Matyáš Lerch

O abelovské transformaci trigonometrických řad

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 5 (1896), č. 24. 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501485

O Abelovské transformaci trigonometrických řad.

Sdílí **M. Lerch.**

Předloženo dne 8. května 1896.

Budiž dána konvergentní řada trigonometrická

$$f(x) = \sum_{\mu=h}^{\infty} a_{\mu} \cos 2\mu x\pi, \qquad (0 < x < 1),$$

v níž $h \geqq 0$. Tuto řadu bude lze přetvořiti pomocí identity Abelovy

$$\sum_{\mu=h}^{m} a_{\mu} b_{\mu} = \sum_{\mu=h}^{m-1} (a_{\mu} - a_{\mu+1})(b_h + b_{h+1} + \ldots + b_{\mu}) \\ + a_m (b_h + b_{h+1} + b_{h+2} + \ldots + b_m),$$

kladeli se $b_{\mu} = \cos 2\mu x\pi$. Tak se obdrží nejprve

$$\sum_{\mu=h}^{m} a_{\mu} \cos 2\mu x\pi = \sum_{\mu=h}^{m-1} (a_{\mu} - a_{\mu+1}) \frac{\sin(2\mu+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi} \\ + a_m \frac{\sin(2m+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi}.$$

Přejdemeli zde k limitě pro $m = \infty$, obdržíme se zřetelem k podmínce $\lim\limits_{m=\infty} a_m = 0$ výsledek

$$f(x) = \sum_{\mu=h}^{\infty} (a_{\mu} - a_{\mu+1}) \frac{\sin(2\mu+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi},$$

která vzhledem k okolnosti, že součet

$$\sum_{\mu=h}^{\infty} (a_{\mu} - a_{\mu+1})$$

má hodnotu a_h, obdrží tvar

$$f(x) = -a_h \frac{\sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi} + \frac{1}{2\sin x\pi} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla a_{\mu} \,.\, \sin(2\mu+1)x\pi,$$

při čemž užito označení ∇a_μ za $a_\mu - a_{\mu+1}$. Řadu na pravé straně lze opět podobným postupem přetvořiti, výsledek opět, a tak lze pokračovati jak daleko chceme. Při transformacích těch užívá se identit

$$\sum_{\mu=h}^{m} \cos 2\mu x\pi = \frac{\sin(2m+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi},$$

$$\sum_{\mu=h}^{m} \sin 2\mu x\pi = \frac{\cos(2h-1)x\pi - \cos(2m+1)x\pi}{2\sin x\pi},$$

$$\sum_{\mu=h}^{m} \cos(2\mu+1)x\pi = \frac{\sin(2m+2)x\pi - \sin 2hx\pi}{2\sin x\pi},$$

$$\sum_{\mu=h}^{m} \sin(2\mu+1)x\pi = \frac{\cos 2hx\pi - \cos(2m+2)x\pi}{2\sin x\pi},$$

a zavedemeli označení

$$\nabla a_\mu = a_\mu - a_{\mu+1}, \quad \nabla^2 a_\mu = \nabla a_\mu - \nabla a_{\mu+1}, \quad \nabla^3 a_\mu = \nabla^2 a_\mu - \nabla^2 a_{\mu+1}, \ldots$$

obdržíme obecný výsledek ve tvaru

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi = & \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu+1} \nabla^{2\nu} a_h \cdot \frac{\sin(2h+2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\ & + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} \nabla^{2\nu+1} a_h \cdot \frac{\cos(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}} \\ & + \frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} a_\mu \cdot \cos(2\mu+2k)x\pi . \end{aligned} \right.$$

Přihází se dosti často, že konvergují řady, jež vzniknou substitucí $k=\infty$ do prvých dvou součtů na pravé straně, a že poslední, t. j. třetí výraz na pravé straně s rostoucím k klesá pod každou mez, jakmile x náleží jistému intervallu $(x_0 \ldots x_1)$. V tomto zvláštním případě vychází z (1) pro funkci na levé straně stojící zajímavý rozvoj

$$(1^a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nabla^{2\nu} a_h \cdot \frac{\sin(2h+2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\ & + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \nabla^{2\nu+1} a_h \cdot \frac{\cos(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}}, \end{aligned} \right.$$

v němž *zbytek*, doplňující agregát složený z prvých k členů obou řad, má hodnotu

$$(1^b) \qquad R_k(x) = \frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} a_\mu \cdot \cos(2\mu+2k)x\pi .$$

Podobným způsobem obdrží se rovnice další

$$
(2)\quad\left\{\begin{aligned}
\sum_{\mu=h}^{\infty} b_\mu \sin 2\mu x\pi = &\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \nabla^{2\nu} b_h \,.\, \frac{\cos(2h+2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\
&+\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \nabla^{2\nu+1} b_h \,.\, \frac{\sin(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}} \\
&+\frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} b_\mu \,.\, \sin(2\mu+2k)x\pi ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
\sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos(2\mu+1)x\pi = &\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu+1} \nabla^{2\nu} a_h \,.\, \frac{\sin(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\
&+\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \nabla^{2\nu+1} a_h \,.\, \frac{\cos(2h+2\nu+1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}} \\
&+\frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} a_\mu \,.\, \cos(2\mu+2k+1)x\pi ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\sum_{\mu=h}^{\infty} b_\mu \sin(2\mu+1)x\pi = &\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \nabla^{2\nu} b_h \,.\, \frac{\cos(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\
&+\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \nabla^{2\nu+1} b_h \,.\, \frac{\sin(2h+2\nu+1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}} \\
&+\frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} b_\mu \,.\, \sin(2\mu+2k+1)x\pi
\end{aligned}\right.
$$

