Eduard Čech

Aritmetika pro III. třídu středních škol

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1946.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501384

EDUARD ČECH

ARITMETIKA

PRO TŘETÍ TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

152

CENA Kčs 18,—

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

UČEBNICE A POMOCNÉ KNIHY VYDÁVANÉ JEDNOTOU
ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
152

ARITMETIKA

PRO III. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

NAPSAL

PROF. DR. EDUARD ČECH

S 20 obrazci

Schváleno výnosem ministerstva školství a osvěty ze dne 16. května 1946,
čís. A - 119 609/46-III/2 jako dotisk prvního vydání pro školní rok 1946/47

CENA Kčs 18,—

PRAHA 1946
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
TISKEM KNIHTISKÁRNY PROMETHEUS, PRAHA VIII - 94

OBSAH.

§ 1. Úvod do algebry.

1. Písmena ve významu čísel. Z geometrie jste už zvyklí užívati písmen k vyznačení bodů, čar a úhlů. Letos poznáte, že je výhodné užívati písmen také ve významu **čísel.** Ta část matematiky, ve které se učíme prováděti početní výkony s písmeny znamenajícími čísla, jmenuje se **algebra;** je to slovo původu arabského. Cílem tohoto paragrafu je, abyste si **zvykali** užívati písmen ve významu čísel. Že to má svůj dobrý účel, to poznáte už v následujícím paragrafu a později se o tom přesvědčíte ještě mnohem důkladněji.

Příklad. Ušel jsem

a) dopoledne 12 km, odpoledne 8 km;
b) dopoledne 18 km, odpoledne 14 km;
c) dopoledne 15 km, odpoledne s km;
d) dopoledne r km, odpoledne 16 km;
e) dopoledne r km, odpoledne s km.

Kolik jsem ušel za celý den?

Případy a) a b) už umíte řešit. V případě a) jsem ušel $(12 + 8)$ km neboli 20 km; v případě b) jsem ušel $(18 + 14)$ km neboli 32 km. Ostatní případy jsou pro vás nové, ale jsou ještě jednodušší nežli případy a) a b). V případě c) zní odpověď prostě: ušel jsem $(15 + s)$ km. Odpověď musíme nechati v tomto tvaru; dokud nevíme, jaký číselný význam má písmeno s, nemůžeme sčítání $15 + s$ **provésti,** nýbrž pouze **naznačiti.** Podobně zní odpověď v případě d): ušel jsem $(r + 16)$ km; v případě e): ušel jsem $(r + s)$ km.

Písmen se užívá v algebře ve významu **nepojmenovaných** čísel. Neřekneme: „ušel jsem r", nýbrž „ušel jsem r **kilometrů**".

Hned od začátku si zvykejte psáti co nejzřetelněji každé písmeno, které znamená číslo! Tím potlačíte v zárodku nebezpečný pramen početních chyb.

Pro sčítání a odčítání se užívá v algebře obvyklých značek + (plus) a — (minus). Pro násobení užíváme v algebře značky $\times$ jen zřídka; někdy se užívá tečky, ale **nejčastěji se v algebře značka pro násobení vůbec vynechává.** Tedy součin čísla p s číslem 5 můžeme psáti ve tvaru $5 \,.\, p$ nebo ve tvaru $p \,.\, 5$, ale nejčastěji se tento součin zapisuje ve tvaru $5p$. Napíšeme 5 a p těsně vedle sebe (bez mezery) a čteme prostě „pět pe". [Mohlo by se také psáti $p5$, ale tohoto tvaru se užívá velmi zřídka a proto si naň ani nezvykejte.] Podobně součin čísel $\frac{2}{3}$ a h píšeme nejčastěji ve tvaru $\frac{2}{3}h$, součin čísel u a v buďto ve tvaru uv nebo ve tvaru vu. Častěji píšeme uv; je to podle abecedy. Ale součin čísel 4 a 7 napíšeme ve tvaru $4 \,.\, 7$ (nebo ve tvaru 28), protože 47 bez tečky by znamenalo čtyřicetsedm; podobně součin čísel 3 a $\frac{2}{5}$ napíšeme ve tvaru $3 \,.\, \frac{2}{5}$ (nebo ve tvaru $\frac{6}{5}$ nebo ve tvaru $1\frac{1}{5}$), protože $3\frac{2}{5}$ bez tečky by znamenalo $3 + \frac{2}{5}$.

Pro dělení se užívá v algebře značky : méně často nežli zlomkové čáry. Píšeme častěji

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{6}, \quad \frac{2}{x}$$

nežli

$$a : b, \quad c : 6, \quad 2 : x.$$

1. Chlapci je 14 let. Kolik let mu bude
a) za 8 let? b) za y let?

2. Pánovi je 50 let. Kolik let mu bylo
a) před 12 lety? b) před n lety?

3. Mám vykonati cestu 30 km. Kolik km mi zbývá ujíti, jestliže jsem již ušel
a) 16 km? b) f km?

4. Balíček čokolády stojí 4 K. Kolik balíčků mohu koupit
a) za 20 K? b) za c K?

5. Tyč je pomalována zčásti červeně, zčásti modře. Doplňte v tabulce I délku celé tyče a v tabulce II délku modré části!

I		a)	b)	c)	d)	e)
	červená část	6 dm	1 m	6 dm	z dm	r dm
	modrá část	4 dm	3 dm	t dm	1 m	s dm
	celá tyč					

		f)	g)	h)	i)
	červená část	11 dm	8 dm	1 m	k dm
II	modrá část				
	celá tyč	2 m	e dm	j dm	2 m

6. Zahrádka velikosti 24 m² má tvar obdélníka. Doplňte tabulku:

	a)	b)	c)	d)
délka zahrádky	8 m		p m	
šířka zahrádky		4 m		q m

7. Doplňte tabulku:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
příjem	5000 RM	4800 RM		p RM	p RM	
vydání	4000 RM		4100 RM	v RM		v RM
ušetřeno		700 RM	500 RM		u RM	u RM

8. Někdo ušel
a) 30 km za 6 hodin; b) x km za 5 hodin;
c) 36 km za n hodin; d) x km za n hodin.
Kolik ušel průměrně za hodinu?

9. Kousek mýdla stojí
a) 5 K; b) r K.
Kolik kousků lze koupiti za 4 RM?

10. Výška schodiště je
a) 12 m; b) s m;
výška jednoho schodu je 15 cm. Kolik schodů má schodiště?

11. Otci jedenáctiletého chlapce je nyní 45 let. Doplňte tabulku:

	a)	b)	c)	d)	e)
stáří otcovo . .		38 let		y let	
stáří synovo .	14 let		x let		$(r + 10)$ let

12. Kolik hodin spal, kdo

a) usnul v 10 hodin večer a probudil se v 6 hodin ráno?
b) usnul ve v hodin večer a probudil se v 6 hodin ráno?
c) usnul v 10 hodin večer a probudil se v r hodin ráno?
d) usnul ve v hodin večer a probudil se v r hodin ráno?

2. Početní výrazy. Co znamená $3n - 7$? Znamená to, že číslo n máme násobiti třemi a od součinu máme odečísti 7. Tyto početní výkony můžeme ovšem provésti teprve tehdy, když víme, jaké číslo znamená písmeno n. Říkáme, že $3n - 7$ je **početní výraz** nebo krátce **výraz.** Takový početní výraz má určitou číselnou hodnotu, jakmile známe číselný význam písmene n. Když na př. $n = 4$, vypočteme

$$3n - 7 = 3 \cdot 4 - 7 = 12 - 7 = 5;$$

říkáme, že jsme do výrazu $3n - 7$ **dosadili** $n = 4$; můžeme ovšem dosazovati za písmeno n také jiná čísla. Dosadíme-li $n = 6$, vyjde $3n - 7 = 11$; dosadíme-li $n = 2{,}4$, vyjde $3n - 7 = 0{,}2$; dosadíme-li $n = 3\frac{1}{3}$, vyjde $3n - 7 = 3$. Dosazování se někdy jmenuje latinským názvem **substituce.**

Aby početní výraz $2a + 3b$ měl určitou hodnotu, musíme **za obě písmena** a, b dosaditi určitá čísla. Dosadíme-li $a = 4$, $b = 5$, vyjde

$$2a + 3b = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 8 + 15 = 23;$$

dosadíme-li $a = 5$, $b = 4$, vyjde

$$2a + 3b = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 10 + 12 = 22.$$

Písmenům znamenajícím čísla se někdy říká **obecná čísla**; abychom od nich rozlišili určitá čísla jako 5; $2\frac{3}{7}$; 3,14, říkáme jim **čísla zvláštní.**

13. Vyložte slovy význam daného početního výrazu a potom dosaďte, jak je v závorce předepsáno!

a) $2c + 1$ $(c = 36)$; b) $4r - 3$ $(r = 38)$;
c) $100 - 7s$ $(s = 14)$; d) $2h - 6k$ $(h = 18, k = 4)$;
e) $5a - c$ $(a = 12, c = 42)$; f) $14x - 11y$ $(x = 10, y = 0)$.

