Matyáš Lerch
Sur quelques théorèmes d'Arithmétique

Věstník Král. čes. spol. nauk, II. tř., 1894, č. 11, 1–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501470

XI.

Sur quelques théorèmes d'arithmétique.

Par M. Lerch
à Prague-Vinohrady.

(Présenté dans la séance du 23 février 1894).

Nous allons démontrer et généraliser quelques théorèmes que nous avons tirés, il y a quelques années, des identités analytiques.[1])

Nous représentons par

$\Theta(n)$ le nombre de tous les diviseurs de n, y compris l'unité et le nombre n lui même,

$\Theta_1(n)$ la somme de tous les diviseurs du nombre n,

$\psi(p, q)$ le nombre des diviseurs de p supérieurs à q,

$\Psi(p, q)$ la somme de ces diviseurs-ci,

$\chi(p, q)$ le nombre des diviseurs de p non supérieurs à q et par

$X(p, q)$ leur somme; ensuite nous dénoterons

par (a, b) le plus grand commun diviseur des nombres a, b, et

" $(a, b \mid c)$ le nombre (a, b) s'il est en même temps un diviseur de c, et zéro dans le cas contraire.

Enfin nous écrirons, suivant l'usage, $[x]$ ou $E(x)$ pour représenter le plus grand nombre entier contenu dans x.

I.

Dans notre lettre à Mr Hermite (Bulletin de Mr Darboux, mai 1888) nous avons publié sans démonstration la formule

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \psi(m-\alpha n, \alpha) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi(m-\alpha n, n),$$

m, n étant deux entiers positifs quelconques.

---

[1]) Comptes Rendus du 16 janvier 1888; Bulletin de Mr. Darboux, 2e série t. XII; avril et mai 1888.

Afin de l'établir arithmétiquement, retranchons ses deux membres de la quantité $\Sigma\,\Theta(m-\alpha n)$ en nous rappelant l'équation évidente $\Theta(p)=\psi(p,q)+\chi(p,q)$; il vient

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]}\chi(m-\alpha n,\alpha)=\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]}\psi(m-\alpha n,n),$$

ce qui est une formule équivalente avec l'équation (1).

A chaque diviseur δ de $m-\alpha n$, supérieur à n, correspond un diviseur conjugué $d=\frac{m-\alpha n}{\delta}$ qui évidemment est inférieur à $\frac{m-\alpha n}{n}=\frac{m}{n}-\alpha$, de la sorte que

$$d\leqq\frac{m-1}{n}-\alpha.$$

Il s'ensuit

$$\Sigma\,\psi(m-\alpha n,n)=\Sigma\,\chi\left(m-\alpha n,\frac{m-1}{n}-\alpha\right)$$

ce qui permet d'écrire la formule (1) sous la forme

$$(1^*)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]}\chi(m-\alpha n,\alpha)=\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]-1}\chi\left(m-\alpha n,\frac{m-1}{n}-\alpha\right)$$

qui est presque évidente.

Représentons en effet par δ_α les diviseurs de $m-\alpha n$ non supérieurs à α et par δ'_α les diviseurs de $m-\alpha n$ non supérieurs à $\frac{m-1}{n}-\alpha$. Je dis que l'on a cette formule générale

$$(2)\qquad \sum_{\delta_\alpha}f(\delta_\alpha)=\sum_{\delta'_\alpha}f(\delta'_\alpha),\qquad \left(\alpha=0,1,2,\ldots\left[\frac{m-1}{n}\right]\right),$$

dans laquelle f représente une fonction quelconque. Cette formule n'exprime d'autre chose que ce que les nombres δ_α et δ'_α correspondant aux valeurs $\alpha=0,1,2,\ldots\left[\frac{m-1}{n}\right]$ ne diffèrent que par l'ordre.

