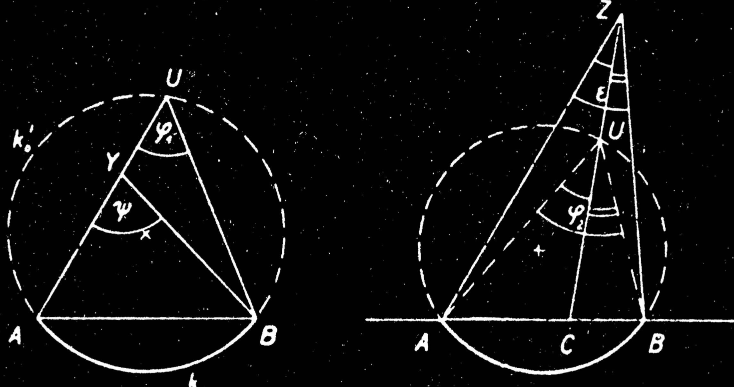
František Balada; Eduard Čech; a kol.
Geometria pre 1. triedu gymnázií

Štátne nakladatelstvo, Bratislava, 1952, 92 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501415

GEOMETRIA

pre I. triedu gymnázií



ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

GEOMETRIA

pre I. triedu gymnázií

1952

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO · BRATISLAVA

Názov originálu: Matematika pro I. třídu gymnasií

Spracovali: Dr. František Balada, prof. Dr. Eduard Čech, Josef Holubář, Dr. Karel Hruška, Dr. Marta Chytilová, Dr. Vanda Janová, Dr. Bedřich Koenig, Dr. Emil Mastný, Dr. Karel Roessler, Dr. Antonín Srb, Dr. Josef Šimek, Antonín Tuláček, Rudolf Zelinka

Preložila: Anna Klimanová

Recenzovali: Anton Dubec, Dr. Ján Horecký

Schválilo Povereníctvo školstva, vied a umení výnosom zo dňa 3. apríla 1952, číslo 7542/51-II/2, ako učebnicu pre I. tr. gymnázií v prvom vydaní.

ÚVODNÉ POZNÁMKY

V prvej triede gymnázia buduje sa sústava geometrie na základe poznatkov zo strednej školy. Látka geometrie je tu v podstatných rysoch zopakovaná a užitím pojmu shodnosti postavená na jednotný základ. Zvláštnu pozornosť venujeme pojmu mnohouholníka s ohľadom na budúcu látku, k presnejšiemu vysvetleniu pojmu rovnobežnosti; ako príklad shodnosti študujeme osovú súmernosť, posunovanie a otáčanie. Ich užitím odvodzujeme mnohé vlastnosti útvarov.

Z podobnosti odvodíme niektoré vlastnosti strán trojuholníka pravouhlého a prejdeme k štúdiu ich pomerov (goniometrické funkcie ostrého uhla). Geometria v prvej triede sa končí rovnoľahlosťou, ako zvláštnym prípadom podobnosti, a štúdiom vlastností kružnice. V goniometrii prizeráme na možnosti presného praktického merania.

Celkom novej látky nie je mnoho. Úlohou je sceliť doterajšie vedomosti, prehĺbiť ich a dať žiakom zdravý základ k ďalšiemu kritickému štúdiu matematiky.

V aritmetike a v geometrii hľadáme stále ich styčné body, ako je to úlohou každého vedeckého štúdia. Pri vyučovaní hľadáme príležitosť k logickému uvažovaniu a usudzovaniu. Nejde nám len o získanie zásob vedomostí, ale i o sústavnú výchovu k samostatnému mysleniu. Preto venujeme dôkazovým úlohám omnoho väčšiu pozornosť ako prv. V učebnici sa im venuje značná pozornosť. Každý dôkaz metodicky pripravíme, rozdelíme na jednotlivé kroky a vykonáme s účasťou všetkých žiakov. V geometrii sú konštruktívne úlohy v omnoho menšom meritku ako prv. Ušetrený čas venujeme na preberanie základov geometrie, na dôkazové úlohy. Ak majú cvičenia splniť svoju úlohu, majú byť pripravované v škole. Treba, aby učiteľ zamieril svoj výklad k vybraným úlohám.

Žiak má poznať úlohu matematiky, ktorá nespočíva len v teórii a v zásobe vedomostí, ale vo výchove k rozvaživosti, kritike, a tak sa stáva aparátom na štúdium javov materiálneho sveta. Postupne odhaľujeme materialistický základ geometrie, ktorá je vybudovaná na skúsenostiach našich smyslov o hmote, ktorá nás obklopuje, a tým sa nám ozrejmuje príčina, prečo sa dajú výsledky geometrie použiť na riešenie konkrétnych, praktických úloh.

O matematiku opiera sa mnoho disciplín a matematika tak prispieva ku štúdiu mnohých odborov, ktoré sú dôležité k budovaniu nášho štátu.

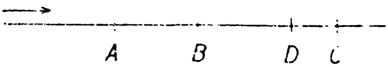
Pestovaním úsudku a kritičnosti vedieme žiakov k pochopeniu zákonitostí vývoja ľudskej spoločnosti k socializmu.

I. ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI POLOHY

1. Usporiadanie bodov na priamke. Predmetom geometrie je štúdium **priestoru.** Priestor sa skladá z bodov, ktoré označujeme veľkými písmenami A, B, C atď; k týmto pripojujeme niekedy indexy (dolu) alebo čiarky a hviezdičky (hore), napr.: S_1, S_2, K' K'', P^* atď.

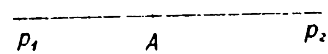
Najdôležitejšími časťami priestoru sú **priamky.** Základná vlastnosť priamky je: **Dvoma rôznymi bodmi A, B prechádza len jedna priamka,** ktorú nazývame priamkou AB alebo BA. Priamky a ich časti označujeme tiež malými písmenami, najčastejšie písmenami p, q, r. Zo základnej vlastnosti plynie, že dve rozličné priamky majú najviac jeden spoločný bod. Dve rozličné priamky p, q, ktoré majú spoločný bod C, nazývajú sa **rôznobežnými priamkami,** krátko **rôznobežkami;** bod C je ich **priesečík.** Hovoríme tiež, že sa priamky p, q **pretínajú** v bode C.

Bod môže prebiehať po priamke dvoma spôsobmi, z nich jeden je v obr. 1 vyznačený šípkom; hovoríme, že bod prebieha po priamke v dvoch **smysloch.** Niekedy volíme jeden **smysel za kladný** a druhý za **záporný.** Pri vodorovných priamkach za kladný smysel považujeme obyčajne smysel odľava doprava, pri svislých priamkach zdola nahor. Smysel vyznačený šípkom v obr. 1 môžeme nazvať smysel AB (t. j. smysel, v ktorom je A pred B) alebo smysel AD alebo smysel BC atď. Bez ohľadu na smysel môžeme povedať, že v obr. 1 máme na priamke štyri body v usporiadaní $ABDC$ alebo v usporiadaní $CDBA$; každé z oboch usporiadaní zodpovedá jednej voľbe smyslu.



Obr. 1.

Bod A, zvolený na danej priamke (obr. 2), rozdelí túto priamku na dve **polpriamky** p_1, p_2, ktoré sú navzájom **opačného smyslu.** Bod A patrí do obidvoch polpriamok a je ich **začiatkom.** Každý iný bod priamky leží buď vnútri polpriamky p_1, alebo vnútri polpriamky p_2. Pri jednej voľbe smyslu body vnútri p_1 sú **pred** bodom A a body vnútri p_2 **za** bodom A; pri opačnom smysle je to obrátene.



Obr. 2.

Ak sú A, B dva rôzne body na priamke p (obr. 3), potom polpriamka AB má začiatok A a prechádza bodom B; polpriamka BA má začiatok B a prechádza bodom A. Tieto dve polpriamky sú rôzne, body obidvom spoločné tvoria úsečku AB alebo úsečku BA. Body A, B sú **krajné body** úsečky AB; ostatné body úsečky AB ležia vnútri tejto úsečky. V smysle AB vnútro úsečky AB sa skladá z tých bodov, ktoré sú súčasne za bodom A a pred bodom B; v smysle BA je to naopak. Bez ohľadu na smysel môžeme povedať, že vnútro úsečky AB sa skladá z tých bodov, ktoré ležia medzi A a B. Celá priamka p sa skladá z troch častí; sú to:

Obr. 3.

1. **úsečka $\overline{AB}$,**

2. **predĺženie úsečky AB za bod A, t. j. polpriamka, opačná k polpriamke AB;**

3. **predĺženie úsečky AB za bod B,** t. j. polpriamka, opačná k polpriamke BA.

Každá polpriamka, obsiahnutá v priamke p, **určuje smysel** priamky p, totiž ten smysel, pri ktorom začiatok je pred ostatnými bodmi polpriamky. Dve polpriamky, obsiahnuté v tej istej priamke p, sú **súhlasné,** ak určujú obe ten istý smysel; inak sú **nesúhlasné.** Opačné polpriamky sú dve nesúhlasné polpriamky s tým istým začiatkom; dve súhlasné polpriamky s tým istým začiatkom splynú.

Cvičenie.

1. Priamku $ABDC$ v obr. 1 vyznačte iným spôsobom, a to tak, že v zápise budú označenia a) všetkých štyroch bodov, b) len troch, c) len dvoch z bodov A, B, C, D. Rozhodnite, koľkými spôsobmi sa to môže určiť, ak prihliadneme i k smyslu priamky, ktorý udáva takýto zápis.
2. Dané je n rôznych priamok, každá je s každou rôznobežná a v žiadnom bode nestretá sa viac ako dve priamky. Koľko priesečíkov majú celkom? Koľko priesečíkov má jedna z daných priamok so všetkými ostatnými? Koľko ráz bol počítaný každý priesečík?
3. Na priamke AB v obr. 3 zvoľte bod C tak, aby: a) ležal na úsečke AB; b) na predĺžení úsečky $\overline{AB}$ za bodom B; c) na predĺžení úsečky $\overline{AB}$ za bodom A. V každej úlohe vyznačte dvojakým spôsobom poradie bodov A, B, C.
4. Naznačte priamku $MABN$! Čo vyplnia body, ktoré sú spoločné:
   a) polpriamkam BA a AN?
   b) polpriamkam AM a AN?
   c) polpriamkam AM a BN?
   d) úsečke $\overline{NA}$ a polpriamke BN?

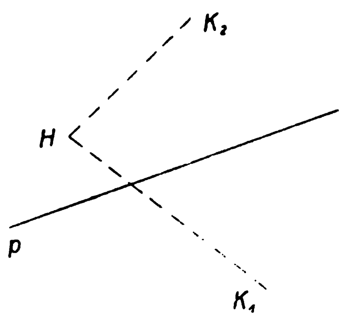
e) úsečke $\overline{AN}$ a polpriamke BM?

f) úsečkám $\overline{MN}$ a $\overline{AB}$?

5. Ktoré polpriamky z obr. 1 môžete zapísať užitím pomenovania bodov, v obrázku vyznačených? Ktoré z nich sú a) opačné, b) súhlasné, c) nesúhlasné, ale pritom nie sú opačné?
6. Čo poviete o smysle dvoch polpriamok, ak viete, že jedna je časťou druhej?
7. Môžu dve súhlasné polpriamky vyplniť spolu celú priamku?
8. Na priamke zvoľte si dve polpriamky nesúhlasného smyslu! Ktoré body sú obom polpriamkam spoločné? (3 možnosti.)
9. Musia dve nesúhlasné polpriamky vyplniť celú priamku?

2. Roviny a polroviny. Pripomeňme si teraz známy pojem **roviny.** Základná vlastnosť roviny je: **Ak dva rôzne body** A, B **ležia v rovine, leží v nej celá priamka** AB. Dve rôzne priamky p, q, ktoré ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod, menujú sa **rovnobežnými priamkami (rovnobežkami).** Dve rôzne priamky p, q, ktoré neležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod, menujú sa **mimobežnými priamkami (mimobežkami). Avšak aj dve splývajúce priamky považujeme za rovnobežky.** Tá časť geometrie, v ktorej študujeme len útvary, ktoré ležia v určitej rovine, menuje sa planimetriou. V tomto roku budeme preberať skoro výlučne planimetriu. Mimobežky sa, pravda, v planimetrii nevyskytujú.

Každá priamka p rozdelí rovinu na dve **polroviny** a tvorí **hranicu** oboch polrovín; každý bod roviny mimo p leží vnútri jednej z oboch polrovín. Hovoríme, že tieto dve polroviny sú oddelené priamkou p a že sú navzájom **opačné.** Ak sú A, B dva rôzne body priamky p, bod C leží vnútri jednej z oboch polrovín, nazývame ju polrovinou pC alebo aj polrovinou ABC (alebo BAC). Niekedy je lepšie označiť polrovinu jediným písmenom; používame na to grécke písmená ϱ, σ, τ...



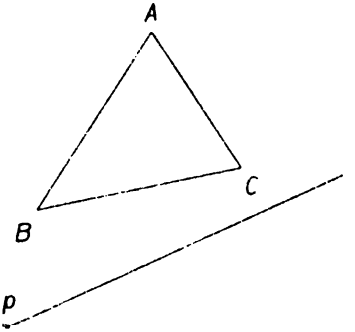
Obr. 4.

Pojem polroviny veľmi úzko súvisí s nasledujúcim pojmom. Nech je daná v rovine priamka p a mimo nej dva rôzne body H, K (obr. 4). Platí výrok, že **priamka** p **oddeľuje bod** H **od bodu** K, ak úsečka $\overline{HK}$ pretne priamku p (pozri body H, K_1 v obr. 4); priamka p neoddeľuje bod H od bodu K, ak úsečka $\overline{HK}$ nepretína priamku p

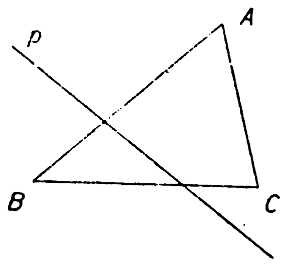
(pozri H, K_2 v obr. 4). Je zrejmé, že priamka p oddeľuje / neoddeľuje H od K, ak polroviny pH, pK sú opačné. / splynú.

Bude dobre už teraz sa zmieniť o pojme trojuholníka, ktorý podrobnejšie preberieme v článku 4. Tri rôzne body A, B, C, ktoré neležia v jednej priamke, určujú **trojuholník** ABC, krátko $\triangle\ ABC$. Body A, B, C sú jeho **vrcholy**, úsečky $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ sú jeho **strany.** Vrchol A a strana BC sú navzájom protiľahlé, rovnako vrchol B a strana AC, vrchol C a strana AB. Všetky tri strany dohromady tvoria **obvod trojuholníka;** pod názvom trojuholník rozumieme obyčajne plochu, složenú z obvodu a vnútra (pozri článok 4).

Teraz vyslovíme dôležitú vetu: **Ak priamka p neprechádza vrcholom trojuholníka, tak p buď nepretne žiadnu stranu** (obr. 5a), **buď pretne práve dve strany** (obr. 5b). Hoci táto veta bola veľmi dôležitá, vyslovil ju po prvý raz až r. 1882 nemecký matematik Moritz Pasch;



Obr. 5a,

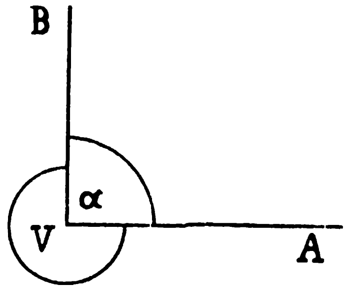


Obr. 5b.

menuje sa **vetou Paschovou.** Jej správnosť plynie z vlastností polrovín. Ak všetky tri vrcholy A, B, C sú vnútri jedinej polroviny, vyťatej priamkou p, máme prípad obrazu 5a; ak to nie je tak, sú dva z nich vnútri jednej a tretí vnútri druhej polroviny, vyťatej priamkou p a máme prípad obr. 5b.

3. Uhly. Všetky polpriamky s daným začiatkom V tvoria svázok polpriamok, ktorý sa vytvorí, ak otáčame polpriamku okolo jej začiatku. Toto otáčanie môže sa diať v dvojakom smysle; alebo v smysle **kladnom,** t. j. doľava, proti pohybu hodinových ručičiek, alebo v smysle **zápornom,** t. j. doprava.

Dve rozličné polpriamky VA, VB toho istého svázku rozdelia svázok na dve časti, ktoré menujeme uhlami. Bod V je **vrchol** oboch uhlov, polpriamky VA, VB sú ich **ramená.** Bod, ktorý **neleží ani na** jednom z oboch ramien, leží vnútri jedného uhla a zároveň mimo druhého. Uhol v obrázkoch vyznačujeme oblúčkom, a smysel uhlu oblúkom zakončeným šípkom. Uhly označujeme často písmenami malej gréckej abecedy, najčastejšie písmenami α, β, γ, δ, ω. Ak ležia obe ramená VA, VB na tej istej priamke, ale na jej opačných polpriamkach, vyplní každý z oboch uhlov jednu polrovinu, vyťatú priamkou p_1; takéto uhly menujú sa **priamymi uhlami.** Ak ramená VA, VB neležia obe na tej istej priamke (obr. 6), jeden z oboch uhlov menuje sa **dutým** a druhý **vypuklým.** Ak označíme VA' opačnú polpriamku ramena VA a VB' opačnú polpriamku ramena VB, polpriamky VA', VB' ležia obe vnútri vypuklého uhla s ramenami VA, VB. V obr. 6 je α uhol dutý, ω vypuklý. Duté uhly, ktoré sa vyskytujú omnoho častejšie než priame alebo vypuklé uhly, označujú sa $\sphericalangle$; napr. $\sphericalangle AVB$ alebo $\sphericalangle BVA$ je uhol α v obr. 6; značka vrcholu sa píše doprostred. Ak nie je obava z nedorozumenia, môžeme písať stručne $\sphericalangle V$ miesto $\sphericalangle AVB$.



Obr. 6.

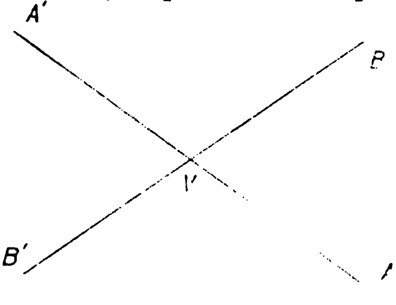
Značku $\sphericalangle$ používame len pre duté uhly.

Cvičenie.

10. Viete, že dve rôznobežky AM, AN ležia vždy v jednej rovine ϱ.
    a) Prečo aj priamka MN leží v tejto rovine?
    b) Ak P je ľubovoľný bod priamky MN, prečo i priamka AP leží v rovine ϱ?
11. Každé dve priamky, ktoré majú spoločný bod, ležia v tej istej rovine. Môžeme túto vetu obrátiť? Čo z nej plynie pre dve priamky, ktoré neležia v žiadnej spoločnej rovine? Ako sa menujú takéto priamky?
12. Môžu dve a) rovnobežky, b) rôznobežky splývať? Ako to naznačíte?
13. V rovine leží priamka p a štyri rôzne body mimo nej; koľko úsečiek spojujúcich dva z nich pretne priamka p a koľko ich priamka p nepretne? (Sú tri rôzne možnosti.)
14. Predchádzajúce cvič. 13 opakujte pre päť bodov! (Opäť sú tri možnosti.)
15. Priamka p oddeľuje opačné polroviny ϱ_1, ϱ_2; vo vnútri ϱ_1 ležia body H_1, K_1, vo vnútri ϱ_2 body H_2, K_2. Na priamke H_1K_1 zvoľte bod V_1, na priamke H_2K_2 bod V_2!
    a) Udajte, ako musíte voliť body V_1 a V_2, aby úsečka $\overline{V_1V_2}$ celkom iste preťala hranicu p?

b) **Udajte, akú polohu musia mať priamky H_1K_1, H_2K_2 vzhľadom na hranicu p, aby každá úsečka $\overline{V_1V_2}$ pretínala priamku p!**

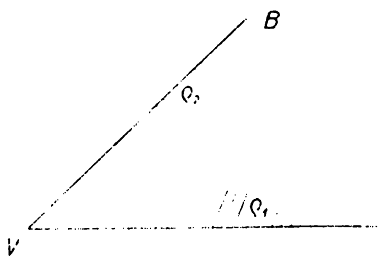
c) Čo vyplní bod V_1 a čo bod V_2, ak celá úsečka $\overline{V_1V_2}$ leží v polrovine ϱ_2? (Akú polohu musí mať priamka $\overline{HK}$ vzhľadom na hranicu p?)



Obr. 7.

Dve rôznobežky (obr. 7) s priesečíkom V rozdelia rovinu na štyri duté uhly so spoločným vrcholom V. Dva z nich sa menujú **uhlami vedľajšími,** ak majú spoločné rameno, a **uhlami vrcholovými,** ak nemajú spoločné rameno. K danému $\sphericalangle AVB$ patrí jediný vrcholový uhol $\sphericalangle A'V'B'$; ale k $\sphericalangle AVB$ patria dva vedľajšie uhly: $\sphericalangle AVB'$, $\sphericalangle A'VB$, ktoré sú navzájom vrcholové.

Vysvetlenie nového pojmu pomocou známych pojmov menuje sa **definíciou** nového pojmu; **definovať** pojem znamená vysloviť jeho definíciu. Najjednoduchšia definícia dutého uhla je: $\sphericalangle AVB$ sa skladá z tých bodov, ktoré patria do polroviny AVB (v obr. 8 označenej ϱ_1) a zároveň do polroviny BVA (v obr. 8 označenej ϱ_2). Pritom tie body $\sphericalangle AVB$, ktoré ležia na hranici polroviny ϱ_1, t. j. na priamke VA, tvoria polpriamku VA a tie body $\sphericalangle AVB$, ktoré ležia na hranici polroviny ϱ_2, t. j. na priamke VB, tvoria polpriamku VB. Teda: **Vnútro $\sphericalangle AVB$ sa skladá z tých bodov, ktoré ležia vnútri polroviny AVB a zároveň vnútri polroviny BVA.** Doteraz sme opisovali len známe skutočnosti na základe názoru. Teraz už si môžeme urobiť na podklade známych skutočností niektoré jednoduché d ô k a z y.



Obr. 8.

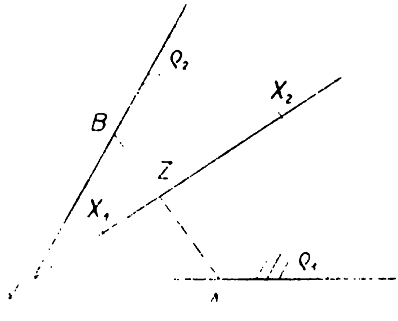
Bod X leží vnútri $\sphericalangle AVB$, ak polpriamka VX obsahuje bod Z, ležiaci medzi A a B.

D ô k a z (obr. 9). Označme ϱ_1 polrovinu AVB, ϱ_2 polrovinu BVA. Bod B leží vnútri ϱ_1 a úsečka BZ nepretne priamku VA; preto aj Z leží vnútri ϱ_1. Bod A leží vnútri ϱ_2 a úsečka AZ nepretne priamku VB; preto aj Z leží vnútri ϱ_2. Bod X alebo splynie s bodom Z, alebo **úsečka XZ nepretne ani priamku VA, ani priamku VB; preto sú-**

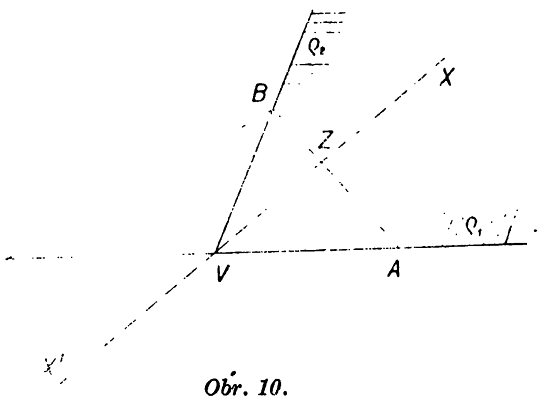
časne s bodom Z aj bod X leží vnútri oboch polrovín ϱ_1, ϱ_2, t. j. X leží vnútri $\sphericalangle AVB$. Teraz si dokážeme obrátenú vetu:

Ak bod X leží vnútri $\sphericalangle AVB$, potom polpriamka VX obsahuje bod Z, ležiaci medzi A a B.

Dôkaz (obr. 10). Opäť označme ϱ_1 polrovinu AVB, ϱ_2 polrovinu BVA. Bod X leží vnútri oboch polrovín ϱ_1, ϱ_2. Zvoľme bod A' tak, aby V ležal medzi A a A'. Vznikne nám trojuholník $AA'B$; ani jeden vrchol neleží na priamke VX, ale táto priamka pretína stranu AA' v bode V. Podľa Paschovej vety musí priamka VX preťať alebo stranu AB alebo stranu $A'B$. Priamka VX sa skladá z polpriamky VX a z opačnej polpriamky VX', ktorá leží v polrovine opačnej k ϱ_1, kým úsečky $\overline{AB}$, $\overline{A'B}$ ležia v polrovine ϱ_1. Preto musí polpriamka VX preťať alebo stranu AB alebo stranu $A'B$ a my máme dokázať, že pretne stranu AB. Teda ostáva dokázať, že polpriamka VX nepretne stranu $A'B$. To je jasné, lebo polpriamka VX leží v polrovine ϱ_2, ale úsečka $A'B$ leží v opačnej polrovine.



Obr. 9.



Obr. 10.

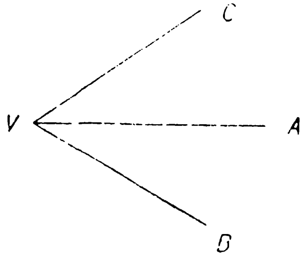
Obe práve dokázané vety môžeme spojiť v jednu vetu:

Vnútro $\sphericalangle AVB$ sa skladá z tých bodov X, pre ktoré platí, že polpriamka VX obsahuje bod Z, ležiaci medzi A a B.

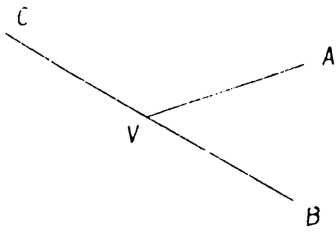
$\sphericalangle AVB$ vznikne zo svojho vnútra pripojením oboch ramien. Teda:

$\sphericalangle$ AVB sa skladá z tých bodov X, pre ktoré platí, že polpriamka VX obsahuje bod úsečky AB.

Styčné uhly sú také uhly $\sphericalangle$ AVB, $\sphericalangle$ AVC, ktoré majú spoločné rameno VA (teda i spoločný vrchol), ale druhé dve ramená ležia každé v inej polrovine, oddelenej priamkou VA, takže oba uhly

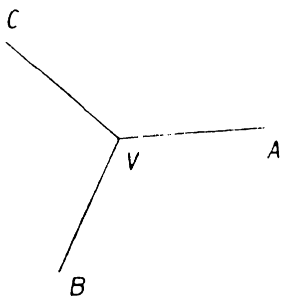


Obr. 11a.

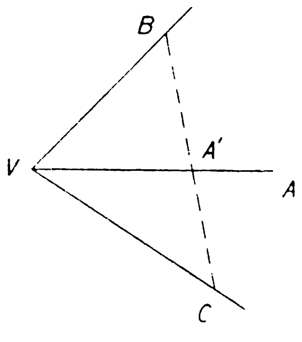


Obr. 11b.

nemajú mimo spoločného ramena spoločný bod. Oba styčné uhly dohromady tvoria uhol s ramenami VB, VC, ktorý môže byť dutý (obr. 11a), priamy (obr. 11b) alebo vypuklý (obr. 11c). V prípade obr. 11b máme dva **uhly vedľajšie.**



Obr. 11c.



Obr. 12.

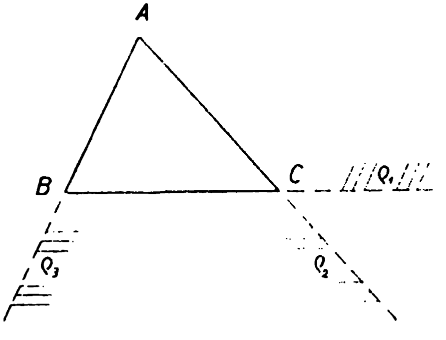
Ak polpriamka VA leží (okrem bodu V) vnútri $\sphericalangle$ BVC, potom oba uhly $\sphericalangle$ AVB, $\sphericalangle$ AVC sú styčné a dohromady tvoria $\sphericalangle$ BVC.

Dôkaz (obr. 12). Bod A leží vnútri $\sphericalangle$ BVC, a preto polpriamka VA pretne úsečku BC v bode A'. Pretože úsečka BC pretne priamku VA v bode A', ležia body B, C, a teda aj polpriamky VB, VC, v opačných polrovinách, oddelených priamkou VA. Preto oba uhly $\sphericalangle$ AVB, $\sphericalangle$ AVC sú styčné. Teraz $\sphericalangle$ BVC sa skladá zo všetkých polpriamok VX, kde X prebieha úsečku $\overline{BC}$. Podobne $\sphericalangle AVB$ alebo $A'VB$ sa skladá zo všetkých polpriamok VX, kde X prebieha po úsečke $\overline{A'B}$; rovnako $\sphericalangle AVC$ alebo $A'VC$ sa skladá zo všetkých polpriamok VX, kde X prebieha po úsečke $\overline{A'C}$. Pretože úsečky $\overline{A'B}$, $\overline{A'C}$ dohromady tvoria úsečku $\overline{BC}$, tvoria $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ dohromady $\sphericalangle BVC$.

Cvičenie.

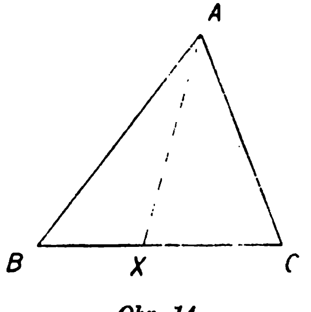
16. Koľko uhlov určujú dve polpriamky so spoločným začiatkom?
    a) Kedy sú tieto uhly priame a ako ich potom rozlíšime?
    b) Kedy je jeden z týchto uhlov nulový? Aký ďalší je ešte určený?
    c) Kedy je jeden z týchto uhlov dutý? Ako sa menuje potom druhý uhol?
17. a) Vyslovte definíciu dutého uhla!
    b) Zvoľte 3 body V, A, B, ktoré neležia v jednej priamke. Polrovinu VAB zafarbite na červeno a polrovinu VBA na modro; akú farbu má uhol $\sphericalangle AVB$?
    c) Čo vyplýva zo zápisu uhla $\sphericalangle AVB$ pre vzájomnú polohu polpriamok AV, BV?
18. Narysujte vypuklý uhol s ramenami VA, VB. Polrovinu opačnú k polrovine VAB zafarbite na modro a polrovinu opačnú k polrovine VBA na červeno. Ak dutý uhol je spoločnou časťou dvoch polrovín, čo poviete o uhle vypuklom?
19. Vysvetlite, čo znamená, že bod X leží a) vo vnútri uhla $\sphericalangle AVB$, b) vo vnútri ramena VA, c) vo vnútri dutého uhla, určeného polpriamkami AV, BV!
20. Polpriamka VX' v obr. 10 neobsahuje ani jeden bod úsečky $\overline{AB}$. Dokážte, že úsečka $\overline{VX'}$ okrem bodu V leží vo vnútri vypuklého uhla s ramenami VA, VB!
21. Vo vnútri dvoch úsečiek $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, ktoré neležia v jednej priamke, zvoľte po jednom bode A', B'. Dokážte:
    a) Úsečky $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ nemajú ani jeden spoločný bod.
    b) Úsečky $\overline{AB'}$, $\overline{A'B}$ majú spoločný bod X, ktorý leží vo vnútri $\sphericalangle AVB$.
22. Odôvodnite: a) Ak zvolíte dva rôzne body P, Q vo vnútri $\sphericalangle MVN$, potom celá úsečka $\overline{PQ}$ leží vo vnútri uhla $\sphericalangle MVN$.
    b) Platí výsledok predchádzajúceho cvič. 21a aj pre uhol priamy? Prečo?
    c) Ako zvolíte dva rôzne body P, Q vo vnútri vypuklého uhla α', aby časť úsečky $\overline{PQ}$ ležala mimo uhla α'?
23. Narysujte vypuklý uhol ω s ramenami VH, VK. Ako zvolíte bod Z, aby pri každej voľbe bodov X, Y vo vnútri uhla ω boly obe úsečky $\overline{ZX}$, $\overline{ZY}$ celé vo vnútri uhla ω? Odôvodnite! (Ak sú VH', VK' opačné polpriamky k polpriamkam VH, VK, zvoľte Z vo vnútri uhla $\sphericalangle H'VK'$.)

4. Trojuholníky. Už na strane 3 sme hovorili o trojuholníku ABC, ale definíciu trojuholníka ako plochy vyslovíme iba teraz takto: $\triangle ABC$ sa skladá z bodov, ktoré ležia súčasne vo všetkých troch polrovinách BCA (ϱ_1 v obr. 13), ACB (ϱ_2 v obr. 13), ABC (ϱ_3 v obr. 13). Pritom tie body, ktoré sú na hranici jednej z troch polrovín $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, tvoria jednu stranu $\triangle ABC$. Napr. hranicou polroviny ϱ_1 je priamka BC. Tie body priamky BC, ktoré ležia v polrovine ϱ_2, tvoria polpriamku CB; tie body priamky BC, ktoré ležia v polrovine ϱ_3, tvoria polpriamku BC. Spoločnou časťou oboch polpriamok CB, BC je však úsečka $\overline{BC}$, t. j. jedna strana $\triangle ABC$. Ak odstránime z $\triangle ABC$ jeho strany, zostane jeho vnútro. Teda: **Vnútro $\triangle ABC$ sa skladá z tých bodov, ktoré ležia súčasne vnútri všetkých troch polrovín** BCA, ACB, ABC.



Obr. 13.

Spoločná časť oboch polrovín ABC (ϱ_3 v obr. 13) a ACB (ϱ_2 obr. 13) je uhol $\sphericalangle BAC$, ktorý sa menuje **uhlom trojuholníka** ABC **pri vrchole** A; podobne máme $\sphericalangle ABC$ pri vrchole B, $\sphericalangle ABC$ pri vrchole C. Z definície trojuholníka plynie, že $\triangle ABC$ sa skladá z tých bodov uhla $\sphericalangle BAC$, ktoré ležia v polrovine BCA. Z 3. článku však vieme, že $\sphericalangle BAC$ sa skladá zo všetkých polpriamok AX, kde X prebieha po úsečke $\overline{BC}$. Z každej takej polpriamky AX leží v polrovine BCA len úsečka $\overline{AX}$. Teda: $\triangle ABC$ sa skladá zo všetkých úsečiek $\overline{AX}$, kde X leží na úsečke $\overline{BC}$ (obr. 14). Podobne:



Obr. 14.

Vnútro $\triangle ABC$ sa skladá zo všetkých úsečiek $\overline{AX}$, kde X leží vo vnútri úsečky $\overline{BC}$.

Geometrický útvar K menuje sa **konvexným**, ak pre každé dva rôzne body X, Y útvaru K platí, že celá úsečka XY je časťou útvaru K. Konvexná je napr. každá úsečka, vnútro každej úsečky, každá polrovina, vnútro každej polroviny. Ak spoločnou časťou nie-koľkých konvexných útvarov K_1, K_2 atď. je útvar K, potom tiež útvar K je konvexný. Lebo ak dva rôzne body X, Y patria do K, potom body X, Y patria do každého z útvarov K_1, K_2 atď. Pretože všetky tieto útvary sú konvexné, patrí celá úsečka XY do každého z útvarov K_1, K_2 atď., t. j. úsečka XY patrí do útvaru K. Pretože trojuholník je spoločnou časťou troch polrovín a pretože polrovina je konvexná, **je každý trojuholník konvexný útvar.** Podobne aj vnútro trojuholníka je konvexný útvar.