14. Dosaďte $r = 4$, $s = 3$, $n = 18$!

a) $4r + 4$; b) ns; c) $6r - n$; d) $20s - 3n$;
e) $\frac{n}{s}$; f) $\frac{2n}{r}$; g) $\frac{2n}{3}$; h) $\frac{r + 14}{n}$;
i) $\frac{r + 5}{3}$; j) $\frac{n - 4}{7}$; k) $\frac{15r + 4s}{n}$; l) $\frac{5n}{6}$;
m) $5rn$; n) rsn; o) $n - rs$; p) $rs + n$.

15. Dosaďte $x = 3$, $y = 5$, $z = 8$, $c = 0$!

a) $4yz$; b) $2y - 4c$; c) $5x - 3y$;
d) $8y - 5z$; e) $4x + 3y - 3z$; f) $2zy - 3cx + 3$;
g) $xyz + xy - yz$.

16. Napište početní výraz, jehož význam je dán slovy:

a) K číslu t přičtěte 2!
b) Číslo q násobte třemi!
c) Od čísla m odečtěte 5!
d) Číslo p dělte čtyřmi!
e) Číslo c násobte třemi a od součinu odečtěte 2!
f) Dvojnásobek součinu čísel e, f, g.
g) Číslo x dělte pěti a podíl odečtěte od čísla $\frac{1}{2}$!
h) Třetina součtu čísel z a 8.
i) Dvě třetiny čísla a.
j) Tři čtvrtiny čísla b.

3. Slučování. Často se vyskytuje úkol provésti několik sčítání a odčítání postupně za sebou. Takový je na př. úkol $12 - 9 + 7 - 8$. To znamená, že máme napřed od čísla 12 odečísti 9, takže dostaneme 3; potom máme k číslu 3 přičísti 7, což dá 10; posléze máme od čísla 10 odečísti 8 a vyjde 2, což je konečný výsledek, tedy $12 - 9 + 7 - 8 = 2$. Takový výpočet se jmenuje **slučování**; číslům 12, 9, 7, 8 říkáme **členy.**

Při slučování můžeme pořádek výkonů změnit beze změny konečného výsledku. Na př. úkol $12 - 9 + 7 - 8$ vede k témuž výsledku 2 jako úkol $12 + 7 - 9 - 8$. Když napřed přijmu 12 K, potom vydám 9 K, dále přijmu 7 K a na konec ještě vydám 8 K, zbude mi stejně jako kdybych přijal nejprve 12 K a pak ještě 7 K a potom vydal nejprve 9 K a pak ještě 8 K. Ale nemůžeme měnit pořádek členů **libovolně.** Tak u hořejšího úkolu není dovolen pořádek $12 - 9 - 8 + 7$, neboť přijmu-li 12 K a vydám-li z nich 9 K, zbudou mi jen 3 K, ze kterých nemohu vydati 8 K, leda by mi někdo pětikorunu **půjčil.** Takové „vypůjčování" se dá ovšem v mysli provésti vždy a je matematicky vyjádřeno t. zv. **zápornými čísly.** Až se naučíme počítati se zápornými čísly, budeme moci volit pořádek při slučování **úplně libovolně.** Ale záporná čísla budeme probírati až v paragrafu 5.

Jedna změna pořádku se dá provésti vždy bez vypůjčování; spočívá v tom, že všecky členy, které se mají odečítati, dáme až na konec. Pořádek, který takto dostaneme, nazveme **upravený.** V hořejším příkladě $12 - 9 + 7 - 8$ je $12 + 7 - 9 - 8$ upravený pořádek, ale také $7 + 12 - 8 - 9$ nebo $7 + 12 - 9 - 8$ jsou upravené pořádky. Upravený pořádek je při slučování výhodný a často se ho užívá. Obyčejně daný pořádek, není-li upravený, ani nepřepisujeme, ale při slučování užijeme upraveného pořádku takto: k prvnímu členu přičteme všecky členy, před nimiž je znamení plus, potom sečteme mezi sebou všecky členy, před nimiž je znamení minus a na konec od prvního součtu odečteme druhý. (Tedy vypočteme napřed celý příjem, potom celé vydání a na konec odečteme vydání od příjmu.) To je upravený způsob slučování.

17. Napište si všecky možné pořádky (při kterých se obejdete bez vypůjčování) a v každém pořádku proveďte slučování!

a) $3 + 5 - 7$ (dva pořádky);
b) $8 + 5 - 7$ (tři pořádky);
c) $8 + 10 - 7$ (čtyři pořádky);
d) $12 - 8 + 6 - 7$ (šest pořádků);
e) $12 - 3 - 8 + 6$ (devět pořádků).

18. Slučte napřed s naznačeným pořádkem členů, potom upraveným způsobem!

a) $37694 - 12839 - 24028 + 1783 + 2654$;
b) $12387 - 4253 - 3487 + 9263 - 7826$;
c) $47{,}8 - 2{,}23 - 6{,}34 + 18{,}2 - 0{,}49 + 0{,}48$;
d) $0{,}326 - 0{,}0254 - 0{,}0176 - 0{,}12 + 0{,}9 - 0{,}082$;
e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$;
f) $5 - 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} - 2\frac{2}{3}$.

Upravený způsob slučování vyžaduje tří početních výkonů za sebou: dvojího sčítání a jednoho odčítání. Když provedeme prvé sčítání, můžeme při písemném počítání provésti oba zbývající výkony **najednou.** Máme-li na př. provésti výpočet

$$23828 - 7924 - 3836 - 5287,$$

píšeme	23828	a vyslovujeme: sedm, třináct, sedmnáct a **jedna**;
	— 7924	devět, dvanáct, čtrnáct a **osm**;
	— 3836	čtyři, dvanáct, dvacetjedna a **sedm**;
	— 5287	sedm, deset, sedmnáct a **šest.**
	6781	

Při zkoušce správnosti tohoto výkonu sečteme (bez psaní) čísla 7924, 3836, 5287, 6781, která máme napsána pod sebou; sčítáme je **zdola nahoru**; musí ovšem vyjíti součet 23828.

19. Vypočtěte najednou (provádějte zkoušku):

a) $82828 - 12547 - 21683 - 3257$;
b) $123521 - 4784 - 32865 - 65324$;
c) $82356 - 14727 - 21936 - 24084 - 3687$;
d) $12{,}12 - 0{,}874 - 0{,}936 - 2{,}5 - 3{,}42$;
e) $9{,}026 - 1{,}234 - 2{,}48 - 3{,}02 - 0{,}747$;
f) $18 - 0{,}123 - 1{,}23 - 12{,}3 - 0{,}54$.

Dosud jsme slučovali jen čísla zvláštní. Vyskytují-li se také čísla obecná, dá se někdy slučování úplně provést, někdy vůbec ne, někdy jenom částečně.

Na př.

$$5x + 3x = 8x;$$

zde se slučování dá provést. Přijmu-li napřed od 5 osob po x korunách (tedy $5x$ korun) a potom od tří osob zase po x korunách (tedy $3x$ korun), přijal jsem celkem osmkrát po x korunách a mám $8x$ korun. Nebo

$$7x - 2x = 5x;$$

zase se slučování dá provést. Přijmu-li sedmkrát po x korunách a vydám-li z toho dvakrát po x korunách, mám na konec tolik, jako kdybych přijal pětkrát po x korunách a nevydal nic.

Podobně lze slučování provésti v příkladech

$$7ab + ab = 8ab, \quad 9abc - 8abc = abc,$$

ale také v příkladě

$$2ab + ba = 3ab,$$

neboť ba znamená totéž jako ab. Naproti tomu v příkladech $5r + 3s$, $7r - 2s$ **nelze** slučování provésti, dokud nevíme, jaký číselný význam mají písmena r, s.

Příklad. Slučte $8t - 5t + 3t - 4t$!

Počítáme upraveným způsobem

$$8t - 5t + 3t - 4t = 8t + 3t - 5t - 4t = 11t - 9t = 2t.$$

Prvý krok provádíme obyčejně jen v mysli; tedy píšeme

$$8t - 5t + 3t - 4t = 11t - 9t = 2t.$$

Příklad. Zjednodušte $5a + 9b - 2a + a - 4b - 2b$!

Dáme k sobě ty členy, které se dají sloučit; potom v každé skupině slučujeme upraveným způsobem. Tedy

$$5a + 9b - 2a + a - 4b - 2b = 5a - 2a + a + 9b - 4b - 2b =$$
$$= 6a - 2a + 9b - 6b = 4a + 3b.$$

Poznámka. Početní výraz, který by se vám už asi nevešel na řádek, pište raději hned **celý na nový řádek.** Na konci starého řádku napište rovnítko a na začátku nového řádku napište rovnítko znovu! Vyhýbejte se roztržení početního výrazu na dva řádky!

20. Slučte

a) $x + x + x$; b) $y + y + y + y + y$;
c) $z + z + z - z$; d) $r + r - r - r$;
e) $s - s + s - s + s$; f) $t + t + t - t - t + t$.