Pour l'établir, je vais démontrer que, pour chaque nombre k contenu dans la série $1,2,3,\ldots\left[\frac{m-1}{n}\right]$, les équations $\delta_\alpha=k$ et $\delta'_\beta=k$ ont un même nombre des solutions.

Si l'on pose en effet $\delta_\alpha = k$, on trouve les α correspondants en résolvant la congruence

$$\text{A)} \qquad m - \alpha n \equiv 0 \pmod{k},$$

combinée avec la condition $k = \delta_\alpha \leqq \alpha$, de la sorte qu'on ne peut admettre que les valeurs de α contenues dans la série

$$\alpha = k,\ \ k+1,\ \ k+2, \ldots \left[\frac{m-1}{n}\right].$$

On voit de même que le nombre des solutions de l'équation $\delta'_\beta = k$ équivaut au nombre des solutions de la congruence

$$\text{B)} \quad m - \beta n \equiv 0 \pmod{k}, \quad \beta = 0,\ 1,\ 2, \ldots \left[\frac{m-1}{n}\right] - k.$$

Or à chaque solution β correspond une solution $\alpha = \beta + k$ et réciproquement. Les congruences considérées ont donc un nombre égal des solutions et par conséquent, le nombre k se trouve autant de fois parmi les δ_α que parmi les δ'_α. La formule (2) est donc démontrée, et par conséquent aussi les formules (1*) et (1).

Désignons maintenant par Δ_α tous les diviseurs du nombre $m - \alpha n$, et retranchons de la somme $\Sigma f(\Delta_\alpha)$ rapportée à tous les diviseurs Δ_α dont les indices ont pour valeurs $\alpha = 0, 1, \ldots \left[\frac{m-1}{n}\right]$, les deux membres de l'équation (2); il vient

$$(2^*) \qquad \sum f(d_\alpha) = \sum f(d'_\alpha)\ , \quad \left(\alpha = 0,\ 1,\ 2, \ldots \left[\frac{m-1}{n}\right]\right),$$

où d_α représente les diviseurs de $m - \alpha n$ supérieurs à α,

d'_α " " " " " " $\frac{m-1}{n} - \alpha$.

En faisant $f(x) = x$, les équations (2) et (2*) deviennent respectivement

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} X(m - \alpha n,\ \alpha) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]-1} X\left(m - \alpha n\,,\ \frac{m-1}{n} - \alpha\right), \\[2ex] \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \Psi(m - \alpha n,\ \alpha) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \Psi\left(m - \alpha n\,,\ \frac{m-1}{n} - \alpha\right). \end{cases}$$

Dans le raisonnement qui précède nous avons considéré un nombre k de la série $1, 2, 3, \ldots \left[\frac{m-1}{n}\right]$, et nous avons trouvé que k était la différence $\alpha - \beta$ de deux solutions correspondantes des équations $\delta_\alpha = k$, $\delta'_\beta = k$.

Naturellement, il y a des nombres k auxquels ne correspond aucune de ces solutions; nous les représenterons par k'; de la sorte que l'ensemble des nombres k et k' donne la suite $1, 2, 3, \ldots \left[\frac{m-1}{n}\right]$. Nous faisons la somme

$$\Sigma\, k$$

étendue aux valeurs de k proprement dites et chaque terme y doit être pris autant de fois qu'il y a de solutions de l'équation $\delta_\alpha = k$. La somme s'écrira alors

$$\sum \delta_\alpha, \quad \left(\alpha = 1, 2, 3, \ldots \left[\frac{m-1}{n}\right]\right)$$

ou bien

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} X(m - \alpha n\,,\ \alpha)\,.$$

Mais à cause de l'identité $k = \alpha - \beta$ ladite somme sera égale à la différence

$$\Sigma\,\alpha - \Sigma\,\beta$$

dans laquelle chaque nombre α est pris autant de fois qu'il y a des diviseurs δ_α, et le nombre β autant de fois qu'il y a des nombres δ'_β; à savoir

$$\Sigma\,\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \alpha\chi(m - \alpha n,\ \alpha)\,, \quad \Sigma\,\beta = \sum_{\beta=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \beta\chi\left(m - \beta n\,,\ \frac{m-1}{n} - \beta\right).$$