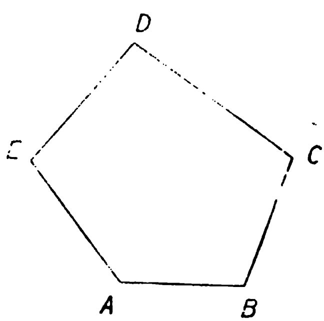
Cvičenie.

24. Narysujte dosť veľký $\triangle ABC$. Polrovinu ABC zafarbite na žlto, polrovinu BCA na červeno a polrovinu CAB na modro.
    a) Akú farbu má vnútro $\triangle ABC$?
    b) Ktorá časť roviny má farbu: 1. oranžovú, 2. zelenú, 3. fialovú?
    c) Ktorá časť roviny má farbu: 1. žltú, 2. červenú, 3. modrú?
25. Zvoľte $\triangle ABC$; vo vnútri strany BC zvoľte bod X, vnútri strany CA bod Y. Dokážte, že úsečky $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ majú spoločný bod U, ktorý leží v trojuholníku ABC.
26. Ktoré uhly sú konvexné? Odôvodnite!
27. Narysujte rôznobežky AOC, BOD. Oba trojuholníky ABC, CDA určujú štvoruholník $ABCD$, ktorý je konvexným útvarom. Dokážte!

27a. Zvoľte dve rôznobežné úsečky $\overline{AOC}$, $\overline{BDO}$. Oba trojuholníky ABD, BCD určujú štvoruholník $ABCD$, ktorý nie je konvexný.
   1) Dokážte, že priamka, ktorá pretína strany AD, DC trojuholníka ADC vo vnútorných bodoch M, N pretne i strany AB, BC vo vnútorných bodoch P, Q. Úsečka $\overline{MN}$ leží mimo štvoruholníka.
   2) Zvoľte vnútri úsečky $\overline{PM}$ bod U a vnútri úsečky $\overline{NQ}$ bod V. Dokážte, že U, V sú vnútorné body štvoruholníka $ABCD$ a že úsečka $\overline{UV}$ obsahuje body, ktoré ležia mimo tohoto štvoruholníka.

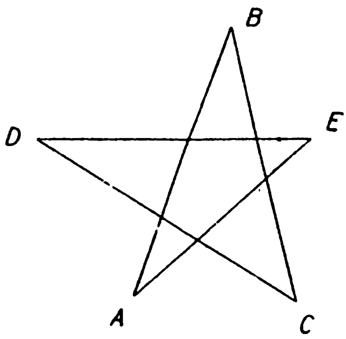
5. Mnohouholníky.

Pojem trojuholníka je zvláštny prípad pojmu **mnohouholníka.** Podľa počtu **vrcholov** rozoznávame trojuholníky, štvoruholníky, päťuholníky atď. Všeobecne hovoríme o **n-uholníku,** ak je počet vrcholov n; kde n je prirodzené číslo väčšie než 2. Pre $n = 3$ nezáleží na poradí vrcholov, ale pre $n > 3$ je poradie vrcholov určené tak, že ku každému vrcholu máme dva **vrcholy s ním susediace,** pričom ani



Obr. 15.

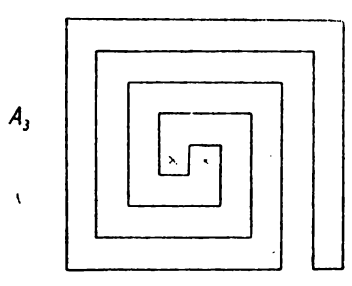
jeden vrchol nesmie ležať v tej istej priamke ako jeho susedné vrcholy. Vrcholy mnohouholníka píšeme za sebou podľa nasledujúcich pravidiel: Začneme celkom ľubovoľným vrcholom. Potom napíšeme jeden z oboch susedných vrcholov a ďalej píšeme tak, aby každý nasledujúci vrchol susedil s predchádzajúcim; okrem toho susedí posledný vrchol s prvým. Pri päťuholníku v obr. 16 máme pre vrcholy 10 rozličných poradí: *ABCDE*, *BCDEA*, *CDEAB*, *AEDCB*, *BAEDC*, *CBAED*, *DCBAE*, *EDCBA*. Všeobecné vrcholy n-uholníka môžeme písať za sebou $2n$ rozličnými spôsobmi: Začneme ktorýmkoľvek z n vrcholov a po voľbe prvého vrcholu sú ešte dve možnosti pre druhý vrchol.



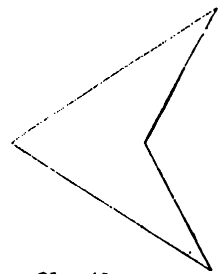
Obr. 16.

Strana mnohouholníka je úsečka, ktorej krajné body sú dva susedné vrcholy. Z každého vrcholu vychádzajú dve strany, ktoré nazývame susednými stranami. **Počet strán sa rovná vždy počtu vrcholov.** Dve susedné strany majú spoločný krajný bod (vrchol). O dvoch nesusedných stranách predpokladáme, že nemajú ani jeden spoločný bod. Tým vylučujeme z našich úvah napr. tzv. hviezdicové mnohouholníky (pozri hviezdicový päťuholník *ABCDE* v obr. 16).

Uhlopriečka mnohouholníka je úsečka, ktorej krajné body sú dva nesusedné vrcholy. Trojuholník nemá uhlopriečky. Z jedného vrcholu vychádza $n—3$ uhlopriečok, z n vrcholov to by dalo celkom $n(n—3)$ uhlopriečok, ale pritom sa každá počíta dvakrát. Teda: **n-uholník má celkom $\frac{1}{2}n(n—3)$ uhlopriečok.** Všetky strany mnohouholníka dohromady tvoria **obvod mnohouholníka.** Výraz mnohouholník znamená obyčajne plochu, ktorá sa skladá z obvodu a z vnútra mnohouholníka. Čo tvorí vnútro mnohouholníka, to sa v jednoduchých prípadoch pozná na prvý pohľad, ale už v neveľmi složitom obr. 17 treba chvíľu rozmýšľať, aby sme poznali, ktorý z oboch bodov, vyznačených krížikmi, leží vnútri mnohouholníka. Preto v ďalšom sa

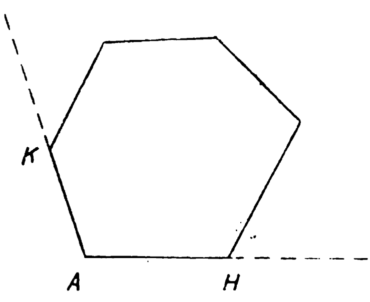

Obr. 17.

obmedzíme na zvlášť jednoduchý, ale veľmi dôležitý prípad vypuklého mnohouholníka. **Vypuklým mnohouholníkom sa nazýva ten, pre ktorého každú stranu AB platí, že všetky vrcholy okrem A, B ležia vnútri jednej polroviny, oddelenej priamkou AB,** ktorú nazveme **opornou polrovinou** strany AB. Počet všetkých oporných polrovín sa rovná počtu strán, teda počtu vrcholov. Každý trojuholník je vypuklý, ale štvoruholník v obr. 18 nie je vypuklý. Je zvykom, že výrazom mnohouholník rozumieme jeho plochu, takže vypuklý mnohouholník sa skladá z tých bodov, ktoré ležia vo všetkých oporných polrovinách. Strana AB leží na hranici svojej opornej polroviny, ale, okrem dvoch vrcholov A, B, leží vnútri všetkých ostatných oporných polrovín. **Vnútro vypuklého mnohouholníka sa skladá z tých bodov, ktoré ležia vnútri všetkých oporných polrovín.** Pretože polrovina a vnútro polroviny sú konvexné, vypuklý mnohouholník a jeho vnútro sú konvexné útvary. To znamená, že ak dva rôzne body X, Y patria do vypuklého mnohouholníka **M**, celá úsečka $\overline{XY}$ je časťou **M**, a ak sú X, Y vnútri, leží aj úsečka $\overline{XY}$ vnútri. Ľahko poznáme, že vnútro úsečky $\overline{YX}$ leží, okrem jednej výnimky, vnútri **M**. Výnimka nastane, ak oba body X, Y ležia na jednej strane **M**. **Najmä každá uhlopriečka vypuklého mnohouholníka leží, okrem svojich krajných bodov, vnútri mnohouholníka.**



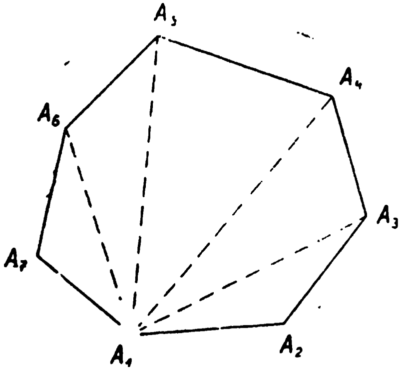
Obr. 18.

Bod A (obr. 19) je vrchol vypuklého mnohouholníka a H, K sú jeho susedné vrcholy. Polroviny HAK, KAH sú oporné polroviny; ich spoločná časť je $\sphericalangle HAK$, uhol vypuklého mnohouholníka pri vrchole A. Tento uhol je len časťou priameho uhla, preto je dutý. Teda vypuklý mnohouholník má pri každom vrchole A dutý uhol $\sphericalangle A$ a celý mnohouholník je časťou $\sphericalangle A$; okrem dvoch strán AH, AK leží mnohouholník úplne vnútri $\sphericalangle A$.



Obr. 19.

V obr. 20 sú vyznačené všetky uhlopriečky vypuklého sedemuholníka $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, vychádzajúce z vrcholu A_1. Všimnime si napr. uhlopriečku A_1A_4. Oba body A_1, A_4 ležia na obvode mnohouholníka; vnútro uhlopriečky A_1A_4 leží vnútri mnohouholníka. Ale iné body priamky A_1A_4 nemôžu patriť do mnohouholníka, lebo napr. predĺženie úsečky $\overline{A_1A_4}$ za bod A_1 leží mimo $\sphericalangle A_2A_1A_7$, ktorého časťou je mnohouholník. Z toho usudzujeme, že priamka A_1A_4 pretne obvod len v bodoch A_1, A_4. Bod A_4 leží vnútri $\sphericalangle A_2A_1A_7$, a preto polpriamka A_1A_4 pretne úsečku $\overline{A_2A_7}$. Body A_2, A_7 sú teda oddelené priamkou A_1A_4. Naproti tomu úsečky A_2A_3, A_7A_6, A_6A_5 nepretnú priamku A_1A_4. Priamka A_1A_4 oddeľuje teda body A_2, A_3 od bodov A_5, A_6, A_7. Podobne priamka A_1A_5 oddeľuje body A_2, A_3, A_4 od bodov A_6, A_7. Pretože polpriamka A_1A_4 leží vnútri $\sphericalangle A_2A_1A_7$, rozdeľuje tento uhol na dva styčné uhly $\sphericalangle A_2A_1A_4$, $\sphericalangle A_4A_1A_3$, Vnútri $\sphericalangle A_2A_1A_4$ leží bod A_3; vnútri $\sphericalangle A_4A_1A_7$ ležia body A_5, A_6. Podobne usudzujeme ďalej: Polpriamka A_1A_3 rozdelí $\sphericalangle A_2A_1A_4$ na dva styčné uhly $\sphericalangle A_2A_1A_3$, $\sphericalangle A_3A_1A_4$; polpriamka A_1A_5 rozdelí $\sphericalangle A_4A_1A_7$ na dva styčné uhly $\sphericalangle A_4A_1A_5$, $\sphericalangle A_5A_1A_7$ a vnútri druhého z nich leží bod A_6, takže polpriamka A_1A_6 rozdelí $\sphericalangle A_5A_1A_7$ na dva styčné uhly $\sphericalangle A_5A_1A_6$, $\sphericalangle A_6A_1A_7$. Celkove pozorujeme, že uhol $\sphericalangle A_2A_1A_7$ je rozdelený na uhly:



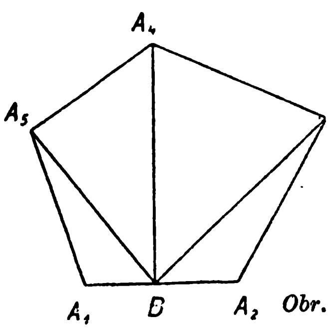
Obr. 20.

$$\sphericalangle A_2A_1A_3,\ \sphericalangle A_3A_1A_4,\ \sphericalangle A_4A_1A_5,\ \sphericalangle A_5A_1A_6,\ \sphericalangle A_6A_1A_7; \qquad (1)$$

dva susedné z týchto uhlov sú styčné a dva nesusedné nemajú okrem vrcholu A_1 nijaký iný spoločný bod. Časťou každého z uhlov (1) je príslušný jeden z trojuholníkov

$$\triangle\ A_2A_1A_3,\ \triangle\ A_3A_1A_4, \triangle\ A_4A_1A_5,\ \triangle\ A_5A_1A_6,\ \triangle\ A_6A_1A_7; \qquad (2)$$

dva susedné z týchto trojuholníkov majú spoločnú stranu a dva nesusedné majú spoločný len vrchol A_1. Každý z trojuholníkov (2) je časťou mnohouholníka; napr. ak bod X, ležiaci mimo bodu A_1, patrí do $\triangle\ A_4A_1A_5$, potom leží X na úsečke A_1Z, kde Z je bodom úsečky A_4A_5, teda bodom mnohouholníka, a preto celá úsečka A_1Z



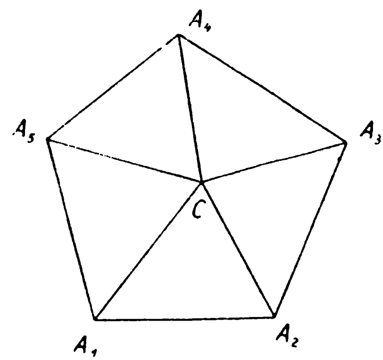
Obr. 21.

i s bodom X je časťou mnohouholníka. Obrátene, ak bod X patrí do mnohouholníka, tak X leží v uhle $\sphericalangle A_2A_1A_7$, a teda X leží v niektorom z uhlov (1), napr. v $\sphericalangle A_4A_1A_5$. Potom polpriamka A_1X pretne úsečku A_4A_5 v bode Z; bod X patrí do polpriamky A_1Z a musí patriť i do úsečky A_1Z; lebo keby bod X ležal na tejto predĺženej úsečke za bodom Z, bol by oddelený od bodu A_1 priamkou A_4A_5 a nepatril by do opornej polroviny $A_4A_5A_1$, ktorej časťou je mnohouholník, ktorého bodom je X. Tým sme dokázali vetu:

Uhlopriečky, vychádzajúce z jedného vrcholu vypuklého n-uholníka, rozdelia n-uholník na $n-2$ trojuholníkov. Táto veta platí pre $n > 3$. Podobne môžeme dokázať nasledujúce dve vety, ktoré platia aj pre $n = 3$:

Ak bod B leží vnútri strany A_1A_2 vypuklého n-uholníka $A_1A_2\ldots A_n$, potom úsečky $BA_3, \ldots, BA_n$ rozdelia n-uholník na $n-1$ trojuholníkov (obr. 21).

Ak bod C leží vnútri vypuklého n-uholníka $A_1A_2 \ldots A_n$, úsečky $CA_1, \ldots, CA_n$ rozdelia n-uholník na n trojuholníkov (obr. 22).



Obr. 22.

Cvičenie.

28. Vyznačte šesťuholník $ABCDEF$ v každom možnom poradí písmen. Rozdeľte ich do dvoch skupín!
29. Vysvetlite vznik mnohouholníka!
    a) Čo platí o troch po sebe nasledujúcich bodoch A_{k-1}, A_k, A_{k+1}?
    b) Čo predpokladáme o nesusedných stranách? Ktoré mnohouholníky teda vylučujeme zo svojich úvah (naznačte)?
    c) Ktorý mnohouholník menuje sa vypuklý? Čo je to oporná polrovina?
    d) Vysvetlite, prečo celé vnútro vypuklého mnohouholníka leží vo vnútri ktoréhokoľvek jeho uhla!
30. Plocha každého vypuklého rôznobežníka vznikne dvojakým spôsobom tak, že od plochy jedného trojuholníka uberie sa plocha iného trojuholníka. Ako je to pri lichobežníku, rovnobežníku a pri nevypuklom štvoruholníku v obr. 19?
31. $A_1A_2\ldots A_n$ je vypuklý n-uholník. Vo vnútri strany A_1A_2 zvoľte bod A'_1 a vo vnútri strany A_nA_1 bod A_{n+1}. Potom $A'_1A_2\ldots A_nA'_{n+1}$ je vypuklý $(n+1)$-uholník. Odôvodnite!
32. Daný je trojuholník $\triangle ABC$. Kde musíte zvoliť bod D, aby vznikol: a) vypuklý štvoruholník $ABCD$; b) štvoruholník ako v obr. 19 (vydutý)?

33. Dve rôznobežné úsečky $\overline{AOC}$, $\overline{BOD}$, kde A, B, C, D, O sú rôzne body, určujú vypuklý štvoruholník $ABCD$. Odôvodnite!

34. Dokážte, že plocha vypuklého štvoruholníka dá sa dvoma spôsobmi rozložiť na dva trojuholníky. Ako je to pri štvoruholníku v obr. 19?

35. Dokážte, že uhlopriečka AC vypuklého štvoruholníka $ABCD$ delí uhol $\sphericalangle DAB$ na dva styčné uhly!

36. Dokážte, že vo vypuklom štvoruholníku sa obe uhlopriečky navzájom pretínajú vo vnútri štvoruholníka!

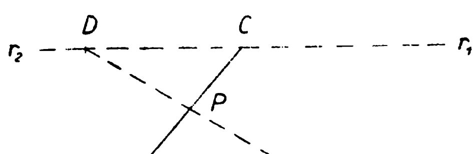
37. a) Ktorý bod vypuklého mnohouholníka menujeme vnútorným bodom?
b) Nech je Y vnútorný bod vypuklého mnohouholníka. Potom každá polpriamka so začiatkom Y obsahuje práve jeden bod obvodu mnohouholníka. Dokážte pomocou rozkladu mnohouholníka na trojuholníky! V koľkých bodoch pretína obvod vypuklého mnohouholníka priamka, ktorá obsahuje vnútorný bod mnohouholníka?

38. Podľa vzoru textu učebnice v odseku 5. dokážte obe posledné vety, vyslovené na konci odseku!

6. Rovnobežky.

Pojem rovnobežiek sme si pripomenuli už v článku 2; pripomeňme si opäť, že splývajúce dve priamky považujeme tiež za rovnobežné. Základná veta o rovnobežkách znie: **Daným bodom môžeme viesť k danej priamke práve jednu rovnobežku.** Zo základnej vety plynie: **Ak sú dve priamky p_1, p_2 rovnobežné s treťou priamkou q, sú priamky p_1, p_2 tiež medzi sebou rovnobežné.**

Táto veta platí i vtedy, keď všetky tri priamky p_1, p_2, q neležia v jednej rovine; ale dôkaz je dosť složitý a nebudeme ho robiť. Dôkaz pre prípad, že p_1, p_2, q ležia v jednej rovine: Ak splynú priamky p_1, p_2, sú iste rovnobežné. Ak nesplynú, treba len dokázať, že priamky p_1, p_2 nemajú spoločný bod. To však je jasné, lebo keby maly spoločný bod C, tak by bodom C prechádzaly dve rôzne rovnobežky p_1, p_2 s priamkou q, čo protirečí základnej vete.



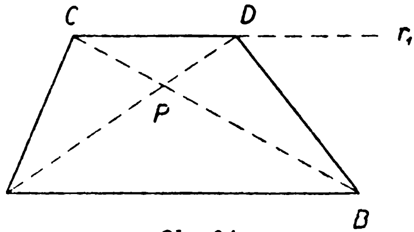
Obr. 23.

Ak strany AB, CD štvoruholníka $ABCD$ sú rovnobežné, potom štvoruholník $ABDC$ sa menuje **lichobežníkom**; strany AB, CD sú jeho **základne**, strany AC, BD sú jeho **ramená**.

Dve úsečky alebo polpriamky nazývame rovnobežnými, ak sú rovnobežné priamky, tieto obsahujúce.

Pretože strany AB, AC lichobežníka $ABDC$ sú susedné, nemôžu všetky tri vrcholy A, B, C ležať na jednej priamke. Inak je však poloha bodov A, B, C ľubovoľná. Štvrtý vrchol D musí ležať na priamke r, ktorá prechádza bodom C rovnobežne s priamkou AB. Táto rovnobežka je bodom C rozdelená na dve polpriamky r_1, r_2 (obr. 23) tak, že r_1 leží v polrovine ACB, r_2 v polrovine opačnej. Vrchol D nemôže ležať na polpriamke r_2. Lebo ak si zvolíme bod D rôzny od C na polpriamke r_2, sú body B, D oddelené priamkou AC, a preto úsečka $\overline{BD}$ pretne priamku AC v bode P. Vznikne $\triangle\ ABP$, ktorého strany AB, BP nepretnú priamku r; podľa Paschovej vety ani tretia strana AP nepretne priamku r, t. j. úsečka AP neobsahuje bod C, teda P leží na polpriamke CA. Ďalej vznikne $\triangle\ CDP$, ktorého strany CD, DP nepretnú priamku AB; teda ani tretia strana CP nepretne priamku AB, t. j. úsečka CP neobsahuje bod A, teda P leží na polpriamke AC. Môžeme teda povedať, že bod P leží na oboch polpriamkach CA, AC, t. j. P leží na úsečke AC. Teda úsečky AC, BD pretnú sa v bode P, a preto $ABDC$ nie je štvoruholník.

Ak však zvolíme bod D rôzny od C na polpriamke r_1 (obr. 24), body B, D nie sú od seba oddelené priamkou AC, a preto úsečky AC, BD sa nepretnú, $ABDC$ je štvoruholníkom: ľahko sa presvedčíme, že je vypuklý. Je to, pravda, lichobežník. Teda: **Každý lichobežník je vypuklý štvoruholník.** Bod D leží vnútri $\sphericalangle A$, a preto polpriamka AD pretne úsečku BC v bode P. Okrem toho bod C leží vnútri $\sphericalangle B$, a preto polpriamka BC pretne úsečku AD v bode, ktorý musí splynúť s P. Teda bod P je **priesečík uhlopriečok** lichobežníka $ABDC$.



Obr. 24.

Zvoľme si dve rôzne rovnobežky; na prvej zvoľme dva rôzne body A, B, na druhej dva rôzne body C, D. Nastane jeden z oboch prípadov, naznačených v obr. 24 a v obr. 25. V prípade obr. 25 úsečky AC, BD sa nepretnú, úsečky AD, BC sa pretnú a vznikne lichobežník $ABDC$. V obr. 24 pretnú sa úsečky AC, BD; avšak úsečky AD, BC v tomto prípade sa nepretnú, lebo každá z nich leží v inej polrovine, vyťatej priamkou AC. Preto v obr. 24 dostaneme lichobežník $ABCD$ (v obrazci nevyznačený).

Ak sú AB, CD dve rôzne rovnobežky, hovoríme, že sú **súhlasne rovnobežné a napíšeme**

$$AB \upuparrows CD \text{ alebo } BA \upuparrows DC, \tag{1}$$

ak $ABDC$ je lichobežník. Pritom nezáleží na polohe bodov A, B, C, D, ale len na smysle oboch rovnobežiek AB, CD. Lebo vzťah (1) dá sa popísať tak, že oba body B, D ležia v tej istej polrovine ϱ, oddelenej priamkou AC. Ak nahradíme body B, D inými bodmi B', D' tak, aby smysly zostaly zachované, zostanú body B', D' v polrovine ϱ a máme:

$$AB' \uparrow\uparrow CD'. \tag{2}$$

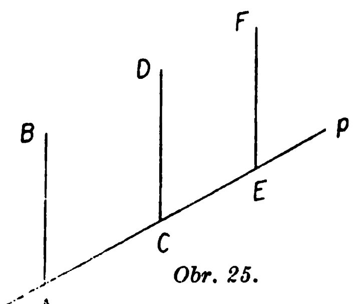
Vzťah (2) sa dá opísať aj tak, že oba body A, C ležia v tej istej polrovine σ, oddelenej priamkou $B'D'$. Ak nahradíme body A, C inými bodmi A', C' tak, aby smysly zostaly zachované, zostanú body A', C' v polrovine σ a máme:

$$A'B' \uparrow\uparrow C'D'.$$

Lepšie je nevylučovať možnosť, že obe rovnobežky AB, CD splynú. V tomto prípade vzťah (1) znamená, že smysel AB je ten istý ako smysel CD.

Ak sú dve priamky AB, CD súhlasne rovnobežné s priamkou treťou EF, sú aj AB, CD medzi sebou súhlasne rovnobežné.

Dôkaz: Ľahko si premyslíme, že veta je správna, ak niektoré dve z troch priamok AB, CD, EF splynú. Ak sú tieto tri priamky rôzne, môžeme body A, C, E voliť tak, aby ležaly v jednej priamke p (obr. 25). Potom vzťahy



Obr. 25.

$$AB \uparrow\uparrow EF, \quad CD \uparrow\uparrow EF$$

znamenajú, že oba body B, D ležia v tej istej polrovine, oddelenej priamkou p alebo priamkou AC, takže

$$AB \uparrow\uparrow CD.$$

Značku $\uparrow\uparrow$ používame len pre súhlasnú rovnobežnosť.

Cvičenie.

39. Dané sú dve rovnobežky a, c, priamka b pretína priamku a. Potom priamka b pretne i priamku c. Dokážte!

40. Vyslovte definíciu lichobežníka! Je to štvoruholník vypuklý?

41. Ak vedieme vrcholom C v trojuholníku ABC priamku r rovnobežne s AB, prechádza celá priamka r okrem bodu C mimo trojuholníka ABC. Odôvodnite!

42. Načrtnite odruky dve rovnobežky AB, CD a vysvetlite, ako rozhodnete, či sú obe priamky súhlasne alebo nesúhlasne rovnobežné.

43. AB, CD sú dve nesúhlasné rovnobežky. Na polpriamke AB zvoľte vnútorný bod B' a na polpriamke CD vnútorný bod D'. Dokážte, že sa obe úsečky AC, $B'D'$ pretínajú!

44. Predchádzajúce cvič. 43 opakujte pre prípad, že je $AB \uparrow\uparrow CD$ a dokážte, že: a) úsečky AC a $B'D'$ sa nepretnú, b) úsečky AD', $B'C$ sa pretnú!

45. Zvoľte vo vnútri strany EB trojuholníka EBC bod A a veďte ním rovnobežku r so stranou BC. Dokážte, že a) priamka r pretne stranu EC vo vnútornom bode D, b) štvoruholník $ABCD$ je lichobežník!

46. Vo vnútri strany AC trojuholníka ABC zvoľte body M_1, M_2 tak, aby boly v poradí AM_1M_2C a veďte nimi priamky r_1, r, rovnobežné so stranou AB. Dokážte, že oba priesečíky N_1, N_2 týchto priamok s priamkou BC ležia vo vnútri úsečky BC v poradí BN_1N_2C a že je $M_1N_1 \uparrow\uparrow M_2N_2$.

II. ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI VEĽKOSTI

7. Veľkosť úsečiek.

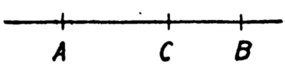
Dve dané úsečky $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ alebo majú **veľkosť** čiže dĺžku rovnakú, načo hovoríme, že sú sebe rovné a píšeme

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} \text{ alebo } \overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1},$$

alebo jedna z nich je **menšia** čiže kratšia a druhá **väčšia** čiže dlhšia. Ak je napr. $\overline{A_1B_1}$ menšia ako $\overline{A_2B_2}$, píšeme

$$\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} \text{ alebo } \overline{A_2B_2} > \overline{A_1B_1}.$$

Vzdialenosť dvoch bodov A, B je to isté ako veľkosť úsečky $\overline{AB}$, ak sú body rôzne; vzdialenosť dvoch splývajúcich bodov sa rovná nule. Ak bod C leží medzi bodmi A, B (obr. 26), je $\overline{AC} < \overline{AB}$, $\overline{CB} < \overline{AB}$; úsečka $\overline{AB}$ je súčet úsečiek $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, čo píšeme $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, a úsečka $\overline{CB}$ je **rozdiel** úsečiek $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, čo píšeme $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$; súčasne je $\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AC}$.



Obr. 26.

Súčet a rozdiel dvoch úsečiek je určený len čo sa týka **veľkosti**, nie **polohy**.

Môžeme sčítať tri alebo viac úsečiek. Zvlášť dôležitý je prípad, že všetky sčítance sú rovnaké. Súčet $\overline{CD}$ n úsečiek, rovnajúcich sa úsečke AB, menuje sa n-násobkom úsečky $\overline{AB}$ a píšeme $\overline{CD} = n \cdot \overline{AB}$. Úsečka $\overline{AB}$ je potom n-tina úsečky $\overline{CD}$ a píšeme $\overline{AB} = \frac{1}{n} \cdot \overline{CD}$.

Všeobecne, ak sú m, n celé kladné čísla, znamená

$$\overline{UV} = \frac{m}{n}\,\overline{PQ},$$

že úsečka $\overline{UV}$ je m-násobok n-tiny úsečky $\overline{PQ}$. Zlomok $\frac{m}{n}$ je **pomer** úsečky $\overline{UV}$ k úsečke $\overline{PQ}$ a píšeme

$$\frac{m}{n} = \frac{\overline{UV}}{\overline{PQ}} \quad \text{alebo} \quad \frac{m}{n} = \overline{UV} : \overline{PQ}.$$

Pomer úsečky PQ k úsečke UV je zlomok $\frac{m}{n}$.

Pomer dvoch úsečiek môže byť aj číslo **iracionálne.** Napr. pre uhlopriečku $\overline{HL}$ štvorca $\overline{HKLM}$ so stranou $\overline{HK}$ plynie z Pytagorovej vety

$$\overline{HL} : \overline{HK} = \sqrt{2},$$

kde číslo $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$ je číslo iracionálne. Prakticky môžeme iracionálne číslo nahradiť vždy zlomkom, ktorý sa od neho líši tak málo, že na tom nezáleží. V našom prípade je

$$\frac{1414213}{1000000}\,\overline{HK} < \overline{HL} < \frac{1414214}{1000000}\,\overline{HK},$$

kde úsečka naľavo aj úsečka napravo líši sa od úsečky $\overline{HL}$ o úsečku kratšiu ako je milióntina úsečky $\overline{HK}$.

Obyčajne sa volí určitá dĺžka $\overline{PQ}$ za **dĺžkovú jednotku;** najčastejšie je to 1 cm. Pomer x ľubovoľnej úsečky $\overline{DV}$ k dĺžkovej jednotke $\overline{PQ}$ je merné číslo úsečky $\overline{PQ}$. Teda $\overline{DV} = x.\overline{PQ}$; často je dĺžková jednotka známa zo súvislosti a píšeme jednoducho $\overline{DV} = x$.

Ak zvolíme určitú dĺžkovú jednotku, tak pri sčítaní alebo odčítaní sčítame alebo odčítame ich merné čísla; podobne je tomu pri násobení úsečky kladným celým, lomeným alebo iracionálnym číslom. **Ak body A, B, C neležia na jednej priamke, je známe, že každá z troch úsečiek AB, AC, BC je menšia ako súčet a zároveň väčšia ako rozdiel ostatných dvoch. Ak však A, B, C ležia na jednej priamke, tak jedna z troch úsečiek AB, AC, BC rovná sa súčtu ostatných; každá iná sa rovná rozdielu ostatných.**

Ak sú A, B, C tri rôzne body na priamke, označíme (ABC) a nazveme **deliacim pomerom** bodov A, B, C (v tomto poradí napísaných) číslo

$$(ABC) = \pm\frac{AC}{BC}$$

so znamienkom plus, ak je smysel AC ten istý ako smysel BC, a so znamienkom mínus, ak sú smysly opačné. Iste $(ABC) < 0$, ak C **leží vnútri úsečky** AB, $(ABC) > 0$, **ak** C **leží mimo úsečky** AB. Deliaci pomer často sa označuje gréckym písmenom λ.

Ak bod C **leží na predĺženej úsečke** AB **za bodom** B, **je** $(ABC) > 1$. **Obrátene, ak sú dané dva rôzne body** A, B **a číslo** $\lambda > 1$, **potom na predĺžení úsečky** $\overline{AB}$ **za bodom** B **existuje práve jeden bod** C **taký, že** $(ABC) = \lambda$. Ak položíme $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = x$, bude $\overline{AC} = a + x$; kladné číslo a poznáme a kladné číslo x máme určiť z rovnice

$$\frac{a + x}{x} = \lambda,$$

ktorá má jediný koreň, a to kladný

$$x = \frac{a}{\lambda - 1}.$$

Ak bod C **leží na predlžení úsečky** $\overline{AB}$ **za bodom** A, **je** $1 > (ABC) > 0$. To je zrejmé. **Obrátene, ak sú dané dva rôzne body** A, B **a kladné číslo** $\lambda < 1$, **potom na predĺžení úsečky** $\overline{AB}$ **za bodom** A **existuje práve jeden bod** C **tak, že** $(ABC) = \lambda$. Ak položíme $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = x$, bude $\overline{BC} = a + x$; kladné číslo a poznáme a kladné číslo x máme určiť z rovnice

$$\frac{x}{a + x} = \lambda,$$

ktorá má jediný koreň, a to kladný

$$x = \frac{a\lambda}{1 - \lambda}.$$

Ak leží bod C **vo vnútri úsečky** $\overline{AB}$, **je** $(ABC) < 0$. To je zrejmé. **Obrátene, ak sú dané dva rôzne body** A, B **a záporné číslo** λ, **potom vo vnútri úsečky** AB **existuje práve jeden bod** C **tak, že** $(ABC) = \lambda$. Ak položíme $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = x$, $\overline{CB} = a - x$; kladné číslo a poznáme a kladné číslo x máme určiť z rovnice

$$\frac{x}{a - x} = (-\lambda),$$

ktorá má jediný koreň, a to kladný

$$x = \frac{a\lambda}{1 + \lambda}.$$

Ak bod C leží vo vnútri úsečky AB, je $(ABC) < O$. To platí podľa dohody. Obrátene, ak sú dané dva rôzne body A, B a záporné číslo λ, existuje vo vnútri úsečky $\overline{AB}$ práve jeden bod C taký, že $(ABC) = \lambda$. Ak položíme $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = x$, bude $\overline{CB} = a - x$; kladné číslo a poznáme; máme určiť x tak, aby bolo $x > 0$, $a - x > 0$, a aby bola splnená rovnica

$$\frac{x}{a-x} = \lambda_0, \text{ kde } \lambda_0 = -\lambda \text{ je kladné,}$$

z ktorej máme

$$x = \frac{a\lambda_0}{1+\lambda_0},\ a - x = \frac{a}{1+\lambda_0},\ x > O,\ a - x > O.$$

Záver: Deliaci pomer (ABC) nemôže sa rovnať 0 ani 1. Obrátene, ak sú A, B dva rozličné body a číslo $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, potom na priamke AB existuje práve jeden bod X tak, že $(ABC) = \lambda$. Zaujímavý je prípad $(ABC) = -1$; potom C je stredom úsečky $\overline{AB}$.

Cvičenie.

47. Štyri body A, B, C, D na priamke sú v poradí $ABCD$. Ak $\overline{AC} = x$, $\overline{BD} = y$, $\overline{AD} = z$, určte $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$!
48. Pre päť bodov na priamke platí
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$.
Ktoré z ostatných vzdialeností dvoch bodov z našich piatich musia byť sebe rovné?
49. Vysvetlite význam rovníc: a) $\overline{AB} = \frac{7}{5}\,.\overline{CD}$, b) $\overline{AB} = \frac{7}{5}$ cm, c) $\overline{AB} = \frac{7}{5}$.
50. Ktorá rovnosť platí o dĺžkach úsečiek $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, ak ležia na priamke ABC?
51. Úsečka $\overline{AB}$ má stred S. Dokážte:
   a) Na predĺžení úsečky $\overline{AB}$ leží bod C; potom platí $\overline{CS} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.
   b) Vo vnútri úsečky $\overline{BS}$ leží bod C; potom platí $\overline{CS} = \frac{1}{2}(\overline{CA} - \overline{CB})$.
   (V náčrte vyznačte bod D tak, aby $\overline{AD} = \overline{SC}$.)
52. Na priamke AB, kde $\overline{AB} = 4$ cm, daný je bod C. Určte deliaci pomer (ABC), ak viete, že bod C
   a) leží na predĺžení úsečky $\overline{AB}$ za bodom B a je $\overline{AC} = 6$ cm;
   b) leží na predĺžení úsečky $\overline{AB}$ za bodom A a je $\overline{BC} = 5$ cm;
   c) leží vo vnútri úsečky $\overline{AB}$ a je $\overline{BC} = 3$ cm.
53. Ktorý bod C na priamke AB nemá deliaci pomer (ABC)?