21. Slučte

a) $3u + 4u$; b) $5v + v$; c) $8h - 3h$;
d) $7k - 6k$; e) $n + n + 3n$; f) $4p + 3p + p$;
g) $q + 5q + 7q$; h) $a + 5a - 3a$; i) $b + 4b + b$;
j) $9c - 3c - 6c$; k) $e + 7e - 8e$; l) $8t - 7t + t$.

22. Slučte

a) $5x + x - 3x + x - 2x$; b) $2y + 8y - 4y - y + 3y$;
c) $z + 7z - 2z - 3z + z$; d) $8v - 2v - 3v + 4v - 7v$.

Ve cvič. 23 a 24 u některých příkladů prostě napíšete, že sloučení je nemožné.

23. Slučte, pokud možno:

a) $k + l + l + k$; b) $k + l + k + k$;
c) $m + m - n + m - n - n - n$; d) $r + r + s - r + s - r - s$;
e) $3x + 3y$; f) $c + t + t + t + c - t - c$;
g) $5e + 3f + 3f + e$; h) $8a - 4b - 4$;
i) $6p + 5q - 4q + q$; j) $9r - 3s - 2r + 3s$;
k) $5d + 5g - 5$; l) $7u + 4v - 3u - v$.

24. Slučte, pokud možno:

a) $3hk + 3kh$; b) $5rs + 2sr$;
c) $6ef - 3fe$; d) $5gh - gh + 2hg - 4hg$;
e) $xt + 2x + t - 1$; f) $5yz - 4y - 3z + 7y - 3zy$;
g) $pq + 3qp - 2pq + 5p$; h) $14ac + 12a - 3c - 3a - 3ca$.

4. Násobení a dělení. Místo 13 . 13 píšeme kratčeji 13^2, což čteme 13 **na druhou.** Podobně x^2, čteno x na druhou, znamená součin xx. Místo součinu 7 . 7 . 7 tří stejných činitelů píšeme kratčeji 7^3, což čteme 7 **na třetí.** Podobně y^3, čteno y na třetí, znamená součin yyy. Co znamená z^4? Co znamená 2^5?

13^2, x^2, 7^3, y^3, z^4, 2^5 jsou **mocniny.** Tedy **mocnina je součin několika sobě rovných činitelů;** každý ten činitel se jmenuje **mocněnec** nebo **základ** mocniny; počet těch činitelů se jmenuje **mocnitel** nebo také po latinsku **exponent.** Na př. z^4 je mocnina s mocněncem (neboli základem) z a s mocnitelem (neboli exponentem) 4. Také říkáme, že z^4 je **čtvrtá mocnina čísla** z nebo že číslo z^4 dostaneme, **umocníme-li** číslo z **na čtvrtou.**

$2a^2$ je součin $2 . a . a$; tedy pouze a se umocní na druhou! Máme-li číslo $2a$ umocnit na druhou, napíšeme $(2a)^2$. Tedy $(2a)^2 = 2 . a . 2 . a =$

$= 2 \,.\, 2 \,.\, a \,.\, a = 4a^2$, t. j. $(2a)^2$ je dvakrát více nežli $2a^2$. Podobně $(3r)^2$ je třikrát více nežli $3r^2$, $(2x)^3$ je čtyřikrát více nežli $2x^3$.

25. Vypočtěte zpaměti:

a) $2^6 - 2^2$; b) $3^5 - 3^3$; c) $5^4 - 5^3$;
d) 7^3; e) 8^3; f) $3^4 - 2^6$;
g) $2^5 - 2^3 + 2^2 - 2$.

26. Dosaďte, jak je udáno v závorce:

a) $3x^2 - 7x + 2$ $(x = 5)$; b) $2a^2c - 2ac^2$ $(a = 10,\ c = 3)$;
c) $(5r)^2 - 5r^2$ $(r = 3)$; d) $(2s)^3 - (3s)^2$ $(s = 2)$;
e) $\dfrac{(t + 1)^3}{t^3 + 1}$ $(t = 2)$; f) $\dfrac{u^2 + v^2}{(u + v)^2}$ $(u = 7,\ v = 3)$.

Příklad. Zjednodušte $8x \,.\, 6xy$!

$$8x \,.\, 6xy = 8 \,.\, 6xxy = 48x^2y.$$

Na pořádku činitelů nezáleží. Proto napíšeme jako činitele nejprve zvláštní čísla, potom obecná čísla, a to jedno písmeno za druhým podle abecedy. Potom provedeme násobení $8 \,.\, 6 = 48$ a místo xx napíšeme x^2.

Příklad. Zjednodušte $2r^3 \,.\, 3r^2$!

$$2r^3 \,.\, 3r^2 = 2 \,.\, 3r^3r^2 = 6r^5.$$

Protože $r^3 = rrr$, $r^2 = rr$, je $r^3r^2 = rrrrr$ neboli $r^3r^2 = r^5$.

27. Napište co nejjednodušeji:

a) $t \,.\, 1$; b) $s \,.\, 1 \,.\, 3$; c) $k \,.\, 2 \,.\, 3$; d) $5 \,.\, h \,.\, 4$;
e) $8a \,.\, 0$; f) $9 \,.\, 4c$; g) $3x \,.\, 3x$; h) $u \,.\, 0 \,.\, v$;
i) $s \,.\, s \,.\, s$; j) $b \,.\, c \,.\, b$; k) $ef \,.\, ef$; l) $3xyz \,.\, 4yz$;
m) $3e^2 \,.\, 3n^2$; n) $4p^2 \,.\, 2p^2 \,.\, p$; o) $5g^2 \,.\, 5g^4$; p) $n^3 \,.\, n \,.\, n^3$.

Víte, že hodnota zlomku se nezmění, znásobíme-li čitatele a jmenovatele týmž číslem (rozšiřování zlomku) nebo dělíme-li čitatele a jmenovatele týmž číslem (krácení zlomku). Na př. jest

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \,.\, 10}{5 \,.\, 10} = \frac{40}{50} \quad \text{a podobně} \quad \frac{4}{5} = \frac{4c}{5c}, \quad \frac{r}{s} = \frac{rx}{sx};$$

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \,.\, 3}{3 \,.\, 3} = \frac{2}{3} \quad \text{a podobně} \quad \frac{2t}{3t} = \frac{2}{3}, \quad \frac{pu}{qu} = \frac{p}{q}.$$

28. Doplňte:

a) $\dfrac{8p}{12} = \dfrac{}{3}$; b) $\dfrac{12qr}{20qs} = \dfrac{3r}{}$; c) $\dfrac{ax}{xy} = \dfrac{}{y}$;

d) $\frac{3u}{4v} = \frac{}{8v}$; e) $\frac{3u}{4v} = \frac{}{12cv}$; f) $\frac{3u}{4v} = \frac{3u^2}{}$;

g) $\frac{2k}{n} = \frac{}{6mn}$; h) $\frac{2k}{n} = \frac{6k^3}{}$; i) $\frac{2k}{n} = \frac{}{n^3}$;

j) $z = \frac{}{3}$; k) $z = \frac{}{2a}$; l) $z = \frac{}{z^3}$;

m) $\frac{2a^2}{4ab} = \frac{}{2b}$; n) $\frac{2a^2}{4ab} = \frac{3a}{}$; o) $\frac{2a^2}{4ab} = \frac{a^3}{}$.

29. Zjednodušte:

a) $\frac{4c}{5c}$; b) $\frac{uv}{tu}$; c) $\frac{4pq}{6pr}$; d) $\frac{3x}{x^2}$;

e) $\frac{y^3}{y}$; f) $\frac{2r}{r^2}$; g) $\frac{2s^4}{s^2}$; h) $\frac{3e^4}{6e^3}$.

Víte, že

$$\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}.$$

Podobně jest

$$\frac{4}{5} \cdot a = \frac{4a}{5}, \qquad \frac{r}{s} \cdot x = \frac{rx}{s}.$$

Víte, že

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 8} = \frac{5}{2 \cdot 8} = \frac{5}{16}.$$

Podobně

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{xy}{yz} = \frac{x}{z}.$$

30. Zjednodušte:

a) $\frac{4}{9} \cdot 9c$; b) $\frac{4}{a} \cdot 9a$; c) $\frac{x}{a} \cdot 9a$; d) $\frac{x}{a} \cdot a^2$;

e) $2 \cdot \frac{3x}{4}$; f) $y \cdot \frac{3y}{4}$; g) $r \cdot \frac{7r^2}{3}$; h) $z^2 \cdot \frac{u}{z}$.

31. Zjednodušte:

a) $\frac{5}{p} \cdot \frac{q}{10}$; b) $\frac{r}{s} \cdot \frac{s^2}{r}$; c) $\frac{3u}{v} \cdot \frac{v}{6u}$;

d) $\frac{t^2}{3x} \cdot \frac{15x^2}{t}$; e) $\frac{a^2}{c^3} \cdot \frac{c^2}{a^3}$; f) $\frac{abc}{de} \cdot \frac{ade}{bc^2}$;

g) $\frac{10hk}{3mn} \cdot \frac{m^2}{5h^2}$; h) $\frac{3y^2}{5z^3} \cdot \frac{5z^3}{3y^2}$.

