}$$

čili

$$\frac{\Delta^2}{\pi}P(-\Delta)=i\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}(\nu-\Delta)\sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)e^{\frac{2k(\nu-1)\pi i}{\Delta}}$$

Je-li $\Delta=\Delta_0$ opačný diskriminant základní, platí vztah

V.

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sin\frac{2hm\pi}{\Delta}=\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta},\ (m>0),$$

jenž má týž obsah jako vzorec

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)e^{\frac{2hm\pi i}{\Delta}}=\left(\frac{-\Delta}{m}\right)i\sqrt{\Delta},\ (m>0);$$

tudíž předpokládáme-li $\Delta=\Delta_0$, obdržíme poslední výraz $P(-\Delta)$ ve tvaru

$$\frac{\Delta^2}{\pi}P(-\Delta)=-\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=2}^{\Delta-1}(\nu-\Delta)\left(\frac{-\Delta}{\nu-1}\right).$$

Zde pišme nyní $\nu=\mu+1$, i obdržíme

$$\frac{-\Delta\sqrt{\Delta}}{\pi}P(-\Delta)=\sum_{\mu=1}^{\Delta-2}(\mu-\Delta+1)\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\Delta-2}\mu\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)-(\Delta-1)\sum_{\mu=1}^{\Delta-2}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right).$$

Avšak

$$\sum_{\mu=1}^{\Delta-2}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{\Delta-1}\right),$$

takže lze náš výsledek psáti

$$\tau\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{2h\pi}=-\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{\mu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)\mu.$$

Podle vzorce (1) je však levá strana rovna $Cl(-\Delta)$ a tedy máme známý výsledek

$$Cl(-\Delta_0)=-\frac{\tau}{2\Delta_0}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h. \tag{18}$$

Ke konci obraťme se ještě k rovnici (6*), totiž

$$Cl(D)=\frac{1}{\mu}Q\prod_q\left[1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right]Cl(D_0),$$

kde

$$\mu=\frac{\log\dfrac{T+U\sqrt{D}}{2}}{\log\dfrac{T_0+U_0\sqrt{D_0}}{2}}$$

V.

je číslo celistvé a kladné. Zaveďme znaménko

$$(19) \qquad (Q, D_0) = Q \prod_q \left[1 - \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right],$$

načež máme

$$Cl(D) = \frac{(Q, D_0)}{\mu} Cl(D_0).$$

Nyní tvrdíme, že ke každému celistvému kladnému číslu m náleží exponent $\bar{\omega}$ tak, aby platila shoda

$$(20) \qquad \frac{\left(\frac{T_0 + U_0 \sqrt{D_0}}{2}\right)^{\bar{\omega}} - \left(\frac{T_0 - U_0 \sqrt{D_0}}{2}\right)^{\bar{\omega}}}{\sqrt{D_0}} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Neboť tu stačí řešiti Pellovu rovnici

$$t^2 - D_0 u^2 = 4$$

hodnotou u dělitelnou na m; klademe-li $u = u' m$, obdržíme totiž rovnici

$$t^2 - (D_0 m^2) u'^2 = 4,$$

která má vždy řešení; budiž $t = T$, $u' = U$ řešení základní, pak všecka ostatní budou taková, že platí rovnice

$$\frac{t + u\sqrt{D_0}}{2} = \left(\frac{T + mU\sqrt{D_0}}{2}\right)^{\nu}.$$

Avšak řešení $T = t_1$, $mU = u_1$ hoví též rovnici Pellově

$$t_1{}^2 - D_0 u_1{}^2 = 4$$

příslušné k diskriminantu D_0, takže bude

$$\frac{T + mU\sqrt{D_0}}{2} = \left(\frac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{\bar{\omega}},$$

odtud

$$\frac{t + u\sqrt{D_0}}{2} = \left(\frac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{\nu\bar{\omega}}$$

Tedy pro číslo m existuje jistý nejmenší exponent $\bar{\omega}$, a všecky ostatní exponenty mající vlastnost (20) jsou jeho kladné násobky. Tento nejmenší exponent znamenati budeme $\bar{\omega}(m)$ neb $\bar{\omega}(m, D_0)$.