54. Narysujte priamku a na nej zvoľte úsečku $\overline{AB}$ tak, aby $\overline{AB} = 4$ cm. Určte na priamke AB bod C tak, aby platilo:

a) $(ABC) = 3$; b) $(ABC) = \frac{2}{5}$; c) $(ABC) = \sqrt{2}$ (určte úsečku $\overline{C_1C_2} = 1$ mm, na ktorej bod C leží!); d) $(ABC) = -1$; e) $(ABC) = -\frac{2}{3}$.

(Zaveďte, ako v texte, pomocnú hodnotu x, a použitím mierky sostrojte bod C.)

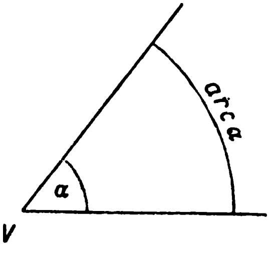
55. Aké hodnoty majú deliace pomery vzhľadom na body A, B tých bodov, ktoré ležia: a) na predĺžení úsečky $\overline{AB}$ za bodom A? b) na predĺžení úsečky $\overline{AB}$ za bodom B? c) vo vnútri úsečky $\overline{AB}$?

8. Veľkosť uhlov.

Ako úsečky, tak aj uhly triedime podľa veľkosti. Dva uhly α, β môžu sa sebe **rovnať** ($\alpha = \beta$) alebo α je **menší** než β a β **väčší** než α ($\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$) alebo obrátene ($\alpha > \beta$, $\beta < \alpha$). **Všetky priame uhly majú rovnakú veľkosť. Každý dutý uhol je menší než priamy, každý vypuklý uhol je väčší než priamy.** Podobne ako pri úsečkách, tak aj pri uhloch, zavádzame pojem **súčtu** $\alpha + \beta$ (a tiež súčtu viac uhlov), pojem rozdielu $\alpha - \beta$ a pojem súčinu $x \cdot \alpha$, kde x je kladné číslo (celé, lomené alebo iracionálne). Polovica priameho uhla je **uhol pravý**; teda všetky **pravé uhly sú rovnako veľké. Uhol ostrý** je menší než pravý, **uhol tupý** je väčší než pravý, ale menší než priamy.

V praxi sa odpradávna berie za uhlovú jednotku **stupeň**, t. j. $\frac{1}{90}$ pravého uhla; menšie jednotky sú minúta a sekunda. Tieto jednotky sú vám dobre známe; príklad $36^\circ 25' 34''$.

Dôležitá je však aj **oblúková miera** uhlov. Merné číslo uhla α v oblúkovej miere rovná sa mernému číslu oblúka kružnice, obsiahnutého vnútri jej stredového uhla α, pričom polomerom kružnice je dĺžková jednotka; toto merné číslo označujeme *arc* α (čítame arkus α; obr. 27). O veľkosti oblúka kružnice budeme hovoriť v druhej triede; ale soznámte sa už teraz s oblúkovou mierou, ktorá je dôležitá vo fyzike. Ak je α° veľkosť uhla α v stupňoch, platí vzorec



Obr. 27.

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^\circ; \qquad \alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \text{arc}\,\alpha.$$

Pre prevod stupňov na arkus a obrátene používame obyčajne tabuľky. Číslo π je známe Ludolfovo číslo

$$\pi = 3{,}141592653589\ldots,$$

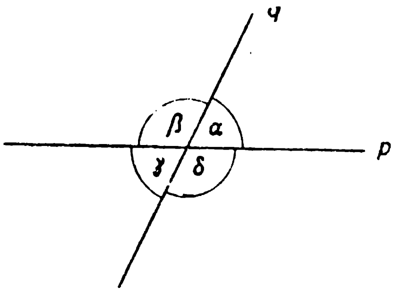
o ktorom budeme hovoriť v druhej triede. Pre prax stačí obyčajne hodnota $\pi = 3\frac{1}{7} = 3{,}142\ldots$. V oblúkovej miere veľkosť priameho uhla je π, veľkosť pravého uhla je $\frac{1}{2}\pi$. Ďalej je napr.:

$$arc\ 60^\circ = \tfrac{1}{3}\pi,\ arc\ 30^\circ = \tfrac{1}{6}\pi,\ arc\ 45^\circ = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Veľkosť jednoduchých uhlov píšeme obyčajne v oblúkovej miere.

Dva uhly α, β menujeme výplnkovými, ak $\alpha + \beta = \pi$. Dôležitým príkladom výplnkových uhlov sú **vedľajšie uhly.** Dve rôznobežky p, q (obr. 28) tvoria štyri uhly α, β, γ, δ. Platí:

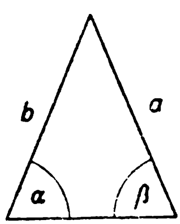
$$\alpha + \beta = \pi,\ \beta + \gamma = \pi,\ \gamma + \delta = \pi,\ \delta + \alpha = \pi \tag{1}$$



Obr. 28.

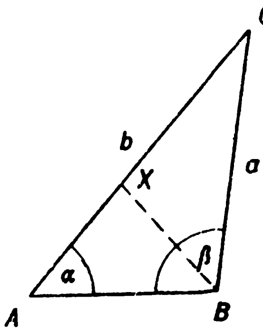
a z toho sa vypočíta $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$. **Dva vrcholové uhly sa sebe rovnajú.** Z rovníc (1) môžeme výpočtom zistiť: Ak jeden zo štyroch uhlov $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rovná sa $\frac{1}{2}\pi$ (je pravý), každý sa rovná $\frac{1}{2}\pi$. O takých dvoch priamkach p, q hovoríme, že sú **navzájom kolmé,** že jedna z nich je kolmicou na druhú, že stoja na seba kolmo. Viete, že daným bodom môžeme viesť na danú priamku práve jednu kolmicu.

Ak sú dve priamky p_1, p_2 kolmé na priamku q, sú p_1, p_2 medzi sebou rovnobežné. Zrejmé je to, ak p_1, p_2 splynú; ak však p_1, p_2 sú dve rôzne priamky, nemôžu mať spoločný bod C, lebo bodom C prechádza jediná kolmica na priamku q. Obrátene platí: Ak sú p_1, p_2 dve rovnobežky a ak p_1 stojí kolmo na priamku q, stojí aj p_2 kolmo na q. Priamky p_2, q nie sú rovnobežné, pretože potom by boly p_1, q rovnobežné a nie kolmé. Teda p_2, q pretnú sa v bode C. Bodom C môžeme viesť kolmicu p_3 na priamku q. Keďže obe priamky p_1, p_3 stoja na q kolmo, sú p_1, p_3 medzi sebou rovnobežné, t. j. p_3 je rovnobežka s p_1, vedená bodom C. Preto priamky p_2, p_3 splynú a p_2 stojí kolmo na q.



Obr. 29.

Dôležité sú vzťahy medzi veľkosťami strán a uhlov v trojuholníku. Viete (obr. 29), že ak sú v trojuholníku dve strany a, b rovnaké, rovnaké sú tiež protiľahlé uhly α, β; obrátene, ak sú α, β v trojuholníku dva rovnaké uhly, rovnaké sú aj protiľahlé strany a, b. K odôvodneniu sa vrátime v článku 9. Trojuholník, v ktorom $a = b$ alebo, čo je to isté, $\alpha = \beta$, menuje sa **rovnoramenným** a strany a, b sú **ramená**, tretia strana menuje sa **základňou**.



Obr. 30.

Ak $\triangle\ ABC$ nie je rovnoramenný so základňou AB, $\alpha \neq \beta$ (obr. 31); pre určitosť povedzme, že $\alpha < \beta$. Vnútri úsečky $\overline{AC}$ existuje potom bod X tak, že $\sphericalangle\ ABX = \alpha$. Z toho plynie, že $\triangle ABX$ je rovnoramenný so základňou AB; teda $\overline{AX} = \overline{BX}$, takže $b = \overline{AC} = \overline{BX} + \overline{XC}$. Avšak v trojuholníku $\triangle\ BCX$ je $(\overline{BX} + \overline{XC}) > \overline{BC}$. Keďže $b = \overline{BX} + \overline{XC}$, $a = \overline{BC}$, je $a < b$. Teda: Ak o dvoch uhloch α, β v trojuholníku platí $\alpha < \beta$, potom o protiľahlých stranách a, b platí $a < b$. Obrátene, ak o dvoch stranách a, b v trojuholníku platí $a < b$, platí o protiľahlých uhloch α, β vzťah $\alpha < \beta$. Lebo $\alpha = \beta$ by znamenalo $a = b$, čo je nemožné; $\alpha < \beta$ by dalo $a < b$, čo je tiež nemožné.

Cvičenie.

56. Sostrojte euklidovsky uhly $\alpha = 225°$, $\beta = 75°$! Určte graficky uhol ω, ak je: a) $\omega = \alpha + \beta$; b) $\omega = \frac{3}{2}\alpha - 2\beta$; c) $\omega = \frac{7}{2}\beta - \frac{3}{2}\alpha$!
57. Dokážte: a) Oba vedľajšie uhly sú buď pravé, alebo je jeden ostrý a druhý tupý. b) Polovica dutého uhla je vždy uhol ostrý. c) Dvojnásobok ostrého uhla je vždy dutý. d) Dva styčné uhly, ktoré sú výplnkové, sú vedľajšie.
58. Vyslovte nejakú poučku, ktorú a) možno obrátiť, b) nemožno obrátiť!
59. Nech je $\alpha = 40°$. V akých medziach musí ležať uhol β, ak má byť $\alpha + \beta$ uhol ostrý, ale $\alpha + 2\beta$ uhol tupý. Určte medze pre ostrý uhol α, ak nie je veľkosť uhla α číselne daná!
60. Z dvoch výplnkových uhlov je jeden n-násobok druhého. Ako veľké sú tie uhly? Pre aké n je veľkosť oboch uhlov daná celým počtom stupňov. (Je 16 takých n, ak počítame i hodnotu $n = 1$.)
61. Určte v oblúkovej miere tieto uhly: 360°, 180°, 90°, 45°, 120°, 60°, 30° 135°, 225°, 270°, 330°, 124°.
62. Určte v stupňovej miere veľkosť uhlov, daných v oblúkovej miere: $2\pi, \pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi$; 1 (tzv. radiant, t sa nečíta); 2,1.

63. Ktorá pdmienka musí platiť, aby priamky p, q v obr. 29 stály navzájom kolmo? (4 možnosti.)

64. V lichobežníku $ABCD$ je $AB \parallel DC$.
a) V bode A je vztýčená kolmica $m \perp AB$, v bode C je vztýčená kolmica $n \perp CD$. Dokážte, že priamky m, n sú rovnobežné!
b) $\sphericalangle DAB$ je kosý. Prečo je i $\sphericalangle ADC$ kosý?

65. V $\triangle ABC$ je $\overline{AB} = \overline{AC}$; vo vnútri strany AC leží bod X. Dokážte, že $\overline{BX} > \overline{CX}$!

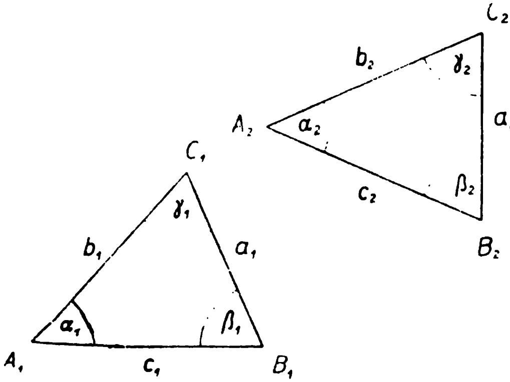
66. Čo súdite o veľkosti strán trojuholníka ABC, ak o jeho uhloch platí: a) $\beta < \alpha$; $\beta > \gamma$; b) $\alpha = \gamma$; $\beta < \alpha$; c) $\beta > \alpha$; $\beta > \gamma$?

9. Shodnosť trojuholníkov.

Jeden z najzákladnejších pojmov v geometrii je všeobecný pojem shodnosti. **Dva geometrické útvary menujú sa shodnými, ak je možné premiestiť prvý bez zmeny veľkosti úsečiek a uhlov tak, aby sa kryl s druhým.**

Shodnosť trojuholníkov je dôležitá. Píšeme

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2, \qquad (1)$$



Obr. 31.

ak je možné premiestiť $\triangle A_1B_1C_1$ bez zmeny veľkosti úsečiek a uhlov tak, aby sa kryl vrchol A_1 s vrcholom A_2, vrchol B_1 s vrcholom B_2, vrchol C_1 s vrcholom C_2, teda aj strana a_1 so stranou a_2, strana b_1 so stranou b_2, strana c_1 so stranou c_2, uhol α_1 s uhlom α_2, uhol β_1 s uhlom β_2, uhol γ_1 s uhlom γ_2. Teda zo vzťahu (1) plynú vzťahy

$$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2. \qquad (2)$$

Obrátene, ako vieme, nielen že zo vzťahu (2) plynie vzťah (1), ale aj keď vieme, že sú splnené niektoré tri zo vzťahu (2), už môžeme v určitých prípadoch usudzovať, že platí vzťah (1), a teda všetky vzťahy (2). To je predmetom známych **viet o shodnosti trojuholníkov.** Sú to štyri vety:

I. Dva trojuholníky sú shodné, keď sa shodujú ich dve strany a uhol nimi sovretý, t. j. (1) platí, ak je napr.

$$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ \gamma_1 = \gamma_2.$$

II. Dva trojuholníky sú shodné, keď sa shoduje ich jedna strana a dva priľahlé uhly, t. j. (1) platí, ak napr.

$$a_1 = a_2,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \gamma_1 = \gamma_2.$$

III. Dva trojuholníky sú shodné, keď sa shodujú ich tri strany, t. j. (1) platí, ak

$$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2.$$

IV. Dva trojuholníky sú shodné, keď sa shodujú ich dve strany a uhol proti dlhšej z nich, t. j. (1) platí, ak je napr.

$$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ a_1 > b_1.$$

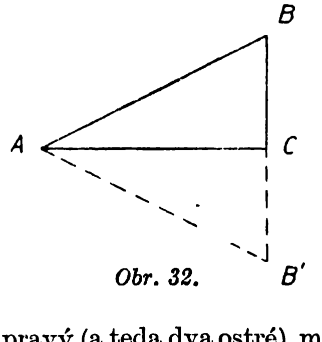
Pre tieto základné vety o shodnosti trojuholníkov sa zavádzajú značky: **sus** pre vetu I, **usu** pre vetu II, **sss** pre vetu III, **ssu** pre vetu IV.

Keď napr. v $\triangle ABC$ je $\overline{BC} = \overline{AC}$ alebo $a = b$, je $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ podľa sus, a teda $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ alebo $\alpha = \beta$ (proti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly). Keď v trojuholníku $\triangle ABC$ je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ alebo $\alpha = \beta$, je $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ podľa usu, a teda $\overline{BC} = \overline{AC}$ alebo $a = b$ (proti rovnakým uhlom ležia rovnaké strany). O týchto dvoch vetách hovorili sme už v článku 8. Pomocou shodných trojuholníkov odvodíme si ešte niekoľko iných známych skutočností.

Keď je jeden uhol trojuholníka pravý, sú oba ostatné uhly ostré.

Ak v $\triangle ABC$ je $\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$ (obr. 33), dokážeme, že $\sphericalangle A < \frac{\pi}{2}$.

Na predĺženej úsečke $\overline{BC}$ za bodom C určíme B' tak, aby bolo $BC = B'C$. Oba trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle AB'C$ majú pri vrchole C uhol pravý, majú spoločnú stranu AC a $\overline{BC} = \overline{B'C}$. Preto $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ a z toho súdime, že $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC$. Ale oba tieto uhly dohromady tvoria dutý uhol $\omega = \sphericalangle BAB'$; teda $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\omega$. Ale $\omega < \pi$, teda $\sphericalangle BAC < \frac{1}{2}\pi$.

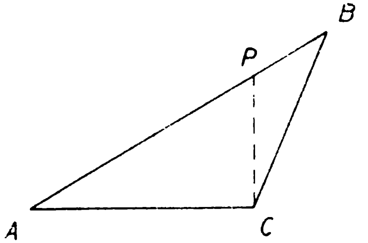


Obr. 32.

Trojuholník, ktorý má jeden uhol pravý (a teda dva ostré), menuje sa **pravouhlým trojuholníkom.** Strana proti pravému uhlu menuje sa **preponou,** strany pri pravom uhle menujú sa **odvesnami. Platí** známa veta: **Prepona pravouhlého trojuholníka je väčšia než odvesna.** Veta je správna, lebo proti prepone leží uhol pravý, proti odvesne uhol menší než pravý a proti väčšiemu uhlu leží dlhšia strana.

Keď je jeden uhol trojuholníka tupý, sú oba ostatné uhly ostré a strana proti tupému uhlu je dlhšia než ktorákoľvek z ostatných strán.

Nech v $\triangle ABC$ je $\sphericalangle C > \frac{\pi}{2}$ (obr. 34); dokážeme, že $\sphericalangle A < \frac{\pi}{2}$.

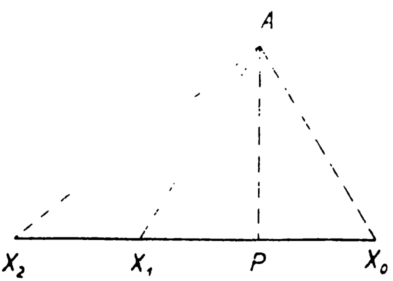


Obr. 33.

Pretože $\sphericalangle ACB$ je väčší než pravý, môžeme vnútri úsečky AB určiť bod P tak, že $\sphericalangle ACP$ je pravý; potom $\triangle ACP$ má pri vrchole C uhol pravý, teda pri vrchole A uhol ostrý. Ale oba trojuholníky $\triangle ACP$, $\triangle ABC$ majú pri vrchole A ten istý uhol. Že strana AB je najdlhšia strana v $\triangle ABC$, plynie opäť z vety, že proti väčšiemu uhlu leží dlhšia strana.

Z predchádzajúceho vidieť, že každý trojuholník má aspoň dva uhly ostré. Ak sú všetky tri uhly ostré, máme **trojuholník ostrouhlý**; o pravouhlom trojuholníku sme už hovorili; ak je jeden uhol tupý, máme **trojuholník tupouhlý.**

Ak leží mimo priamky p bod A, máme na priamke p jediný bod P, pre ktorý platí, že úsečka $\overline{AP}$ stojí kolmo na p; bod P menuje sa **pätou kolmice,** spustenej z bodu A na priamku p. Keď je X ktorýkoľvek iný bod priamky p, je $\overline{AP} < \overline{AX}$, pretože $\overline{AP}$ je odvesna a $\overline{AX}$ je prepona pravouhlého $\triangle APX$.



Obr. 34.

Preto úsečka $\overline{AP}$ menuje sa **vzdialenosťou bodu A od priamky p.** Okrem toho platí: **Päta P kolmice spustenej s bodu A na priamku p rozdelí p na dve polpriamky; keď sa bod X na jednej z týchto polpriamok vzďaľuje od bodu P, vzdialenosť $\overline{AX}$ stále sa zväčšuje a uhol $\sphericalangle AXP$ sa stále zmenšuje.**

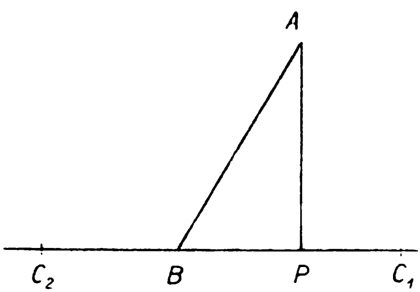
Dôkaz (obr. 35): Máme dokázať, že je $\overline{AX_1} < \overline{AX_2}$, $\sphericalangle AX_2P < \sphericalangle AX_1P$. V pravouhlom $\triangle AXP_1$ je $\sphericalangle AX_1P$ ostrý, a preto vedľajší $\sphericalangle AX_1X_2$ je tupý. Z $\triangle AX_1X_2$ teda plynie, že $\overline{AX_1} < \overline{AX_2}$ (proti tupému uhlu je najdlhšia strana). Aby sme dokázali tvrdenie o uhloch, určme na opačnej polpriamke bod X_0 tak, aby bolo $\overline{PX_1} = \overline{PX_0}$; trojuholníky $\triangle APX_1$, $\triangle APX_0$ majú pri vrchole P pravý uhol, majú spoločnú stranu AP a je $\overline{PX_1} = \overline{PX_0}$; preto $\triangle APX_1 \cong \triangle APX_0$ podľa sus. Z toho súdime jednak, že $\overline{AX_1} = \overline{AX_0}$, jednak, že $\sphericalangle AX_1P = \sphericalangle AX_0P$. Keďže $\overline{AX_1} < \overline{AX_2}$, je $\overline{AX_0} < \overline{AX_2}$; avšak $\overline{AX_0}$, $\overline{AX_2}$ sú dve strany trojuholníka AX_0X_2; pretože proti menšej strane je menší uhol, máme $\sphericalangle AX_2X_0 < \sphericalangle AX_0X_2$ alebo $\sphericalangle AX_2P < \sphericalangle AX_0P$. Avšak $\sphericalangle AX_1P = \sphericalangle AX_0P$; teda $\sphericalangle AX_2P < \sphericalangle AX_1P$.

Ak leží bod A mimo priamky BC, päta kolmice, spustenej z bodu A na priamku BC, padne:

do bodu B, ak $\sphericalangle ABC$ je pravý;

do vnútra polpriamky BC, ak $\sphericalangle ABC$ je ostrý;

do vnútra opačnej polpriamky, ak $\sphericalangle ABC$ je tupý.



Obr. 35.

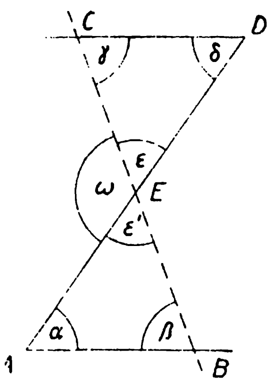
Dôkaz. Prípad pravého $\sphericalangle ABC$ je jasný. Ak nie je $\sphericalangle ABC$ pravý (obr. 35), vznikne $\triangle ABP$ s pravým uhlom pri vrchole P; pri vrchole B máme ostrý $\sphericalangle ABP$ a uhol k nemu vedľajší je tupý. Uhol $\sphericalangle ABC$ splynie s jedným z tých dvoch uhlov.

Cvičenie.

67. a) Koľkými inými, ale správnymi zápismi môže sa nahradiť zápis $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$?
    b) Ak je $\triangle JKL \cong \triangle XYZ$, rozhodnite, ktoré z týchto zápisov sú iste správne: aa) $\triangle LJK \cong \triangle ZYX$, bb) $\triangle YXZ \cong \triangle KLJ$, cc) $\triangle ZXY \cong \triangle LJK$, dd) $\triangle JKL \cong \triangle XZY$.

Cvičenie 68 a 69 sa vzťahuje na obrázok 36, ktorý nie je správne narysovaný a vysvetľuje len označenie. Vieme však, že bod E je stred úsečky $\overline{AD}$. Zakaždým načrtnite si vlastný obrázok a pomocou určitej vety o shodnosti riešte príslušné cvičenie.

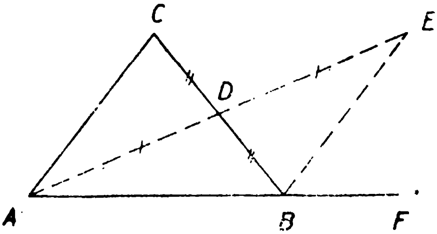
68. Body B, E, C v obr. (36) ležia v jednej priamke. Pritom je a) $\overline{EB} = \overline{CE}$; b) $\overline{EA} = \overline{DE}$. Ktoré ďalšie úsečky a uhly sa v obr. rovnajú?
69. V obr. (36) je $\alpha = \delta$, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Dokážte, že body B, E, C ležia v jednej priamke a vyhľadajte rovnako veľké úsečky a uhly!
70. V obr. (37) je $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{DE}$ a body A, D, E ležia v jednej priamke. Dokážte, že: a) polpriamka BE leží v uhle $\sphericalangle CBF$; b) $\triangle ADC \cong \triangle EDB$.



Obr. 36.

c) Uhol $\gamma < \sphericalangle CBF$ (vonkajší uhol pri vrchole B). Vyslovte výsledok!

71. Z viet o shodnosti trojuholníkov odvoďte vety shodnosti trojuholníkov pravouhlých!
72. Užitím vlastnosti uhlov v pravouhlom trojuholníku dokážte, že:
    a) z bodu B môže sa na priamku AC (obr. 32) spustiť najviac jedna kolmica;
    b) prenesením uhla $\sphericalangle BAC$ v obr. 32 do polohy $\sphericalangle CAB'$ tak, že $\overline{AB'} = \overline{AB}$, získame práve jedinú kolmicu BB', spustenú z bodu B na priamku AC.
73. Koľko uhlov v každom trojuholníku je vždy ostrých?
74. Ak platí, že $\triangle ABC \cong \triangle ACB \cong \triangle CAB$, čo súdite o stranách a uhloch tohto trojuholníka?
75. V rovnoramennom trojuholníku ABC je BC základňa. Dokážte:



Obr. 37.

a) Oba uhly β, γ pri základni sú vždy ostré; aké teda máme druhy rovnoramenných trojuholníkov? Prečo nemôžu byť uhly β, γ pravé alebo tupé?

b) Ak je D stred strany BC, je $AD \perp BC$ a $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$ (úsečka AD menuje sa os rovnoramenného $\triangle ABC$).

c) Z výsledku cvič. 75 b) a z existencie jedinej kolmice k, spustenej z bodu A na priamku BC, dokážte, že päta kolmice k je bod D.

76. V $\triangle ABC$ je $\sphericalangle ABC$ tupý alebo pravý. Ak je X vnútorný bod strany BC, potom platí $\overline{AB} < \overline{AX} < \overline{AC}$.
77. Ak je v trojuholníku ABC $\beta < \gamma$ a ak je P päta výšky $AP \perp BC$, potom je $\sphericalangle CAP < \sphericalangle BAP$. Dokážte, pre prípad keď sú β i γ uhly ostré a tiež, keď je γ uhol pravý alebo tupý.
78. Dokážte: Súčet dvoch strán v trojuholníku je väčší ako strana tretia. (Pre $\gamma \geqq R$ je iste $a < b + c$. Ak je $\beta < R$, $\gamma < R$, potom výška $AP \perp BC$ má pätu P vnútri $\overline{BC}$. Uvažujte $\triangle ABP$, $\triangle ACP$ a sčítajte $(AB + AC)$ a $(BP + CP)$.)
79. Z výsledku cvič. 78 odvoďte poučky o rozdieloch dvoch strán v trojuholníku.
80. Súčet dvoch uhlov v trojuholníku je menší ako $2R$. Pre ktoré dva uhly je to zrejmé? (Ak je $\sphericalangle AX_1X_2$ v $\triangle AX_1X_2$ (obr. 34) tupý, je $\sphericalangle AX_2X_1$ ostrý; ten nahraďte väčším uhlom $\sphericalangle AX_1P$.)

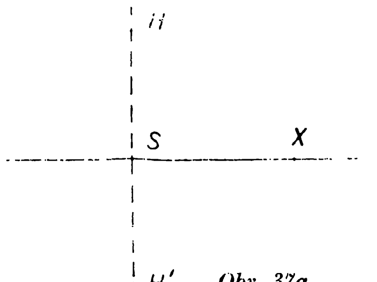
III. SHODNOSŤ

10. Osová súmernosť. Dôležitý pojem shodnosti sme doteraz prebrali len potiaľ, že sme zopakovali známe vety o shodnosti trojuholníkov. Teraz budeme študovať pojem shodnosti všeobecne a ako obyčajne obmedzíme sa na dva útvary, ktoré ležia oba v tej istej rovine ϱ. Body prvého útvaru nazveme **vzormi**, body druhého útvaru nazveme **obrazmi** a označíme ich čiarkou; napr. A' bude obrazom bodu A a zároveň A bude vzor bodu A', podobne p' bude obraz priamky p a p bude vzor priamky p'. Bod, ktorý splynie so svojím obrazom, je **samodružný bod**; takýto bod splynie, pravda, i so svojím vzorom.

Našu rovinu ϱ predstavme si ako stránku sošitu (ktorá v skutočnosti je, pravda, len časťou roviny); na nej je narysovaný prvý útvar U. Tento útvar prenesieme na priesvitný papier, ktorého polohu zmeníme a v novej polohe prenesieme útvar, narysovaný na priesvitnom papieri zpät do sošitu. Tým dostaneme v sošite druhý útvar U', shodný s útvarom U. Zmena polohy priesvitného papiera môže byť dvojaká. Buď je pri konečnej polohe, rovnako ako pri začiatočnej, líce priesvitného papiera pod opakom, alebo obrátime priesvitný papier naopak. V prvom prípade máme **shodnosť priamu**, v druhom **shodnosť nepriamu**; oba prípady sa jeden od druhého líšia čo do **smyslu otáčania** (pozri článok 3). Pri prechode od vzoru U k obrazu U' kladný smysel otáčania zostane kladným a záporný zostane záporným, ak ide o shodnosť súhlasnú; naproti tomu kladný smysel otáčania prejde v záporný a záporný prejde v kladný, ak ide o shodnosť nepriamu.

Základná vlastnosť všeobecného pojmu shodnosti je táto: **Ak sú A, B dva rôzne body rovinného útvaru U, a keď chceme sostrojiť jeho shodný obraz U', môžeme polohu obrazu A', B' zvoliť ľubovoľne, lenže úsečka AB musí sa rovnať úsečke $A'B'$. Ak je uskutočnená voľba obrazov A', B', zostáva ešte dvojaká možnosť pre polohu útvaru U; shodnosť je pri prvej možnosti priama, pri druhej nepriama.**

Všimnime si najmä prípad, že dané dva rôzne body A, B sú samodružné. Shodnosť je jednoznačne určená, ak vieme, či je priama alebo nepriama. Priama shodnosť je v tomto prípade totožnosť; každý bod je samodružný, splynie so svojím obrazom. Tým sme zistili, že **pri priamej shodnosti, ktorá nie je totožnosťou, existuje najviac jeden samodružný bod. Nepriama shodnosť, pri ktorej oba dané body A, B sú samodružné**, menuje sa **osovou súmernosťou**; priamka AB je **os súmernosti**; označme ju o.



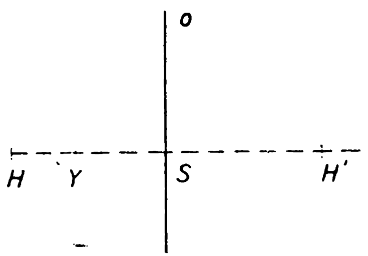
Obr. 37a.

Obraz bodu C, priamky p a podobne pri osovej súmernosti, ktorej osou je daná priamka o, nazvime krátko **súmerným obrazom** bodu C, priamky p a podobne **podľa osi** o. Keď je útvar U narysovaný na liste papiera a je obsiahnutý v jednej polrovine, vyťatej osou o, dostaneme jeho súmerný obraz U' podľa osi o složením papiera pozdĺž priamky o.

Každý bod osi o je v osovej súmernosti samodružný. Ak leží bod H (obr. 37a) mimo osi o, leží jeho obraz H' v polrovine opačnej k oH, a preto úsečka $\overline{HH'}$ pretne os v bode S. Bod S je samodružný, a preto obrazom úsečky $\overline{HS}$ je úsečka $\overline{H'S'}$, takže $\overline{HS} = \overline{H'S'}$, t. j. S je stredom úsečky $\overline{HH'}$. Ak je X ktorýkoľvek iný bod osi o, je aj X samodružný, a preto obrazom $\sphericalangle\ HSX$ je $\sphericalangle\ H'SX$. Oba tieto uhly sú rovnaké, sú to uhly vedľajšie a sú pravé. Ako viete, nazývame **osou úsečky** $\overline{HH'}$ priamku, vedenú stredom tejto úsečky kolmo na priamku HH'. Teda ak bod H leží mimo priamky o a bod H' je jeho súmerným obrazom podľa osi o, je priamka o osou úsečky $\overline{HH'}$. Iste platí aj obrátene: **Ak je o os úsečky $\overline{HH'}$, je každý z oboch bodov H, H' súmerným obrazom druhého podľa priamky o.** Keď X je ľubovoľný bod osi o, obrazom úsečky $\overline{HX}$ je úsečka $\overline{H'X}$, takže $\overline{HX} = \overline{H'X}$. Teda: **Každý bod na osi úsečky $\overline{HH'}$ je rovnako vzdialený od H ako od H'.** Obrátene: **Každý bod, rovnako vzdialený od oboch rôznych bodov H, H', leží na osi úsečky $\overline{HH'}$.** To by sa ľahko dokázalo priamo, ale plynie to tiež z nasledujúcej vety.

Ak bod Y neleží na osi o úsečky $\overline{HH'}$, je Y bližšie tomu z bodov H, H', od ktorého nie je oddelený osou o.

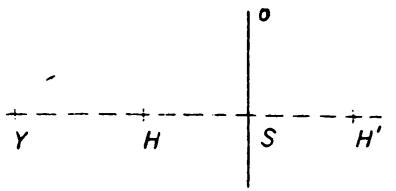
Dôkaz. Predpokladajme, že bod Y leží vnútri polroviny oH. Máme dokázať, že $\overline{HY} < \overline{H'Y}$.



Obr. 38.

I. Ak splynie bod Y s bodom H, je to zrejmé.

II. Ak leží bod Y vnútri úsečky $\overline{HH'}$, musí ležať vnútri úsečky $\overline{HS}$ (obr. 38), takže je $\overline{HY} < \overline{HS}$, $\overline{HS} = \overline{H'S}$, $\overline{H'S} < \overline{H'Y}$, teda $\overline{HY} < \overline{H'Y}$.

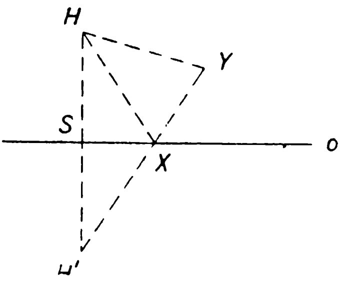


Obr. 39.

III. Ak leží bod Y na priamke HH', ale mimo úsečky $\overline{HH'}$, musí Y ležať na predĺžení úsečky $\overline{HH'}$ za bodom H. V tomto prípade je zrejmé (obr. 39), že $\overline{HY} < \overline{H'Y}$.

IV. Zostáva ešte prípad, že bod Y leží mimo priamky o aj mimo priamky HH' (obr. 40). Body H', Y sú od seba oddelené priamkou o, a preto úsečka $\overline{H'Y}$ pretne priamku o v bode X, ktorý musí byť iný ako bod S. Platí: $\overline{H'Y} = \overline{H'X} + \overline{XY}$, $\overline{HX} = \overline{H'X}$, teda $\overline{H'Y} = \overline{HX} + \overline{XY}$. Naproti tomu plynie z $\triangle HXY$, že $\overline{HY} < \overline{HX} + \overline{XY}$, takže skutočne $\overline{HY} < \overline{H'Y}$.

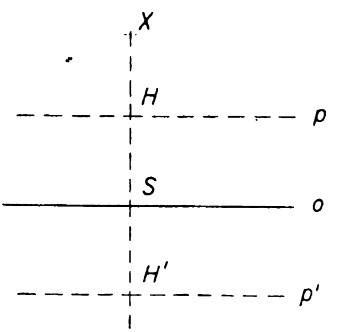
Teraz budeme zisťovať súmerný obraz p' priamky p podľa priamky o, pričom začneme prípadom, že p je rovnobežná s o. Prípad, že p splynie s o, vylúčime.