Víte, že

$$\frac{4}{9} : 3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27};$$

$$\frac{4}{9} : \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{9} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2}{3}.$$

Podobně

$$\frac{4}{9} : a = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{9a}; \qquad \frac{r}{s} : t = \frac{r}{s} \cdot \frac{1}{t} = \frac{r}{st};$$

$$\frac{4}{9} : \frac{1}{a} = \frac{4}{9} \cdot a = \frac{4a}{9}; \qquad \frac{r}{s} : \frac{1}{t} = \frac{r}{s} \cdot t = \frac{rt}{s};$$

$$\frac{4}{9} : \frac{a}{b} = \frac{4}{9} \cdot \frac{b}{a} = \frac{4b}{9a}; \qquad \frac{r}{s} : \frac{u}{v} = \frac{r}{s} \cdot \frac{v}{u} = \frac{rv}{su}.$$

32. Zjednodušte:

a) $\frac{3}{7x} : \frac{1}{x}$; b) $\frac{4}{y} : \frac{z}{y}$; c) $\frac{u}{v} : \frac{v}{u}$;

d) $\frac{a^2}{3} : \frac{ac}{6}$; e) $\frac{4rs}{3} : \frac{12r^2}{5}$; f) $\frac{mn}{pq} : m^2p$;

g) $\frac{1}{b^3} : r^3$; h) $\frac{1}{6e^2} : \frac{1}{4ef}$; i) $\frac{4g^2}{9gh} : \frac{3dg}{5dh}$.

33. Jízda autobusem stojí 6 K. Kolik stojí

a) 5 jízd? b) n jízd? c) $8r$ jízd?

34. Ujdu-li 5 km za hodinu, kolik ujdu

a) za 3 hod.? b) za s hod.? c) za $7t$ hod.?

35. Mezi 6 chlapců se rozdělí rovnoměrně

a) 48, b) $12r$, c) $9s$, d) $4t$

jablek. Kolik jablek dostane každý?

36. Za jak dlouho se ujede 72 km rychlostí

a) 18 km za hod.? b) p km za hod.? c) $6r$ km za hod.?

37. Vlak ujede c km za hodinu. Kolik metrů ujede průměrně za 5 minut?

38. Strana čtverce je $\frac{3a}{2}$ cm. Vypočtěte

a) obvod čtverce; b) obsah čtverce!

39. Ušel jsem $5x$ km dopoledne a dvakrát tolik odpoledne; kolik jsem ušel za celý den?

40. Hodinky se zpožďují za hodinu o pět vteřin. Za jak dlouho se zpozdí o t minut?

§ 2. Řešení úloh rovnicemi.

5. Řešení jednoduchých rovnic. Algebry se užívalo po staletí především k tomu účelu, aby slovní úlohy, které se dají jen obtížně řešiti úsudkem, byly snáze řešeny pomocí t. zv. **rovnic.** V tomto paragrafu budeme řešit rovnicemi pouze úlohy tak jednoduché, že bychom je i bez rovnic řešili snadno. Ale na těchto jednoduchých úlohách poznáme, jak se rovnic užívá a později budeme pomocí rovnic řešiti také úlohy složitější, které se už nedají tak lehko řešit pouhým úsudkem bez algebry.

Příklad. Myslím si číslo, znásobím je dvěma, přičtu sedm a vyjde mi 25. Které číslo jsem si myslil?

Představme si, že celý počet je zapsán na tabuli, ale že myšlené číslo je zakryto kusem papíru, tedy:

$$2 \,.\, \square + 7 = 25.$$

Máme určiti číslo zakryté papírem. Máme před sebou **rovnici,** ve které nalevo od rovnítka je totéž číslo jako napravo od rovnítka. Jestliže od čísla na levé straně odečtu 7 a od čísla na pravé straně také odečtu 7, zase bude na obou stranách totéž číslo (ovšem jiné než dříve). Tak dostanu novou rovnici

$$2 \,.\, \square = 18.$$

Jestliže nyní dělíme dvěma i číslo na levé straně i číslo na pravé straně, budeme stále míti na obou stranách totéž číslo. Tedy

$$\square = 9$$

a jsme hotovi: myšlené číslo je 9.

Nyní místo toho, abychom myšlené číslo zakrývali papírem, zvolíme si nějaké písmeno, třeba písmeno n, které bude znamenati myšlené číslo. Tedy si napíšeme rovnici

$$2 \,.\, n + 7 = 25$$

nebo kratčeji bez tečky

$$2n + 7 = 25$$

a tuto rovnici **řešíme,** t. j. hledáme, jaký číselný význam má písmeno n. Postup při řešení je tento:

$$2n + 7 = 25.$$

(Od obou stran odečteme 7.) $\quad 2n = 18.$

(Obě strany dělíme dvěma.) $\quad n = 9.$

Zkouška: $2 \cdot 9 + 7 = 25$.

Podle tohoto vzoru si počínejte ve cvič. 41.

41. V následujících rovnicích pokaždé písmeno znamená myšlené číslo. Určete to číslo! Vyložte postup a provádějte zkoušku!

a) $x + 7 = 10$; b) $5 + s = 12$; c) $t - 12 = 6$;
d) $3a = 18$; e) $c - 8 = 0$; f) $4 + k = 14$;
g) $3p - 24 = 0$; h) $2q + 7 = 32$; i) $6z - 14 = 28$;
j) $\frac{y}{3} = 8$; k) $\frac{r}{4} + 3 = 10$; l) $\frac{n}{2} - 12 = 12$.

Než budeme počítati další příklady, uveďme si výslovně jednoduché zásady, jimiž se při řešení rovnic řídíme.

Máme-li správnou rovnici a přičteme-li na obou stranách totéž číslo, dostaneme zase správnou rovnici.

Máme-li správnou rovnici a odečteme-li na obou stranách totéž číslo, dostaneme zase správnou rovnici.

Máme-li správnou rovnici a znásobíme-li na obou stranách týmž číslem, dostaneme zase správnou rovnici.

Máme-li správnou rovnici a dělíme-li na obou stranách týmž číslem, dostaneme zase správnou rovnici.

Příklad. Řešte rovnici $47 - 3s = 5s + 12 + 2s$!

Protože s znamená číslo, také $3s$ znamená číslo. Rovnice zůstane správná, přičteme-li na obou stranách číslo $3s$. Nevadí, že $3s$ je číslo, jehož hodnotu dosud neznáme. Dostaneme

$$47 = 5s + 12 + 2s + 3s.$$

Touto první úpravou jsme docílili toho, **že se písmeno** s **vyskytuje pouze na jedné straně rovnice.** Druhou úpravou docílíme toho, že všecky **známé členy** budou pouze na jedné straně rovnice, a to na té, **na které se nevyskytuje písmeno** s; tato úprava spočívá v tom, že na obou stranách odečteme 12. Dostaneme

$$47 - 12 = 5s + 2s + 3s.$$

Nyní je na místě zjednodušiti obě strany; vyjde

$$35 = 10s.$$

Teď ještě na obou stranách dělíme deseti a dostaneme

$$3\tfrac{1}{2} = s.$$

To znamená, že $3\frac{1}{2}$ a s je totéž číslo, tedy že $s = 3\frac{1}{2}$. Naše rovnice má řešení $s = 3\frac{1}{2}$ neboli, jak se často říká, **kořen** $s = 3\frac{1}{2}$. Tedy kořen rovnice je totéž jako řešení rovnice.

Zkouška [l. s. znamená „levá strana“; p. s. znamená „pravá strana“]:

$$\text{l. s.} = 47 - 3 \,.\, 3\tfrac{1}{2} = 47 - 10\tfrac{1}{2} = 36\tfrac{1}{2};$$

$$\text{p. s.} = 5 \,.\, 3\tfrac{1}{2} + 12 + 2 \,.\, 3\tfrac{1}{2} = 17\tfrac{1}{2} + 12 + 7 = 36\tfrac{1}{2}.$$

Zkouška ukazuje, že na levé straně je totéž číslo jako na pravé straně, že jsme tedy kořen určili správně.

42. Jak docílíte, aby neznámé číslo zmizelo z pravé strany rovnice?

a) $5x = 3x + 8$; b) $7y = 36 - 5y$;
c) $z = 20 - z$; d) $\frac{1}{2}y = 1 - y$.

43. Jak docílíte, aby neznámé číslo zmizelo z levé strany rovnice?

a) $14 + k = 3k$; b) $21 - 3h = 4h$;
c) $2p + 18 = 5p$; d) $19 - r = 2r - 8$.

44. Kterými úpravami dostanete všecky členy obsahující neznámé číslo na jednu a ostatní členy na druhou stranu rovnice?

a) $5c + 2 = 3c + 6$; b) $2e + 5\frac{1}{2} = 3e - 7\frac{1}{2}$;
c) $3g - 3 = 2g + 5$; d) $10 - 2n = 4n - 2$;
e) $13 - 2u = 2 - u$; f) $5v - 2 = 2v + 6 + 12$.