On a par conséquent l'équation

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} X(m - \alpha n,\ \alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \alpha\left[\chi(m - \alpha n,\ \alpha) - \chi\left(m - \alpha n,\ \frac{m-1}{n} - \alpha\right)\right],$$

ou bien, en remplaçant $\chi\left(m - \alpha n, \frac{m-1}{n} - \alpha\right)$ par la quantité équivalente $\psi(m - \alpha n, n)$ et faisant usage de la relation évidente

$$\chi(m - \alpha n, \alpha) - \psi(m - \alpha n, n) = \chi(m - \alpha n, n) - \psi(m - \alpha n, \alpha),$$

l'équation

$$(4)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} X(m - \alpha n, \alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \alpha\left[\chi(m - \alpha n, n) - \psi(m - \alpha n, \alpha)\right].$$

On parvient à des formules plus générales en prenant pour point de départ les congruences

$$m - \alpha n \equiv 0 \pmod{k}, \quad \alpha = kr,\ kr+1, \ldots, \left[\frac{m-1}{n}\right],$$

$$m - \beta n \equiv 0 \pmod{k}, \quad \beta = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m-1}{n}\right] - kr,$$

et on trouve en particulier

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi\left(m - \alpha n, \frac{\alpha}{r}\right) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi\left(m - \alpha n, \frac{m - \alpha n - 1}{nr}\right).$$

Or on a

$$\chi\left(m - \alpha n, \frac{m - \alpha n - 1}{nr}\right) = \psi(m - \alpha n, nr)$$

et il s'ensuit

$$\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi\left(m - \alpha n, \frac{\alpha}{r}\right) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \psi(m - \alpha n, rn),$$

ou bien

$$(5)\qquad \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \psi\left(m - \alpha n, \frac{\alpha}{r}\right) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi(m - \alpha n, rn).$$

On vérifie de même les formules suivantes

$$(6)\qquad \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \Psi\left(m - \alpha n, \frac{\alpha}{r}\right) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \Psi\left(m - \alpha n, \frac{m - \alpha n - 1}{nr}\right),$$

$$(7)\quad r\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} X\left(m-\alpha n, \frac{\alpha}{r}\right) = \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \alpha\left[\chi(m-\alpha n, rn) - \psi\left(m-\alpha n, \frac{\alpha}{r}\right)\right].$$

II.

La formule (1) contient le germe d'un théorème que nous avons donné dans une note présentée à l'Académie des Sciences de Paris et démontré dans le Bulletin de M. Darboux.

Pour l'obtenir, considérons la différence

$$\psi(m-\sigma a, k+\sigma-1) - \psi(m-\sigma a, k+\sigma) = \Delta_\sigma.$$

Elle est l'unité ou zéro selon que $k+\sigma$ est ou n'est pas un diviseur de $m-\sigma a$; comme

$$\frac{m-\sigma a}{k+\sigma} = \frac{m+ka}{k+\sigma} - a,$$

on voit que Δ_σ est l'unité ou zéro selon que $k+\sigma$ divise $m+ka$ ou non, et par conséquent, la somme

$$\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \Delta_\sigma$$

sera égale au nombre des termes de la série

$$k,\ k+1,\ k+2, \ldots\ k+\left[\frac{m-1}{a}\right]$$

qui divisent $m+ka$; or ce nombre est évidemment donné par la différence

$$\psi(m+ka, k-1) - \psi\left(m+ka, \left[\frac{m+ka-1}{a}\right]\right)$$

ou bien

$$\psi(m+ka, k-1) - \chi(m+ka, a).$$

On a donc la formule

$$\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} [\psi(m-\sigma a, k+\sigma-1) - \psi(m-\sigma a, k+\sigma)]$$