Obr. 40.

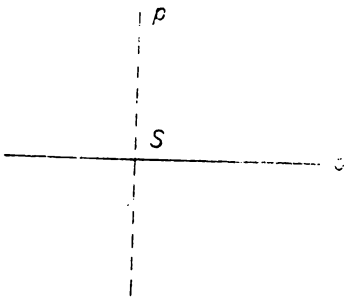
Priamka p teda nepretne priamku o, a preto leží celá vnútri jednej polroviny, oddelenej osou o. Obraz p' priamky p leží vnútri opačnej polroviny, a preto priamky p, p', o nemajú spoločný bod; teda priamky p, p', o sú navzájom rovnobežné. Každý bod na osi o je samodružný, a musí teda mať rovnakú vzdialenosť od oboch priamok p, p'. Nijaký iný bod X nemôže byť tak ďaleko vzdialený od p ako od p'. Lebo ak bod X neleží na osi o, leží vnútri jednej z oboch polrovín, vyťatých priamkou o, napr. (obr. 41) vnútri tej, v ktorej leží priamka p. Kolmica, spustená z bodu X na priamku o, stojí kolmo aj na rovnobežné priamky p, p' a pretne ich v bodoch H, H'. Vzdialenosti bodu X od priamok p, p' rovnajú sa $\overline{HX}$, $\overline{H'X}$, kde o je os úsečky $\overline{HH'}$, a vieme, že $\overline{HX} < \overline{H'X}$. Bod X je bližšie k priamke p ako k priamke p'.

Ak sú dané dve rôzne rovnobežky p, p', ľahko určíme priamku o, podľa ktorej je každá z priamok p, p' súmerným obrazom druhej. Stačí v obr. 41 viesť ľubovoľnú kolmicu na p, ktorá je kolmá i na p' a pretne p, p' v bodoch H, H'. Hľadaná priamka o prechádza stredom S úsečky HH' rovnobežne s oboma priamkami p, p'. Priamku o nazvime **osou rovnobežiek** p, p'. Napíšme si vetu, ktorú sme teraz dokázali: **Ak sú p, p' dve rôzne rovnobežky a o je ich osou, je každý bod priamky o rovnako vzdialený od oboch priamok p, p'. Obrátene, každý bod, rovnako**



Obr. 41.

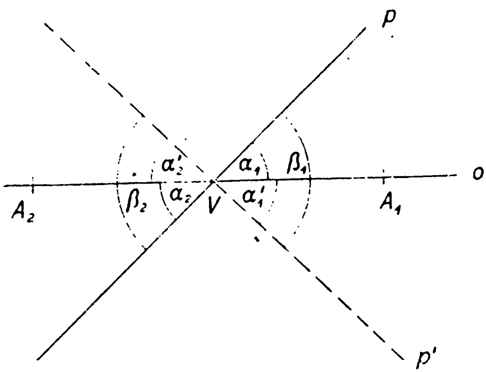
vzdialený od p i od p', leží na osi o. Ak bod X neleží na o, je touto priamkou oddelený od jednej z oboch priamok p, p'. Ak priamka o oddeľuje napr. bod X od p', je X bližšie k priamke p než k priamke p'.



Obr. 42.

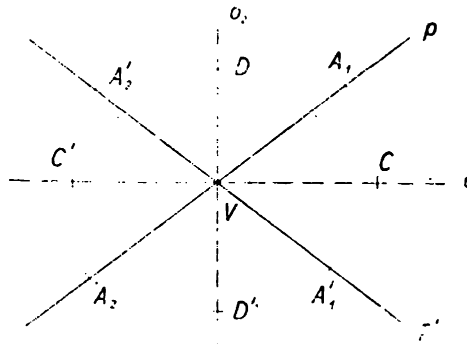
Keď priamka p stojí kolmo na os súmernosti o (obr. 42), je v osovej súmernosti samodružná, t. j. splynie so svojím obrazom. Obsahuje jediný samodružný bod S, ktorý rozdelí p na dve polpriamky, z ktorých každá je v osovej súmernosti obrazom druhej. Všimnime si, že ak sú X, Y dva rôzne body priamky p a X', Y' sú ich obrazy, úsečky XY, $X'Y'$ sú sebe rovné, ale *majú opačný smysel*; budeme to potrebovať v článku 12.

Ak priamka p pretne os súmernosti o v bode V, ale nestojí kolmo na o (obr. 43), tvoria priamky o, p štyri uhly, z ktorých dva sú ostré a sebe rovné a na obrázku sú označené α_1, α_2; druhé dva, na obrázku nevyznačené, sú tiež sebe rovné, ale tupé. Súmerné obrazy ostrých uhlov α_1, α_2 sú ostré uhly α'_1, α'_2 s tým istým vrcholom V; všetky štyri uhly α_1, α_2, α'_1, α'_2 sú rovnaké. Ramená uhlov α'_1, α'_2 ležia jednak v priamke o, jednak v tej priamke p', ktorá je súmerným obrazom priamky p. Oba ostré uhly α_1, α'_1 tvoria dohromady dutý uhol β_1; podobne oba ostré uhly α_2, α'_2 tvoria spolu dutý uhol β_2. Uhly β_1, β_2 sú navzájom vrcholové a ich ramená ležia v priamkach p, p'. Ako viete, **osou uhla** nazývame polpriamku, ktorej začiatok je vo vrchole uhla a ktorá prechádza vnútrom uhla tak, že ho delí na dva rovnaké uhly. V našom prípade bod V delí priamku o na dve polpriamky VA_1, VA_2, z ktorých prvá je os uhla β_1, druhá os uhla β_2.



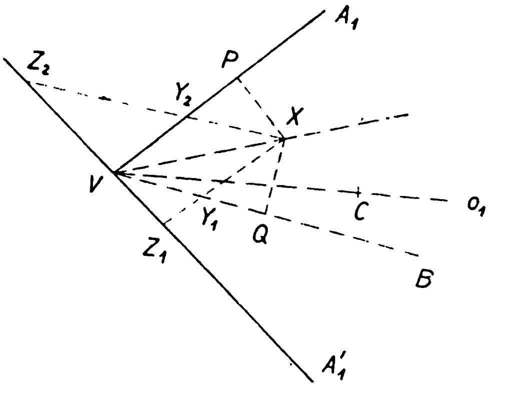
Obr. 43.

Osou dvoch rôznobežiek p, p' s priesečíkom V nazvime každú priamku o, podľa ktorej je jedna z priamok p, p' súmerným obrazom druhej. Z predchádzajúceho je jasné, že **dve rôznobežky** p, p' **majú dve osi** o_1, o_2. Dostaneme ich, ak sostrojíme osi všetkých štyroch uhlov, tvorených rôznobežkami p, p' (obraz 44). Os VC uhla $\sphericalangle A_1VA_1'$ spolu s osou VC' uhla $A_2VA'_2$ tvorí priamku o_1, os VD uhla $\sphericalangle A_1VA'_2$ spolu s osou AD' uhla $\sphericalangle V'_1AV_2$ tvorí priamku o_2. Podľa osi o_1 súmerným obrazom polpriamky VA_1 je polpriamka VA'_1 a súmerným obrazom polpriamky VA_2 je polpriamka VA'_2. Podľa osi o_2 súmerným obrazom polpriamky VA_1 je polpriamka VA'_2 a súmerným obrazom polpriamky VA_2 je polpriamka VA'_1; uhly $\sphericalangle A_1VA'_2$, $\sphericalangle A'_2VA_2$ sú vedľajšie, a preto ich súčet je π; uhly $\sphericalangle DVA'_2$, $\sphericalangle A'_2VC'$ sú polovičné z predošlých, a preto ich súčet je $\frac{1}{2}\pi$. **Teda: obe osi** o_1, o_2 **dvoch rôznobežiek** p, p' **stoja na seba kolmo.** Každá z oboch priamok p, p' je súmerným obrazom druhej, ako podľa osi o_1, tak podľa osi o_2; pretože každý bod osi súmernosti je samodružný a pretože osová súmernosť je shodnosť, máme: **Každý bod z ktorejkoľvek z oboch osí** o_1, o_2 **dvoch rôznobežiek** p, p' **je rovnako vzdialený od** p **ako od** p'. Obrátene: **Každý bod, ktorý má rovnaké vzdialenosti od oboch rôznobežiek** p, p', **leží na jednej z oboch osí týchto rôznobežiek.** Inak povedané, bod X, ktorý neleží ani na o_1 ani na o_2, nemôže byť rovnako vzdialený od p aj od p'. To by sa dalo dokázať priamo.



Obr. 44.

My však vyšetríme, ku ktorej z oboch priamok je bod X bližšie. To je celkom zrejmé, ak bod X leží na jednej z oboch priamok p, p', pretože potom jeho vzdialenosť od tej priamky, na ktorej leží, rovná sa nule; je teda menšia ako vzdialenosť bodu X od priamky druhej. Ak X neleží ani na jednej z oboch priamok p, p', leží vnútri niektorého zo štyroch uhlov, ktoré tvoria tieto priamky. Nech bod X leží vnútri uhla $\sphericalangle A_1VA'_1$ (obr. 45). Osou tohto uhla je polpriamka VC, ktorá je časťou priamky o_1; preto bod X na nej neleží. Polpriamka VC delí dutý uhol $\sphericalangle A_1VA'_1$ na dva rovnaké ostré uhly $\sphericalangle A_1VC$, $\sphericalangle CVA_1'$. Bod X musí ležať vnútri jedného z týchto uhlov; nech bod X leží vnútri $\sphericalangle A_1VC$. Z tohoto predpokladu dokážeme, že bod X je bližšie k priamke p, čiže k priamke VA_1, než k priamke VA'_1. Uhol $\sphericalangle A_1VX$ je menší než ostrý $\sphericalangle A_1VC$, teda $\sphericalangle A_1VX$ je ostrý; okrem toho ľahko dokážeme, že $\sphericalangle A_1VX < \sphericalangle XVA'_1$. Preto ak sostrojíme polpriamku VB tak, aby ostré uhly $\sphericalangle A_1VX$, $\sphericalangle XVB$ boly rovnaké a boly styčné, bude polpriamka VB ležať vnútri $\sphericalangle A_1VA'_1$, a preto priamka VA'_1 bude okrem bodu V ležať celá mimo $\sphericalangle A_1VB$. S bodu X spusťme kolmice na priamky VA_1, VB a označme ich päty P, Q. Pretože uhly $\sphericalangle A_1VX$, $\sphericalangle XVB$ sú ostré, ležia body P, Q vnútri polpriamok VA_1, VB. Bod X leží na osi $\sphericalangle A_1VB$, a preto obe vzdialenosti PX, QX sú rovnaké. Označme Z pätu kolmice s bodu X na priamku VA'_1. Ak táto padne do bodu V, zrejme platí: $\overline{PX} < \overline{VX}$. Ešte máme dokázať, že $\overline{PX} < \overline{ZX}$ alebo $\overline{QX} < \overline{ZX}$ v tom prípade, ak je bod Z iný ako bod V. To je ľahké, lebo bod Z leží mimo uhla $\sphericalangle A_1VB$, vnútri ktorého leží bod X. Uhol $\sphericalangle A_1VB$ je spoločnou časťou oboch polrovín A_1VB, BVA_1. Preto vnútri úsečky XZ musí byť bod Y, ktorý leží na hranici jednej z oboch polrovín, t. j. buď na priamke VA_1, alebo na priamke VB. Preto vzdialenosť $\overline{XZ}$ je väčšia ako vzdialenosť $\overline{XY}$, ktorá sa aspoň rovná (ak nie je väčšia ako) $\overline{XP}$. Teda $\overline{XZ} > \overline{XP}$.



Obr. 45.

Cvičenie.

81. Narysujte dosť veľký $\triangle ABC$ a mimo neho priamku $A'B'$ tak, aby $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.

    a) $\triangle ABC$ premiestite do novej polohy $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$; dá sa to urobiť dvoma spôsobmi. Ako rozlíšite oba výsledky? Užite vetu o určení trojuholníka (sss). Sledujte smysly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle A'B'C'$.

82. Cvič. 81 opakujte s päťuholníkom, ktorý nie je konvexný. Aký bude výsledok, keď $A' \equiv A$, $B' \equiv B$?

83. Daná je os súmernosti o a mimo nej bod H; určte jeho obraz H'! Konštrukciu urobte tak, že:

a) určíte priamku $HSH' \perp o$ použitím dvoch trojuholníkov (pozri obr. 37);

b) prenesiete $\sphericalangle SXH$ do polohy $\sphericalangle SXH'$ (pozri obr. 40);

c) z dvoch na osi zvolených bodov X, X' opíšte kružnice $(X; r = \overline{XH})$, $(X'; r = \overline{XH'})$. Dokážte, že obe kružnice majú na priamke HSH' spoločné len body H, H'. Pozri vysvetlenie k obr. 35 v odseku 9.

84. Zvoľte päťuholník $ABCDE$ a os súmernosti o, ktorá a) päťuholník nepretína, b) prechádza bodmi A, D, c) pretína strany AB, DE mimo ich vrcholov. Určte obraz päťuholníka! (Pri konštrukcii užite samodružných bodov!)

85. V trojuholníku ABC je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Potom priamka $o \perp BC$, prechádzajúca bodom A, je jeho os; čo to znamená? Načrtnite iné útvary, ktoré majú os!

86. Os o úsečky $\overline{AB} = 100$ (rozmery v mm). Rozhodnite úsudkom, akú polohu bude mať bod X vzhľadom k osi o a vzhľadom k úsečke $\overline{AB}$ a bodom A, B; viete, že a) $\overline{XA} = 37$; $\overline{XB} = 64$; b) $\overline{XA} = 32$, $\overline{XB} = 68$; c) $\overline{XA} = 110$, $\overline{XB} = 10$; d) $\overline{XA} = 23$, $\overline{XB} = 120$; e) $\overline{XA} = 140$, $\overline{XB} = 139$; f) $\overline{XA} = 60 = \overline{XB}$; g) $\overline{XA} = 50 = \overline{XB}$; h) $\overline{XB} = 30$ a bod X je na priamke AB. Je možné, aby platilo: $\overline{AX} = 73$; $\overline{XB} = 26$?

87. Osi strán trojuholníka ABC sa pretínajú v jednom bode O, ktorý je stredom kružnice opísanej trojuholníku. Dokážte a vykonajte konštrukciu!

88. Priamku o zvoľte za os súmernosti. Na jednotlivé otázky odpovedzte a načrtnite od ruky!

a) Môže bod splynúť s bodom súmerne sdruženým? Kde ležia také body a ako sa menujú?

b) Akú polohu musí mať úsečka, aby jej obraz bol na jej predĺžení? Čo platí o smysloch oboch úsečiek?

c) Aká úsečka splynie so svojím obrazom? (2 možnosti)

d) Aká priamka splynie so svojím obrazom? (2 možnosti)

e) Aká priamka je rovnobežná so svojím obrazom? Čo viete o tejto rovnobežnosti?

f) Môže priamka stáť kolmo na svoj obraz? Koľko takých priamok prechádza daným bodom?

g) Ak sú priamky súmerne sdružené rôznobežné, kde leží ich priesečík?

89. Narysujte dve rovnobežky p, p' a úsečku AB. Určte bod X, ktorý je rovnako vzdialený od priamok p, p' a ktorý je tiež rovnako vzdialený od daných bodov A, B. Vyšetrite podmienky riešiteľnosti!

90. Určte euklidovsky os vypuklého uhla!

91. Na priamke p, ktorá pretína obe ramená daného $\sphericalangle MUN$, nájdite bod X, rovnako vzdialený od oboch ramien!

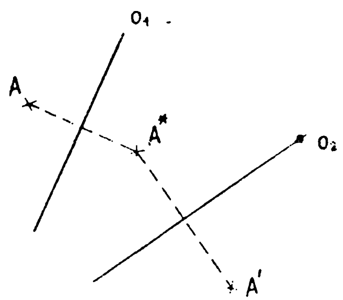
92. Uhol α' vedľajší k vnútornému uhlu α trojuholníka ABC menuje sa vonkajší uhol. Dokážte:

a) Osi vnútorných uhlov u_1, u_2, u_3 pretínajú sa vo vnútri trojuholníka v jednom bode S, ktorý je stredom kružnice vpísanej.

b) Dve osi uhlov vonkajších a jedna os uhla vnútorného pretínajú sa v strede kružnice, pripísanej trojuholníku (napr. osi u'_1, u'_2, u_3 pretnú sa v bode S_3). Vysvetlite, ako obratne sostrojíte os u'_1, ak poznáte os u_1!

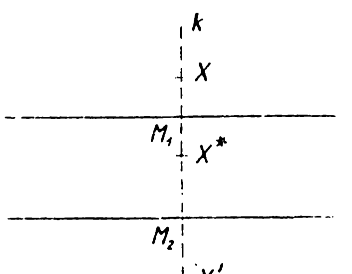
c) Strany a osi tvoria zaujímavé soskupenie bodov a priamok. Čím je bod S v $\triangle S_1S_2S_3$?

11. Posúvanie. Ak sú dané dve rôzne priamky o_1, o_2 (obr. 46), môžeme si k ľubovoľnému bodu A najprv sostrojiť jeho súmerný obraz A^* podľa osi o_1 a potom sostrojiť súmerný obraz A' bodu A^* podľa osi o_2. Tým dostaneme novú shodnosť, pri ktorej obrazom ľubovoľného bodu A je práve sostrojený bod A'. O tejto shodnosti hovoríme, že je **složená z dvoch osových súmerností** s osami o_1, o_2 (v tomto poradí) a označíme túto shodnosť v tomto článku (o_1, o_2). Každá osová súmernosť je nepriama shodnosť; ľahko sa dokáže, že (o_1, o_2) je priama shodnosť, ktorú teraz podrobnejšie preštudujeme. Pri tom musíme rozoznávať dva prípady podľa toho, či priamky o_1, o_2 sú rovnobežné a či rôznobežné.



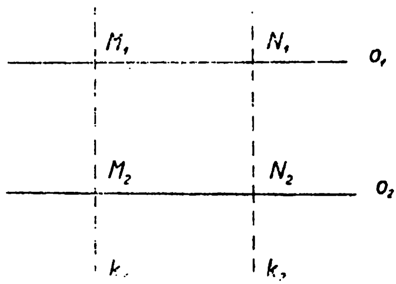
Obr. 46.

Najprv preštudujeme (o_1, o_2) za predpokladu, že sú obe osi o_1 a o_2 navzájom rôzne a rovnobežné. Nech je X ľubovoľný bod (obr. 47) a nech je k kolmica, vedená bodom X na priamku o_1, ktorá stojí kolmo aj na o_2. Priamka k pretne priamky o_1, o_2 v bodoch $M_1 M_2$; pretože M_1 leží na o_1, splynie M_1^* s M_1 a bod M_1' je súmerný obraz bodu M_1 podľa osi o_2. Bod X' sostrojíme, ak sostrojíme najprv súmerný obraz X^* bodu X podľa osi o_1 a potom súmerný obraz X' bodu X^* podľa osi o_2. Vieme (pozri str. 38), že úsečky $\overline{M_1X}$, $\overline{M_1X^*}$ sú rovnaké, ale majú opačný smysel. Z toho plynie, že úsečky $\overline{M_1X}$, $\overline{M'_1X'}$ sú rovnaké a majú ten istý smysel a z toho ľahko poznáme, že aj úsečky $\overline{M_1M'_1}$, $\overline{XX'}$ sú rovnaké a majú ten istý smysel. Avšak



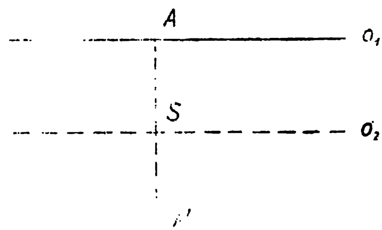
Obr. 47.

úsečka $\overline{M_1M'_1}$ je dvojnásobok úsečky $\overline{M_1M_2}$ a má s ňou ten istý smysel. Teda tiež úsečka $\overline{XX'}$ je dvojnásobok úsečky $\overline{M_1M'_1}$ a má s ňou ten istý smysel. Ak sú teraz (obr. 48) k_1, k_2 dve priamky, ktoré stoja obe kolmo na o_1, a teda aj kolmo na o_2, a ak sú M_1, N_1 ich priesečíky s priamkou o_1, M_2, N_2 ich priesečíky s priamkou o_2, vieme, že $\overline{M_1M_2}=\overline{N_1N_2}$, a teda je zrejmé, že $\overline{M_1M_2}$ a $\overline{N_1N_2}$ sú súhlasne rovnobežné. Z toho súdime: **Ak sú o_1, o_2 dve rôzne rovnobežky, potom pre všetky polohy bodu X úsečky $\overline{XX'}$, kde X' je obraz bodu X pri shodnosti (o_1, o_2), sú rovnaké a majú ten istý smysel.**



Obr. 48.

Každá úsečka $\overline{XX'}$ sa rovná dvojnásobku vzdialenosti oboch rovnobežiek o_1, o_2. Ak je k ľubovoľná kolmica na priamky o_1, o_2 a ak sú M_1, M_2 priesečíky priamky k s priamkami o_1, o_2, rovná sa $\overline{XX'}$ dvojnásobku úsečky $\overline{M_1M_2}$ a obe úsečky $\overline{XX'}$, $\overline{M_1M_2}$ sú súhlasne rovnobežné.



Obr. 49.

Takáto shodnosť menuje sa **posúvaním** alebo **transláciou.** Posúvanie je jednoznačne určené, ak si zvolíme ľubovoľne bod A a ľubovoľne i jeho obraz A', ktorý musí byť rôzny od A. Obraz X' ľubovoľného bodu X je jednoznačne určený tým, že $\overline{XX'}=\overline{AA'}$, $\overline{XX'}\uparrow\uparrow\overline{AA'}$. Obe osi o_1, o_2 môžeme zvoliť rôznymi spôsobmi. Najjednoduchšia je táto voľba (obr. 49): Priamku o_1 veďme bodom A kolmo na AA'; priamku o_2 veďme rovnobežne s o_1 stredom S úsečky $\overline{AA'}$.

Ovičenie.

93. Narysujte dve rovnobežky tak, aby ich vzdialenosť bola 5,5 a zvoľte si na nich úsečky $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ tak, aby platilo
$AB \uparrow\uparrow A'B'$, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 4$.
Potom sostrojte $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, ak je dané $BC=5{,}5$, $AC = 6{,}5$, pričom sú oba trojuholníky priamo shodné (ako to urobíte?). Do-

kážte: a) $\triangle A'B'C'$ je obrazom trojuholníka ABC pri posunutí určenom tým, že je $XX' \parallel AA'$, $\overline{XX'} = \overline{AA'}$, kde X' je obraz ľubovoľného bodu X roviny.

b) Zvoľte troma rôznymi spôsobmi osi súmernosti o_1, o_2 tak, aby shodnosť (o_1, o_2) bola posunutie, ktoré prevádza $\triangle ABC$ do polohy $\triangle A'B'C'$. Platí, že (o_1, o_2) je tá istá shodnosť ako (o_2, o_1)? Ktorú z osí môžete voliť ľubovoľne?

c) Uvažujte o prípade, kedy priamky AB, $A'B'$ navzájom splývajú. V cvič. b) sú osi kolmé na AA'. Voľte (1) o_1 ľubovoľne, (2) o_1 bodom A, (3) o_2 bodom A'.

94. Dokážte, že v posunutí (o_1, o_2), a) ktoré nie je totožnosťou, žiaden bod X nesplýva so svojím obrazom X'. (Veďte os o_1 bodom X.)

b) Ak priamka a nie je kolmá na o_1, potom tiež obraz a' nie je kolmý na o_1.

c) Ak priamka b má spoločný bod so svojím obrazom b', je kolmá na o_1, a teda splýva so svojím obrazom. (Určte obraz X' spoločného bodu X priamok b, b'.)

d) Priamka c, ktorá nie je kolmá na o_1, nemá so svojím obrazom spoločný bod.

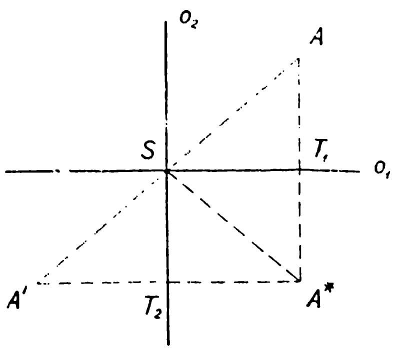
e) Každá priamka je rovnobežná so svojím obrazom. (Pozri 94c, d.)

95. Daný je $\triangle ABC$ a dva ľubovoľné body A_1, A_2. Vykonajte posunutie tak, aby bod A prešiel do polohy A_1 a druhé posunutie, pri ktorom bod A_1 prejde do bodu A_2. Dokážte, že ten istý výsledok dostaneme, keď bod A posunieme do bodu A_2. (Užite výsledok z cvič. 94.)

96. Zvoľte si $\triangle ABC$ a dve rôznobežky m, n. Trojuholník ABC preveďte do novej polohy $\triangle A'B'C'$ tak, aby body $A'B'$ ležaly na priamke m a bod C na priamke n.

12. Stredová súmernosť; rovnobežky a uhly.

Teraz budeme preberať priamu shodnosť (o_1, o_2), složenú z dvoch osových súmerností za predpokladu, že o_1, o_2 sú dve rôznobežky s priesečíkom S. Začneme s tým prípadom, že o_1, o_2 stoja na seba kolmo (obr. 50). Bod S je samodružný pri shodnosti (o_1, o_2). Ak máme bod A, ktorý neleží ani na o_1 ani na o_2, utvoríme najprv jeho súmerný obraz A^* podľa osi o_1 a potom súmerný obraz A' bodu A^* podľa osi o_2; bod A' je obrazom bodu A pri shodnosti (o_1, o_2). Ak je T_1 priesečíkom priamky AA^* s osou o_1, T_2 priesečík priamky A^*A' s osou o_2, potom súmerný obraz $\sphericalangle AST_1$ podľa osi o_1 je $\sphericalangle A^*ST_1$, a preto polpriamka ST_1 je os uhla $\sphericalangle ASA^*$, takže tento

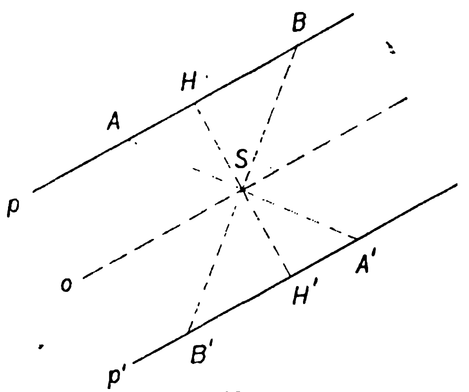


Obr. 50.

uhol je dvojnásobkom uhla $\sphericalangle T_1SA^*$; podobne $\sphericalangle A^*SA'$ je dvojnásobkom $\sphericalangle A^*ST_2$. Pretože uhly $\sphericalangle T_1SA^*$, $\sphericalangle A^*ST_2$ majú súčet rovný $\frac{1}{2}\pi$, majú $\sphericalangle ASA^*$, $\sphericalangle A^*SA'$ súčet rovný π, t. j. A' leží na predĺžení úsečky AS za bodom S. Okrem toho je zrejme $\overline{AS} = \overline{A'S}$, takže S je stredom úsečky $\overline{AA'}$, čím je poloha obrazu A' bodu A jednoznačne opísaná. K tomu istému výsledku prídeme veľmi ľahko aj vtedy, keď bod A leží alebo na o_1 alebo na o_2. Naša shodnosť menuje sa **stredovou súmernosťou** a bod S menuje sa **stred súmernosti.** Obraz bodu A, priamky p atď. v stredovej súmernosti, ktorej stredom je daný bod S, nazvime krátko súmerným obrazom bodu A, priamky p atď. podľa stredu S. Podľa predchádzajúceho platí: **Ak je bod A iný ako bod S a A' je jeho súmerným obrazom podľa stredu S, je S stredom úsečky $\overline{AA'}$.** Platí to aj obrátene: **Ak bod S je stredom úsečky $\overline{AA'}$, je každý z oboch bodov A, A' súmerným obrazom druhého podľa stredu S.**

Ak priamka p prechádza stredom súmernosti S, je v stredovej súmernosti samodružná, t. j. splynie so svojím obrazom. Obsahuje jediný samodružný bod S, ktorý rozdelí p na dve polpriamky, z ktorých každá je v stredovej súmernosti obrazom druhej. Ak sú X_1, X_2 dva rôzne body priamky p, X'_1, X'_2 ich obrazy, sú úsečky $\overline{X_1X_2}$, $\overline{X'_1X'_2}$ sebe rovné, ale majú opačný smysel.

Keď p' je súmerným obrazom priamky p podľa stredu S, sú priamky p, p' nesúhlasne rovnobežné. To je zrejmé, ak p prechádza bodom S. Ak p neprechádza bodom S (obr. 51), veďme bodom S priamku o, rovnobežnú s p; priamky p, o nemajú spoločný bod. Pretože priamka o je samodružná, znamená to, že p' je rovnobežná s p, teda aj s o. Ak sú A, B rôzne body na priamke p, potom úsečky $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ sa pretnú, a teda $AB//B'A'$ v smysle vyloženom na str. 22. To znamená nesúhlasnú rovnobežnosť priamok p, p'. Nech je H pätou kolmice, spustenej z bodu S na priamku p, potom H' je pätou kolmice, spustenej z bodu S na priamku p' a S je stredom úsečky HH'. Teda (pozri str. 38): Ak je p' súmerným obrazom priamky p



Obr. 51.

podľa stredu S, ktorý neleží na priamke p, potom os rovnobežiek p, p' prechádza bodom S.

Obrátene: Ak sú p, p' dve rôzne rovnobežky a o je ich os, je každá z oboch priamok p, p' súmerným obrazom druhej podľa stredu S, ležiaceho kdekoľvek na priamke o.

Dôkaz: (obr. 51) Podľa definície osi dvoch rovnobežiek má bod S, ľubovoľne zvolený na priamke o, rovnaké vzdialenosti od oboch priamok p, p'. Ak sú teda H, H' priesečníky priamok p, p' s priamkou, vedenou bodom S kolmo na p a teda i kolmo na p', je bod S stredom úsečky $\overline{HH'}$, a preto je H' súmerným obrazom bodu H podľa stredu S. Súmerný obraz priamky p ide bodom H' rovnobežne s p, t. j. priamka p'.

Dve polpriamky V_1A_1, V_2A_2 sú **súhlasne rovnobežné**, keď $V_1A_1 \uparrow\uparrow V_2A_2$ alebo $A_1V_1 \uparrow\uparrow A_2V_2$, a sú **nesúhlasne rovnobežné**, keď $V_1A_1 \uparrow\uparrow A_2V_2$ alebo $A_1V_1 \uparrow\uparrow V_2A_2$ (pozri článok 6). Z predchádzajúceho plynie: **Ak je S stredom úsečky V_1V_2 a ak sú polpriamky V_1A_1, V_2A_2 nesúhlasne rovnobežné, je každá z oboch polpriamok súmerným obrazom druhej podľa stredu S.**

Dva duté uhly $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$ s nesúhlasne rovnobežnými ramenami sú sebe rovné. Ak splynú vrcholy V_1V_2, je to jasné, lebo potom máme dva vrcholové uhly. Inak, keď S je stredom úsečky $\overline{V_1V_2}$, je každý z oboch uhlov súmerným obrazom druhého podľa stredu S.

Dva duté uhly $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$ so súhlasne rovnobežnými ramenami sa sebe rovnajú. Lebo ak $\sphericalangle A'_1V_1B'_1$ je vrcholový k $\sphericalangle A_1V_1B_1$, sú $\sphericalangle A'_1V_1B'_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$ dva duté uhly s nesúhlasne rovnobežnými ramenami. Mohli sme tiež dokázať, že $\sphericalangle A_2V_2B_2$ vznikne z $\sphericalangle A_1V_1B_1$ posúvaním.

Ak polpriamky V_1A_1, V_2A_2 sú súhlasne rovnobežné a zároveň polpriamky V_1B_1, V_2B_2 sú nesúhlasne rovnobežné, sú $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$ uhly výplnkové. Lebo $\sphericalangle A'_1V_1B_1$ vedľajší k $\sphericalangle A_1V_1B_1$ má ramená nesúhlasne rovnobežné s ramenami $\sphericalangle A_2V_2B_2$.

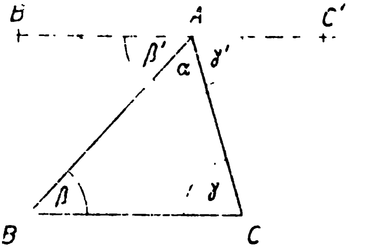
Zvláštnym prípadom tejto vety je: **Oba uhly pri tom istom ramene lichobežníka sú výplnkové.**

Súčet uhlov v trojuholníku sa rovná π. Dôkaz: (obr. 52) Vrcholom A v trojuholníku ABC veďme rovnobežku s priamkou BC a zvoľme na nej body B', C' tak, aby bolo

$$BC \uparrow\uparrow AC', \ CB \uparrow\uparrow AB'$$

(súhlasná rovnobežnosť). Ak majú uhly α, β, γ, α', β', γ' ten istý význam ako na obrazci, je $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$, lebo všetky tri uhly tvoria spolu priamy uhol. Okrem toho sú β, β' uhlami s nesúhlasne rovnobežnými ramenami, a preto je $\beta = \beta'$; rovnako je aj $\gamma = \gamma'$, a tak $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Súčet všetkých uhlov vypuklého n-uholníka rovná sa $(n-2) . 2R$, lebo uhlopriečky, vychádzajúce z jedného vrchola, rozdelia (obr. 21) n-uholník na $n-2$ trojuholníkov a je zrejmé, že súčet uhlov n-uholníka rovná sa súčtu všetkých uhlov v týchto trojuholníkoch.

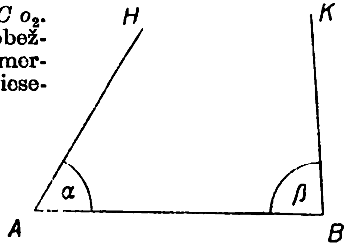


Obr. 52a.

Cvičenie.

97. Sostrojte útvar súmerne sdružený so štvoruholníkom $ABCD$ podľa stredu S, ktorý leží a) mimo štvoruholníka, b) v jednom vrchole štvoruholníka, c) na strane AB tak, že $\overline{AS} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, d) vnútri štvoruholníka.

98. Použitím súmernosti dokážte ďalej uvedené poučky o rovnobežníku: Štvoruholník $ABCD$, v ktorom je $AB // CD$, $AD // BC$, menuje sa rovnobežníkom. Označte os rovnobežiek AB, DC, o_1 a os rovnobežiek AD, BC o_2.
    a) Osi o_1, o_2 pretínajú sa vnútri rovnobežníka v bode S, ktorý je stredom súmernosti rovnobežníka a bod S je priesečíkom uhlopriečok AC, BD.
    b) Odvoďte z toho známe poučky o protiľahlých stranách, protiľahlých uhloch a uhlopriečkach rovnobežníka.



Obr. 52b.

99. Dokážte tieto obrátené poučky o rovnobežníku:
    a) Ak vo štvoruholníku $ABCD$ je $AB // DC$, $\overline{AB} = \overline{DC}$, je to rovnobežník (priesečík S priamok AC, BD zvoľte za stred súmernosti).
    b) Ak vo štvoruholníku $ABCD$ sa obe uhlopriečky AC, BD navzájom rozpoľujú, je to rovnobežník.