45. Řešte následující rovnice! Každý krok vyložte a provádějte zkoušku!

a) $3r + 1 = 70$; b) $27 = 3 + 4z$; c) $7y - 11 = 80$;
d) $69 = 4a + 65$; e) $6c + 35 = 83$; f) $5u - 13 = 72$;
g) $89 - 2s = 9s - 10$; h) $31 - v = 3v + 3$; i) $71 + k = 35 + 9k$;
j) $3b + 5 = 17 - 5b$; k) $9x - 7 = 85 + 3x$; l) $7p - 23 = 4 + 3p$.

46. a) Myslím si číslo, znásobím je osmi, přičtu 17 a vyjde mi 73. Které číslo jsem si myslil?

b) Myslím si číslo, znásobím je třemi, odečtu 25 a vyjde mi 26. Které číslo jsem si myslil?

c) Pětinásobek kteréhosi čísla je o 12 větší nežli 43. Které je to číslo?

d) Součet čísla 17 a trojnásobku jiného čísla je 200. Které je to číslo?

e) O 27 méně nežli čtyrnásobek kteréhosi čísla je 69. Které je to číslo?

47. Řešte rovnice:

a) $6x = 3x + 27$; b) $10 - 3y = y$;
c) $4p + 13 = 7 + 5p$; d) $5a - 5 = 9 - 2a$;
e) $17 - f = 23 - 2f$; f) $4n - 8 = 2n + 50$;
g) $1\frac{1}{2} + 2r = 5\frac{1}{2}$; h) $5s - 2 = s + 5 + 2s$;
i) $15 + 5t - t - 3 = 10t$; j) $2p + 1 = 1 + 3p + 2p - 9$;
k) $h - 1 + 2h - 3 = 7 - 2h$; l) $0 = 3u - 5 - 4 - 2u$;
m) $g + \frac{1}{2} + g + \frac{1}{3} = 1$.

48. Řešte rovnice:

a) $\frac{x}{3} = 4$; b) $6 = \frac{y}{5}$; c) $\frac{2a}{3} = 4$;

d) $\frac{r}{5} = 2$; e) $\frac{3s}{4} = 7$; f) $\frac{6t}{5} = 3$;

g) $2\frac{1}{2} = \frac{u}{5}$; h) $\frac{5v}{6} = 7\frac{1}{2}$; i) $\frac{2p}{3} = 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$.

6. Sestavování rovnic. Příklad. Karel a Jan mají dohromady 37 K. Karel má o 5 K více nežli Jan. Kolik má každý z nich?

Označíme si písmenem j počet korun, které má Jan. Karel má o 5 K více, tedy má $(j + 5)$ korun. Dohromady mají $(j + 5 + j)$ korun. Ale v úloze stojí, že mají dohromady 37 K. Tedy můžeme napsati rovnici

$$j + 5 + j = 37.$$

Umíme najíti kořen této rovnice; vyjde $j = 16$. Vypočteme ještě $j + 5 = 21$ a jsme hotovi: Karel má 21 K a Jan má 16 K. **Teprve teď provádíme zkoušku.** [Kdybychom prováděli zkoušku jen u rovnice, nepřišli bychom na chybu, kterou bychom mohli učiniti už při sestavování rovnice.] Protože Karel má 21 K a Jan 16 K a protože $21 + 16 = 37$, mají dohromady 37 K. Protože $21 - 16 = 5$, má Karel o 5 K více nežli Jan.

Postup při řešení si zapíšeme takto: Stranou do kroužku dáme znak K; to znamená, že počítáme v korunách. Potom píšeme postupně:

Jan má j	$j + 5 + j = 37$
Karel má $j + 5$	$2j + 5 = 37$
dohromady mají $j + 5 + j$	$2j = 32$
dohromady mají 37	$j = 16$
	$j + 5 = 21$

Nalevo jsou záznamy, které vedou k sestavení rovnice. Napravo rovnici řešíme. Když už máme kořen j, určíme ještě druhé hledané číslo $j + 5$. Pod to napíšeme odpověď:

Karel má 21 K, Jan má 16 K.

Zkouška: $21 + 16 = 37$, $21 - 16 = 5$.

Podle tohoto vzoru si máte počínati ve cvič. 49 až 54.

V hořejší úloze jsme mohli postupovati také tak, že bychom si označili písmenem, třeba písmenem k, počet korun, které má Karel. Pak máme tento postup (zase počítáme v korunách):

Karel má k
Jan má $k - 5$
dohromady mají $k + k - 5$
dohromady mají 37

$$
\begin{aligned}
k + k - 5 &= 37 \\
2k - 5 &= 37 \\
2k &= 42 \\
k &= 21 \\
k - 5 &= 16
\end{aligned}
$$

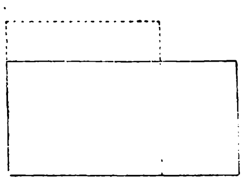
V našem případě je celkem lhostejné, pro který z obou postupů se rozhodneme. Ale často je výhodnější v takových případech, ve kterých se hledají dvě čísla, označiti si písmenem **menší** z nich; mimo jiné se tak někdy vyhneme zlomkům.

49. Tři osoby A, B, C složily 43200 RM na zakoupení podniku. A přispěl částkou dvakrát větší než B, C částkou třikrát větší než B. Jakou částkou přispěl každý z nich? (Označte y počet RM, které složil B.)

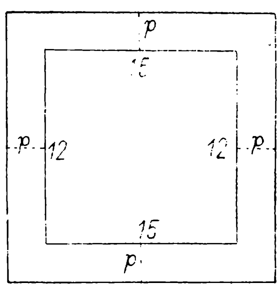
50. Otec odkázal 127000 K svým třem dcerám a čtyřem synům. Podíly děvčat byly dvojnásobky podílů hochů. Kolik dostal každý syn a každá dcera? (Každý syn dostal s korun.)

51. 60 K se má rozdělit mezi dva bratry tak, aby mladší dostal o 5 K méně. Kolik dostali? (Mladší dostal m korun.)

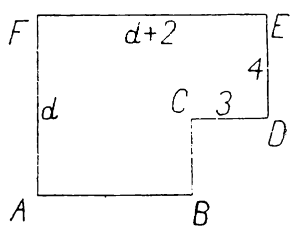
52. Muž odkázal ženě, dvěma dcerám a třem synům dohromady 17000 RM. Vdova dostala 6500 RM a každá dcera dvakrát tolik co každý syn. Kolik připadlo na každého? (Každý syn dostal x korun.)



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

53. (Viz obr. 1.) Délka stolu je dvojnásobek jeho šířky. Kdyby byla délka o 6 dm menší a šířka o 3 dm větší, byl by to čtverec. Určete délku a šířku stolu. (Šířka y decimetrů.)

54. (Viz obr. 2.) Pruh mezi oběma obdélníky v obrazci je všude stejně široký. Čísla v obrazci znamenají centimetry. Obvod vnějšího obdélníka je 78 cm. Určete rozměry vnějšího obdélníka! (Šířka pruhu p centimetrů.)

Pokyny pro řešení úloh rovnicemi.

I. Rozhodněte se, v jakých jednotkách budete pracovati! Jednotky si vyznačte stranou!

II. Vyhledejte si v úloze, která čísla se mají určit!

III. Rozhodněte se, které neznámé číslo si označíte písmenem! Hledají-li se dvě čísla, bývá výhodné označiti si písmenem menší z nich.

IV. Pomocí zvoleného písmene vyjadřujte postupně velikost všech věcí, o kterých je v úloze řeč!

V. Jakmile máte velikost nějaké věci vyjádřenu dvojím způsobem, můžete napsati rovnici.

VI. Zkoušku provádějte s úlohou, jak je dána, ne s rovnicí, protože už při sestavování rovnice mohla býti učiněna chyba!

55. Někdo koupil 6 výtisků knihy. Platil desetimarkou a dostal 16 K zpět. Kolik stála kniha?

56. (Viz obr. 3.) Jednotka v obrazci je 1 cm. Obvod šestiúhelníka $ABCDEF$ je 32 cm. Určete d!

57. V rodině jsou čtyři bratři. Věkové rozdíly mezi nimi jsou pokaždé tři roky. Nejstarší bratr je dvakrát tak stár jako nejmladší. Určete věk všech bratří!

58. Zpáteční lístek na železnici stojí dvakrát tolik jako jednoduchý lístek. Za deset lístků, z nichž bylo šest zpátečních, bylo zaplaceno celkem 512 K. Kolik stál jeden jednoduchý lístek?

59. Někdo jel vlakem, autobusem a taxametrem. Za vlak zaplatil pětkrát tolik jako za taxametr, za autobus třikrát tolik jako za taxametr. Celkem zaplatil 108 K. Kolik zaplatil za vlak? (Co si označíte písmenem?)