$$= \psi(m + ka, k - 1) - \chi(m + ka, a).$$

En y faisant successivement $k = 1, 2, 3, \ldots k$, et faisant la somme des résultats, il vient

$$\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \psi(m - \sigma a, \sigma) - \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \psi(m - \sigma a, k + \sigma)$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{k} [\psi(m + \lambda a, \lambda - 1) - \chi(m + \lambda a, a)]$$

ou bien, en faisant usage de la formule (1),

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} [\psi(m - \sigma a, k + \sigma) - \chi(m - \sigma a, a)] \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{k} [\psi(m + \lambda a, \lambda - 1) - \chi(m + \lambda a, a)] = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui est le résultat qu'il s'agissait d'établir.

Signalons quelques cas particuliers. En prenant $a = 1$, on a

$$(9) \quad \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m - \sigma, k + \sigma) + \sum_{\lambda=1}^{k} \psi(m + \lambda, \lambda - 1) = k + m$$

et en particulier,

$$(10) \qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} \psi(m - \alpha, \alpha) = m, \sum_{\alpha=0}^{m} \psi(m + \alpha, \alpha) = 2m.$$

La première des formules (10) coïncide avec un théorème énoncé par M. Catalan[1]) sous une autre forme. Nous l'avons énoncée et démontrée analytiquement, avec la seconde, dans une note présentée à la Société dans la séance du 9 Novembre 1887. Ces deux formules ont d'ailleurs été sujet d'une note de M. A. Strnad, publiée dans le Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, 1888.

---

[1]) Mathesis, t. II, p. 158. Voyez aussi une note de M. Cesàro (Mémoires de la Soc. de Liège, t. X, p. 263).

Une remarque très intéressante nous a été communiquée par M. Zeller. Le savant recteur de Markgröningen avait observé que le nombre $\psi(m-\alpha, \alpha)$ équivaut au nombre des termes de la série $\mu = 1, 2, 3, \ldots, n$, tels que le reste de la division de m par μ soit α, ce qui lui a donné la formule

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{m-1} \alpha\psi(m-\alpha, \alpha) = \Sigma R_m,$$

ou plus généralement,

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} g(\alpha)\psi(m-\alpha, \alpha) = \Sigma g(R_m),$$

en représentant par R_m tous les restes de la division du nombre m par les nombres moindres, et en désignant par $g(\alpha)$ une fonction quelconque.

En représentant par $f(m)$ la valeur commune des deux membres de l'équation (a) on trouve facilement la formule

$$f(m) - f(m-1) = 2m - 1 - \Theta_1(m)$$

qui donne immédiatement une autre proposition de M. Zeller, à savoir: Les nombres 2^r et $2^r - 1$, étant divisés par les nombres moindres, ont les sommes de restes égales.

III.

Nous allons maintenant établir la formule

$$(11) \qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, n)] = \sum_{k=1}^{n} (k, n \mid m)$$

et en donner une extension qui se présente immédiatement. La différence $\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, n)$ n'étant que le nombre des diviseurs de $m + \alpha n$ contenus entre les limites $(\alpha + 1 \ldots . n)$ inclusivement, nous aurons

$$\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, n) = \sum_{k=1}^{n} k_\alpha,$$

où k_α est l'unité, si k surpasse α et divise $m+\alpha n$, et zéro dans le cas contraire.

De là nous tirons

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1}[\psi(m+\alpha n, a)-\psi(m+\alpha n, \alpha)]=\sum_{k=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{a-1}k_\alpha,$$

et on voit de suite que la somme $\sum_{\alpha=0}^{a-1}k_\alpha$ représente le nombre des solutions de la congruence

$$m+\alpha n\equiv 0 \pmod{k},\ 0\leqq\alpha<k,$$

nombre qui évidemment est donné par la fonction $(k, n \mid m)$, ce qui démontre la formule (11).