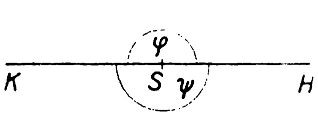
100. Použitím poučiek o uhloch s rovnobežnými ramenami a základnej vety o rovnobežkách (odsek 6) dokážte ďalšie dôležité poučky, ktoré ste už poznali na strednej škole. Nech sú A, B dva rôzne body.
    a) Ak ležia polpriamky AB', BC (pozri obr. 52a) v opačných polrovinách, vyťatých priamkou AB, a ak je $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle ABC$, sú polpriamky AB', BC nesúhlasne rovnobežné.
    b) Ak ležia polpriamky AC', BC (pozri obr. 52a) v tej istej polrovine vyťatej priamkou AB, a ak je $\sphericalangle C'AB + \sphericalangle CBA = 2R$, sú polpriamky AC', BC súhlasne rovnobežné.
    c) Ak v tej istej polrovine, ohraničenej priamkou AB (obr. 52b) dané sú uhly $\alpha = \sphericalangle BAH$, $\beta = \sphericalangle ABK$ a ak je $\alpha + \beta < 2R$, potom polpriamky AH, BK sa pretnú. To je slávny piaty Euklidov

postulát, ktorý je rovnocenný so základnou vetou o rovnobežkách. Veďte $BL \parallel AH$; je $\beta < \sphericalangle ABL$ a priamky AH, BK sú nevyhnutne rôznobežné. Prečo sa musia preťať v polrovine ABH?

101. Daný je uhol rovnoramenného trojuholníka ω. Určte ostatné uhly (dve riešenia)!
102. Čo platí o uhloch v trojuholníku ABC, ak je $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$? Odvoďte z toho euklidovskú konštrukciu uhla 60°.
103. Vonkajší uhol trojuholníka rovná sa súčtu protiľahlých uhlov vnútorných. (Pozri cvič. 80.)
104. Vnútri $\triangle ABC$ leží bod U. Dokážte, že $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$ (predĺžte BU, až pretne stranu AC v bode V; uvažujte o uhle $\sphericalangle UVC$).
105. Uhol α v trojuholníku ABC je pravý, ostrý alebo tupý podľa toho, či ťažnica AA_1 (kde A_1 je stredom strany BC) rovná sa $\frac{1}{2}\overline{BC}$, je väčšia alebo menšia ako $\frac{1}{2}\overline{BC}$. Dokážte!
106. Čo platí o a) susedných uhloch, b) protiľahlých uhloch rovnobežníka? Koľko uhlov musíme poznať v rovnobežníku, aby sme mohli určiť ostatné?
107. Dokážte: Ak sa v štvoruholníku každý uhol rovná protiľahlému uhlu, je to rovnobežník?
108. Rovnobežník, ktorý má jeden uhol pravý, menuje sa obdĺžnik. Dokážte poučky:
    a) Štvoruholník, ktorý má tri uhly pravé, je obdĺžnik.
    b) Obdĺžnik má dve osi súmernosti, a preto sú jeho uhlopriečky sebe rovné.
    c) Ak sú v rovnobežníku obe uhlopriečky sebe rovné, je to obdĺžnik (na dôkaz použite 1. súmernosť, 2. vetu o shodnosti).
109. Rovnobežník, ktorý má dve susedné strany rovnaké, je kosoštvorec. Dokážte poučky:
    a) Uhlopriečky kosoštvorca sú jeho osi súmernosti a stoja na seba kolmo.
    b) Uhlopriečka kosoštvorca rozpoľuje uhol pri vrchole, z ktorého vychádza.

13. Otáčanie.

Už v článku 3 sme sa zmienili o otáčaní okolo bodu S. Dve rôzne polpriamky SH, SK s tým istým začiatkom S sú ramená dvoch uhlov φ, ψ, pričom rameno SK vznikne z ramena SH otočením v kladnom smysle o uhol φ, alebo otočením v zápornom smysle o uhol ψ. Pritom sú buď oba uhly φ, ψ priame (obr. 53a), alebo je φ uhol dutý, ψ vypuklý (obr. 53b), alebo je φ uhol vypuklý, ψ dutý. V každom prípade je

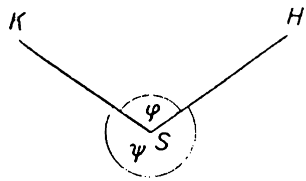


Obr. 53a.

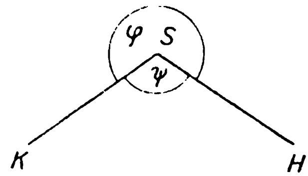
$$\varphi + \psi = 2\pi. \tag{1}$$

Ďalej budeme hovoriť o otáčaní okolo bodu S o určitý uhol tak, že je daná len **veľkosť** a **smysel uhla**, ale nie jeho poloha. Pri každom otáčaní okolo bodu S je bod S sám samodružný; ak je A

ktorýkoľvek iný bod, platí pre jeho obraz A' pri otáčaní okolo S o uhol φ v kladnom smysle vždy $\overline{SA} = \overline{SA'}$ a, pravda, polpriamka SA' vznikne z polpriamky SA otočením v kladnom smysle o uhol φ. Podobne je to pri otáčaní okolo S v zápornom smysle o uhol ψ. Ak platí (1), potom obraz ľubovoľného bodu A pri otáčaní okolo S v kladnom smysle o uhol φ je totožný s obrazom bodu A pri otáčaní



Obr. 53b.



Obr. 53c.

okolo S v zápornom smysle o uhol ψ. Otáčanie okolo bodu S o uhol π je teda stredová súmernosť so stredom súmernosti S, či sa otáčanie robí v kladnom či v zápornom smysle. Ale pri otáčaní o uhol rôzny od π musíme starostlivo rozlišovať, či otáčame v kladnom alebo zápornom smysle. Nech je už smysel otáčania kladný či záporný, predpokladali sme doteraz veľkosť otáčania menšiu ako 2π. Treba sa však zmieniť aj o otáčaní o uhol, ktorý nie je menší ako 2π. Pri otáčaní o ktorýkoľvek z uhlov

$$2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi \text{ atď.} \tag{2}$$

je každý bod A samodružný. Napr. pri otáčaní okolo bodu S o uhol 4π v kladnom smysle prebehne bod A dvakrát za sebou kružnicu so stredom S a polomerom SA; ale ak si všímame len začiatočnú polohu A a konečnú polohu A', otáčanie o ktorýkoľvek z uhlov (2) je totožnosť. V tejto triede budeme si všímať pri otáčaní len začiatočnú a konečnú polohu každého bodu; v tomto prípade otáčanie okolo S v kladnom smysle o uhol φ je totožné s otáčaním okolo S v kladnom smysle o ktorýkoľvek z uhlov

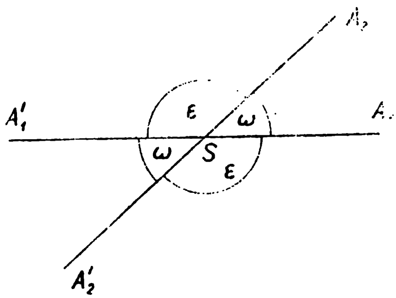
$$\varphi + 2\pi,\ \varphi + 4\pi,\ \varphi + 6\pi,\ \ldots$$

všeobecne o ktorýkoľvek z uhlov

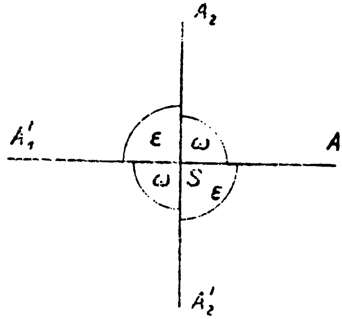
$$\varphi + 2n\pi\ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

To isté platí aj o otáčaní v zápornom smysle.

Teraz je zrejmé, že ak vykonáme najprv otáčanie okolo bodu S v kladnom smysle o uhol φ_1 a potom otáčanie okolo toho istého bodu S v kladnom smysle o uhol φ_2, dostaneme výsledok ten istý, ako keby sme miesto toho vykonali jediné otáčanie okolo S v kladnom smysle o uhol $\varphi_1 + \varphi_2$. Podobne, ak vykonáme najprv otáčanie okolo bodu S v kladnom smysle o uhol φ_1 a potom otáčanie okolo toho istého bodu S v zápornom smysle o uhol φ_2, v prípade $\varphi_1 > \varphi_2$ je výsledok ten istý, ako keby sme miesto toho vykonali jediné otáčanie okolo S v kladnom smysle o uhol $\varphi_1 - \varphi_2$; v prípade $\varphi_1 < \varphi_2$ je výsledok ten istý, ako keby sme miesto toho vykonali jediné otočenie okolo S v zápornom smysle o uhol $\varphi_2 - \varphi_1$.

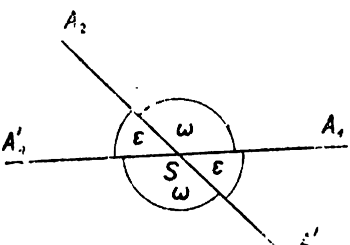


Obr. 54a.



Obr. 54b.

Nech sú dané dve rôznobežky o_1, o_2 s priesečíkom S. Budeme študovať shodnosť (o_1, o_2). Obe priamky o_1, o_2 tvoria štyri duté uhly: $\sphericalangle A_1SA_2$, $\sphericalangle A'_1SA_2$, $\sphericalangle A_1SA'_2$, $\sphericalangle A'_1SA'_2$ (obr. 54a až c).



Obr. 54c.

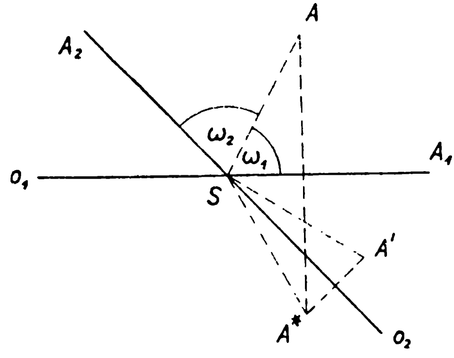
V obrázkoch sú označené ω oba sebe rovné uhly, ktorých rameno, ležiace v priamke o_1, prejde v rameno, ležiace v priamke o_2 otáčaním v kladnom smysle: ε sú tie dva uhly, ktorých rameno, ležiace v priamke o_1, prejde v rameno, ležiace v priamke o_2 otáčaním v zápornom smysle. V každom prípade je

$$\omega + \varepsilon = \pi. \tag{3}$$

Majme bod A, ležiaci vnútri niektorého z oboch uhlov, označených ω, napr. vo vnútri $\sphericalangle A_1SA_2$ (obr. 55). Polpriamka SA rozdelí tento uhol na dva uhly, v obrázku označené ω_1, ω_2; je teda

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega. \tag{4}$$

Ak je A^* súmerný obraz bodu A podľa osi o_1 a ak je A' súmerný obraz bodu A^* podľa osi o_2, je A' obraz bodu A pri shodnosti (o_1, o_2). Uhly $\sphericalangle ASA_1$, $\sphericalangle A_1SA^*$ sú súmerné obrazy jeden druhého podľa osi o_1; majú oba tú istú veľkosť ω_1 a spolu tvoria uhol, ktorého veľkosť je $2\omega_1$. Z polpriamky SA vznikne polpriamka SA^* otočením okolo S v kladnom smysle o uhol $2\omega_1$. Z polpriamky SA^* vznikne polpriamka SA_2 otočením v kladnom smysle o uhol $2\omega_1 + \omega_2$; tým istým otočením v kladnom smysle prejde polpriamka SA_2 v polpriamku SA'; teda z polpriamky SA^* vznikne polpriamka SA' otočením okolo S v kladnom smysle o uhol



Obr. 55.

$$2\,(2\omega_1 + \omega_2) = 4\omega_1 + 2\omega_2.$$

Celkom teda z polpriamky SA vznikne polpriamka SA', keď otočíme okolo S najprv v zápornom smysle o uhol $2\omega_1$ a potom v kladnom smysle o uhol $4\omega_1 + 2\omega_2$. Miesto oboch otočení môžeme vykonať jediné otočenie okolo S v kladnom smysle o uhol

$$(4\omega_1 + 2\omega_2) - 2\omega_1 = 2\,(\omega_1 + \omega_2),$$

teda podľa (4) o uhol 2ω. Tým sme dokázali, že ak bod A leží vnútri niektorého z oboch uhlov, označených ω v obr. 54, vznikne polpriamka SA' z polpriamky SA otočením okolo S v kladnom smysle o uhol 2ω. Celkom rovnako sa dokáže, že ak A leží vnútri niektorého z oboch uhlov, označených v obr. 54 ε, vznikne polpriamka SA' z polpriamky SA otočením v zápornom smysle o uhol 2ε. Podľa (3) je však

$$2\omega + 2\varepsilon = 2\pi,$$

a preto otočenie okolo S v zápornom smysle o uhol 2ε má ten istý účinok ako otočenie okolo S v kladnom smysle o uhol 2ω. Preto, ak bod A leží vnútri ktoréhokoľvek zo štyroch uhlov, tvorených dvoma rôznobežkami o_1, o_2, vznikne bod A' otočením bodu A okolo S o uhol 2ω v kladnom smysle. Ľahko sa presvedčíme, že to isté platí, aj keď bod A leží na priamke o_1 alebo na priamke o_2. Záver:

Ak uhol $\sphericalangle A_1SA_2 = \omega$, pričom rameno SA_1 leží v priamke o_1, rameno SA_2 leží v priamke o_2, z ramena SA_1 vznikne rameno SA_2 otočením v kladnom smysle o dutý uhol ω; shodnosť (o_1, o_2) je otáčanie okolo S v kladnom smysle o uhol 2ω.

To platí i vtedy, keď priamky o_1, o_2 stoja na seba kolmo; v tomto prípade je $\omega = \frac{1}{2}\pi$, teda $2\omega = \pi$ a otáčame o uhol priamy. Teda **stredová súmernosť je zvláštny prípad otáčania okolo bodu.** Celkový výsledok článku 12 až 14: Ak sú o_1, o_2 **dve rôzne priamky, tak shodnosť** (o_1, o_2) **je buď posúvanie** (ak sú priamky o_1, o_2 rovnobežné), **buď otáčanie okolo priesečíka** (o_1, o_2) **oboch rôznobežiek** o_1, o_2.

Možno dokázať, že každá priama shodnosť je alebo posúvanie, alebo otáčanie okolo určitého bodu S. Dokazovať to nebudeme. Rovnako nebudeme študovať podrobnejšie nepriame shodnosti iné ako osové súmernosti.

Cvičenie.

110. Daný $\triangle ABC$ otočte o daný uhol ω (v kladnom alebo zápornom smysle), ak stred S otáčania leží a) mimo trojuholníka, b) vnútri trojuholníka, c) vnútri strany BC! Otáčanie polpriamok SX vykonajte pomocou jednej vhodne zvolenej kružnice (S, r).

111. Opakujte cvičenie 110 tak, že výsledok rotácie nahradíte shodnosťou (o_1, o_2), pričom je $o_1 \equiv SA$. Ktoré uhly tvoria obe osi o_1, o_2? Záleží na poradí týchto osí? (Zvoľte bod X na osi o_1 a hľadajte shodnosti (o_1, o_2), (o_2, o_1).)

112. Uhol 2π s vrcholom S je rozdelený na n rovnakých uhlov $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$; tak vzniká n styčných uhlov, ktorých ramená pretínajú kružnicu $k = (S, r)$ v bodoch $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dokážte:
   a) Mnohouholník $A_1A_2 \ldots A_n$ je vypuklý, jeho strany a uhly sú rovnaké. (Nazýva sa pravidelným mnohouholníkom.)
   b) V pravidelnom mnohouholníku možno kružnicu opísať i vpísať. (Bod S nazýva sa stredom mnohouholníka, uhol $\varphi_n = \sphericalangle A_k SA_{k-1}$ je stredový uhol.)
   c) Pravidelný mnohouholník má n osí (súmernosti), ktoré všetky prechádzajú bodom S; jeden uhol dvoch susedných osí je $\frac{1}{2}\varphi_n$. Pre n nepárne je os určená vrcholom A a bodom S. Pre n párne sú dva druhy osí (1) priamky $A_k S$, (2) kolmice spustené z bodu S na strany.
   d) Možno vykonať n rôznych rotácií okolo stredu S (s kladnými uhlami otáčania $\omega_k = k\varphi_n$; kde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), pri ktorých sa nová poloha mnohouholníka kryje s pôvodnou.
   e) Ktorúkoľvek rotáciu možno vytvoriť shodnosťou (o_1, o_2), kde o_1, o_2 sú dve vhodne zvolené osi mnohouholníka. Rozhodnite, koľkými spôsobmi možno použitú rotáciu o uhol ω_k nahradiť shodnosťou (o_1, o_2).
   f) Pretože stredová súmernosť je shodnosť (o_1, o_2) pre $o_1 \perp o_2$, ľahko rozhodnete, ktoré pravidelné mnohouholníky majú stred súmernosti.

113. Dokážte: Ak o dvoch úsečkách $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ platí:

a) $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}, \overline{AB} = \overline{A'B'}$, možno jednu stotožniť s druhou posunutím (zaveďte shodnosť (o_1, o_2), kde o_1 prechádza bodom A).

b) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ale nie je $AB // A'B'$; možno jednu stotožniť s druhou vhodnou rotáciou? Určte veľkosť uhla otáčania z uhla oboch úsečiek $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$. (Zaveďte shodnosť (o_1, o_2), kde o_1 je os úsečky AA'. Čo sa stane, keď je $A \equiv A'$? Uvažujte i o prípade, keď obe úsečky ležia v tej istej priamke.)

114. Narysujte rovnoramenný trojuholník, ak je daný vrchol A, uhol α, a to tak, aby vrcholy B, C základne BC ležaly v poradí na dvoch rôznobežkách b, c. (Hľadaný obrazec i s priamkami b, c otočte okolo bodu A o uhol α. Riešenia môžu byť dve, ani jedno alebo ich je nesčíselné množstvo. Kedy ktorý prípad nastane? Porovnajte uhol α s uhlom oboch rôznobežiek a sledujte polohu bodu A.)

IV. PODOBNOSŤ

14. Úvodné úvahy. Pristúpime k štúdiu pojmu podobnosti, jedného z najdôležitejších pojmov v geometrii. Praktický príklad podobnosti poskytujú mapy. Krajina v skutočnosti a jej obraz na mape sú dva podobné útvary; majú ten istý tvar, ale rôznu veľkosť. Ak je napr. mierka plánu 1 : 1 000, je každá skutočná dĺžka 1 m znázornená na mape dĺžkou 1 mm. Dĺžky na pláne sú omnoho menšie než dĺžky v skutočnosti. Ale každé dve v skutočnosti sebe rovné úsečky sú aj na pláne sebe rovné. Pomer dĺžky na pláne k dĺžke v skutočnosti je pre všetky dĺžky ten istý, v našom prípade 1 : 1 000; zo skutočnej veľkosti dĺžky dostaneme veľkosť jej obrazu na pláne, ak znásobíme skutočnú veľkosť číslom 10^{-3}. Naproti tomu veľkosť uhlov je tá istá v skutočnosti ako na pláne. Napr. dve cesty, ktoré sa križujú pod uhlom 60°, sú na mape znázornené čiarami, ktoré sa pretínajú tiež pod uhlom 60°.

Iný príklad dostaneme, ak narysujeme na tabuli i v sošite trojuholník $\triangle ABC$ so stranami $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{BC} = 4$, pričom na tabuli je jednotkou 1 dm, v sošite 1 cm. Veľkosť každej strany v sošite rovná sa 1/10 veľkosti rovnako označenej strany na tabuli. Ale uhly pri rovnako označených vrcholoch majú tú istú veľkosť na tabuli aj v sošite; pri vrchole C máme v našom prípade pravý uhol.

Geometrický pojem podobnosti úzko súvisí s aritmetickým pojmom úmernosti, dôkladne prebraným na strednej škole. Máme na mysli tzv. priamu úmernosť, o nepriamej úmernosti nebudeme vôbec hovoriť, a preto budeme hovoriť krátko o úmernosti. Veličiny

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n \tag{2}$$

sú úmerné, ak všetky pomery (zlomky)

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\ldots, \frac{b_n}{a_n} \tag{3}$$

sú rovnaké. Ak označíme k spoločnú hodnotu čísel (3), platia vzťahy

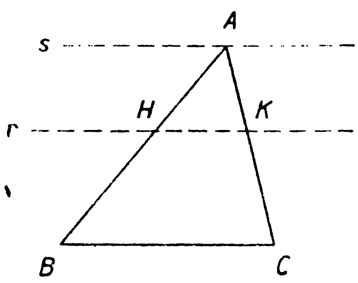
$$b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, \ldots, b_n = ka_n. \tag{4}$$

Prechod od čísel (1) k číslam (2) vykoná sa tak, že všetky čísla (1) znásobíme tým istým číslom k, ktoré menujeme **koeficientom úmernosti.** V praxi sú obyčajne všetky čísla (1), (2) kladné, preto aj koeficient úmernosti k je kladný; ak je $k > 1$, vzniknú čísla (2) z čísel (1) **zväčšením**, ak je $k < 1$, vzniknú **zmenšením;** keď $k = 1$, rovná sa každé z čísel (2) číslu (1). Neskoršie sa nám však vyskytne aj prípad záporného k. Stále však predpokladáme, že čísla (1), (2) sú iné ako nula; aj k je rôzne od nuly.

Vráťme sa k pojmu podobnosti. Dva geometrické **útvary** U, U' **sú podobné, keď**

1. sebe odpovedajúce dĺžky sú úmerné,

2. sebe odpovedajúce uhly sú rovnaké.



Obr. 56.

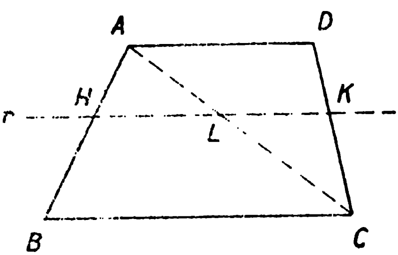
Koeficient úmernosti dĺžok menujeme koeficientom podobnosti. Je to kladné číslo k; shodnosť je ten zvláštny príklad podobnosti, v ktorom $k = 1$. Pre každú dvojicu d, d' sebe odpovedajúcich dĺžok platí vzťah: $d' = kd$. Keď vymeníme poradie odpovedajúcich si útvarov U, U', zostanú podobné, ale nový koeficient podobnosti bude $1/k$; miesto zväčšenia budeme mať zmenšenie a naopak.

Vykonáme ešte niekoľko úvah, ktoré použijeme v článku 16 na štúdium podobnosti trojuholníka. Majme bod H, ležiaci na strane AB v $\triangle ABC$. Rovnobežka r so stranou BC, vedená bodom H, obsahuje bod K na strane AC. Ak je H stredom strany AB, je K stredom strany AC a úsečku $\overline{HK}$ menujeme strednou priečkou $\triangle ABC$, príslušnou k strane BC.

Dôkaz (obr. 56). Priamka k neprechádza nijakým vrcholom a podľa Paschovej vety (str. 8) pretne ešte jednu stranu; pretože je rovnobežná s BC, musí preťať AC. Nech je bod H stredom strany AB. Súmerný obraz priamky BC podľa stredu H je priamka s, vedená bodom A rovnobežne s priamkami BC, r. Teda (pozri str. 37) r je os rovnobežiek BC. s. Z toho plynie, že s je súmerný obraz priamky BC podľa stredu K, takže bod A je súmerným obrazom bodu C podľa stredu K, t. j. K je stredom úsečky $\overline{AC}$.

Ak leží bod H na rameno AB lichobežníka $ABCD$, tak rovnobežka r, vedená bodom H, pretne rameno CD v bode K. Ak bod H je stredom ramena AB, je K stredom ramena CD a úsečka HK menuje sa strednou priečkou lichobežníka.

Dôkaz (obr 57). Podľa predchádzajúcej vety priamka r prechádza bodom L vnútri strany AC trojuholníka ABC; tá je tiež stranou $\triangle ADC$, a preto r prechádza bodom K vnútri strany CD tohto trojuholníka. Ak je H stredom úsečky AB, plynie z tej istej vety najprv, že L je stredom úsečky AC, a z toho ďalej, že K je stredom úsečky CD.



Obr. 57.

Ak leží bod H vnútri strany AB, bod K vnútri strany AC trojuholníka ABC a BC, HK sú rovnobežky, je

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AC}}. \tag{5}$$

Dôkaz vykonáme najprv za predpokladu, že na ľavej strane v (5) je racionálne číslo $\frac{r}{n}$, ktoré je, pravda, menšie ako 1, takže $r < n$. (V obr. 58 je $r = 4$, $n = 7$.) Úsečku $\overline{AB}$ rozdelíme bodmi H_1, $H_2, \ldots, H_{n-1}$ na n rovnakých dielov a vedieme nimi rovnobežky s BC, ktoré pretnú úsečku AC v bodoch $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$. (6)
Bod H splynie s H_r, bod K splynie s K_r; preto stačí dokázať, že body (6) delia úsečku $\overline{AC}$ na n rovnakých dielov, alebo že K_1 je stredom úsečky $\overline{AK_2}$, K_2 je stredom $\overline{K_1K_3}$, $\ldots$, K_{n-1} je stredom $\overline{K_{n-2}C}$. To plynie z predchádzajúcich viet, ak ich použijeme najprv na AH_2K_2 a potom na lichobežníky $H_1H_3K_3K_1$, $H_2H_4K_4K_2, \ldots, H_{n-2}BCK_{n-2}$.

Všeobecný dôkaz: Dokážeme, že nie je možné, aby neplatilo (5). Keď rovnosť (5) neplatí, je jeden z oboch pomerov menší než druhý, napr.

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} < \frac{\overline{AK}}{\overline{AC}}$$

V tom prípade musí existovať racionálne číslo k také, že

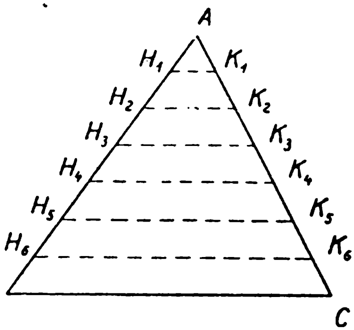
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} < k, \frac{\overline{AK}}{\overline{AC}} > k$$

alebo

$$\overline{AH} < k.\overline{AB}, \overline{AK} > k.\overline{AC}. \quad (7)$$

Ak platí (7), je číslo kladné k menšie ako 1. Preto môžeme určiť vnútri strany AB bod H_0 tak, že

$$\overline{AH_0} = k.\overline{AB} \text{ alebo } \frac{\overline{AH_0}}{\overline{AB}} = k. \quad (8)$$



Obr. 58.

Rovnobežka s priamkou BC, vedená bodom H_0, pretne stranu AC v bode K_0. Pretože k je racionálne, plynie z predchádzajúceho dôkazu, že

$$\frac{\overline{AK_0}}{\overline{AC}} = k \text{ alebo } \overline{AK_0} = k.\overline{AC}. \quad (9)$$

Podľa (7) a (8) je $\overline{AH} < \overline{AH_0}$, a preto bod H leží vnútri strany AH_0 trojuholníka AH_0K_0. Pretože priamky HK sú rovnobežné, leží bod K vnútri strany AK_0 tohoto trojuholníka. To však nie je možné, lebo zo (7) a (9) plynie, že $\overline{AK} < \overline{AK_0}$.

Cvičenie.

115. V akom pomere sú oba obrazy vzdialenosti dvoch miest A, B, zobrazených jednak na špeciálnej mape (mierka 1 : 50 000), jednak na pláne s mierkou 1 : 20 000.

116. Veličiny $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sú úmerné veličinám $b_1 = 1{,}8$; $b_2 = 1{,}5$; $b_3 = 2{,}4$; $b_4 = 2{,}7$; určite ich hodnoty, ak viete, že:
a) koeficient úmernosti je $k = \frac{2}{3}$ (t. j. $a_n = k.b_n$);
b) $a_3 = 3{,}6$.
Určite hodnoty ďalších veličín b_5, b_6, ak viete, že $a_5 = 6{,}4$, $a_6 = 4{,}8$.

117. V obr. 57 pretína stredná priečka HK v lichobežníku $ABCD$ uhlopriečku BD v bode J; je $BC // AD$, $\overline{BC} > \overline{AD}$.
a) Dokážte, že $HK = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$.
b) Dokážte, že body na strednej priečke HK sú v poradí $HJLK$ a že $\overline{JL} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$; v ktorej polrovine, vyťatej priamkou HK, leží priesečík U oboch uhlopriečok AB, CD?

118. Narysujte úsečku $\overline{AB} = 9$ cm a graficky určite:

a) úsečku $\overline{AX} = \frac{2}{7} . \overline{AB}$;

b) vnútri úsečky $\overline{AB}$ body U, V v poradí $AUVB$ tak, aby platilo $\overline{AU} : \overline{UV} : \overline{VB} = 5 : 4 : 6$. Je úloha možná?

119. Určite graficky veľkosť úsečky $\overline{AB} = \frac{\overline{HK} . \overline{LM}}{\overline{PQ}}$, kde $\overline{HK}$, $\overline{LM}$, $\overline{PQ}$ sú dané úsečky. (Utvorte pomer $\frac{\overline{AB}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{PQ}}$.)

120. V $\triangle ABC$ určite vnútri strany AB bod D tak, aby $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{3}{2}$ a veďte ním priamku $DE \parallel AC$, kde E je bodom na priamke BC. Bodom D veďte priamku $DF \parallel AE$ a označte F jej priesečík s priamkou BC. Dokážte, že body E, F ležia na priamke BC v poradí $BFEC$ a určite veľkosť úsečiek $\overline{EC}$, $\overline{FE}$, ak viete, že $BF = 6$.

121. Určite pomer rozmerov hárku normalizovaného papiera, ktorý, preložený napoly, udáva polhárok, ktorého rozmery sú opäť v tom istom pomere. ($\sqrt{2} : 1$.)

15. Podobnosť trojuholníkov.

Trojuholníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ so stranami

$$a_1 = \overline{B_1C_1},\ b_1 = \overline{A_1C_1},\ c_1 = \overline{A_1B_1},$$
$$a_2 = \overline{B_2C_2},\ b_2 = \overline{A_2C_2},\ c_2 = \overline{A_2B_2}$$

a s uhlami

$$\alpha_1 = \sphericalangle A_1 \quad \beta_1 = \sphericalangle B_1 \quad \gamma_1 = \sphericalangle C_1,$$
$$\alpha_2 = \sphericalangle A_2 \quad \beta_2 = \sphericalangle B_2 \quad \gamma_2 = \sphericalangle C_2$$

sú podobné, čo píšeme

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2, \tag{1}$$

ak po prvé

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k \tag{2}$$

a po druhé

$$\alpha_1 = \alpha_2,\quad \beta_1 = \beta_2,\quad \gamma_1 = \gamma_2. \tag{3}$$

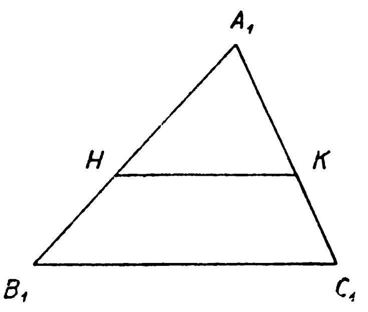
Pri vyznačení podobnosti (1) treba dbať na poradie vrcholov podobne ako pri vyznačovaní shodnosti. Číslo k je koeficientom podobnosti. Základným vetám o shodnosti trojuholníkov, ktoré sme si zopakovali v článku 9, zodpovedajú základné vety o podobnosti trojuholníkov, ktoré sú hlavným obsahom tohto článku. Veta, odpovedajúca vete IV o shodnosti, je menej dôležitá a nebudeme k nej prihliadať. Budeme mať teda len tri základné vety o podobnosti trojuholníkov. Pritom prípad $k = 1$ necháme stranou, lebo nám dáva shodnosť. Pri dôkazoch budeme predpokladať, že $k < 1$, pretože prípad $k > 1$ sa prevedie na prípad $k < 1$ jednoduchou zámenou oboch trojuholníkov.

I. Dva trojuholníky sú podobné, keď sa shodujú vo dvoch uhloch.

Dôkaz. Nech je napr. $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$; máme dokázať, že platí (1). Pretože $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \pi$, musia platiť všetky tri vzťahy (3) a zo vzťahu (2) stačí odôvodniť

$$\text{napr.}\ \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}. \tag{4}$$

Keď označíme pravú stranu v (4) písmenom k, stačí urobiť dôkaz za predpokladu, že $k < 1$, alebo že $c_2 < c_1$, t. j. $A_2B_2 < A_1B_1$. Za tohto predpokladu môžeme (obr. 59) vnútri strany A_1B_1 určiť bod H tak, že $\overline{A_1H} = \overline{A_2B_2}$. (5)



Obr. 59.

Bodom H vedieme rovnobežku s priamkou B_1C_1, na ktorej máme bod K vnútri strany A_1C_1, a (pozri str. 64)

$$\frac{\overline{A_1K}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{A_1H}}{\overline{A_1B_1}}. \tag{6}$$

V $\triangle A_1HK$ máme pri vrchole A_1 uhol α_1, ktorý podľa (3) rovná sa α_2. V tom istom trojuholníku máme pri vrchole H uhol $\sphericalangle H$, ktorého ramená sú súhlasne rovnobežné s ramenami uhla $\sphericalangle B_1$, takže $\sphericalangle H = \beta_1$, teda $\sphericalangle H = \beta_2$ podľa (3). Pretože platí aj (5), máme $\triangle A_1HK \cong \triangle A_2B_2C_2$ podľa usu, teda $\overline{A_1K} = \overline{A_2C_2}$. Z toho a z (5) súdime, že zo (6) plynie $\dfrac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_1C_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$,

čo nie je nič iné ako (4).

Dôsledok: Ak bodom H vnútri strany A_1B_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$ vedieme rovnobežku so stranou B_1C_1, ktorá pretne stranu A_1C_1 v bode K, je $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_1HK$, (7) lebo oba trojuholníky majú pri vrchole A_1 ten istý uhol a uhly $\sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle A_1HK$ majú súhlasne rovnobežné ramená, takže aj tieto uhly sú sebe rovné.

Poznámka. Pri trojuholníkoch môžeme z rovnosti uhlov usudzovať na podobnosť, teda úmernosť strán. Pri štvoruholníkoch už nestačí rovnosť vrcholových uhlov, lebo napr. každé dva obdĺžniky sa shodujú v uhloch (všetky uhly obdĺžnika sú pravé) a predsa dva obdĺžniky nemusia si byť podobné. Dva n-uholníky sú podobné, ak sa shodujú v uhloch trojuholníky, na ktoré tieto rozdelia uhlopriečky, vychádzajúce z vrcholov sebe odpovedajúcich. To jest dva n-uholníky sú podobné, ak sa shodujú v $2n-4$ sebe odpovedajúcich, od seba nezávislých a neodporujúcich si uhloch. Dva 4-uholníky sú podobné, ak sa shodujú v 3 vrcholových uhloch (štvrtý je od nich závislý) a v uhle uhlopriečok, t. j. v 4 uhloch.

II. Dva trojuholníky sú podobné, keď sa shodujú v jednom uhle a keď sú tomuto uhlu priľahlé strany jedného, úmerné priľahlým stranám druhého.

Dôkaz. Nech je $\alpha_1 = \alpha_2$ (8)

a okrem toho $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1} = k.$ (9)

Máme dokázať, že platí (1). Stačí vykonať dôkaz pre prípad, že $k < 1$, teda $c_2 < c_1$, $b_2 < b_1$. Potom môžeme (obr. 59) vnútri $\overline{A_1B_1} = c_1$ určiť bod H tak, že $\overline{A_1H} = k.\overline{A_1B_1}$. (10)

Keď vedieme opäť bodom H rovnobežku HK s priamkou B_1C_1, ktorá pretne stranu A_1C_1 v bode K, tak podľa vety I. bude platiť (7), takže bude

$$\frac{\overline{A_1H}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_1K}}{\overline{A_1C_1}},$$

a teda podľa (10) bude

$\overline{A_1K} = k.\overline{A_1C_1}$. Pretože $\overline{A_1B_1} = c_1$, $\overline{A_2B_2} = c_2$, (11)

podľa (10) a (11) je $\overline{A_1H} = kc_1$, $\overline{A_1K} = kb_1$, teda podľa (9) $\overline{A_1H} = c_2$, $\overline{A_1K} = b_2$.