Číslo $\bar{\omega}(m)$ je nejmenší řešení shody

$$(20^a) \qquad \frac{(T_0 + U_0\sqrt{D_0})^{\bar{\omega}} - (T_0 - U_0\sqrt{D_0})^{\bar{\omega}}}{2^{\bar{\omega}}\sqrt{D_0}} \equiv 0 \pmod{m}.$$

V.

Buď nyní D_0 diskriminant základní, $D_0 Q^2 = D$ diskriminant z něho odvozený, T, U hlavní řešení Pellovy rovnice

$$T^2 - D U^2 = 4.$$

Poněvadž z rovnice té plyne též

$$T^2 - D_0 (Q U)^2 = 4,$$

nacházíme

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{\mu},$$

čili

$$\mu = \bar{\omega}\,(Q,\, D_0) = \frac{\log \dfrac{T + U\sqrt{D}}{2}}{\log \dfrac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}};$$

číslo μ vyskytující se v rovnici

$$Cl(D) = \frac{(Q,\, D_0)}{\mu}\, Cl(D_0)$$

je tedy totožno s naším exponentem $\bar{\omega}\,(Q,\, D_0)$, takže máme

$$Cl(D) = \frac{(Q,\, D_0)}{\bar{\omega}\,(Q)}\, Cl(D_0). \tag{21}$$

Naopak odpovídá danému exponentu $\bar{\omega}$ vždy konečný počet čísel m pro něž platí shoda (20^a); stačí pouze vypočísti mocnost

$$\left(\frac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{\bar{\omega}} = \frac{t + u\sqrt{D_0}}{2},$$

načež všichni dělitelé čísla u mohou býti vzati za m; ne pro všecky ovšem bude $\bar{\omega}$ míti význam exponentu nejmenšího $\bar{\omega}\,(m)$.

Volme nyní $\bar{\omega} = Cl(D_0)$; rovnicí

$$\left(\frac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{Cl(D_0)} = \frac{t' + u'\sqrt{D_0}}{2}$$

je definováno určité číslo u'; je-li m dělitelem čísla u', bude jistě $\bar{\omega}\,(m)$ obsaženo v čísle $Cl(D_0)$.

Naopak buď μ dělitel čísla $Cl(D_0) = \mu\,\nu$, a buď $\mu = \bar{\omega}\,(m)$. Znamenáme-li

$$\left(\frac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{\mu} = \frac{t_1 + u_1\sqrt{D_0}}{2},$$

V.

bude $u_1 \equiv 0$ (mod. m); píšeme-li $u_1 = m u'$, bude lze poslední veličinu psáti též

$$\frac{t_1 + u' \sqrt{m^2 D_0}}{2},$$

načež

$$\left(\frac{T_0 + U_0 \sqrt{D_0}}{2}\right)^{Cl(D_0)} = \left(\frac{t_1 + u' \sqrt{m^2 D_0}}{2}\right)^{\nu}$$

bude tvaru

$$\frac{t_2 + u_2 \sqrt{D_0 m^2}}{2} = \frac{t' + u' \sqrt{D_0}}{2};$$

tu ale $u' = u_2 m$.

Tudíž je-li $\bar{\omega}(m)$ obsaženo v $Cl(D_0)$, bude m obsaženo v u'. Pouze dělitelé čísla u' mají tedy vlastnost, že jejich exponenty $\bar{\omega}(m)$ jsou obsaženy v $Cl(D_0)$.

Číslo u' definované rovnicí

$$(22) \qquad \frac{t' + u' \sqrt{D_0}}{2} = \left(\frac{T_0 + U_0 \sqrt{D_0}}{2}\right)^{Cl(D_0)}$$

nazveme Pellovským číslem příslušným k základnímu diskriminantu D_0.

V rovnici (21) jmenovatel $\bar{\omega}$ (Q) bude nesoudělným s číslem Cl (D_0), je-li Q nesoudělno s Pellovským číslem.

»Je-li Q nesoudělno s Pellovským číslem diskriminantu D_0, bude číslo (Q, D_0) dělitelno číslem $\bar{\omega}$ (Q).« Odtud plyne, že *shoda*

$$(23) \qquad \frac{(T_0 + U_0 \sqrt{D_0})^{(Q, D_0)} - (T_0 - U_0 \sqrt{D_0})^{(Q, D_0)}}{2^{(Q, D_0)} \sqrt{D_0}} \equiv 0 \text{ (mod. } Q)$$

je správná, značí-li Q číslo nesoudělné s Pellovským číslem diskriminantu D_0. Při tom jest

$$(Q, D_0) = Q \prod_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right),$$

kde v součinu q probíhá všecky různé kmenné činitele čísla Q.