On a plus généralement, en posant

$$F(n, p)=\Sigma f(\delta_p),$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque et δ_p *parcourt tous les diviseurs de n supérieurs à p*, la formule

$$(12)\qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1}[F(m+\alpha n, a)-F(m+\alpha n, \alpha)]=\sum_{k=1}^{a}f(k)\,.\,(k, n \mid m),$$

et en particulier pour $f(x)=x$,

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1}[\Psi(m+\alpha n, a)-\Psi(m+\alpha n, \alpha)]=\sum_{k=1}^{a}k\,.\,(k, n \mid m).$$

Jusqu'ici les nombres, dont nous avons considéré les diviseurs, étaient positifs; maintenant nous aurons à considérer aussi les nombres négatifs, avec la convention que leurs diviseurs devront être pris toujours positivement.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque et posons $F(k)=\Sigma f(x)$, en représentant par x tous les diviseurs de k.

On établit aisément la formule

$$(13)\qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1}F[(a-\alpha m, n)]=\sum_{\delta\delta'=n}\delta' f(\delta)\,.\,(\delta, m \mid a),$$

dans laquelle $(a - \alpha m, n)$ représente le plus grand commun diviseur des nombres $a - \alpha m$, n et δ doit parcourir tous les diviseurs de n, et enfin δ' est le diviseur complémentaire $\frac{n}{\delta}$.

En prenant en particulier $f(x)$ égal à 1 ou à x on a

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\Theta[(a-\alpha m, n)] = \sum_{\delta}\dfrac{(\delta, m \mid a)}{\delta}, \\[2ex] \dfrac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\Theta_1[(a-\alpha m, n)] = \sum_{\delta}(\delta, m \mid a). \end{cases}$$

Si l'on fait $f(x) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant la fonction de Gauss, on a $F(x) = x$, d'où il suit

$$(15)\quad \frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{n-1}(a - \alpha m, n) = \Sigma\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\,.\,(\delta, m \mid a).$$

Dans le cas de $a = 0$ cette formule devient

$$(16)\quad \sum_{\alpha=1}^{n}(\alpha m, n) = n\,\Sigma\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\,(\delta, d),$$

en convenant de représenter par d le plus grand commun diviseur (m, n).

En posant $m_0 = \frac{m}{d}$, $n_0 = \frac{n}{d}$, l'équation (16) s'écrira

$$d^2\sum_{\alpha=1}^{n_0}(\alpha m_0, n_0) = n\sum_{\delta}\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\,.\,(\delta, d);$$

or en représentant par δ_0 les diviseurs de n_0, le premier membre sera égal à l'expression

$$d^2.\,n_0\sum_{\delta_0}\frac{\varphi(\delta_0)}{\delta_0}\,.\,(\delta_0, 1) = dn\,.\sum_{\delta_0}\frac{\varphi(\delta_0)}{\delta_0}.$$

Il s'ensuit donc que l'on a

$$(17)\quad \sum_{\delta_0}\frac{\varphi(\delta_0)}{\delta_0} = \sum_{\delta}\varphi(\delta)\,\frac{(\delta, d)}{\delta d}.$$

Observons que, dans cette formule, n_0 est un nombre entier quelconque, ainsi que d, et que δ_0 parcourt tous les diviseurs de n_0 et δ tous les diviseurs de dn_0.

Puisque

$$\frac{\delta\, d}{(\delta, d)} = \mathfrak{M}(\delta, d)$$

est le plus petit commun multiple de δ, d, on peut écrire

$$\sum_{\delta_0} \frac{\varphi(\delta_0)}{\delta_0} = \sum_{\delta} \frac{\varphi(\delta)}{\mathfrak{M}(\delta, d)}. \tag{17*}$$

Nákladem Královské České Společnosti Náuk. — Tiskem dra Ed. Grégra v Praze.