Teda $\triangle A_1HK$, $\triangle A_2B_2C_2$ sa shodujú vo dvoch stranách a podľa (8) sa shodujú aj v uhle nimi sovrenom, takže podľa sus je

$$\triangle A_1HK \cong \triangle A_2B_2C_2,$$

takže $\sphericalangle A_1HK = \sphericalangle A_2B_2C_2$, t. j. $\sphericalangle A_1HK = \beta_2$.

Na druhej strane $\sphericalangle A_1HK$ má ramená súhlasne rovnobežné s $\sphericalangle A_1B_1C_1$ alebo s uhlom β_1, takže $\sphericalangle A_1HK = \beta_1$. Teda $\beta_1 = \beta_2$. Z toho a z (8) súdime podľa vety I, že platí (1).

III. Dva trojuholníky sú podobné, keď sú strany jedného úmerné stranám druhého.

Dôkaz. Keď platí (2), máme dokázať, že platí (1). Pritom môžeme predpokladať, že $k < 1$. Vnútri strany A_1B_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$ určíme (obr. 59) bod H tak, aby bolo $\overline{A_1H} \doteq k.\overline{A_1B_1}$ alebo $\overline{A_1H} = c_2$. Rovnobežka s priamkou A_1B_1, vedená bodom H, pretne stranu A_1C_1 v bode K. Podľa vety I platí (7), a pretože bolo $\overline{A_1H} = k.\overline{A_1B_1}$, bude aj $\overline{A_1K} = k.\overline{A_1C_1}$, $\overline{HK} = k.\overline{B_1C_1}$. Podľa (2) bude teda $\overline{HK} = a_2$, $\overline{A_1K} = b_2$, $\overline{A_1H} = c_2$, takže

$$\triangle A_1HK \cong \triangle A_2B_2C_2 \tag{12}$$

podľa sss. Zo (7) a (12) plynie (1).

Cvičenie.

122. Koľko nezávislých rovníc predstavujú zápisy vo výrazoch (2), (3), ktoré nám vyjadrujú vzťahy medzi základnými prvkami dvoch podobných trojuholníkov? Koľko týchto rovníc, pravda, vhodne volených, nám zaisťuje podobnosť trojuholníkov?

123. Máme štyri trojuholníky, o ich uhloch platí (1) $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$, $\gamma = ?$; (2) $\varphi = 60°$, $\psi = 20°$, $\omega = ?$; (3) $\alpha_1 = 60°$, $\gamma_1 = \frac{2}{3} \cdot \beta_1$; (4) $\delta = 72°$, $\vartheta = \frac{5}{12}\,\delta$, $\varepsilon = ?$ Názvy vrcholov našich trojuholníkov zodpovedajú názvom protiľahlých uhlov. Rozhodnite, ktoré dva z našich trojuholníkov sú podobné; odôvodnite!

124. Dané sú trojuholníky ABC, $A'B'C'$:

  a) $a = \frac{5}{3}$; $b = \frac{11}{6}$; $\gamma = 70°$; $a' = \frac{5}{2}$, $b' = \frac{11}{4}$, $\gamma' = 70°$.

  b) $a = 6$, $b = 8$, $c = 9$; $a' = 5$, $b' = 6\frac{2}{3}$, $c' = 7\frac{1}{2}$.

  Rozhodnite, či sú podobné.

125. Dokážte:
  a) Či sú v rovnoramenných trojuholníkoch uhly proti základniam sebe rovné, keď sú trojuholníky podobné.
  b) Každé dva rovnostranné trojuholníky sú podobné.

126. a) Určite podmienky podobnosti dvoch obdĺžnikov.
  b) Každé dva štvorce sú podobné. Čo súdite o dvoch pravidelných trojuholníkoch?
  c) Dva podobné obdĺžniky majú spoločnú stranu veľkosti 15, obvod jedného je 36. Určite obvod druhého!

127. Daný je trojuholník ABC, kde $a = 4{,}8$, $b = 6$, $c = 7{,}2$. Zvoľte stranou úsečku $A'B'$ veľkosti 6,4 a sostrojte $\triangle A'B'C'$, podobný trojuholníku ABC. Správnosť konštrukcie odôvodnite.

128. O výškach trojuholníka ABC platí:

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

(Úvahu vykonajte zvlášť pre trojuholník a) ostrouhlý, b) pravouhlý, c) tupouhlý.)

129. Použitím podobnosti dokážte poučky o strednej priečke trojuholníka.

130. A_1, B_1, C_1 sú stredy strán a_1, b_1, c_1 trojuholníka ABC.
a) Dokážte, že platí $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.
b) Označte T priesečík priamok AA_1, BB_1. Tu platí $\triangle TA_1B_1 \backsim \triangle TAB$. Konštanta podobnosti $k = \frac{1}{2}$ a deliaci pomer (A_1AT) rovná sa $-\frac{1}{2}$. Dokážte z toho: Ťažnice AA_1, BB_1, CC_1 v trojuholníku ABC pretínajú sa v bode T (ťažisko).

16. Vety Euklidove a veta Pytagorova.

V obr. 60 máme pravouhlý $\triangle ABC$ s pravým uhlom pri vrchole C. Zavedieme obyčajné označenie prepony, odvesien a uhlov;

$$c = \overline{AB},\ a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ \alpha = \sphericalangle BAC,\ \beta = \sphericalangle ABC.$$

Vieme, že oba uhly α, β sú ostré. Z toho plynie, že päta P kolmice, spustenej z bodu C na priamku AB, padne do vnútra prepony a rozdelí preponu na dve úsečky:

$c_1 = \overline{BP}$ (úsek prepony priľahlý odvesne a)

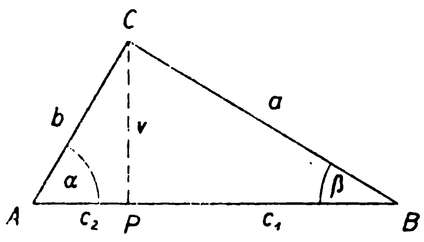
$c_2 = \overline{AP}$ (úsek prepony priľahlý odvesne b). Je pravda

$$c_1 + c_2 = c \qquad (1)$$

Úsečka

$$v = \overline{CP}$$

je výška pravouhlého $\triangle ABC$.



Obr. 60.

Ak dva pravouhlé trojuholníky sa shodujú v jednom ostrom uhle, sú podobné, lebo sa shodujú aj v pravom uhle. Toho použijeme na pravouhlé $\triangle ACP$, $\triangle BCP$; prvý z nich má s daným $\triangle ABC$ spoločný uhol α, druhý uhol β. Oba tieto trojuholníky sú podobné s pôvodným a teda aj medzi sebou, t. j.

$$\triangle CBP \backsim \triangle ABC, \qquad (2)$$

$$\triangle ACP \backsim \triangle ABC, \qquad (3)$$

$$\triangle CBP \backsim \triangle ACP. \qquad (4)$$

Z podobností (4) a (3) plynie $\frac{c_1}{a} = \frac{v}{b} = \frac{a}{c}$, z čoho máme

$$ab = cv \tag{5}$$

$$\text{alebo } a^2 = cc_1. \tag{6}$$

Z podobnosti (4) a (2) plynie $\frac{c_2}{b} = \frac{v}{a} = \frac{b}{c}$,

z čoho máme opäť (5) alebo $b^2 = cc_2$. (7)

Z podobnosti (4) plynie ešte $\frac{v}{c_2} = \frac{c_1}{v}$ alebo $v^2 = c_1c_2$. (8)

Podľa distributívneho zákona je $cc_1 + cc_2 = c(c_1 + c_2)$, čo sa rovná c^2 podľa (1). Teda zo (6) a (7) plynie sčítaním

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{9}$$

Vzorec (5) dá sa jednoducho odvodiť zo známeho vzorca pre plochu trojuholníka; obe strany vyjadrujú dvojnásobnú plochu $\triangle ABC$, a preto sa sebe rovnajú. Práve tak vzorce (6) až (7) dajú sa vysloviť pomocou plôch obdĺžnikov a štvorcov; urobte tak! Vzorce (6), (7), (8) sú **vety Euklidove**, vzorec (9) vyjadruje **vetu Pytagorovu.**

Obrátenie vety Pytagorovej. Ak medzi stranami a, b, c trojuholníka platí vzťah (9), je trojuholník pravouhlý s preponou c. Lebo iste môžeme sostrojiť pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny rovnajú sa stranám a, b daného trojuholníka. Pretože (9) platí pre daný trojuholník i pre pravouhlý trojuholník, shodujú sa oba trojuholníky vo všetkých stranách, sú shodné a daný trojuholník je pravouhlý.

Cvičenie.

131. a) Vyslovte Euklidove vety a vetu Pytagorovu použitím obsahov obdĺžnikov a štvorcov.
b) Ako premeníte použitím Euklidových viet obdĺžnik $MNPQ$ na štvorec s rovnakým obsahom (kvadratúra obdĺžnika).
c) Vo vzorci (8) zvoľte: (1) $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ (obr. 60), (2) $c_1 = 3$, $c_2 = 1$; (3) $c_1 = 5$, $c_2 = 3$ a určite graficky hodnoty odmocnín $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$.
d) Cvičenie 131 c) riešte použitím vzorca (6).
e) Narysujte štvorec $HSKL$, $MNPQ$ a určite štvorec $ABCD$, ktorého obsah sa rovná súčtu obsahov daných štvorcov.

132. V akom pomere sú strany trojuholníka ABC, v ktorom je a) $\alpha = 45°$, $\gamma = 90°$?; b) $\alpha = 30°$, $\gamma = 90°$? [$1 : \sqrt{3} : 2$]

133. V akom pomere je výška a strana rovnostranného trojuholníka (pozri cvič. 132 b)?

134. Rozhodnite, či trojuholník, určený troma stranami a) 3, 4, 5; b) 3, 5, 6; c) 5, 12, 13; d) $4n$, $4n^2-1$, $4n^2+1$ je pravouhlý.

135. a) Rovnobežník s uhlopriečkami 5, 12 a so stranou 6,5 je kosoštvorec. Dokážte:

b) Aké podmienky musia spĺňovať uhlopriečky e, f a strana a v rovnobežníku $ABCD$, aby to bol kosoštvorec?

136. V $\triangle ABC$ je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Ak je $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 10$, určite polomer r kružnice, opísanej trojuholníku. (Ak je stred kružnice E stredom strany BC, je $r = \frac{1}{2}.\overline{BC}$. Pre $\triangle AEB$ použite vzorec (6). Čo viete o strede kružnice, opísanej pravouhlému trojuholníku AEB?)

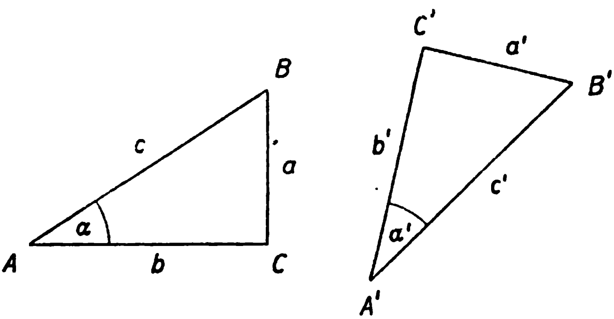
137. $ABCD$ je štvorec so stranou a; na polpriamke AB leží bod E tak, že $\overline{AE} = \overline{AC}$. Ak je P pätou kolmice, spustenej z bodu A na priamku DE, dokážte, že bod P je v polrovine ACD a že $\overline{DE} = 2.\overline{DP}$. (Určite $\overline{AE}$, $\overline{DE}$ a pre trojuholník DEA použite vzorec (6).)

138. Ak je v trojuholníku ABC $\sphericalangle C = R$ a $v = 1$, je $c_2 = \frac{1}{c_1}$. Dokážte odtiaľ geometricky, že súčet $c_1 + \frac{1}{c_1}$ čísla $c_1 > 0$ a jeho prevrátenej hodnoty $\frac{1}{c_1}$ je vždy väčší než 2 alebo rovný 2; dôkaz vykonajte aj výpočtom. Kedy je $c_1 + \frac{1}{c_1} = 2$? (Porovnajte výšku s polomerom opísanej kružnice. Pozri obr. 60.)

17. Goniometria ostrého uhla.

Slovo goniometria je gréckeho pôvodu: gony — uhol, metrein — merať, teda náuka o meraní uhlov. Keď je daný ostrý uhol α, môžeme sostrojiť pravouhlý $\triangle ABC$ s uhlom α pri vrchole A a s pravým uhlom pri vrchole C (obr. 61). Strany trojuholníka označme ako obyčajne $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, a utvorme pomery

$$\frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a}. \tag{1}$$



Obr. 61.

Ak miesto trojuholníka $\triangle ABC$ vezmeme iný $\triangle A'B'C'$ s pravým uhlom pri C' a uhlom $\alpha' = \alpha$ pri A' (pritom uhly α, α' alebo splynú alebo nesplynú, ale rozhodne sa sebe rovnajú), ktorého strany označíme $a' = \overline{B'C'}$, $b' = \overline{A'C'}$, $c' = \overline{A'B'}$, budeme miesto (1) mať pomery

$$\frac{a'}{c'}, \quad \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b'}{a'}. \tag{2}$$

Z rovnosti uhlov $\alpha = \alpha'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ plynie podobnosť $\triangle ABC \backsim \backsim \triangle A'B'C'$. Ak je k koeficient podobnosti, je $a' = ka, b' = kb$, $c' = kc$, a preto pomery (2) rovnajú sa pomerom (1). Inak povedané, pomery (1) sú čísla, ktorých hodnoty sú závislé len od veľkosti uhla α, alebo sú funkciami veľkosti uhla α, krátko funkciami uhla α. Slovo funkcia poznáte zo strednej školy. Spoločný názov všetkých štyroch funkcií je **goniometrické funkcie**. Pre jednotlivé z nich máme tieto názvy:

$\frac{a}{c}$, t. j. pomer protiľahlej odvesny k prepone menuje sa **sinus** uhla α,

$\frac{b}{c}$, t. j. pomer priľahlej odvesny k prepone menuje sa **kosinus** uhla α,

$\frac{a}{b}$, t. j. pomer protiľahlej odvesny k priľahlej odvesne menuje sa **tangens** uhla α,

$\frac{b}{a}$, t. j. pomer priľahlej odvesny k protiľahlej odvesne menuje sa **kotangens** uhla α.

Obyčajne používame skratky:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Pre každý ostrý uhol α je $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ určité kladné číslo. Pretože prepona c je vždy dlhšia ako ktorákoľvek z odvesien a, b, máme pre každý ostrý uhol α:

$$\sin\alpha < 1, \quad \cos\alpha < 1. \tag{3}$$

Pre funkcie tangens a kotangens neplatí nijaká obmedzujúca podmienka. Z Pytagorovej vety $a^2 + b^2 = c^2$ plynie $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, teda pre každý ostrý uhol α platí dôležitá identita (alebo totožnosť)

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1,$$

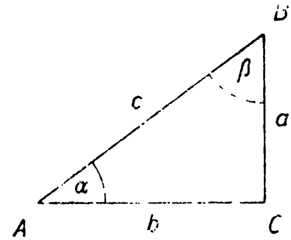
ktorá sa však obyčajne píše bez zátvoriek takto:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{4}$$

$$\cot g\, \alpha = \frac{1}{tg \alpha}, \qquad tg\, \alpha = \frac{1}{\cot g \alpha}, \tag{5}$$

$$tg\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad \cot g\, \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{6}$$

Správnosť týchto identít je jasná. Podrobnejšie budeme študovať goniometrické funkcie v druhej triede, kde jednak rozšírime definíciu goniometrických funkcií uhlov tak, že definovať sa budú všetky uhly, nie ako doteraz len uhly ostré, a ďalej budeme definovať aj goniometrické funkcie čísla (nie uhlov), ktoré sú dôležité vo fyzike.



Obr. 62.

Keď sú α, β dva ostré uhly pravouhlého $\triangle ABC$ (obr. 62), vieme, že $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ alebo $\alpha + \beta = 90°$. Hovoríme, že α, β sú dva doplnkové uhly. Odvesna, protiľahlá k jednému z oboch uhlov α, β, je zároveň priľahlou k druhému. Z toho plynie: Ak sú α, β dva doplnkové uhly, je

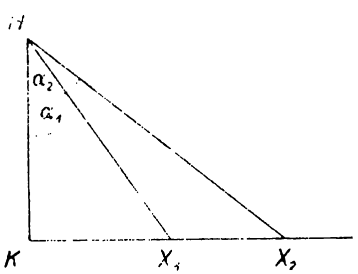
$$\sin \beta = \cos \alpha,\ \cos \beta = \sin \alpha,\ tg\, \beta = \cot g\, \alpha,\ \cot g\, \beta = tg\, \alpha. \tag{7}$$

Predpona ko- v názvoch kosinus, kotangens pochádza z latinského slova complementum — doplnok.

Ak sa zväčšuje ostrý uhol α, zväčšujú sa aj čísla $\sin \alpha$, $tg\, \alpha$, ale čísla $\cos \alpha$, $\cot g\, \alpha$ sa zmenšujú.

Dôkaz (obr. 63). Zvoľme si ľubovoľnú úsečku $\overline{HK}$ a v bode K veďme polpriamku KX kolmo na HK. Pre každú polohu bodu X nech je α = uhol KHX, takže $\cos \alpha =$

$$= \frac{\overline{HK}}{\overline{HX}},\ \cot g\, \alpha = \frac{\overline{HK}}{\overline{KX}}.$$



Obr. 63.

Ak sa zväčšuje uhol α, zväčšuje sa KX, takže *cotg* α sa zmenšuje. Súčasne (pozri str. 31) zväčšuje sa aj HK, takže *cos* α sa zmenšuje. Pri zmenšovaní α naopak zväčšuje sa *cos* α i *cotg* α. Nech je teraz β doplnkový uhol k α. Keď sa zväčšuje α, β sa zmenšuje, teda sa zväčšuje *cos* β, *cotg* β a podľa (7) zväčšuje sa *sin* α, *tg* α.

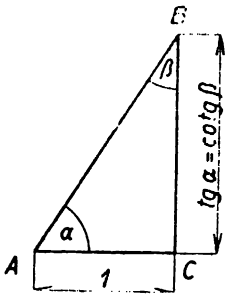
Cvičenie.

139. Čo súdite o trojuholníkoch ABC, $A_1B_1C_1$, o ktorých platí: $c = 10$, $\beta = 35°$, $\gamma = 90°$; $c_1 = 12$, $\alpha_1 = 55°$, $\gamma_1 = 90°$?
a) Je nejaká súvislosť medzi stranami oboch trojuholníkov?
b) Vypočítajte hodnoty goniometrických funkcií uhlov α, α_1. Akú súvislosť očakávate medzi výsledkami?

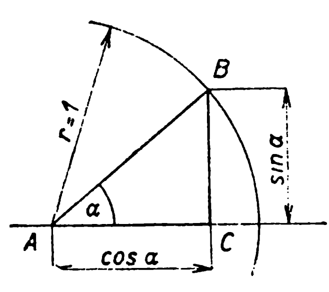
140. Narysujte $\triangle ABC$, ak je dané $\overline{AC} = 9$, $\overline{BC} = 6$, $\gamma = R$.
a) Uhlomerom zmerajte uhly α, β (kontrola!), vypočítajte preponu AB.
b) Vypočítajte hodnoty goniometrických funkcií oboch uhlov α, β. Koľko je to rôznych čísel? Ktoré z vypočítaných funkčných hodnôt sú navzájom rovné?

141. V obr. 63 je $\sphericalangle HKX = R$, $\alpha_1 < \alpha_2$ a preto $\beta_1 > \beta_2$; zvoľte $\overline{HK} = 1$ dm. Viete, že je $\overline{KX}_1 < \overline{KX}_2$ a $\overline{HX}_1 < \overline{HX}_2$. Dokážte opäť ako v texte, že platí *tg* $\alpha_1 <$ *tg* α_2, *sin* $\alpha_1 <$ *sin* α_2, *cotg* $\alpha_1 >$ *cotg* α_2, *cos* $\alpha_1 >$ *cos* α_2. Vyslovte vetou!

142. Graficky môžeme sostaviť tabuľky hodnôt goniometrických funkcií použitím pravouhlých trojuholníkov, ktorých jednu stranu zvolíme tak, aby sa rovnala jednotke merania (najlepšie 1 dm). Na obr. 64a a obr. 64b sú takéto trojuholníky naznačené; vysvetlite a graficky určite tabuľky hodnôt funkcií uhlov $\alpha = 10°, 20°, \ldots, 80°$ (merajte na mm presne; pre uhly $\alpha < 60°$ narysujte obr. 64a tak, že $\overline{AC} = 2$ cm a za jednotku merania voľte 2 cm).



Obr. 64a.



Obr. 64b.

143. Pomocou obr. 64a dokážte, že funkcie *tg* α, *cotg* α ostrého uhla α môžu nadobudnúť ktorúkoľvek kladnú hodnotu. Podobne pomocou obr. 64b dokážte, že funkcie *sin* α, *cos* α ostrého uhla α môžu nadobúdať ktorúkoľvek kladnú hodnotu menšiu než jedna, t. j. $0 <$ *sin* $\alpha < 1$, $0 <$ *cos* $\alpha < 1$. Dokážte!

144. Určite graficky veľkosť uhla ω, ak je: a) $\sin \omega = \frac{3}{4}$; 0,46; b) $tg\ \omega = 2{,}5$; 0,52; c) $\cos \omega = 0{,}7$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $cotg\ \omega = 2\sqrt{2}$, 0,29.

145. Srovnajte podľa veľkosti uhly ε, φ, ψ, pre ktoré platí: (Použite výsledkov cvič. 141, veľkosť uhlov neurčujte.)
a) $tg\ \varepsilon = 1{,}75$, $tg\ \varphi = 0{,}36$, $tg\ \psi = 2$;
b) $\cos \psi = 0{,}3$, $\cos \varepsilon = 0{,}58$, $\cos \varphi = 0{,}998$;
c) $tg\ \varepsilon = 0{,}36$, $cotg\ \psi = \frac{4}{3}$, $tg\ \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

146. a) Na základe výsledkov cvič. 132 vyjadrite presno hodnoty goniometrických funkcií uhla 30°, 45°, 60° a vypočítajte ich približné hodnoty na tri desatinné miesta.
b) Na základe výsledkov cvič. 143 overte si správnosť vzorcov (4—7), ktoré platia identicky pre $0° < \alpha < 90°$.

147. Odhadnite veľkosť uhla ω v cvič. 145 použitím hodnôt funkcií uhla 30°, 45°, 60°.

148. Udajte pomocou hodnôt funkcií uhlov 30°, 45°, 60° medze, v ktorých ležia hodnoty goniometrických funkcií uhlov 20°, 40°, 50°, 70°.

149. Pre každý ostrý uhol α platí:
a) $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$;
b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 < 1$;
c) $tg\ \alpha + cotg\ \alpha \geqq 2$ (kedy platí rovnosť?).
(V cvičení a), b) použite obr. 64a, v cvič. c) použite výsledok cvič. 138.)

150. Viete, že danej hodnote goniometrickej funkcie prislúcha jediný ostrý uhol. Čo z toho súdite o ostrých uhloch φ, ω, o ktorých platí a) $\sin \omega = \cos \varphi$; b) $tg(R - \omega) = cotg\ \varphi$; c) $cotg\ (45° - \omega) = tg(45° + \varphi)$; d) $tg\ \omega = \frac{4}{5}$; $tg\ \varphi = \frac{5}{6}$; e) $cotg\ \omega = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $cotg\ \varphi = \frac{1}{4}\sqrt{5}\,5$; f) $\sin \omega = \frac{3}{5}$; $\sin \varphi = \frac{2}{3}$; g) $\cos \omega = \frac{3\sqrt{2}}{3}$; $\cos \varphi = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

151. Upravte výrazy s použitím vlastností funkcií a) $\sin 72° + tg\ 75° - \cos 18° - cotg\ 15°$; b) $\sin^2 15° + \sin^2 75°$; c) $tg\ 56° . cotg\ 34°$; d) $\cos (30° - \alpha) + tg\ 60° . tg\ 30° - \sin(60° + \alpha)$ (pre ktoré α má tento výraz význam?).

152. Bez počítania veľkosti uhla α určite hodnoty ostatných funkcií tohoto uhla, ak viete, že je: a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$; $\frac{3\sqrt{2}}{5}$; c) $tg\ \alpha = \frac{24}{7}$; $\sqrt{3}$; d) $cotg\ \alpha = \frac{5}{12}$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

18. Tabuľky goniometrických funkcií.

Hodnoty goniometrických funkcií sú vypočítané a sostavené do tabuliek. Stručne opíšeme tabuľku na štyri desatinné miesta zaokrúhlených hodnôt goniometrických funkcií tých ostrých uhlov, ktoré sa rovnajú celému počtu stupňov alebo sú o 10, 20, 30, 40, 50 minút väčšie. Tabuľka je na dvoch stranách. Ľavá strana udáva sinus pre ostré uhly menšie ako 45°. Každý riadok odpovedá určitému počtu stupňov. V prvom riadku udáva sa počet minút. Záhlavie (prvý riadok) a riadky odpovedajúce 25, 26, 27, 28, 29, 30 stupňom sú:

sin 0° × 45°

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′
25°	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384
26°	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540
27°	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695
28°	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848
29°	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000
30°	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150

Podľa toho napr. *sin* 27°40′ = 0,4643. Pretože *sin* α je pre každý ostrý uhol menší než 1, máme vo všetkých prípadoch pred desatinnou čiarkou nulu. (Táto nula sa pre stručnosť v niektorých tabuľkách uvádza len pri tých uhloch, ktoré sú násobkami 5°, napr. sin 25° = 0,4226; sin 30° = 0,5000; ak je nad poslednou číslicou vodorovná čiarka, znamená to, že zaokrúhlenie je vzostupné, že skutočná hodnota je oniečo menšia.)

Vieme, že keď zväčšíme α, zväčší sa aj *sin* α. Dá sa dokázať, že pri malých zväčšeniach je zväčšenie čísla *sin* α približne úmerné zväčšeniu uhla α. Toto môžeme použiť na tzv. interpoláciu (to je latinské slovo, ktoré znamená vsunutie). Pomocou interpolácie určíme napr. *sin* 27°12′ takto:

Podľa tabuliek je *sin* 27°10′ = 0,4566; *sin* 27°20′ = 0,5492; na zväčšenie uhla α o 10′ pripadá zväčšenie čísla *sin* α o rozdiel 0,4592 — 0,4566 alebo $26 . 10^{-4}$, z toho pripadá na zväčšenie o 1′ približne $2{,}6 . 10^{-4}$, teda na zväčšenie o 2′ približne $5{,}2 . 10^{-4}$, zaokrúhlene $5 . 10^{-4}$ alebo 0,0005. Pretože 0,4566 + 0,0005 = 0,4571, je *sin* 27°12′ = 0,4571. Podobne určíme napr. *sin* 27°17′. Pre pohodlnú interpoláciu sa v tabuľkách udáva okrem hodnoty *sin* 26°50′ = = 0,4514 ešte hodnota *sin* 26°60′ = 0,4540, ktorá sa opakuje v nasledujúcom riadku, lebo 26°60′ = 27°.

Na nasledujúcich stranách tabuliek sú hodnoty *tg* α pre ostré uhly, a to na ľavej pre menšie než 45°. Aj tieto hodnoty sú menšie než 1; lebo k uhlu $\alpha < 45°$ máme doplnkový uhol $\beta > 45°$; proti α je odvesna a, proti β je odvesna b; ale proti väčšiemu uhlu leží väčšia strana, takže $b > a$; pretože *tg* $\alpha = a : b$, je *tg* $\alpha < 1$. Obdobne usúdime, že hodnoty *tg* α uhlov $\alpha > 45°$ sú väčšie ako 1; tieto sú na pravej strane tabuliek. Interpolácia deje sa podľa tých zásad, ako pri funkcii sinus a netreba ju tu preto uvádzať; pomocou interpolácie určíme napr. $tg\ 35°14' = 0{,}7063$. Práve tak pri popise druhej stránky tabuliek nebudeme hovoriť o interpolácii.

Tabuľky hodnôt *sin* α sú zároveň tabuľkami hodnôt *cos* α a podobne tabuľky hodnôt *tg* α sú zároveň tabuľkami hodnôt *cotg* α. Ale pre tieto hodnoty platí záhlavie dolu a príslušný počet stupňov udáva pravý krajný stĺpec. Hodnoty čísla *cos* α pre uhly $\alpha > 45°$ sú zase menšie než 1; rozdiel proti predchádzajúcim prípadom je len v tom, že pri zväčšení uhla α číslo *cos* α sa zmenšuje. Hodnoty *cotg* α pre uhly $\alpha < 45°$ sú väčšie než 1 a pred desatinnou čiarkou už nie je nula. Záhlavie (posledný riadok) a riadky, odpovedajúce počtu stupňov 12, 13, 14, 15, sú tu:

3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6470	3,6891	3,7321	15°
3,7321	3,7760	3,8208	3,8667	3,9136	3,9617	4,0108	14°
4,0108	4,0611	4,1126	4,1653	4,2193	4,2747	4,3315	13°
4,3315	4,3897	4,4494	4,5107	4,5736	4,6382	4,7046	12°
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.
60'	**50'**	**40'**	**30'**	**20'**	**10'**	**0'**	**I**

cotg 0° × 45°

Podľa toho je napr. *cotg* $13°20' = 4{,}2193$.

Hodnoty *cos* α, *cotg* α uhlov $\alpha > 45°$ sú na ľavej strane a uhlov $\alpha < 45°$ na pravej strane; lebo, ak je ostrý uhol α väčší než 45°, je doplnkový uhol α menší než 45° a hodnoty goniometrických funkcií uhla α vyjadrujú sa pomocou hodnôt goniometrických funkcií uhla α menšieho než 45° na základe vzorca (7) článku 18. Posledný riadok a posledný stĺpec na oboch stranách tabuľky uľahčujú praktický postup.

Viete, že podľa tabuľky druhých mocnín môžeme počítať nielen druhé mocniny, ale aj druhé odmocniny. Podobne podľa tabuľky goniometrických uhlov môžeme nielen počítať hodnoty goniometrických funkcií daného ostrého uhla, ale aj počítať, čomu sa rovná ostrý uhol α, ak je známa hodnota niektorej eho goniometrickej funkcie. Pritom treba najprv uvážiť, či uhol α bude menší alebo väčší než 45° podľa toho, že: pre uhol $\alpha < 45°$ je *sin* $\alpha < 0{,}7071$; *cos* $\alpha > 0{,}7071$; *tg* $\alpha < 1$; *cotg* $\alpha > 1$; pre uhol $\alpha > 45°$ je to naopak.

Daná hodnota goniometrickej funkcie obyčajne nebude priamo v tabuľke, ale bude medzi dvoma hodnotami, vyskytujúcimi sa v tabuľke. Ak vezmeme z nich tú, ktorá je bližšie danej hodnote, dostaneme hodnotu uhla α, zaokrúhlenú na 10'; v praxi to postačí. Môžeme však určiť aj hodnotu uhla α, zaokrúhlenú na minúty pomocou interpolácie. Vysvetlíme si to na príklade:

Určite ostrý uhol α, ak je dané $tg\,\alpha = 2$. V tabuľke nájdeme k číslu 2 najbližšie hodnoty tangenty: $tg\,63°20' = 1{,}9912$, $tg\,63°30' = 2{,}0057$. Druhá hodnota je bližšie číslu 2, preto $\alpha' = 63°30'$, presne na desiatky minút. Ak chceme zistiť uhol α s presnosťou minút, vyjdeme od najbližšej nižšej hodnoty: $tg\,63°20' = 1{,}9912$. Rozdiel medzi touto a nasledujúcou tabuľkovou hodnotou tangenty je $145 . 10^{-4}$. Z toho pripadá na jednu minútu rozdiel $14{,}5 . 10^{-4}$; rozdiel medzi číslami $tg\,63°30' = 1{,}9912$, $tg\,\alpha = 2$ je $88 . 10^{-4}$; je teda približne šesťkrát väčší, čo zodpovedá 6 minútam; teda uhol α je asi o $6'$ väčší ako $63°20'$, t. j. $\alpha = 63°26'$ presne na minúty.

Cvičenie.

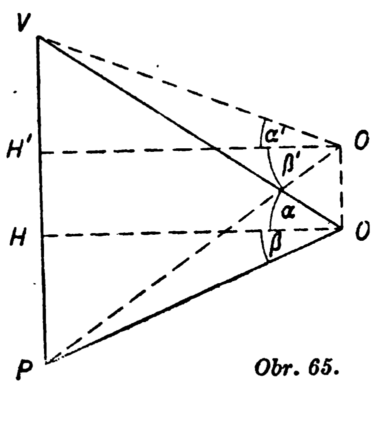
153. Určite hodnoty goniometrických funkcií uhla: a) $\alpha = 18°36'$; b) $\beta = 73°48'$; c) $\gamma = 58°7'$. Správnosť výsledkov si aspoň zhruba overte použitím vzorcov (4)—(7) z odseku 18.

154. Určite ostrý uhol α, ak je dané: a) $tg\,\alpha = 0{,}6$; $1{,}70$; b) $sin\,\alpha = 0{,}32$; $0{,}7999$; c) $cotg\,\alpha = 1{,}6$; $\frac{5}{7}$; d) $cos\,\alpha = 0{,}81$; $\frac{7}{22}$.

155. K danej hodnote funkcie určite príslušný ostrý uhol α: a) $tg\,2\alpha = 1{,}44$; b) $tg\,(2\alpha + 10°) = 2{,}66$; c) $cotg\,(49° - \alpha) = 1{,}542$; d) $sin\,(3\alpha + 12°) = 0{,}7$; e) $sin\,(2\alpha - 5°18') = 0{,}533$.
Vykonajte najprv odhad uhlov α na základe danej hodnoty goniometrickej funkcie; napr. z rovnice $tg\,(3\alpha - 15°) = 1{,}84$ plynie, že $60° < 3\alpha - 15° < 90°$, $15° < \alpha < 35°$.

19. Použitie goniometrických funkcií.

Goniometrické funkcie vyjadrujú vzťah medzi uhlami a dĺžkami; preto sa používajú vo všetkých úlohách, v ktorých sa má vypočítať veľkosť nejakej vzdialenosti na základe veľkosti nejakého uhla alebo obrátene, veľkosť nejakého uhla na základe veľkosti nejakej vzdialenosti. Takéto uhly sa vyskytujú v teórii i v praxi. V tejto triede obmedzíme sa na také úlohy, v ktorých sa ľahko nájde pomocný pravouhlý trojuholník, potrebný na riešenie úlohy.



Obr. 65.

Príklad: Z okna, ktoré je 8 m nad zemou, vidíme vrchol veže vo výškovom uhle 50°, pätu v hĺbkovom uhle 14°.

a) Aká vysoká je veža? b) Ako ďaleko je dom od veže? c) Ako by sa zmenil hĺbkový a výškový uhol, keby bolo okno 20 m nad zemou?