Ve zvláštním případě $Q = q$ máme větu. »Je-li číslo kmenné q nesoudělné s Pellovským číslem diskriminantu D_0, bude číslo u definované rovnicí

$$\left(\frac{T_0 + U_0 \sqrt{D_0}}{2}\right)^{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} = \frac{t + u\sqrt{D_0}}{2}$$

dělitelno číslem q.«

Pro $D_0 = 5$ je na př. $T_0 = 3$, $U_0 = 1$, a poněvadž $Cl(5) = 1$, máme též $u' = 1$; Pellovské číslo je tedy rovno jedné, a proto bude pro libovolné kmenné číslo q výraz

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{q-\left(\frac{q}{5}\right)} = \frac{t+u\sqrt{5}}{2}$$

míti irracionalného součinitele u dělitelným na q. Na př.

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2+1} = \frac{18+8\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{3+1} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{5-0} = \frac{123+55\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{7+1} = \frac{2207+987\sqrt{5}}{2},$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{11-1} = \frac{t+123\,.\,55\sqrt{5}}{2}, \text{ atd.}$$

Hodnoty u jsou tu pořadem

8, 21, 55, 987, 123. 55

a jsou dělitelny příslušnými čísly

2, 3, 5, 7, 11.

Zároveň tu máme prostředky přímo hledati kmenné činitele čísla $Cl\ (D_0)$.

Proveďme mocnění

$$\left(\frac{T_0\ U_0\sqrt{D}}{2}\right)^{\mu} = \frac{t+u\sqrt{D}}{2}, \ (\mu = 1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$$

s kmennými exponenty μ; pokaždé musí se vyskytnouti kmenný činitel p_μ příslušné hodnoty u, který ještě nevyskytl se při nižších hodnotách exponentu μ. Je-li (p_μ, D_0) nedělitelno číslem μ, bude μ obsaženo v $Cl\,(D_0)$.

Tím ovšem není řečeno, že by všecka kmenná čísla v $Cl\,(D_0)$ obsažená mohla tímto způsobem býti stanovena, rovněž nemůže postup ten považován býti za zvláště praktický.

Dodatek.

Chceme ještě stanoviti součty tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta - 1}\left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu m \pi i}{\Delta}}, \ (\Delta = |D|),$$

v nichž D je diskriminant složený $= D_0\ Q^2$, a m číslo celistvé hovící jistým podmínkám.

V.

Vyjděme z výrazu

$$A = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D_0}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu m \pi i}{\Delta}};$$

položíme-li $\nu = \varrho + \mu \Delta_0$, $(\varrho = 1, 2, \ldots \Delta_0;\ \mu = 0, 1, \ldots Q^2 - 1)$, bude $\left(\frac{D_0}{\nu}\right) = \left(\frac{D_0}{\varrho}\right)$, tudíž

$$A = \sum_{\varrho} \left(\frac{D_0}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho m \pi i}{\Delta}} \sum_{\mu} e^{\frac{2\mu m \pi i}{Q^2}}$$

Vnitřní součet jest od nully různý a pak roven Q^2 jen tehdy, je-li m dělitelno číslem Q^2, i lze psáti jeho hodnotu $Q^2 \mathcal{J}\left(\frac{m}{Q^2}\right)$, užívá-li se symbolu $\mathcal{J}(x) = 1$ neb $\mathcal{J}(x) = 0$, aby se naznačilo, že x jest celistvé resp. lomené. Pak bude

(a) $$A = Q^2 \mathcal{J}\left(\frac{m}{Q^2}\right) \left(\frac{D_0}{m'}\right) \sqrt{D_0}\,, \text{ kde } m' = \frac{m}{Q^2}.$$