60. Vědro s uhlím váží 14 kg. Uhlí váží třikrát tolik jako prázdné vědro. Kolik uhlí je ve vědru?

61. Pět hodin $3k$ minut je týž čas jako šest hodin bez $2k$ minut. Určete k!

62. Součet čtyř za sebou následujících celých čísel je 58. Která to jsou čísla?

63. Součet tří za sebou následujících lichých čísel je 75. Která to jsou čísla?

64. 80 K se rozdělí mezi dva hochy tak, že první dostane o korunu méně nežli dvojnásobek toho, co dostane druhý. Kolik dostanou hoši?

65. Délka obdélníka je o 5 dm menší nežli trojnásobek šířky. Obvod je 4,6 m. Určete rozměry!

66. Tři strany šestiúhelníka jsou stejně dlouhé; čtvrtá strana je o 2 cm a pátá o 5 cm delší, šestá o 7 cm kratší nežli strana první. Obvod je 12 dm. Určete délky stran!

67. Prodá-li kloboučník klobouk za 14 RM, získá tolik, kolik by prodělal, kdyby jej prodal za 8 RM. Co stál klobouk kloboučníka?

7. Úlohy o rychlosti. Příklad. Vzdálenost míst A a B je 224 km. Z místa A vyjede auto do místa B a současně vyjede druhé auto z místa B do místa A. První auto jede rychlostí 35 km za hodinu, druhé 29 km za hodinu. Za jak dlouho po odjezdu se auta potkají?

(Jednotka délek 1 km.)

auta jedou t hodin
první ujede $35t$
druhé ujede $29t$
dohromady ujedou $35t + 29t$
dohromady ujedou 224

$$35t + 29t = 224$$
$$64t = 224$$
$$t = \frac{224}{64} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3\tfrac{1}{2}$$

Auta se potkají za tři a půl hodiny po odjezdu.

Příklad. Chodec vyšel o půl čtvrté a ujde 5 km za hodinu. O půl šesté vyjede za ním z téhož místa auto, které jede rychlostí 35 km za hodinu. Kdy dostihne auto chodce?

(Jednotka délek 1 km.)

auto jede t hodin
auto ujede $35t$
chodec ujde do půl šesté 10
chodec ujde po půl šesté $5t$
chodec ujde celkem $10 + 5t$

$$10 + 5t = 35t$$
$$10 = 30t$$
$$\frac{10}{30} = t$$
$$t = \frac{1}{3}$$

Auto jede $\frac{1}{3}$ hodiny neboli 20 minut a dostihne chodce v 5 hodin 50 minut.

68. Vzdálenost míst C a D je 174 km. Z C do D jede vlak rychlostí 30 km za hodinu. Z D do C jede vlak rychlostí 57 km za hodinu. Oba vlaky vyjedou o půl jedenácté dopoledne. Kdy se potkají?

69. V 9 hodin ráno ukradl zloděj auto a odjel s ním rychlostí 48 km za hodinu. O půl desáté byla krádež zpozorována a zloděj byl pronásledován v jiném autu rychlostí 63 km za hodinu. Kdy chytili zloděje?

70. Cyklista jede rychlostí 12 km za hodinu, automobilista rychlostí 50 km za hodinu. Oba vyjedou z téhož místa týmž směrem, ale automobilista vyjede teprve tehdy, když cyklista už ujel $9\frac{1}{2}$ km. Jak dlouho jede auto, než dostihne cyklistu?

71. Někdo ujel za 4 hodiny celkem 161 km. Z toho jel 3 hodiny vlakem a hodinu autobusem. Rychlost vlaku byla dvakrát větší než rychlost autobusu. Určete obě rychlosti!

72. Josef vyjde z místa M v 8 hodin, jde rychlostí 6 km za hodinu a dojde za půl hodiny domů. Doma se zdrží 30 minut a pak pokračuje v cestě na kole rychlostí 12 km za hodinu. Václav jede z místa M za Josefem rychlostí 30 km za hodinu. Vyjede v 9 hodin. Kdy dohoní Václav Josefa?

73. Železniční neštěstí. Ze stanice S vyjel v 8 hodin 30 minut nákladní vlak rychlostí 20 km za hodinu. Když ujel 2 km, projížděl za ním stanicí S rychlík rychlostí 60 km za hodinu. Kdy nastala srážka?

8. Úlohy o úhlech. Úhlová jednotka ve všech obrazcích k tomuto odstavci je 1°.

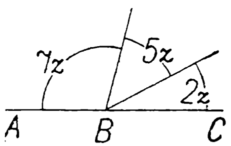
74. Ze dvou doplňkových úhlů měří jeden $2x$ stupňů, druhý $3x$ stupňů. Určete x!

75. Ze dvou výplňkových úhlů měří jeden $(4y + 30)$ stupňů, druhý $(y + 40)$ stupňů. Určete y!

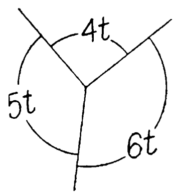
76. (Viz obr. 4.) Čára ABC je přímá. Určete z!

77. (Viz obr. 5.) Určete t.

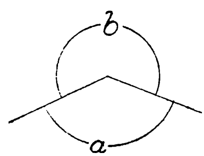
78. (Viz obr. 6.) Vypočtěte a, jestliže
a) $b = 2a$; b) $b - a = 90$.



Obr. 4.



Obr. 5.



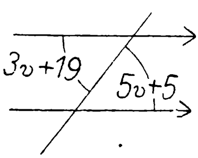
Obr. 6.

79. (Viz obr. 7.) Určete v!

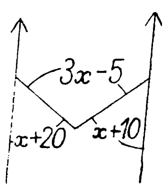
80. (Viz obr. 8.) Určete x!

81. (Viz obr. 9.) Určete u!

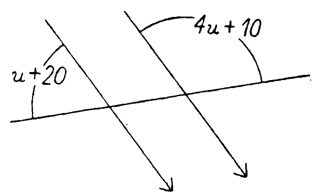
Šipky v obr. 7 až 9 značí rovnoběžky.



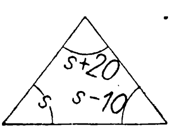
Obr. 7.



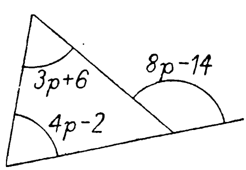
Obr. 8.



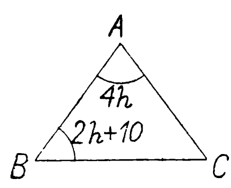
Obr. 9.



Obr. 10.



Obr. 11.



Obr. 12.

82. Čtyři úhly šestiúhelníka jsou si rovny; pátý je o 10° větší než první a šestý o 20° větší než první. Vypočtěte všecky úhly!

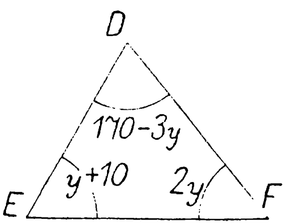
83. (Viz obr. 10.) Určete s!

84. (Viz obr. 11.) Určete p!

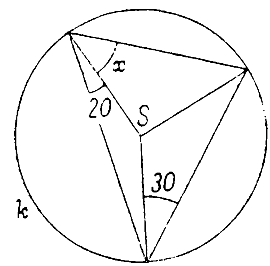
85. (Viz obr. 12.) Jest $\overline{AB} = \overline{AC}$. Určete h!

86. (Viz obr. 13.) Jakou hodnotu musí míti y, aby trojúhelník DEF byl rovnoramenný? (Tato úloha má tři řešení!)

87. (Viz obr. 14.) S je střed kružnice k. Určete x!



Obr. 13.



Obr. 14.

§ 3. Závorky.

9. Význam závorek. Víte, že závorka v aritmetice naznačuje, že máme to, co je uvnitř ní, považovati za jediné číslo. Tedy na př. $(s + 3)^2$ znamená, že se má součet $s + 3$ násobiti sám sebou; bez závorky by $s + 3^2$ znamenalo $s + 9$. Podobně $(3s)^2$ znamená $3s \,.\, 3s$ neboli $9s^2$, tedy zase něco jiného nežli $3s^2$ bez závorky.

Víte, že se závorkami naznačuje pořádek početních výkonů. Na př.

$$5 + 2 \,.\, (3 + 4) = 5 + 2 \,.\, 7 = 5 + 14 = 19,$$
$$(5 + 2) \,.\, 3 + 4 = 7 \,.\, 3 + 4 = 21 + 4 = 25,$$
$$(5 + 2) \,.\, (3 + 4) = 7 \,.\, 7 = 49.$$

Víte, že **není-li závorkami jinak naznačeno, provádíme násobení dříve nežli sčítání a odčítání,** na př. $7 + 2 \,.\, 4 = 7 + 8 = 15$, kdežto $(7 + 2) \,.\, 4 = 9 \,.\, 4 = 36$.