Riešenie (obr. 65): Označíme: O okno, V vrchol veže, P pätu veže, H to miesto veže, ktoré je v takej výške ako okno, takže $\overline{HP} = 8$ m. Ďalej označíme $\alpha = 50°$, $\beta = 14°$ oba namerané uhly, a predpokladajme, že boly odmerané presne na stupne. Ďalej predpokladajme, že výška okna 8 m (presnejšie toho miesta v okne, z ktorého boly merané uhly α, β) bola určená presne na decimetre. V pravouhlom $\triangle HPO$ poznáme odvesnu $\overline{HP} = 8$ m (volíme 1 m za jednotku dĺžky) a protiľahlý uhol β. Na riešenie úlohy b) máme nájsť druhú odvesnu $\overline{HO}$. Použijeme tú funkciu, ktorá vyjadruje vzťah medzi hľadanou dĺžkou $\overline{HO}$ a danými veličinami $\overline{HP}$, β:

$$\frac{\overline{HO}}{\overline{HP}} = cotg\,\beta, \quad \overline{HO} = 8\,cotg\,\beta.$$

Z tabuliek nájdeme $cotg\,\beta = 4{,}0108$, teda $\overline{HO} = 32{,}0864$. Pretože však uhol β bol presne zmeraný na stupne, vieme o jeho veľkosti len toľko, že $\beta < 14°30'$, $\beta > 13°30'$ a preto o čísle $cotg\,\beta$ vieme vlastne len toľko, že $cotg\,\beta < 4{,}1653$, $cotg\,\beta > 3{,}8667$ a okrem toho v rovnici $\overline{HO} = 8\,cotg\,\beta$ prvý činiteľ na ľavej strane nemusí sa v skutočnosti presne rovnať 8, ale vieme o ňom len toľko, že je:

$$\text{väčší než } 8 - \frac{1}{20}; \quad \text{menší než } 8 + \frac{1}{20}.$$

Preto o čísle $\overline{HO}$ vieme len toľko, že je:

$$\text{väčšie než } \left(8 - \frac{1}{20}\right).3{,}9667; \text{ menšie než} \left(8 + \frac{1}{20}\right).4{,}1653,$$

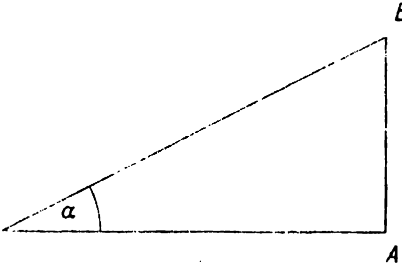
alebo že je zaokrúhlene: menšie než 33,53, väčšie než 30,74. Preto z vypočítanej hodnoty použijeme len nespornú prvú číslicu a približnú hodnotu nasledujúcej číslice $\overline{HO} = 32$. Odpoveď na otázku b) teda bude: Vzdialenosť od domu k veži je 32 m. Odpoveď na otázku a) vyžaduje výpočet dĺžky $\overline{VH}$. V pravouhlom $\triangle VHO$ poznáme odvesnu $\overline{HO} = 32$ a priľahlý uhol β. Je teda

$$\frac{\overline{VH}}{\overline{HO}} = tg\,\alpha, \quad \overline{VH} = 32 . tg\,\alpha,$$

pričom nemá smysel počítať $\overline{VH}$ presnejšie ako na metre. V tabuľkách nájdeme $tg\,\alpha = 1{,}1918$, teda $\overline{VH} = 38$. Pretože $38 + 8 = 46$, odpoveď na otázku a) bude: Výška veže je asi 46 m.

Na špeciálnej mape s mierkou 1 : 75 000 vrstevnice svahu s kótami 200 m a 400 m sú vzdialené 8 mm; koľko stupňové stúpanie má svah? Na špeciálnej mape 8 mm je v skutočnosti 600 m. Táto vzdialenosť — označme ju d — je vodorovnou odvesnou v pravouhlom trojuholníku, ktorého prepona c je spádnicou svahu a rozdiel kót vrstevníc $b = 100$ m je druhou odvesnou. Ak označíme uhol stúpania α, je $tg\ \alpha = \frac{b}{d} = 0{,}3333$. Z tabuliek vyhľadáme $\alpha = 18°26'$.

Ako sme už povedali, podobné úlohy budeme preberať až v tretej triede. Už teraz však bude užitočná poznámka, týkajúca sa rysovania uhlov danej veľkosti. Také to uhly rysovali sme doteraz pomocou uhlomerov. Omnoho presnejšie narysujeme uhol danej veľkosti pomocou tabuľky funkcie tangenty. Ak máme narysovať napr. uhol $\alpha = 27°$, nájdeme v tabuľkách, že $tg\ 27° = 0{,}5095$. Ak je polpriamka VA jedno rameno hľadaného uhla α, zvolíme si (obr. 66) bod A tak, že $\overline{VA} = 5$ cm. Na kolmici, vztýčenej na priamku VA v bode A, určíme bod B tak, aby bol $\alpha = \sphericalangle AVB$. Na to je treba, aby bolo $tg\ \alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{VA}}$, teda $\overline{BA} = 5 . tg\ \alpha$ v centrimetroch, to jest $\overline{BA} = 2{,}5475$ cm. Túto dĺžku nanesieme pomocou lineára čo najpresnejšie; tým určíme polohu bodu B a dostaneme $\alpha = \sphericalangle BVA$ omnoho presnejšie, než pomocou uhlomera. Volili sme $\overline{VA} = 5$ cm, čo, pravda, nie je podstatné; ale voľba malej úsečky $\overline{VA}$ viedla by k nepresnej konštrukcii a voľba priveľkej úsečky $\overline{VA}$ viedla by k tomu, že by sa bod B nenachodil v sošite. Pri veľkom uhle α volíme $\overline{VA}$ o niečo menšie než 5 cm; napr. pre $\alpha = 80°$ volíme $\overline{VA} = 1$ cm; pretože podľa tabuliek je $tg\ 80° = 5{,}0713$, bude $\overline{AB} = 5{,}07$ cm. Ak máme narysovať uhol tupý, narysujeme najprv ostrý uhol, ktorý je k nemu vedľajší.



Obr. 66.

Cvičenie.

156. V $\triangle ABC$ je $\sphericalangle C = R$. Určite ostatné strany a uhly, ak je dané: a) $a = 48$ cm; $c = 60$ cm; b) $\beta = 15$ m, $b = 20$ m; c) $c = 2{,}7$ m $\alpha = 53°17'$; d) $a = 6{,}1$ dm; $\alpha = 39°45'$; e) $b = 7{,}6$; $\beta = 73°26'$.

157. V kvádri o rozmeroch $a = 6{,}5$ cm, $b = 3{,}7$ cm, $c = 12{,}6$ cm určite: a) veľkosť všetkých stenových uhlopriečok a telesové uhlopriečky, b) uhly, ktoré tvorí telesová uhlopriečka so stenovými uhlopriečkami, ktoré majú s ňou spoločný krajný bod;

c) uhly, ktoré tvorí jedna telesová uhlopriečka s troma ostatnými telesovými uhlopriečkami;

d) obsah obdĺžnika, v ktorom rovina ϱ, položená hranou a, pretína povrch kvádra, ak jej uhol s podstavnou rovinou (a, b) je $\omega = 36\frac{1}{2}°$.

158. Určite polovičný obvod pravidelného n-uholníka, ktorý je kružnici $(S, r = 1)$ a) opísaný, b) vpísaný. Číselné výpočty vykonajte pre $n = 6, 12, 24, 48$, usporiadajte výsledky podľa veľkosti a povedzte výsledok svojho pozorovania.

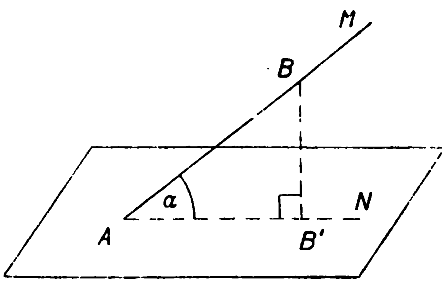
159. Pozorovací balón B vznáša sa nad vodorovnou krajinou práve nad miestom P. Balón je ožiarený lúčmi svetlometu S, ktoré s vodorovnou (horizontálnou) rovinou tvoria výškový uhol $\sigma = \sphericalangle PSB = 47°$. Horizontálna vzdialenosť $\overline{SP}$ svetlometu a balóna je 3,5 km. Určite výšku balóna nad krajinou a jeho vzdialenosť od svetlometu. (Výškový uhol σ balóna B v pozorovacom mieste S má jedno rameno SB a druhé rameno SP je vždy vodorovné a leží vo svislej (vertikálnej) rovine, položenej ramenom $\overline{SB}$.)

160. Pod ktorým hĺbkovým uhlom (jedno jeho rameno je vždy vodorovné) vidieť s vrcholu veže 60 m vysokej predmet, ktorý leží na zemi v horizontálnej rovine päty veže, ak je od veže vzdialený 96 m?

161. S vrcholu kopca, ktorý je 75 m nad vodnou hladinou, vidieť presne za sebou dve loďky. Hĺbkový uhol jednej je $\alpha = 64°$, hĺbkový uhol druhej je $\beta = 48°$. Určite vzdialenosť oboch lodiek.

162. Lietadlo letí k východu vo výške 800 m. Pozorovateľ vidí nádrž na plyn smerom k juhu pod hĺbkovým uhlom 29°; o 15 sekúnd neskoršie vidí tú istú nádrž na plyn smerom k juhozápadu. Určite rýchlosť lietadla!

163. Na krajoch letišťa sú signalizačné stožiare A, B. A je 800 m západne od B. Lietadlo letí priamo vo smere J 30° Z (t. j. smerom, ktorý je medzi juhom a západom a tvorí 30° so smerom južným). Pozorovateľ v lietadle vidí stožiar B vo smere J 10° Z, stožiar A vo smere J 40° Z. Ako bude ďaleko lietadlo od A a od B, keď sa dostane medzi oba stožiare?



Obr. 67.

164. a) Stúpanie a klesanie železničnej trate alebo cesty udáva sa v promiľach (alebo v percentách); ak stúpne trať AB (pozri obr. 67) na 1 km o 12 m, je stúpanie 12‰. Aké je stúpanie trate AB na obr. 67, ak v skutočnosti $\overline{AB} = t$ metrov a $\overline{BB'} = v$ metrov; o ktorú funkciu uhla $\alpha = \sphericalangle BAB'$ vlastne ide?

b) Spádom priamky AB (obr. 67) rozumieme pomer $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}$, ktorého číselná hodnota udáva sa obyčajne v tvare $1/n$, napr. 1 : 25. O ktorú funkciu uhla $\alpha = \sphericalangle BAB'$ tu ide? Usporiadajte podľa veľkosti uhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ku ktorým patria spády 1:1 , 1 : 0,9, 1 : 1,5.

c) V strojníctve užíva sa názov **úkos klina** ABB'; je to opäť pomer $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}$. Narysujte prierez klina ABB', ak je $\overline{AB'} = 85$ m a úkos je $1 : 0{,}5$.

165. Pomocou hodnoty *tg* α narysujte ostrý uhol α, ak je: a) $\alpha = 45°$; b) $\alpha = 4°37'$; c) $\alpha = 76°34'$.

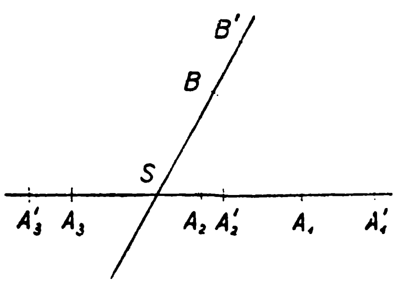
166. Narysujte ľubovoľný uhol $\alpha = \sphericalangle MAN$ (pozri obr. 67) a určite jeho tangentu a pomocou tabuliek udajte jeho veľkosť v miere a) stupňovej, b) oblúkovej.

(Na AN zvoľte B' a vztýčte kolmicu $\overline{BB'} \perp AN$; ak je $\overline{AB'} = 1$ dm, číselná hodnota veľkosti $\overline{BB'}$ v dm je tg α; z tabuliek určíte α.)

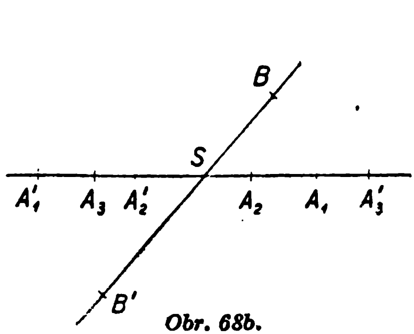
20. Rovnoľahlosť.

Doteraz sme preberali len podobnosť trojuholníkov. Teraz si preberieme jeden dôležitý prípad podobnosti ľubovoľných útvarov; to je tzv. **rovnoľahlosť.** Zvoľme si ľubovoľný bod S a ľubovoľné číslo k, kladné alebo záporné, ale iné ako nula; bod S je **stredom rovnoľahlosti, číslo** k **koeficientom rovnoľahlosti.** Teraz priradíme každému bodu roviny určitý bod ako obraz takto: Bod S je samodružný, t. j. splynie so svojím obrazom. Ak je bod A iný než bod S, leží jeho obraz A' na priamke SA vo vzdialenosti $\overline{SA'} = |k| . \overline{SA}$ od bodu S, a to pri kladnom k na polpriamke SA, pri zápornom k na polpriamke opačnej k SA. Pozri obr. 68a ($k = \frac{3}{2}$), obr. 68b ($k = -\frac{3}{2}$), obr. 67c ($k = \frac{1}{2}$), obr. 68d ($k = -\frac{1}{2}$); v každom obrázku sú vyznačené obrazy dvoch bodov A_1, A_2 na rovnakej polpriamke so začiatkom S, bodu A_3 na opačnej polpriamke a bodu B, ležiaceho mimo priamky SA_1.

Pre $k = 1$ rovnoľahlosť je totožnosť; pre $k = -1$ rovnoľahlosť je stredová súmernosť, teda shodnosť. Ak je $k \neq 1$, $k \neq -1$, rovnoľahlosť nie je shodnosť, ale, ako uvidíme, je to podobnosť.

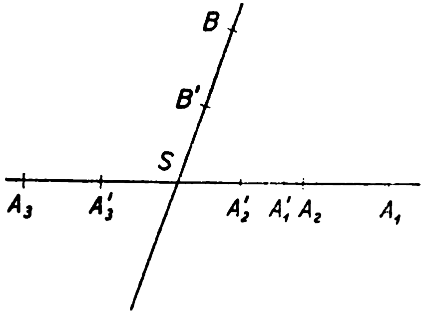


Obr. 68a.

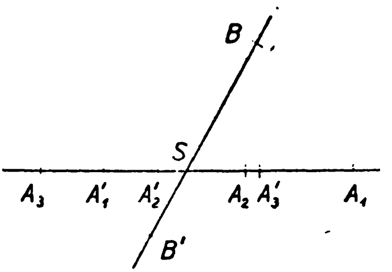


Obr. 68b.

Ak je A' obrazom bodu A pri rovnoľahlosti (S, k), t. j. pri rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom k, nazvime A vzorom bodu A' pri tej istej rovnoľahlosti. Bod A je potom obrazom bodu A' pri rovnoľahlosti $(S, 1/k)$, ktorá má ten istý stred, ale iný koeficient. Dve rovnoľahlosti (S, k_1), (S, k_2) s tým istým stredom môžeme složiť, t. j. k ľubovoľnému bodu A môžeme určiť najprv jeho obraz A^* pri rovnoľahlosti (S, k_1) a potom obraz A' bodu A pri rovno-



Obr. 68c.



Obr. 68d.

ľahlosti (S, k_2). Ľahko uvážime, že bod A' je obrazom bodu A pri rovnoľahlosti (S, k_1k_2) s tým istým stredom S, ktorej koeficient je súčinom pôvodných koeficientov. Najmä rovnoľahlosť $(S, -k)$ dostane sa složením rovnoľahlosti (S, k) so stredovou súmernosťou, ktorej vlastnosti poznáme. Preto sa môžeme pri dôkaze vlastností rovnoľahlosti obmedziť na prípad kladného k; dokonca sa môžeme obmedziť na prípad $k > 1$, lebo prípad $k = 1$ je totožnosť a prípad kladného $k < 1$ prejde v prípad $k > 1$ zámenením vzoru s obrazom.

Ak sú A' B' obrazy dvoch bodov A, B v rovnoľahlosti (S, k), je

$$\overline{A'B'} = |k| . \overline{AB}. \tag{1}$$

D ô k a z. To je jasné, keď A alebo B splynie s bodom S. Ak splynú polpriamky SA, SB a ak napr. $SA < SB$, je

$$\overline{AB} = \overline{SA} - \overline{SB} \qquad \overline{A'B'} = \overline{SA'} - \overline{SB'}$$

$$\overline{SA'} = |k| . \overline{SA} \qquad \overline{SB'} = |k| . \overline{SB}$$

a z toho plynie (1). Ak sú SA, SB dve opačné polpriamky, je

$$\overline{AB} = \overline{SA} + \overline{SB}; \qquad \overline{A'B'} = \overline{SA'} + \overline{SB'}$$

$$\overline{SA'} = |k| \, \overline{SA} \qquad \overline{SB'} = |k| \, \overline{SB}$$

a z toho plynie (1). Keď body S, A, B neležia v jednej priamke, je

$$\triangle ASB \sim \triangle SA'B' \qquad (2)$$

podľa vety II na str. 59, lebo je

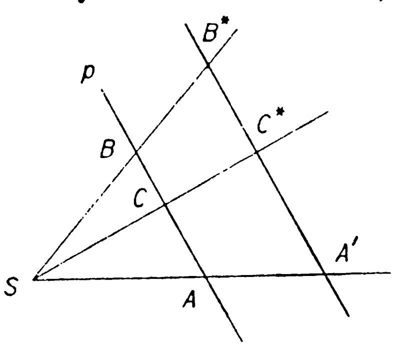
$$\overline{SA'} = |k| . \overline{SA} \qquad \overline{SB'} = |k| . \overline{SB} \qquad (3)$$

a okrem toho $\sphericalangle ASB = \sphericalangle A'SB'$ (oba uhly splynú v rovnoľahlosti s kladným k a sú vrcholové v rovnoľahlosti so záporným k); z (2) a (3) plynie (1).

Obraz p' priamky p v rovnoľahlosti (S, k) je priamka rovnobežná s priamkou p; rovnobežnosť je súhlasná pri kladnom k, nesúhlasná pri zápornom k.

Dôkaz: O prípade stredovej súmernosti $k = -1$ je nám to známe (str. 45). Stačí, ako prvšie, vykonať dôkaz pre kladné $k > 1$.

Nech je teda $k > 1$ a nech sú na priamke p tri body A, B, C; máme dokázať, že ich obrazy A', B', C' ležia na priamke p', súhlasne rovnobežnej s p. To je všetko jasné, ak priamka p prechádza bodom S. Ak priamka p neprechádza bodom S a ak z bodov A, B, C napr. bod C leží medzi ostatnými dvoma (obr. 70), postupujeme takto: Nech je A' obrazom bodu A; pretože $k > 1$, leží bod A vnútri úsečky SA'; rovnobežka s priamkou AB, vedená bodom A', pretne priamku SB v bode B^* a priamku SC v bode C^*. Ľahko zistíme, že body S, A' sú od seba oddelené priamkou p, ale body A', B^*, C^* nie sú od seba oddelené priamkou p; z toho plynie, že body S, B^* sú od seba oddelené priamkou p a že to isté platí o bodoch S, C^*. To znamená, že bod B leží vnútri úsečky SB^* a podobne bod C vnútri úsečky SC^*. Úsečky AA', BB^* sa nepretnú, takže $AB // A'B^*$ (súhlasná rovnobežnosť!); okrem toho leží bod A vnútri strany SA', bod B vnútri strany SB^* trojuholníka $SA'B^*$. Podľa (5), (6) je teda $\triangle SAB \sim \triangle SA'B^*$ a pretože $\overline{SA'} = |k| . \overline{SA}$, musí byť aj $\overline{SB^*} = |k| . \overline{SB}$. Z toho plynie, že B^* splynie s obrazom B' bodu B v našej rovnoľahlosti a rovnako sa zistí, že bod C^* splynie s obrazom C' bodu C. Teda body A', B', C' ležia na priamke a je $AB // A'B'$, čím je všetko dokázané.



Obr. 70.

Obraz $\sphericalangle A'B'C'$ uhla $\sphericalangle ABC$ v rovnoľahlosti je uhol jemu rovný.

Podľa predchádzajúceho sú ramená oboch uhlov súhlasne rovnobežné pre $k > o$, nesúhlasne rovnobežné pre $k < o$, takže oba uhly sú sebe rovné podľa viet na str. 46.

Dokázali sme, že veľkosť uhlov sa pri rovnoľahlosti nemení. Na str. 75 sme si dokázali, že v rovnoľahlosti odpovedajúce si úsečky sú úmerné. Teda rovnoľahlosť je podobnosť; ak je k koeficientom rovnoľahlosti, je kladné číslo k koeficientom podobnosti.

Cvičenie.

167. K danému (dosť veľkému) štvoruholníku $ABCD$ sostrojte rovnoľahlé štvoruholníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ pre koeficienty rovnoľahlosti $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = -\frac{3}{5}$. Stred rovnoľahlosti S zvoľte: a) vnútri štvoruholníka, b) mimo štvoruholníka, c) vnútri strany AB, d) vo vrchole C daného štvoruholníka. V akom vzťahu sú štvoruholníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$?

168. Narysujte priamku $ABCDE$ tak, aby bolo $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 3{,}6$, $\overline{CD} = 4{,}2$, $DE = 1{,}2$ a priamku $A'B'C'D'E'$ s ňou rovnobežnú vo vzdialenosti 5,5 tak, aby bolo $\overline{A'B'} = 2{,}5$, $\overline{B'C'} = 3$, $\overline{C'D'} = 3{,}5$, $\overline{D'E'} = 1$. Dokážte, že body A', B', C', D', E' sú obrazy bodov A B, C, D, E v určitej rovnoľahlosti (S, k). Vyšetrite vzdialenosť stredu S od oboch daných priamok! (Sú dve možnosti: $AB // A'B'$; $AB // B'A'$.)

169. Ak je $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ a $AB // A'B'$, $BC // B'C'$ je aj $CA // C'A'$. Trojuholníky sú potom buď rovnoľahlé, alebo, ak sú shodné, vznikne jeden z druhého posunutím. Ak je $AB // B'A'$, $BC // C'B'$, je aj $CA // A'C'$. Trojuholníky sú potom rovnoľahlé; v prípade, že sú shodné, sú súmerné podľa stredu. Dokážte!

170. $\triangle A_2B_2C_2$ vznikol z $\triangle A_1B_1C_1$ rovnoľahlosťou (S, k). $\triangle A_3B_3C_3$ vznikol z $\triangle A_1B_1C_1$ rovnoľahlosťou (S, k'). V akom vzťahu sú trojuholníky $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ a v ktorom pomere sú ich príslušné strany?

171. Obrazom trojuholníka $A_1B_1C_1$ v rovnoľahlosti (S_{12}, k) je $\triangle A_2B_2C_2$, ale v rovnoľahlosti (S_{13}, k') je $\triangle A_3B_3C_3$; body S_{12}, S_{13} sú rôzne. Oba trojuholníky $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ sú buď rovnoľahlé v rovnoľahlosti $(S_{23}, k'/k)$, pričom stred S_{23} leží na priamke $S_{12}S_{13}$, alebo dajú sa stotožniť posunutím. Dokážte! (Použite výsledok cvič. 174. Pre $k = k'$ je $S_{12}S_{13} // A_3A_2$. Pre $k \neq k'$ hľadajte obrazy X_1, X_3 bodu $X_2 \equiv S_{12}$.)

172. Ak je $\triangle AB \backsim \triangle A'B'C'$ a ak sú oba toho istého smyslu, možno určiť rovnoľahlosť a otočenie tak, že jeden prejde v druhý.

173. Každým vrcholom $\triangle ABC$ veďte rovnobežku s protiľahlou stranou, tým vznikne $\triangle A'B'C'$. Dokážte:
   a) Oba trojuholníky ABC, $A'B'C'$ sú rovnoľahlé; stredom rovnoľahlosti s koeficientom $k = -2$ je ich spoločné ťažisko T, ktoré je priesečíkom ťažníc AA', BB', CC' v trojuholníku ABC.
   b) Stred S' kružnice opísanej trojuholníku $A'B'C'$ je zároveň priesečíkom V výšok trojuholníka ABC.

c) Stred S kružnice opísanej v trojuholníku ABC leží na priamke TV (tzv. Eulerova priamka*) tak, že deliaci pomer $(SVT) = -\frac{1}{2}$.

d) Stred kružnice $\triangle A'B'C'$ opísanej leží (1) vnútri, (2) na jednej strane, (3) mimo $\triangle A'B'C'$ podľa toho, či je to trojuholník (1) ostrouhlý, (2) pravouhlý, (3) tupouhlý. (Na dôkaz použite priesečík V výšok v $\triangle ABC$.)

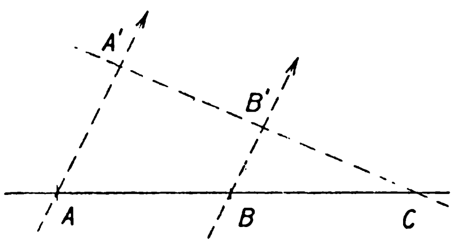
174. Dané sú dve rôznobežky MSM', NSN' a mimo nich bod A. Bodom A veďte priamku, ktorá pretne prvú priamku v bode U, druhú v bode V, a to tak, že $\dfrac{\overline{SU}}{\overline{SV}} = \dfrac{2}{3}$. Koľko riešení má úloha?

175. Dve rôznobežky a, b pretínajú sa v bode S, ktorý leží mimo nákresňu. Daný bod H spojte s bodom S. (Na priamke a zvoľte dva rôzne body A, A' (iné ako S), na priamke b bod B; sostrojte $\triangle A'B'H'$ rovnoľahlý s $\triangle ABH$ vzhľadom na stred S rovnoľahlosti!)

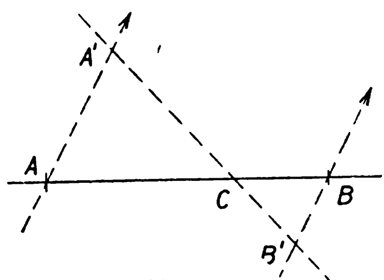
176. Čo vyplňujú všetky body, ktorých vzdialenosti od dvoch rôznych priamok a, b sú v danom pomere $\dfrac{m}{n}$? (Dva prípady.)

177. Pomocou rovnoľahlosti sostrojte $\triangle ABC$, ak je dané:
a) výška $v_3 = 4$, $a : b : c = 4 : 5 : 7$,
b) polomer vpísanej kružnice $\varrho = 1{,}5$, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, $\beta = \frac{5}{12}\pi$.

178. Majme dva geometrické útvary (napr. mnohouholníky) a premiestime ich tak, že sú v novej polohe shodné s pôvodnými; ak sa podarí vykonať toto premiestenie tak, že oba útvary sa stanú v novej polohe rovnoľahlými vzhľadom na určitý stred S, potom hovoríme, že pôvodné útvary sú navzájom podobné. Dokážte:
a) Príslušné uhly dvoch podobných útvarov sú rovnaké.
b) Príslušné úsečky dvoch podobných útvarov sú v stálom pomere.



Obr. 70.



Obr. 71.

179. Dokážte:
a) Každé dva štvorce sú podobné.
b) Každé dva pravidelné n-uholníky sú podobné.
c) Dva kosoštvorce sú podobné, ak sa shodujú v jednom uhle.

---

* Slávny matematik Leonhard Euler (1707—1783), pôvodom švajčiarsky Nemec, bol profesorom vtedy práve založenej Akadémie vied v Petrohrade, kde tiež umrel.

d) Dva rovnobežníky sú podobné, ak sa shodujú v pomere uhlopriečok a v uhle oboch uhlopriečok alebo v pomere dvoch strán, ktoré vychádzajú z toho istého vrchola, a v jednom uhle.

180. a) Úlohu určiť bod C na priamke AB tak, aby platilo $(ABC) = \frac{m}{n}$, kde $m \neq 0$, $n > 0$ sú dané celé čísla, možno riešiť graficky. Dokážte správnosť konštrukcie bodu C, vykonanú na obr. 70.

a) Pre $m > 0$ v obr. 70, b) pre $m < 0$ v obr. 71, ak je $\overline{AA'} = |m|$, $\overline{BB'} = n$ a ak sú priamky AA', BB' rovnobežné. (Berte do úvahy rovnoľahlé trojuholníky $AA'C$, $BB'C$.)

181. Určite bod C tak, aby platilo:

a) $(ABC) = 3{,}5$; b) $(ABC) = \frac{3}{4}$; c) $(ABC) = -\frac{2}{3}$;

d) $(ABC) = -\frac{3}{4}$; e) $(ABC) = -1$; f) $(ABC) = -\frac{1}{3}$.

V. KRUŽNICA

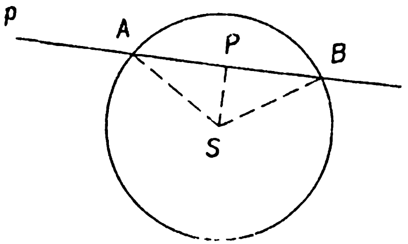
21. Opakovanie o kružnici. V predchádzajúcich odsekoch zopakovali sme časť geometrických poznatkov, získaných na strednej škole, a na ne sme nadviazali rad nových poznatkov. Opakovali sme preto, aby sa čo najviac uplatnila súvislosť s novými poznatkami, tvoriacimi vlastný program tejto triedy a aby sme čo najlepšie pripravili látku určenú pre vyššie triedy.

Preto rôzne pojmy, známe zo strednej školy, nenašly v tomto opakovaní doteraz miesta. Niektoré z týchto pojmov, najmä pojem plochy a objemu, zopakujeme v nasledujúcej triede. V tejto triede obrátime sa teraz k podrobnejšiemu štúdiu dôležitého pojmu, ktorý doteraz zostal stranou, totiž pojmu **kružnice.** Ako viete, kružnica je určená bodom S, zvaným **stredom kružnice,** a dĺžkou r, zvanou **polomerom kružnice.** Kružnica sa skladá z tých bodov X, pre ktoré úsečka SX má veľkosť r; slovom polomer sa označuje často každá z týchto úsečiek SX. Tie body X, pre ktoré je $SX < r$, ležia **vnútri kružnice;** tie body X, pre ktoré je $SX > r$, ležia **mimo kružnice.** Kružnicu so stredom S a polomerom r môžeme krátko označiť kružnicou (S, r).

Poloha priamky p vzhľadom na kružnicu (S, r) závisí od vzdialenosti v priamky p od stredu S. Ak priamka prechádza stredom S, pretne kružnicu vo dvoch bodoch A, B tak, že S je stredom úsečky AB; taká úsečka menuje sa **priemerom kružnice** a body A, B menujú sa **protiľahlými bodmi kružnice;** všetky priemery sú rovnako dlhé a rovnajú sa $2r$. Úsečka AB je časťou vnútra kružnice; naproti tomu tie body priamky p, ktoré nepatria do úsečky AB, ležia mimo kružnice.

Podobne to platí pre každú priamku p, ktorej vzdialenosť v od bodu S je menšia než r, aj keď p neprechádza stredom (obr. 72). Ak je P päta kolmice, spustenej zo stredu S na priamku p, je $\overline{SP} = v$, takže P leží vnútri kružnice. Ak je X ktorýkoľvek bod priamky p, máme $\triangle\, SPX$ s pravým uhlom pri P. Podľa Pytagorovej vety je

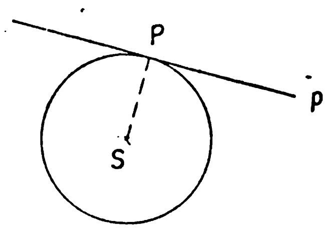
$$\overline{SX}^2 - v^2 = \overline{PX}^2.$$



Obr. 72.

Podmienka, aby X ležal na kružnici, je $\overline{SX} = r$ alebo $\overline{PX} = \sqrt{r^2 - v^2}$. Takéto body X sú dva, v obr. 72 označené A, B; bod P je stred úsečky $\overline{AB}$. Keď sa bod X vzďaľuje od bodu P po niektorej z oboch polpriamok PA, PB, vieme (pozri str. 32), že vzdialenosť $\overline{SX}$ sa stále zväčšuje; preto body na úsečke $\overline{AB}$ ležia vnútri kružnice a body priamky p mimo úsečky $\overline{AB}$ ležia mimo kružnice.

Prejdeme k takej priamke p, ktorej vzdialenosť od S sa rovná r (obr. 73). Ak je P päta kolmice, spustenej z bodu S na priamku p, opäť je $\overline{SP} = r$ a bod P leží na kružnici; pre každý iný bod X priamky p je však $\overline{SX} > \overline{SP}$, t. j. $\overline{SX} > r$ a X leží mimo kružnice.



Obr. 73.

Takáto priamka menuje sa dotyčnicou kružnice (S, r) v bode P tejto kružnice. Zrejme v každom bode kružnice (S, r) máme práve len jednu dotyčnicu; je to kolmica na polomer SP, vedená bodom P. Bod P menuje sa **bodom dotyku** dotyčnice p.

Keď vzdialenosť priamky p je od bodu S väčšia ako r, je aj vzdialenosť ktoréhokoľvek bodu priamky od bodu S väčšia ako r a celá priamka p leží mimo kružnice.

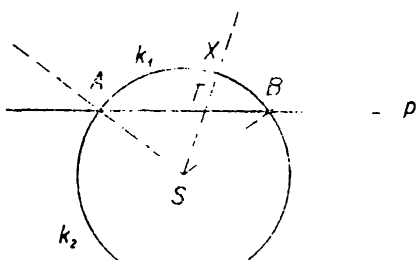
Vcelku teda vzhľadom na kružnicu (S, r) máme v rovine trojaké priamky; priamky, ktoré ležia celé mimo kružnice, tzv. **nesečnice**, ktorých vzdialenosť od S je väčšia než r; ďalej priamky, ktoré majú na kružnici jediný bod (bod dotyku), tzv. **dotyčnice**, majúce od S vzdialenosť rovnú r; potom máme priamky zvané **sečnice**, ktorých vzdialenosť od S je menšia než r, pričom sečnica môže prechádzať aj stredom S. Každá sečnica p pretne kružnicu vo dvoch bodoch

A, B; úsečka $\overline{AB}$ menuje sa **tetivou**; tetiva leží vnútri kružnice, ale tie body sečnice, ktoré neležia na tetive, ležia mimo kružnice. Keď sečnica prechádza bodom S, prechádza ním aj tetiva: tetiva je priemer a jej veľkosť je $2r$. Keď však sečnica p neprechádza bodom S, je bod P stredom tetivy a SP stojí kolmo na p: dĺžka tetivy je menšia než $2r$, lebo v obr. 72 tetiva $\overline{AB}$ je jednou stranou $\triangle ABS$, je teda menšia ako súčet ostatných dvoch strán, ktorý sa rovná $2r$.

Z predchádzajúceho plynie rad dôsledkov. Ak bod H leží vnútri a bod K mimo kružnice, úsečka $\overline{HK}$ pretne kružnicu v jednom bode C, ktorý rozdelí úsečku $\overline{HK}$ na dve úsečky, z ktorých jedna leží (okrem bodu C) vnútri kružnice a druhá mimo. Keď ležia dva rozličné body H, K vnútri kružnice, leží celá úsečka $\overline{HK}$ vnútri kružnice; teda vnútro kružnice je konvexný útvar. Rovnako konvexným útvarom je aj kruh, t. j. plocha, ktorá vznikne z kružnice pripojením jej vnútra.

Ak je p nesečnica kružnice a H, K sú dva ľubovoľné body kruhu, je celá úsečka $\overline{HK}$ časťou kruhu a neobsahuje teda ani jeden bod mimo kružnice, najmä ani jeden bod nesečnice p. To znamená, že body H, K nie sú od seba oddelené priamkou p. Teda ak p je nesečnica kružnice, leží celá kružnica v jednej polrovine, vyťatej priamkou p. Ak p je dotyčnica kružnice, platí ten istý výsledok, iba s jedným rozdielom, že bod dotyku neleží v polrovine, ale na jej hranici, totiž na priamke p.

Ak je p sečnica kružnice (S, r), ktorá pretne kružnicu vo dvoch bodoch A, B, priamka p rozdelí kružnicu na dve časti, z ktorých každá leží v jednej polrovine, oddelenej priamkou p. Tieto dve časti menujú sa **oblúkmi** kružnice; body A, B sú spoločné **krajné body** oboch oblúkov; každý iný bod kružnice patrí do jedného z oboch oblúkov a je jeho **vnútorným bodom**. Oblúky označujeme $\widehat{AB}$ a keď chceme vyznačiť určitý z nich, píšeme $\widehat{ACB}$, kde C je niektorý vnútorný bod oblúka. Ak sečnica p prechádza stredom S, oba oblúky sa menujú polkružnicami, ktorých krajné body A, B sú dva protiľahlé body kružnice. Ak sú H, K iné dva protiľahlé body, leží H vnútri jednej a K vnútri druhej polkružnice $\widehat{AB}$.