Týž součet A lze však ještě jiným způsobem vyjádřiti. Hodnoty ν v něm přicházející rozdělme ve skupiny příslušné k jednotlivým dělitelům čísla Q; a sice bude skupina (d) příslušná k děliteli d charakterisována podmínkou, že d je nějvětší společný dělitel čísel ν a Q; znamenáme-li tedy $Q = d\,d'$, $\nu = d\,\nu'$, budou d' a ν' čísla nesoudělná; příslušný součet skupiny (d) lze tedy psáti

$$s_d = \sum_{\nu'} \left(\frac{D_0}{d\nu'}\right) \left(\frac{d'^2}{\nu'}\right) e^{\frac{2\nu' m \pi i}{\Delta_0 d'^2 d}} = \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{\nu'=1}^{\Delta_0 d'^2 d} \left(\frac{D_0 d'^2}{\nu'}\right) e^{\frac{2\nu' m \pi i}{\Delta_0 d'^2 d}}.$$

V posledním výraze dosaďme nyní $\nu' = \varrho + \mu \,.\, \Delta_0 d'^2$, i vyjde

$$s_d = \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{\varrho=1}^{\Delta_0 d'^2} \left(\frac{D_0 d'^2}{\varrho}\right) e^{\frac{2 m \varrho \pi i}{\Delta_0 d'^2 d}} \sum_{\mu=0}^{d-1} e^{\frac{2\mu m \pi i}{d}},$$

t. j.

(b) $$s_d = \left(\frac{D_0}{d}\right) d\, \mathcal{J}\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\varrho=1}^{\Delta_0 d'^2} \left(\frac{D_0 d'^2}{\varrho}\right) e^{\frac{2 m \varrho \pi i}{\Delta_0 d'^2 d}};$$

výraz A pak bude roven součtu všech těchto veličin s_d. Předpokládejme nyní $m = 1$, pak bude $A = 0$, $s_d = 0$ pro $d > 1$; tudíž se výraz A redukuje na s_1, jenž také bude tedy roven nulle, t. j.

(24) $$\sum_{\varrho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho i \pi}{\Delta}} = 0, \text{ je-li } D = D_0 Q^2, Q > 1.$$

V.

Volme dále $m = q$, kde q jest číslo kmenné obsažené v Q; $Q = q\,q'$. Zde budou dvě s_d míti činitele $\mathfrak{J}\left(\frac{m}{d}\right)$ různého od nully, t. j. $d = 1$ a $d = q$.

Zbývá tedy

$$A = \sum_{\varrho=1}^{4 q^2 q'^2} \left(\frac{D_0\, q^2\, q'^2}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{4 q'^2 q}} + \left(\frac{D_0}{q}\right) q \sum_{\varrho=1}^{4 q'^2} \left(\frac{D_0\, q'^2}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{4 q'^2}}.$$

Je-li $q' > 1$, jest poslední výraz roven nulle, a tedy

$$\sum_{\varrho=1}^{4-1} \left(\frac{D}{\varrho}\right) e^{\frac{2 q \varrho \pi i}{4}} = 0, \qquad D = D_0\, Q^2, \tag{25}$$

je-li q kmenný činitel čísla $Q > q$.

Je-li však $Q = q$, bude

$$\sum_{\varrho=1}^{4 \cdot q^2 - 1} \left(\frac{D_0\, q^2}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{4 q}} = -\left(\frac{D_0}{q}\right) q \sqrt{D_0} \tag{25a}$$

Klade-li se zvláště $D_0 = \pm p$, $p = q$, $(\pm p = 1 \text{ mod. } 4)$, obdržíme

$$\sum_{\varrho=1}^{p^3-1} \left(\frac{\pm p}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{p^4}} = 0,$$

a odtud

$$\sum_{\varrho=1}^{p^2-1} \left(\frac{\pm p}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{p^2}} = 0; \; (p \text{ kmenné}, \pm p = 1 \;[\text{mod. } 4]). \tag{26}$$

Na objasnění stůjtež zde příklady:

1) $p = 3$ $\quad \left(\frac{-3}{1}\right) \sin \frac{2\pi}{9} + \left(\frac{-3}{2}\right) \sin \frac{4\pi}{9} + \left(\frac{-3}{4}\right) \sin \frac{8\pi}{9}$

$$+ \left(\frac{-3}{5}\right) \sin \frac{10\pi}{9} + \left(\frac{-3}{7}\right) \sin \frac{14\pi}{9} + \left(\frac{-3}{8}\right) \sin \frac{16\pi}{9} = 0,$$