V některých případech jsou $\nabla^{2k} a_\mu$ vesměs kladné veličiny; řada $\sum_{\mu} \nabla^{2k} a_\mu$ pak jistě konverguje a její součet je $\nabla^{2k-1} b_h$. Jeli pak mimo to

$$
\lim_{k=\infty} \frac{\nabla^{2k-1} a_h}{(2\sin x\pi)^{2k}} = 0 ,
$$

bude též $\lim\limits_{k=\infty} R_k = 0$, a rozvoje lze prodloužiti do nekonečna. Tak na př. u řad

$$
\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x\pi}{w+\mu} , \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\sin 2\mu x\pi}{w+\mu}
$$

máme $a_\mu = b_\mu = \dfrac{1}{w+\mu}$, a ježto při $w+\mu>0$

$$
a_\mu = \int_0^1 x^{w+\mu-1}\,dx ,
$$

obdržíme

$$
\nabla^m a_\mu = \int_0^1 (1-x)^m x^{w+\mu-1}\,dx ,
$$

čili

$$(5)\qquad \nabla^m \frac{1}{w+\mu} = \frac{1.2.3\ldots.m}{(w+\mu)(w+\mu+1)\ldots(w+\mu+m)}.$$

Zde lze právě naznačeným způsobem ukázati, že zbytek odpadá v případě $k=\infty$, a že rozvoje lze prodloužiti do nekonečna, jakmile $\frac{1}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}$.

Spojímeli obě řady pomocí veličin pomyslných v jednu

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{e^{2\mu x\pi i}}{w+\mu},$$

a klademeli u výsledku $e^{2x\pi i}=z$, obdržíme identitu

$$(6)\qquad w\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{w+\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\binom{w+\mu}{\mu}} \frac{z^\mu}{(1-z)^{\mu+1}},$$

jež užitečnosť odvozených výše transformací dostatečně odůvodňuje. Pravá strana tu konverguje, jakmile realná část veličiny z je menší než půle. Klademeli $z=-1$, obdržíme

$$(7)\qquad \psi\left(\frac{w+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{w}{2}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\mu w\binom{w+\mu}{\mu}},$$

kde psáno $\psi(x)$ za $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Užijemeli vzorce (4) v případě řady

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \log\frac{\mu}{\mu+1} \,.\, \sin(2\mu+1)x\pi,$$

jejíž hodnota jest

$$\psi(x)\sin x\pi + \frac{\pi}{2}\cos x\pi + \left[\log 2\pi - \Gamma'(1)\right]\sin x\pi,$$

obdržíme přechodem ke krajnímu případu $k=\infty$ výsledek

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\log 2\pi - \Gamma'(1) + \frac{\pi}{2}\cot x\pi + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ &\quad = -2\sum_{\mu=1}^{\infty} (\nabla^\mu \log h)_{h=1} \frac{\cos(\mu+1)(x-\frac{1}{2})\pi}{(2\sin x\pi)^{\mu+1}}, \end{aligned}\right.$$

platný za podmínky $\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}$. Při důkazu konvergence možno užiti tvaru pro m-tý rozdíl

$$\nabla^m \log h = \int_0^1 \frac{(1-x)^m x^{h-1}}{\log x}\,dx,$$

jenž se obdrží bezprostředně ze vzorce

$$\log h = \int_0^1 \frac{x^{h-1}-1}{\log x}\,dx.$$

Zavedemeli $x+\frac{1}{2}$ za x, obdržíme ze vzorce (8) tvar přehlednější

$$
(8^*)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma'(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} &= \Gamma'(1) - \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \tan x\pi \\ &- 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (\nabla^{\mu} \log h)_{h=1} \cdot \frac{\cos(\mu+1)x\pi}{(2\cos x\pi)^{\mu+1}} \end{aligned} \right.
$$

jenž platí za konvergenční podmínky $-\frac{1}{8} < x < \frac{1}{8}$.

Budiž tu ještě dopřáno místa řadě

$$
(9)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x\pi}{(w+\mu)^s},
$$

pro kterou vzorec (1) poskytne přechodem k hodnotě $k=\infty$ výraz

$$
(9^a)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nabla^{2\nu} \frac{1}{w^s} \frac{\sin(2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\ & + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \nabla^{2\nu+1} \frac{1}{w^s} \frac{\cos 2\nu x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}}, \qquad \left(\frac{1}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\right). \end{aligned} \right.
$$

Zvolímeli hodnotu $x=\frac{1}{2}$, $w=1$, obdržíme nový rozvoj pro Riemannovu funkci

$$
\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots
$$

a sice

$$
(10)\qquad (1-2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left(\nabla^{\nu} \frac{1}{w^s}\right)_{w=1}
$$