Co znamená $8 \,.\, 4 - 2 \,.\, 9 + 3 \,.\, 5$? Nejprve provedeme násobení, potom ostatní výkony postupně od levé strany, tedy

$$8 \,.\, 4 - 2 \,.\, 9 + 3 \,.\, 5 = 32 - 18 + 15 = 14 + 15 = 29.$$

Při dělení $(24 + 16) : 4$ nesmíme závorku vynechati:

$$(24 + 16) : 4 = 40 : 4 = 10,$$
$$24 + 16 : 4 = 24 + 4 = 28,$$

protože **také dělení provádíme dříve nežli sčítání a odčítání, není-li závorkami jinak naznačeno.** Ale tohoto pravidla se celkem příliš neužívá; rozhodně nechybíte, napíšete-li $24 + (16 : 4)$ se závorkou.

V hořejším příkladě $(24 + 16) : 4$ můžeme závorku vynechati tak, že místo značky : užijeme zlomkové čáry, neboť

$$\frac{24 + 16}{4} \quad \text{a} \quad 24 + \frac{16}{4}$$

se od sebe rozezná snadno i bez závorky. Tedy **zlomková čára může zastupovati závorku.** Na př. $(6 + 3) : (2 + 1)$ můžeme napsati bez závorek ve tvaru

$$\frac{6 + 3}{2 + 1} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ve cvič. 88 až 104 máte zapsati žádané číslo pomocí závorek. Neprovádějte žádný výpočet.

88. K číslu a přičtěte číslo $2b$ a součet násobte pěti!

89. Od čísla $3c$ odečtěte číslo d a rozdíl násobte čtyřmi!

90. Šestkrát součet čísel $2e$ a $3f$.

91. Od čísla $5g$ odečtěte číslo $4h$ a rozdíl násobte sedmi!

92. Polovina součtu čísel $3k$ a $7l$.

93. Rozdíl s menšitelem $2p - q$ a menšencem $m - 2n$.

94. Znásobte čísla $r - x$ a $t - y$.

95. Udejte, oč je s větší nežli $u - v$!

96. Od čísla 20 odečtěte číslo a a rozdíl odečtěte od dvojnásobku součtu čísel $5b$ a $4c$!

97. Ke čtyrnásobku součtu čísel x a $2y$ přičtěte trojnásobek součtu čísel $4u$ a v!

98. Rozdíl s menšencem pětkrát větším než $2r + 4$ a s menšitelem třikrát větším než $4s + 1$.

99. Od druhé mocniny součtu čísel p a q odečtěte součet druhých mocnin čísel p a q.

100. Bednička cukru váží brutto r kg a prázdná s kg. Kolik cukru je v n takových bedničkách?

101. Jízda autem trvá 6 hodin. Rychlost je 30 km za hodinu v prvých t hodinách a potom 40 km za hodinu. Kolik km se ujede celkem?

102. Stůl stojí h RM, stejný stůl se čtyřmi židlemi stojí k RM. Co stojí

a) čtyři židle? b) jedna židle? c) n židlí?
d) 5 stolů a n židlí?

103. Na úsečce AB leží bod C; jest $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{AC} = s$ cm. Úsečka CB je rozdělena na čtyři stejné díly. Kolik cm měří jeden díl?

104. Prázdná nádoba váží r dkg, plná vody t dkg. Kolik dkg váží táž nádoba do poloviny naplněná vodou?

Jsou-li uvnitř závorky pouze čísla zvláštní, můžeme **závorku odstraniti** tím, že provedeme početní výkony v závorce naznačené.

105. Vyložte slovy význam početního výrazu! Potom do něho dosaďte udaná čísla zvláštní!

a) $2(r+3)$; $r=5$; b) $(s-3)t$; $s=5$, $t=4$;
c) $(a+4)(b-2)$; $a=2$, $b=5$; d) $a+4(b-2)$; $a=2$, $b=5$.

106. Dosaďte $s=3$, $t=5$, $x=8$:

a) $3(x-s)$; b) $x(t-s)$; c) $(s-2)t$;
d) $\frac{s+t}{x}$; e) $(2t-x)s$; f) $4(s+t)-(4s+4t)$;
g) $(s+t)(x-t)$; h) $5(s+t)-(5s+t)$; i) $(3t-2s)(2x-s)$.

107. Dosaďte $a=3$, $b=2$, $c=6$, $d=5$:

a) $a+b(c+d)$; b) $(a+b)(c+d)$; c) $(a+b)c+d$;
d) $a+(b+c)d$; e) $a+bc+d$; f) $a^2+(b+c)^2$;
g) $b+\frac{c}{a}+d$; h) $\frac{b+c}{a}+d$; i) $\frac{b+c}{a+d}$.

10. Násobení součtu a rozdílu. I když jsou v závorce obecná čísla, můžeme často **závorku odstraniti**, t. j. nahraditi výraz se závorkou jiným výrazem, který už závorku neobsahuje. K tomu je třeba znáti určitá pravidla a s několika takovými pravidly se nyní seznámíme; jsou důležitá při řešení rovnic.

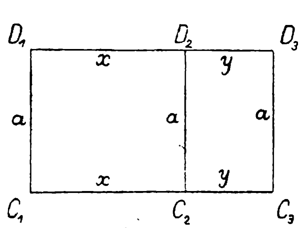
Příklad. Prázdná krabice váží t kg. Kolik váží dohromady 4 takové krabice, je-li v každé z nich 5 kg cukru?

Žádaný počet kg můžeme určiti dvojím způsobem. Předně můžeme usouditi, že jedna plná krabice váží $(t+5)$ kg, takže čtyři plné krabice váží $4(t+5)$ kg. Za druhé můžeme usouditi, že čtyři prázdné krabice váží $4t$ kg a že cukr v nich váží $4 \cdot 5$ kg, takže čtyři plné krabice váží $(4t+4 \cdot 5)$ kg. Tedy je

$$4(t+5)=4t+4 \cdot 5.$$

To je příklad na obecné pravidlo, kterému se někdy říká **distributivní zákon: součet násobíme číslem, jestliže jím násobíme oba sčítance a součiny sečteme.** Stručněji a výrazněji nežli slovy vyjádříme toto pravidlo pomocí písmen:

$$a(x+y)=ax+ay.$$



Obr. 15.

Můžeme si naše pravidlo také znázornit geometricky (viz obr. 15). V obrazci je obdélník $C_1C_3D_3D_1$, jehož základna měří $(x+y)$ centimetrů a výška a centimetrů, takže obsah je $a(x+y)$ čtverečních centimetrů. Ale z obrazce je patrné, že obsah obdélníka $C_1C_3D_3D_1$ je součet obsahů obdélníků $C_1C_2D_2D_1$ a $C_2C_3D_3D_2$, které jsou ax čtverečních centimetrů a ay čtverečních centimetrů. Proto je $a(x + y) = ax + ay$.

Podle našeho pravidla můžeme na př. ve výraze $4(t + 5)$ **odstraniti závorku**, t. j. můžeme výraz $4(t + 5)$ nahraditi výrazem $4t + 4 \,.\, 5$ neboli $4t + 20$, ve kterém už není závorka a který má touž číselnou hodnotu jako původní výraz, ať dosadíme za t kterékoli číslo zvláštní.

108. Dosaďte

a) $r = 4$ do výrazů: $3(2r + 1)$; $6r + 3$;
b) $s = 4$, $t = 1$ do výrazů: $s(t + 3)$; $st + 3s$.

109. Odstraňte závorku:

a) $4(x + 1)$;	b) $a(x + 1)$;	c) $x(x + 1)$;
d) $x(a + b)$;	e) $x(x + a)$;	f) $3x(a + b)$;
g) $\frac{1}{4}(a + 4)$;	h) $\frac{2}{3}(6 + 3x)$;	i) $\frac{1}{r}(2r + r^2)$.

110. Znázorněte geometricky:

a) $x(a + b + c) = xa + xb + xc$;
b) $y(y + 3) = y^2 + 3y$.

111. Odstraňte závorku:

a) $7(3x + 2y + 5z)$;	b) $x(3xy + 4x^2 + 5x)$;
c) $(4r + 6s + 9t) \,.\, 12$;	d) $(5p^2q + 6pq^2 + 8pq) \,.\, 14pq$.

Rozdíl násobíme číslem, násobíme-li jím napřed menšence, potom menšitele a na konec odečteme druhý součin od prvního. Zase můžeme toto pravidlo vyjádřiti stručněji a výrazněji pomocí písmen:

$$a(x - y) = ax - ay.$$

Na základě předešlého pravidla můžeme si nové pravidlo **dokázati** takto: Protože písmena x, y znamenají čísla, také $x - y$ znamená číslo a toto číslo si můžeme označiti nějakým novým písmenem, třeba písmenem r. Je tedy

$$r = x - y.$$

Na obou stranách přičtěme y; dostaneme

$$r + y = x.$$

Obě strany násobme číslem a; dostaneme

$$a(r + y) = ax.$$

Nalevo umíme odstranit závorku; dostaneme

$$ar + ay = ax.$$

Od obou stran odečtěme ay; dostaneme

$$ar = ax - ay.$$

Nyní si vzpomeňme, že r znamená totéž co $x - y$; tedy

$$a\,(x - y) = ax - ay$$

a to byl cíl, za kterým jsme šli.