což se redukuje na rovnici tříčlennou

$$\sin 40^0 + \sin 20^0 = \cos 10^0.$$

2) $p = 5$; $\quad \left(\frac{5}{1}\right) \cos \frac{2\pi}{25} + \left(\frac{5}{2}\right) \cos \frac{4\pi}{25} + \ldots + \left(\frac{5}{24}\right) \cos \frac{48\pi}{25} = 0$

což zjednoduší se na

$$\cos\frac{\pi}{25}+\cos\frac{2\pi}{25}-\cos\frac{3\pi}{25}-\cos\frac{4\pi}{25}-\cos\frac{6\pi}{25}$$

$$-\sin\frac{\pi}{50}+\sin\frac{3\pi}{50}+\sin\frac{7\pi}{50}+\sin\frac{9\pi}{50}-\sin\frac{11\pi}{50}=0$$

Volme dále $m=q^2$, $Q=Q_1\,q^2$, kde q je kmenné.
Pak existují tři výrazy s_d, t. j. s_1, s_q, s_{q^2}, a sice

$$s_1=\sum_{\varrho=1}^{\Delta_0 Q^2 q^4}\left(\frac{D_0\,Q^2\,q^4}{\varrho}\right)e^{\frac{2\varrho\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q^4}},$$

$$s_q=\left(\frac{D_0}{q}\right)q\sum_{\varrho=1}^{\Delta_0 Q_1^2 q^2}\left(\frac{D_0\,Q_1^2 q^2}{\varrho}\right)e^{\frac{2\varrho\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q}},$$

$$s_{q^2}=\left(\frac{D_0}{q^2}\right)q^2\sum_{\varrho=1}^{\Delta_0 Q_1^2}\left(\frac{D_0\,Q_1^2}{\varrho}\right)e^{\frac{2\varrho\pi i}{\Delta_0 Q_1^2}}=0\,\text{pro } Q_1>1.$$

Zde lze v s_1 psáti

$$\left(\frac{q^4}{\varrho}\right)=\left(\frac{q^2}{\varrho}\right),$$

čímž se obdrží tvar

$$s_1=\sum_{\varrho=1}^{\Delta_0 Q_1^2 q^4}\left(\frac{D_0\,Q_1^2 q^2}{\varrho}\right)e^{\frac{2\varrho\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q^2}},$$

z něhož plyne bezprostředně $s_1=0$, ježto $Q_1\,q>1$.
Vychází tedy

$$s_q=-s_{q^2}=0\ \text{pro}\ Q_1>1.$$

Součet

$$S=\sum_{\varrho=1}^{\Delta_0 Q_1^2 q^2}\left(\frac{D_0\,Q_1^2 q^2}{\varrho}\right)e^{\frac{2\varrho\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q}}$$

po substituci $\varrho=\sigma+\mu.\,\Delta_0\,Q_1^2\,q$ obdrží tvar

$$\sum_{\sigma=1}^{\Delta_0 Q_1^2 q}e^{\frac{2\sigma\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q}}\sum_{\mu=0}^{q-1}\left(\frac{D_0\,Q_1^2\,q^2}{\sigma+\mu\,\Delta_0\,Q_1^2\,q}\right).$$

Avšak

$$\left(\frac{D_0\,Q_1^2 q^2}{\sigma+\mu\,\Delta_0\,Q_1^2\,q}\right)=\left(\frac{q^2}{\sigma}\right)\left(\frac{D_0\,Q_1^2}{\sigma}\right),$$

tedy vychází jako hodnota součtu

$$S=q\sum_{\sigma=1}^{\Delta_0 Q_1^2 q}\left(\frac{D_0\,Q_1^2\,q^2}{\sigma}\right)e^{\frac{2\sigma\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q}}$$

Zde položme $\sigma = \omega + \nu . \Delta_0 Q_1^2$, ($\omega = 1, 2, \ldots \Delta_0 Q_1^2$; $\nu = 0, 1, \ldots q-1$): tím se obdrží nejprvé

$$S q^{-1} = \sum_{\omega=1}^{\Delta_0 Q_1^2} e^{\frac{2\omega\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} \left(\frac{D_0 Q_1^2 q^2}{\omega + \nu . \Delta_0 Q_1^2}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}$$