Obr. 71.

Ak sečnica p neprechádza stredom S (obr. 73), označme k_2, oblúk $\widehat{AB}$, ktorý leží v polrovine pS, oblúk v polrovine opačnej k_1. Keď leží bod X na oblúku k_1, body S, X sú od seba oddelené priamkou p, a preto úsečka $\overline{SX}$ pretne priamku p v bode T. Pritom je $\overline{ST} < \overline{SX}$ alebo $\overline{ST} < r$, t. j. bod T leží vnútri kružnice, a pretože leží súčasne na priamke p, T leží na úsečke $\overline{AB}$, takže celá polpriamka SX i s bodom X leží vnútri dutého $\sphericalangle ASB$. Obrátene dokážeme, že bod X, ktorý leží vnútri $\sphericalangle ASB$, nachádza sa na oblúku k_1. Lebo ak X leží v uhle $\sphericalangle ASB$, polpriamka SX pretne úsečku AB v bode T. Pretože T leží na tetive $\overline{AB}$, leží T vnútri kružnice, t. j. $ST < r$ alebo $\overline{ST} < \overline{SX}$. Pretože T leží na polpriamke SX, musí ležať na úsečke SX. Teda úsečka SX pretne priamku p v bode T, body S, X sú od seba oddelené priamkou p, bod X leží na oblúku k_1. Dokázané môžeme shrnúť takto: Keď tetiva $\overline{AB}$ neprechádza stredom, jeden z oboch oblúkov $\widehat{AB}$ (k_1 v obr. 74) je tá istá časť kružnice, ktorá leží v dutom $\sphericalangle ASB$; druhý oblúk k_2 leží vo vypuklom uhle s tými istými ramenami SA, SB. Z dvoch protiľahlých bodov H, K môže najviac jeden patriť do oblúka k_1, pretože dutý uhol $\sphericalangle ASB$ nemôže obsahovať obe opačné polpriamky SH, SK. Oblúk k_1 nazvime menším oblúkom $\widehat{AB}$; k_2 je väčší oblúk $\widehat{AB}$.

Z predchádzajúceho plynie: Ak je k oblúk kružnice (S, r) s krajnými bodmi A, B, všetky polpriamky SX so začiatkom v strede S, ktoré prechádzajú jednotlivými bodmi oblúka k, tvoria uhol s ramenami SA, SB, ktorý sa menuje **stredovým uhlom nad oblúkom** k. Keď sú A, B protiľahlé body kružnice, je k polkružnica a stredový uhol je priamy. Keď A, B nie sú protiľahlé body kružnice, stredový uhol nad menším oblúkom je dutý a nad väčším oblúkom je vypuklý.

Cvičenie.

182. Čo viete o osi tetivy kružnice?

183. Priemer je najdlhšia tetiva kružnice. Odôvodnite!

184. Pomocou Pytagorovej vety dokážte:
   a) K dvom rovnakým tetivám kružnice patria rovnaké vzdialenosti od stredu kružnice i rovnaké stredové uhly.
   b) K menšej tetive patrí väčšia vzdialenosť od stredu kružnice a menší dutý stredový uhol.
   c) Vyslovte obrátené poučky.

185. Akú čiaru vyplnia stredy rovnobežných tetív kružnice?

186. Daná je kružnica $k \equiv (S, r)$ a bod T, iný ako bod S. Bod T leží a) na kružnici, b) mimo kružnice, c) vnútri kružnice. Určite na kružnici k bod A, ktorý je bodu T najbližšie, a bod B, ktorý je od bodu T najďalej. Odôvodnite svoje tvrdenie. (Body A, B ležia na priamke ST; uvažujte o rozdiele strán ST, SX v $\triangle STX$, kde X je iný bod kružnice ako A alebo B.)

187. Vysvetlite, akým spôsobom rozlíšite menší a väčší oblúk AB na tej istej kružnici. Aké stredové uhly k nim patria?

188. V uhle trojuholníka ASB kružnice $k \equiv (S, r)$ zvoľte mimo kružnice bod Y. Dokážte, že polpriamka SY pretne menší oblúk k_1 v bode X a priamku AB v bode T, pričom body ležia v poradí $STXY$. Odôvodnite! Kde leží bod T' vzhľadom na body A, B? Rozhodnite, ako je to v prípade, keď bod Y leží mimo kružnice k a vnú[illegible] vypuklého uhla s ramenami SA, SB (3 možnosti).

189. Narysujte kružnicu $l_1 \equiv (O_1, r_1)$ a sostrojte jej obraz l_2 v rovnoľahlosti (S, k). Dokážte, že l_2 je kružnica so stredom O_2, ktorý je obrazom bodu O_1 a polomeru $r_2 = |k| . r_1$. Čo nastane, keď je $S \equiv O_1$?

190. Dokážte: Dve kružnice $l_1 \equiv (O_1, r_1) . l_2 \equiv (O_2, r_2)$ ležiace v tej istej rovine, kde $r_1 \neq r_2$, sú dvoma spôsobmi navzájom rovnoľahlé. Ak je $O_1 \equiv O_2$, ide o rovnoľahlosť $(S \equiv O_1, k = \pm \frac{r_2}{r_1})$. Ak $O_1 \not\equiv O_2$, ležia stredy S_1, S_2 rovnoľahlostí $(S_1, k = \frac{r_2}{r_1}), (S_2, k = -\frac{r_2}{r_1})$ na priamke O_1O_2; ak je $r_1 \neq r_2$ $(O_1O_2S_1) = -(O_2O_1S_2)$. Ako je to v prípade, keď $r_1 = r_2$? (K ľubovoľnému polomeru $\overline{S_1X_1}$ kružnice l_1 určite polomery $\overline{S_2X_2} // \overline{S_1X_1}$, $\overline{S_2X'_2} // \overline{X_1S_1}$ kružnice l_2; dvojice bodov O_1, O_2; X_1, X_2 a O_1, O_2, X_1, X_2 určujú obe rovnoľahlosti.)
b) Spoločná dotyčnica kružníc l_1, l_2 z predchádzajúceho cvičenia 190 a) prechádza jedným z oboch stredov rovnoľahlosti. Odvoďte z toho konštrukciu spoločných dotyčníc dvoch kružníc!
c) Z výsledkov predchádzajúcich cvičení 190 a,b) rozhodnite, pri ktorých vzájomných polohách majú dve kružnice spoločné dotyčnice. (Je 6 možností, ktoré závisia od veličín $\overline{O_1O_2}$, $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$.)

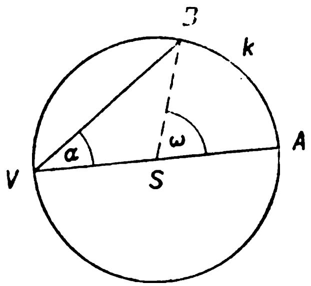
191. Použitím výsledkov z cvič. 190 riešte úlohu: Vnútri uhla $\sphericalangle MSN$ daný je bod A_1. Sostrojte kružnicu k_1, ktorá prechádza bodom A_1 a dotýka sa oboch ramien daného uhla. (Do uhla vpíšte ľuboboľnú kružnicu k_2, určite jej priesečíky $A_2A'_2$ s polpriamkou SA_1 a v rovnoľahlosti so stredom S hľadajte obraz k_1 kružnice k_2 tak, aby si body A_2, A_1 alebo A'_2, A_1 navzájom odpovedaly.)

22. Obvodové a úsekové uhly.

Majme oblúk k kružnice (S, r) s krajnými bodmi A, B a na kružnici ležiaci bod V, ktorý však nepatrí do oblúka k; v tomto prípade $\sphericalangle AVB$ menuje sa **obvodovým uhlom nad oblúkom** k. Teda obvodový uhol je vždy dutý. Nad každým oblúkom k máme, čo sa týka polohy, nekonečne mnoho obvodových uhlov. Ale čo sa týka veľkosti je len jediný, lebo: **Obvodové uhly nad tým istým oblúkom sú rov-**

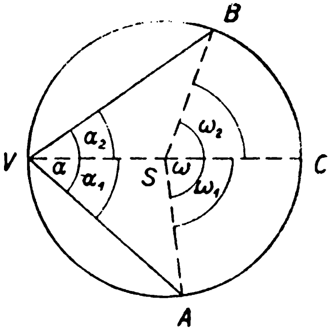
nakó. To je dôsledok nasledujúcej vety: **Obvodový uhol rovná sa polovici stredového uhla nad tým istým oblúkom.**

Dôkaz: Nech je k oblúk kružnice (S, r), A, B jeho krajné body, ω stredový uhol nad oblúkom k, $\alpha = \sphericalangle AVB$ obvodový uhol nad tým istým oblúkom. Máme dokázať, že $\omega = 2\alpha$. Budeme rozoznávať tri prípady podľa toho, kde leží stred S vzhľadom na obvodový uhol α.



Obr. 75.

I. S leží na jednom ramene uhla α, povedzme na ramene VA (obr. 75). Podľa definície obvodového uhla jeho vrchol V nepatrí do oblúka k, teda ani do stredového uhla ω; ale polpriamka SV je opačná k ramenu SA uhla ω, ω je uhol dutý, teda $\omega = \sphericalangle ASB$. V $\triangle VBS$ máme proti strane BS uhol α; pretože $\overline{BS} = \overline{VS}$, máme proti strane $\overline{VS}$ tiež uhol α; proti strane $\overline{BV}$ máme uhol $\pi - \omega$. Súčet uhlov v $\triangle VBS$ rovná sa π, je $\alpha + \alpha + (\pi - \omega) = \pi$ a z toho plynie: $2\alpha = \omega$.



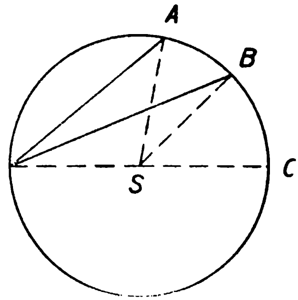
Obr. 76.

II. S leží vnútri uhla α (obr.76). Ak je bod C na kružnici protiľahlý s bodom V, leží aj bod C vnútri uhla α, takže $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, kde $\alpha_1 = \sphericalangle AVC$, $\alpha_2 = \sphericalangle BVC$. Pretože polpriamka VC leží v uhle $\alpha = \sphericalangle AVB$, pretne táto polpriamka úsečku $\overline{AB}$ a priesečík musí ležať v kružnici (pretože je na tetive AB), a teda na úsečke VC. Z toho plynie, že body V, C sú od seba oddelené priamkou AB, a preto každý z nich patrí do iného oblúka s krajnými bodmi A, B. Pretože V ako vrchol obvodového uhla nad oblúkom k nepatrí do k, musí bod C patriť do k. Teda bod C leží v uhle ω (ktorý v tomto prípade môže byť dutý, priamy alebo vypuklý); naproti tomu bod V, a teda celá polpriamka SV, opačná k polpriamke SC, leží mimo uhla ω. Z toho plynie, že

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \text{ kde } \omega_1 = \sphericalangle ASC,\ \omega_2 = \sphericalangle BSC.$$

Podľa časti I nášho dôkazu je $\omega_1 = 2\alpha_1$, $\omega_2 = 2\alpha_2$. Pretože $\omega = \omega_1 + \omega_2$; $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, je $\omega = 2\alpha$.

III. S leží mimo uhla α (obr. 77); to isté, pravda, platí (okrem bodu V) o celej úsečke VC, na ktorej leží bod S, ak C je bod na kružnici protiľahlý s bodom V. Naproti tomu úsečka $\overline{AB}$ leží (okrem svojich krajných bodov) v uhle α; preto úsečky $\overline{AB}$, $\overline{VC}$ nemajú nijaký spoločný bod a z toho ľahko plynie, že úsečka $\overline{VC}$ (ktorá je časťou kruhu) nepretne priamku AB. To znamená, že body V, C nie sú od seba oddelené priamkou AB, teda oba patria do toho istého oblúka s krajnými bodmi A, B. To nie je oblúk k, lebo ten neobsahuje bod V. Teda body V, C patria oba do toho istého oblúka $\widehat{AB}$, iného ako oblúk k, kde $\widehat{AB}$ je väčší oblúk, k je menší oblúk. Preto ω je uhol dutý, $\omega = \sphericalangle ASB$. Zrejme jeden z oboch uhlov $\omega_1 = \sphericalangle ASC$, $\omega_2 = \sphericalangle BSC$ je časťou druhého. Pre určitosť nech uhol ω_2 je časťou uhla ω_1, potom je $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Pretože B leží v uhle $\omega_1 = \sphericalangle ASC$, body B, C nie sú od seba oddelené priamkou AS; ale body V, C sú oddelené, a preto to isté platí aj o bodoch B, V. Teda úsečka BV pretne priamku AS a ľahko zistíme, že potom úsečka BV pretne úsečku AS. Z toho plynie, že uhol $\alpha_2 = \sphericalangle BVC$ je časťou uhla $\alpha_1 = \sphericalangle AVC$, takže $\alpha = \sphericalangle AVB$ a je $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Podľa I časti nášho dôkazu je $\omega_1 = 2\alpha_1$, $\omega_2 = 2\alpha_2$. Pretože $\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, je $\omega = 2\alpha$.

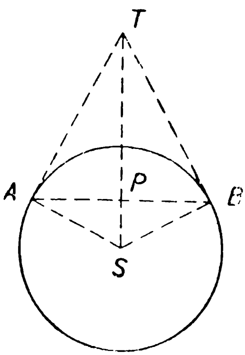


Obr. 77.

Najdôležitejší prípad dokázanej vety je prípad obvodového uhla nad polkružnicou, ktorý menujeme obyčajne **obvodovým uhlom nad priemerom.** Stredový uhol v tomto prípade je priamy a jeho polovica je pravý uhol. Teda: Obvodový uhol nad priemerom je pravý. To je známa Táletova veta, ktorá sa dá jednoduchšie dokázať priamo, ale nebudeme tu opakovať dôkaz, známy zo strednej školy.

Úsekový uhol nad oblúkom $k = \widehat{AB}$ má vrchol v jednom z bodov A, B, napr. v bode A. Je to potom dutý uhol $\sphericalangle BAT$, kde T leží na dotyčnici kružnice v bode A, a to v tej polrovine, ktorej časťou je oblúk k. Nad oblúkom k sú dva úsekové uhly, jeden s vrcholom A, druhý s vrcholom B. Čo do veľkosti je však nad oblúkom k jediný úsekový uhol, ktorý sa rovná obvodovému uhlu, lebo platí veta:

Úsekový uhol rovná sa polovici stredového uhla nad tým istým oblúkom.



Obr. 78.

Dôkaz I. Ak je k polkružnica, body A, B sú protiľahlé a je $AT \perp AB$. Úsekový uhol je pravý a stredový je priamy.

II. Nech je $k = \widehat{AB}$ menší oblúk kružnice (obr. 78) a T priesečík dotyčnice v bode A s osou úsečky AB, ktorá prechádza stredom úsečky $\overline{AB}$. Potom je ST osou stredového uhla $\sphericalangle ASB$, ktorý je teda dvojnásobkom $\sphericalangle AST$. Z pravouhlého trojuholníka AST vidíme, že $\sphericalangle AST = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle ATS$; podobne v pravouhlom $\triangle APT$ je $\sphericalangle PAT = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle ATP$ alebo $\sphericalangle BAT = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle ATS$, takže $\sphericalangle BAT = \sphericalangle AST$.

III. Nech je k väčší oblúk AB a k' menší oblúk $\widehat{AB}$, úsekové uhly α, α' nad oblúkmi k, k' a stredové uhly ω, ω' nad tými istými oblúkmi, tak je $\alpha + \alpha' = \pi$, $\omega + \omega' = 2\pi$ a podľa II je $\omega' = 2\alpha'$, takže $\omega = 2\alpha$.

Cvičenie.

192. a) Ak je $\overline{AB}$ priemer kružnice $k \equiv (S, r)$ a X bod kružnice k iný ako A alebo B, je $\sphericalangle AXB = R$. Dokážte! (Prečo je štvoruholník $AXBY$ (kde XSY je priemer kružnice k) obdĺžnikom? Použite stredovú súmernosť alebo určite súčet uhlov pri vrchole X v rovnoramenných trojuholníkoch AXS, BXS pomocou $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.)
   b) Ak je v $\triangle ABX$ uhol $\sphericalangle X = R$, bod X leží na kružnici k, opísanej nad priemerom $\overline{AB}$. Odôvodnite!
   Z oboch výsledkov cvič. 192 a,b) vyslovte známu Táletovu vetu.

193. Uhol α rovnoramenného $\triangle ABC$ je 32°. Určite stredové uhly nad oblúkmi, na ktoré rozdelia vrcholy trojuholníka kružnicu opísanú. (Ktorákoľvek strana môže byť základňou.)

194. Dve kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ pretínajú sa v bodoch A, B. Dokážte!
   a) Ak sú $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ priemery kružníc, ležia body B, C, D na priamke, rovnobežnej s priamkou S_1S_2, a platí $CD = 2 . \overline{S_1S_2}$. (Spojte AB!)
   b) Veďte v cvič. 194 a) bodom B priamku inú ako CBD a označte U, V jej priesečíky s kružnicami k_1, k_2. Potom je $CD > UV$.
   (a) Je $AB \perp BC$, $AB \perp BD$; $\overline{S_1S_2}$ je stredná priečka v $\triangle ACD$.
   b) Ak sú U_1, V_1 stredy tetív $\overline{UB}$, $\overline{VB}$, je $\overline{S_1S_2} > \overline{U_1V_1}$.)

195. Štvoruholník $ABCD$, ktorého vrcholy ležia na kružnici, menuje sa tetivovým. O ňom platí: Protiľahlé uhly sú výplnkové. Dokážte!

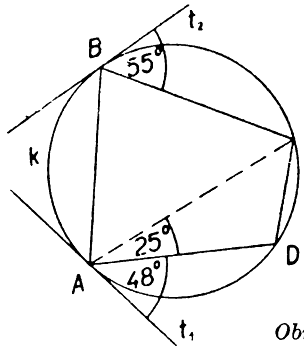
196. Ak v tetivovom štvoruholníku je $\overline{AB} = \overline{CD}$, je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Ktoré prípady môžu nastať a aký je to štvoruholník? (Čo súdite o veľkosti obvodových uhlov nad dvoma rovnakými tetivami v tej istej kružnici? Sledujte $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle CBD$.)

197. V obr. 79 sú t_1, t_2 dotyčnice ku kružnici k v bodoch A, B. Určite uhly štvoruholníka $ABCD$!

198. V obr. 80 sú AC, AD dotyčnice kružníc k_1, k_2 v bode A. Dokážte, že $\overline{AE} = \overline{AF}$!

199. Vysvetlite, ako na obr. 81 sostrojíte dotyčnice AT_1, AT_2 ku kružnici $k \equiv (S, r)$.

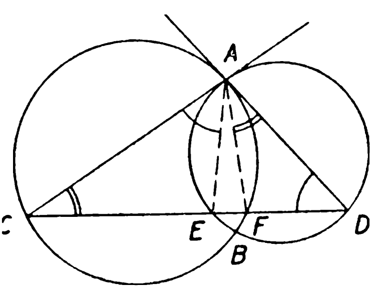
200. Použitím výsledku predchádzajúceho cvič. 199 riešte úlohu: Daná je kružnica (S, r) a mimo kružnice bod P. Bodom P veďte takú sečnicu kružnice, aby príslušná tetiva mala danú dĺžku.



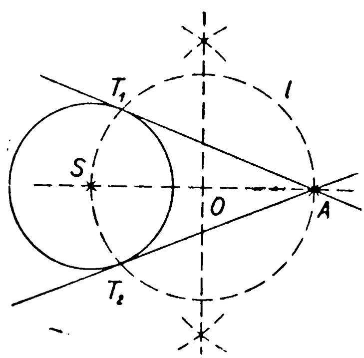
Obr. 79.

201. Kružnica (S, r) je rozdelená bodmi A, B na oblúky k_0, k_0', ktoré ležia v polrovinách ϱ, ϱ' s hranicou AB. Y je ľubovoľný bod, ležiaci vnútri kružnice a vnútri polroviny ϱ'. Z je ľubovoľný bod, ležiaci mimo kružnice a vnútri polroviny ϱ'. Ďalej C je ľubovoľný vnútorný bod úsečky $\overline{AB}$. Dokážte, že v obr. 82 je $\psi > \varphi_1$ a v obr. 83 $\varepsilon < \varphi_2$; spojením výsledkov s poučkou o obvodovom uhle odvoďte poučku.

Všetky body X, z ktorých vidieť úsečku $\overline{AB}$ pod daným uhlom φ (t. j. $\sphericalangle AXB = \varphi$), ležia na dvoch oblúkoch bez bodov AB; tieto oblúky sú súmerne položené podľa priamky AB (obr. 84a—84c).

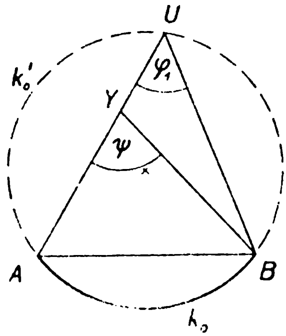


Obr. 80.

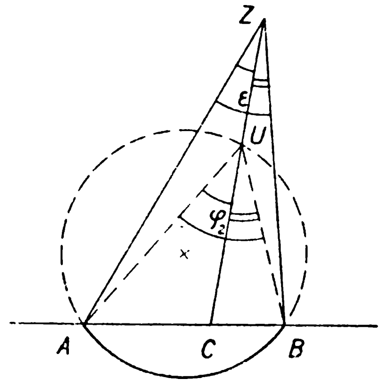


Obr. 81.

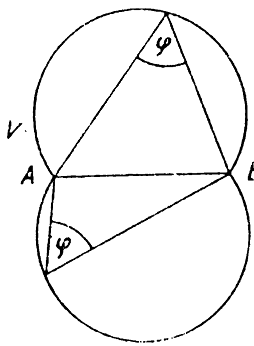
202. Z obr. 84a—c vysvetlite, ako pomocou úsekového uhla bol sostrojený jeden z oboch oblúkov $\widehat{AB}$, z ktorého vnútorných bodov vidieť danú úsečku $\overline{AB}$ pod daným uhlom φ (BT je poldotyčnica príslušnej kružnice).



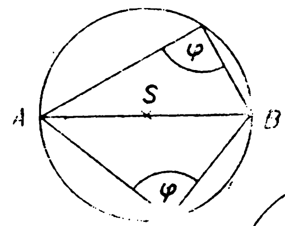
Obr. 82.



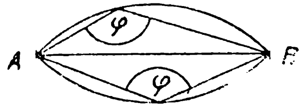
Obr. 83.



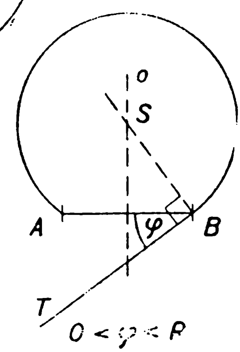
Obr. 84a.



Obr. 84b.



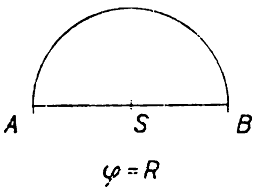
Obr. 84c.



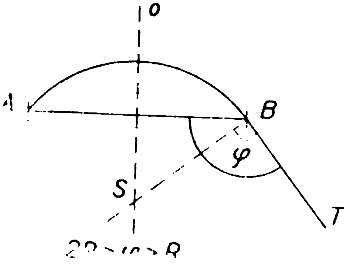
Obr. 85a.

203. Narysujte rôznobežné úsečky $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ a určite bod X tak, aby $\sphericalangle MXN = \alpha$, $\sphericalangle MXP = \beta$, kde α, β sú dané uhly duté (Snelliova úloha).

204. Stred S kružnice opísanej $\triangle\ ABC$ leží a) vnútri, b) mimo $\triangle\ ABC$, podľa toho, či je ostrouhlý alebo tupouhlý. Kde leží bod S, ak je $\triangle\ ABC$ pravouhlý? (Na dôkaz použite obvodový uhol.)



Obr. 85b.

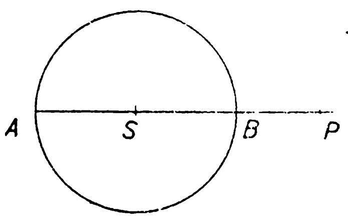


Obr. 85c.

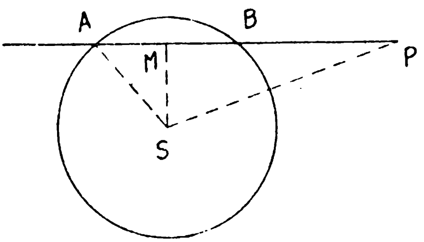
23. Mocnosť bodu ku kružnici.

Ak bod P leží mimo kružnice (S, r) a A, B sú priesečíky ľubovoľnej sečnice s kružnicou, prechádzajúcou bodom P, je $\overline{PA}.\overline{PB} = d^2 - r^2$, $d = \overline{PS}$.

Dôkaz: I. Ak sečnica prechádza stredom S (obr. 78) a napr. bod B leží bližšie k bodu P než bod A, je $\overline{PA} = d + r$, $\overline{BP} = d - r$, teda $\overline{PA}.\overline{PB} = (d + r).(d - r) = d^2 - r^2$.



Obr. 86.



Obr. 87.

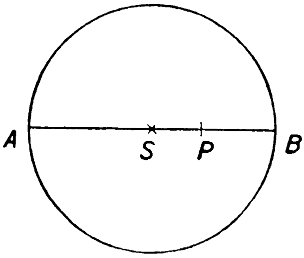
II. Ak sečnica neprechádza stredom S (obr. 87), nech je M stredom tetivy $\overline{AB}$, takže SM stojí kolmo na sečnicu. Bod B leží opäť bližšie k bodu P než bod A a $\overline{AM} = \overline{BM} = e$, $\overline{PM} = f$, je $\overline{PA} = f + e$, $\overline{PB} = f - e$, teda $\overline{PA}.\overline{PB} = (f + e).(f - e) = f^2 - e^2$.

Z pravouhlých $\triangle\ AMS$, $\triangle\ PMS$ plynie podľa Pytagorovej vety, že $r^2 = \overline{SM}^2 + e^2$, $d^2 = \overline{SM}^2 + f^2$, teda $d^2 - r^2 = f^2 - e^2$, takže $\overline{PA}.\overline{PB} = d^2 - r^2$.

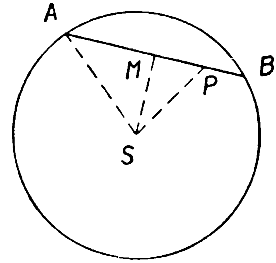
Keď bod P leží vnútri kružnice (S, r) a A, B sú priesečíky kružnice s ľubovoľnou sečnicou, prechádzajúcou bodom P, je $\overline{PA}.\overline{PB} = r^2 - d^2$, kde $d = \overline{SP}$.

Dôkaz: I. Ak bod P splynie so stredom S, je $d = 0$, $\overline{PA} = r$, $\overline{PB} = r$ a veta je jasná. Nech je teda bod P iný ako S.

II. Sečnica prechádza stredom S (obr. 88) a bod B leží bližšie k bodu P než bod A; tak je $\overline{PA} = r + d$, $\overline{PB} = r - d$, teda $\overline{PA}.\overline{PB} = (r + d).(r - d) = r^2 - d^2$.



Obr. 88.



Obr. 89.

III. Sečnica neprechádza stredom S (obr. 88) a bod M je stredom tetivy $\overline{AB}$, takže $\overline{SM}$ stojí kolmo na sečnicu. A zasa, ak bod B leží bližšie k bodu P než bod A a ak $\overline{AM} = \overline{BM} = e$, $\overline{PM} = f$, je $\overline{PA} = e + f$, $\overline{PB} = e - f$, teda $\overline{PA}.\overline{PB} = (e + f).(e - f) = e^2 - f^2$.

Avšak z pravouhlých $\triangle AMS$, $\triangle PMS$ plynie podľa Pytagorovej vety, že

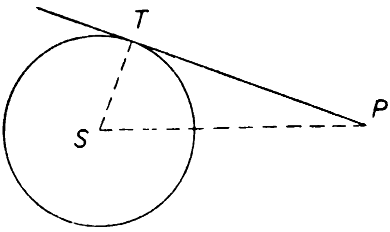
$r^2 = \overline{SM}^2 + e^2$, $d^2 = \overline{SM}^2 + f^2$, teda $r^2 - d^2 = e^2 - f^2$, takže $\overline{PA}.\overline{PB} = r^2 - d^2$.

Mocnosťou bodu P ku kružnici (S, r) rozumieme číslo

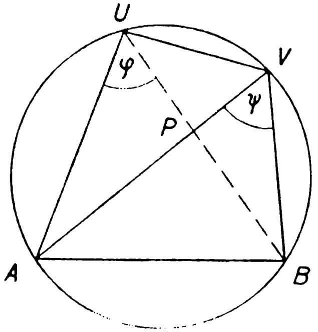
$$\pm\overline{PA}.\overline{PB},$$

pričom A, B sú priesečíky kružnice s ľubovoľnou sečnicou, prechádzajúcou bodom P; znamienko plus platí, keď bod P leží mimo kružnice, a znamienko mínus, keď leží vnútri kružnice. Ak leží bod P na kružnici, musí jeden z bodov A, B splynúť s bodom P a výraz (1) sa rovná nule. Mocnosť bodu P vzhľadom na kružnicu je teda kladná, ak bod P leží mimo kružnice; záporná, ak leží P vnútri kružnice, **rovná sa nule, ak P leží na kružnici.**

Vo všetkých troch prípadoch je mocnosť nezávislá od voľby sečnice (je závislá len od kružnice a od bodu P) a rovná sa $d^2 - r^2$, kde $d = \overline{SP}$. Ak bod P leží mimo kružnice (obr. 90) a ak je T bodom dotyku jednej z oboch dotyčníc, prechádzajúcich bodom P, rovná sa mocnosť $\overline{PT}.\overline{PT}$ alebo $\overline{PT}^2$, pretože z Pytagorovej vety plynie, že $\overline{PT}^2 = d^2 - r^2$.



Obr. 90.



Obr. 91.

Aby sme aspoň na jednom príklade ukázali užitočnosť výsledkov tohto článku, dokážeme si pomocou nich novým spôsobom známu vetu, že dva obvodové uhly nad tým istým oblúkom $\widehat{AB}$ sú rovnaké (obr. 91). Dané uhly sú: $\varphi = \sphericalangle AUB$, $\psi = \sphericalangle AVB$. Pretože oba uhly sú obvodové nad tým istým oblúkom $\widehat{AB}$, ležia oba vrcholy U, V v tej istej polrovine, vyťatej priamkou AB, a preto jeden z oboch uhlov $\sphericalangle BAU$, $\sphericalangle BAV$ je časťou druhého. Napr. ak je $\sphericalangle BAV$ časťou $\sphericalangle BAU$, leží polpriamka AV v uhle $\sphericalangle BAU$, a preto (pozri str. 11) úsečka $\overline{BU}$ pretne priamku AV v bode P. Pretože úsečka $\overline{BU}$ je časťou kruhu a z priamky AV len úsečka AV je časťou kruhu, je P priesečíkom úsečiek $\overline{AV}$, $\overline{BU}$. Bod P leží vnútri kružnice a priamky AV, BU sú dve sečnice, prechádzajúce bodom P.

Z toho plynie, že $\overline{AP}.\overline{VP} = \overline{BP}.\overline{UP}$ alebo

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{UP}}{\overline{VP}}.$$

Teda v trojuholníkoch $\triangle APU$, $\triangle BPV$ strany, vychádzajúce z vrcholu P, sú úmerné; okrem toho ich uhly pri vrchole P sú rovnaké (vrcholové uhly); teda oba trojuholníky sú podobné, t. j.

$\triangle APU \sim \triangle BPV$, alebo $\varphi = \psi$.

Cvičenie.

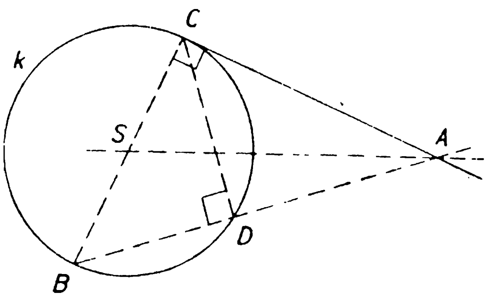
205. Bod P má od stredu kružnice (S, r) vzdialenosť 5. Vypočítajte mocnosť bodu P vzhľadom na danú kružnicu, ak je: a) $r = 7$, b) $r = 5$, c) $r = 3$!

206. Ktoré body v rovine kružnice (S, r) majú vzhľadom na túto kružnicu mocnosť, ktorá sa rovná danému číslu m? Rozoznávajte: a) $m = q^2$, b) $m = 0$, c) $m = -q^2$, kde číslo $q > 0$; čo poviete o veľkosti čísla q v prípade c?

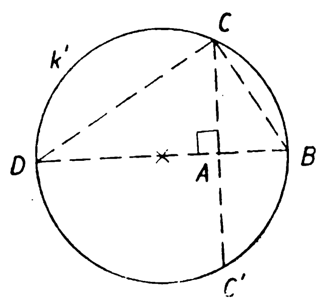
207. Mocnosť bodu P vzhľadom na kružnicu $(S, r = 4)$ rovná sa 9; určite vzdialenosť $\overline{PS}$.

208. Mocnosti bodov P_1, P_2 vzhľadom na kružnicu $(S, r = 4)$ sú 9 a 20 Určite medze pre vzdialenosť P_1P_2.

209. Každý bod na spoločnej dotyčnici dvoch kružníc so spoločným bodom dotyku má vzhľadom na obe kružnice rovnaké mocnosti; prečo? Ako je to s bodmi na priamke, ktorá prechádza priesečíkmi A, B dvoch kružníc?



Obr. 92.



Obr. 93.

210. Z obr. 92 vysvetlite, že Euklidovu vetu s odvesnou $\overline{AC}$ pravouhlého trojuholníka ABC (kde $\sphericalangle C = R$) dostaneme pri zvláštnej polohe sečnice ADB v kružnici k, sostrojenej nad odvesnou $\overline{BC}$ ako priemerom.
Práve tak Euklidovu vetu o výške (obr. 93) v $\triangle BDC$ (kde $\sphericalangle C = R$) dostaneme ako zvláštny prípad mocnosti bodu A vzhľadom na kružnicu k' nad preponou $\overline{BD}$.

211. Dané sú úsečky $a = 4$, $b = 9$. Použitím mocnosti sostrojte úsečku $x = \sqrt{a . b}$. Vyšetrite súvislosť s Euklidovými vetami.

212. a) Sostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka danej priamky t a ktorá prechádza danými bodmi A, B, ktoré ležia v tej istej polrovine, vyťatej priamkou t. (Sú dve možné polohy priamok AB a t. Ak existuje priesečík O priamok AB a t, aká je vzdialenosť $\overline{OT}$ dotykového bodu T hľadanej kružnice?)
b) Na predchádzajúcu úlohu 212 a) možno previesť úlohu: Daný je uhol $\sphericalangle MSN$ a vnútri uhla bod A. Sostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodom A a dotýka sa priamok SM, SN (porovnaj aj s cvič. 191).

OBSAH

GEOMETRIA PRE I. TRIEDU GYMNÁZIÍ

Vydalo Štátne nakladateľstvo v Bratislave. — Šéfredaktor Viktor Šándor. — Redaktorka publikácie Elena Horná. — Technická redaktorka Gita Pecíková. — 301-16-521. — PIO č. 3245/52-III/1. — Číslo publikácie 86. — Vydanie I. — Náklad 10.000. — Rukopis zadaný 4. decembra 1951. — Vytlačené v apríli 1952. — 6 PH, 5,588 AH. — Papier 222-02, 61×86, 70 g. — Tlačily Tlač. závody Práca, n. p., Bratislava. — Tlačené zo sadzby kníhtlačou. — Typ písma garmond Latinka. — Všeobecná daň 1%. Strán 96. — Cena broš. 20 Kčs.

Čkm 776

Cena Kčs 20.—
301-16-521