Poněvadž

$$\left(\frac{D_0 Q_1^2 q^2}{\omega + \nu . \Delta_0 Q_1^2}\right) = \left(\frac{q^2}{\omega + \nu . \Delta_0 Q_1^2}\right) \left(\frac{D_0 Q_1^2}{\omega}\right),$$

bude

$$S q^{-1} = \sum_{\omega=1}^{\Delta_0 Q_1^2} \left(\frac{D_0 Q_1^2}{\omega}\right) e^{\frac{2\omega\pi i}{\Delta_0 Q_1^2 q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} \left(\frac{q^2}{\omega + \nu . \Delta_0 Q_1^2}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}$$

Nyní předpokládejme, že $\Delta_0 Q_1^2$ je nesoudělno s q. Pak výraz $\omega + \nu . \Delta_0 Q_1^2$ probíhá veškery zbytky modulo q, tedy čísla 1, 2, 3, .. $q-1$ a hodnotu 0, t. j. bude pro určité $\nu = \nu'$

$$\omega + \nu' \Delta_0 Q_1^2 = \mu . q.$$

Pro prvních $q-1$ zbytků jest

$$\left(\frac{q^2}{\omega + \nu . \Delta_0 Q^2}\right) = 1,$$

pro $\nu = \nu'$ však

$$\left(\frac{q^2}{\omega + \nu' . \Delta_0 Q_1^2}\right) = 0;$$

tudíž

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} \left(\frac{q^2}{\omega + \nu \Delta_0 Q_1^2}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{q}} = - e^{\frac{2\nu'\pi i}{q}},$$

a následkem toho

$$S q^{-1} = - \sum_{\omega} \left(\frac{D_0 Q_1^2}{\omega}\right) e^{\frac{2\pi i(\omega + \nu' \Delta_0 Q_1^2)}{\Delta_0 Q_1^2 q}}$$

čili

$$S = q \sum_{\omega} \left(\frac{D_0 Q_1^2}{\omega}\right) e^{\frac{2\mu\pi i}{\Delta_0 Q_1^2}}.$$

Z rovnice $\omega + \nu' \Delta_0 Q_1^2 = \mu q$ plyne

$$\left(\frac{D_0 Q_1^2}{\omega}\right) = \left(\frac{D_0 Q_1^2}{\mu q}\right)$$

tedy

$$S = -q \left(\frac{D_0 Q_1^2}{q}\right) \sum_{\mu=1}^{\Delta_0 Q_1^2} \left(\frac{D_0 Q_1^2}{\mu}\right) e^{\frac{2\mu\pi i}{\Delta_0 Q_1^2}},$$

a tento výraz je roven nulle, jakmile $Q_1 > 0$, jestliže $\left(\frac{D_0 Q_1}{q}\right)^2 = 1$.

Je li však $\varDelta_0 Q_1$ dělitelno na q, pak bude

$$\left(\frac{q^2}{\omega + \nu \varDelta_0 Q_1^2}\right) = \left(\frac{q^2}{\omega}\right),$$

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} \left(\frac{q^2}{\omega}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{q}} = 0,$$

a tedy opět $S = 0$.

Z toho plyne, že lze rovnici $s_q = - s_{q^2}$ psáti též

$$q S = -\left(\frac{D_0 Q_1^2}{q}\right) s_{q^2}.$$

Součet s_{q^2} bude od nully různý pouze pro $Q_1 = 1$; tu máme

$$s_{q^2} = \left(\frac{D_0}{q^2}\right) q^2 \sqrt{D_0},$$

a tedy zní náš výsledek

$$(27) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varDelta_0 Q_1^2 q^2} \left(\frac{D_0 Q_1^2 q^2}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{\varDelta_0 Q_1^2 q}} = \begin{cases} 0 \text{ pro } Q_1 > 1, \\ -\left(\frac{D_0}{q}\right) q \sqrt{D_0} \text{ pro } Q_1 = 1. \end{cases}$$

Pro $\varDelta_0 = p = q$, $Q_1 = 1$ vychází odtud vztah (26), volíme-li však $Q_1 = p$, bude

$$\sum_{\varrho=1}^{p^2} \left(\frac{+p}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{p^2}} = 0,$$

čili

$$(28) \qquad \sum_{\varrho=1}^{p^2-1} \left(\frac{\pm p}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho\pi i}{p^2}} = 0, \ (p \text{ kmenné, } +p \equiv 1 \ [\text{mod. } 4]).$$