112. Pravidlo $a\,(x - y) = ax - ay$ znázorněte geometricky!

113. Dosaďte

a) $r = 5$, $s = 4$, $t = 1$ do výrazů: $3r\,(s - 4t)$; $3rs - 12rt$.
b) $x = y$, $y = 6$, $z = 2$ do výrazů: $5x\,(y - 2z)$; $5xy - 10xz$.

114. Odstraňte závorku:

a) $7\,(a - b)$; b) $p\,(a - b)$; c) $12\,(9 - a)$;
d) $8\,(14 - x)$; e) $x\,(2a - 3x)$; f) $2y^2\,(3y - 4y^2)$;
g) $\frac{5}{6}\,(3u - 9v)$; h) $\frac{3}{8}\,(2m + 4n)$; i) $\frac{1}{x^2}\,(x^4 - x^3)$.

115. Zjednodušte:

a) $2\,(c + 1) + 3\,(c + 2)$; b) $3\,(1 + 2f) + 2\,(3f + 5)$;
c) $4\,(2r + 3s) + 7\,(3s + r)$; d) $3\,(p + q) + 2\,(q + p)$;
e) $h\,(3 + k) + k\,(3 + h)$; f) $z\,(x + y) + x\,(y + z)$;
g) $t\,(1 + t) + 3\,(1 + t)$; h) $n\,(2 + n) + 4n\,(n + 3)$;
i) $4\,(e + \frac{1}{2}) + 6\,(2e + \frac{1}{3})$; j) $8a\,(a + \frac{1}{4}) + 2a\,(3a + \frac{1}{2})$.

116. Zjednodušte:

a) $2\,(u - 3) + 3\,(5 - u)$; b) $5\,(x - 2y) + 4\,(y - 2x)$;
c) $r\,(r - 2s) + 2s\,(2r - s)$; d) $k\,(1 - k^2) + k^2\,(k - 1)$;
e) $\frac{1}{2}\,(8 - 4n) + \frac{1}{4}\,(8 - 2n)$; f) $\frac{1}{3}\,(3t - 6z) + \frac{1}{4}\,(12t - 8z)$.

Příklad. Řešte rovnici $7\,(3n - 1) + 2 = 30$!

$$7\,(3n - 1) + 2 = 30$$
$$21n - 7 + 2 = 30$$
$$21n + 2 = 30 + 7$$
$$21n = 30 + 7 - 2$$
$$21n = 35$$
$$n = \tfrac{35}{21} = \tfrac{5}{3} = 1\tfrac{2}{3}$$

Zkouška:

$$\text{l. s.} = 7\,.\,(3\,.\,1\tfrac{2}{3} - 1) + 2 = 7\,.\,(5 - 1) + 2 =$$
$$= 7\,.\,4 + 2 = 28 + 2 = 30 = \text{p. s.}$$

117. Řešte rovnice:

a) $2(x + 1) + 3 = 7$; b) $12 = 5(y - 2) - 3$;
c) $4(p + 2) = 20$; d) $2r(r + 7) = 2(r^2 + 7)$;
e) $33 = (s + 3) . 3$; f) $37 = 2(3 + t) + 3(7 + t)$;
g) $2(u - 3) = 4$; h) $90 - v = v + 2(60 - 2v)$;
i) $27 = 4(8 - 2a)$; j) $7(b - 1) = 3(2b + 1)$.

118. Otci je 53 let, synovi 21 let. Kdy bude otec dvakrát tak stár jako jeho syn?

119. Matce je 38 let, dceři 16 let. Kdy byla matka třikrát tak stára jako její dcera?

120. V jedné nádobě bylo 24 l vody, ve druhé jen 5 l. Do obou nádob se přililo stejně vody a potom bylo v prvé dvakrát tolik vody jako ve druhé. Kolik vody se přililo?

121. Otec je pětkrát tak stár jako dcera. Za 21 let bude otec dvakrát tak stár jako dcera. Kolik jim je let?

122. Někdo bude za 18 let třikrát tak stár jako byl před 14 lety. Kolik mu je let?

123. Mezi 50 chudých bylo rozděleno 630 RM. Každý muž dostal 15 RM, každá žena 9 RM. Kolik bylo mužů a kolik žen?

124. Jan má 120 K, Karel 81 K. Kolik by musil dát Jan Karlovi, aby měl Karel dvakrát tolik co Jan?

125. Rovnoramenný trojúhelník má při základně úhly o 18° menší než je úhel proti základně. Určete ty úhly!

126. Někdo procestoval 78 km za tři hodiny. Část cesty šel pěšky rychlostí 6 km za hodinu, ostatek jel autobusem rychlostí 30 km za hodinu. Jak dlouho šel pěšky?

127. Novák měl 1000 K, Procházka 500 K. Když však Procházka zaplatil Novákovi, co mu byl dlužen, měl potom Novák třikrát tolik co Procházka. Určete výši dluhu!

128. Někdo ušel 16 km za půl čtvrté hodiny. Prvé dvě hodiny šel stále stejně rychle. Potom zvolnil chůzi a šel už jen s rychlostí o kilometr za hodinu menší než dříve. Určete obě rychlosti!

11. Odčítání součtu a rozdílu. Máme-li k číslu 50 přičísti 24 neboli $20 + 4$, můžeme přičísti napřed 20 a potom 4. Tedy

$$50 + (20 + 4) = 50 + 20 + 4; \quad a + (b + c) = a + b + c.$$

Máme-li k číslu 50 přičísti 16 neboli $20 - 4$, můžeme napřed přičísti 20 a potom odečísti 4. Tedy

$$50 + (20 - 4) = 50 + 20 - 4; \quad a + (b - c) = a + b - c.$$

Je-li v závorce součet nebo rozdíl a má-li se číslo v závorce k něčemu **přičíst,** může se závorka prostě **vynechat.**

Máme-li od čísla 50 odečísti 24 neboli $20 + 4$, můžeme odečísti napřed 20 a potom 4. Tedy

$$50 - (20 + 4) = 50 - 20 - 4; \quad a - (b + c) = a - b - c.$$

Máme-li od čísla 50 odečísti 16 neboli $20 - 4$, můžeme napřed odečísti 20 a potom přičísti 4. Tedy

$$50 - (20 - 4) = 50 - 20 + 4; \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

Je-li v závorce **součet** a má-li se číslo v závorce od něčeho **odečíst**, můžeme závorku vynechat a oba sčítance postupně **odečíst**. Je-li v závorce **rozdíl** a má-li se číslo v závorce od něčeho **odečíst**, můžeme závorku vynechat, **odečíst menšence** a potom **přičíst menšitele.**

Poznámka. Při odčítání rozdílu musíme někdy napřed přičíst menšitele a teprve potom odečíst menšence, na př. $18 - (20 - 4) = 18 + 4 - 20$, protože $18 - 20 + 4$ by vedlo na čísla záporná, která budeme probírati až v § 5.

129. Odstraňte závorku:

a) $x + 1 - (x - 1)$; b) $y - (y - 2)$;
c) $3r + s - (r + s)$; d) $a + b - (a - b)$;
e) $3p + 2q - (2p - q)$; f) $3u + 3v + (2u - v)$.

130. Řešte rovnice (provádějte zkoušku):

a) $4 = 12 - (3 + b)$; b) $3 = 4 - (z - 3)$;
c) $2r - (r - 3) = r + (r - 3)$; d) $8 + 5s - (4 + 2s) = 31$.

Víme, že

$$a(x + y) = ax + ay; \quad a(x - y) = ax - ay.$$

Proto je

$$c + a(x + y) = c + (ax + ay) = c + ax + ay;$$
$$c + a(x - y) = c + (ax - ay) = c + ax - ay;$$
$$c - a(x + y) = c - (ax + ay) = c - ax - ay;$$
$$c - a(x - y) = c - (ax - ay) = c - ax + ay.$$

Zjednodušování provádíme **na dvakrát.** Nesnažte se dělati oba kroky najednou; mohli byste lehko chybiti.

131. Zjednodušte:

a) $2x - 2(x - 1)$; b) $70 - 3(7 - 2a)$;
c) $2u + 1 - 2(u - 1)$; d) $3(a + b) - 2(a - b)$;
e) $2(y + z) - (2y - z)$; f) $r(1 + r) - r(1 - r)$;
g) $p(q + r + 1) - p(q + r - 1)$.

132. Zjednodušte:

a) $a(b+c)+b(c+a)$; b) $a(b+c)-b(c+a)$;
c) $2r(s+r)-2s(r-2s)$; d) $180-2(u+60)$;
e) $10+\frac{1}{2}(2+4k)$; f) $t-\frac{1}{n}(n+nr)$.
g) $2p(p^2+1)+p^2(1+2p)$; h) $5x^2(2x-3)-5(2x+3)$;
i) $\frac{1}{h}(h-h^2)+2$; j) $\frac{1}{a}(2a^2-3a)-a(2-a)$;
k) $7ax+2a(1-3x)$; l) $1+3(1-y)+2(4y-7)$;
m) $f\left(f+\frac{1}{f}\right)-f\left(f-\frac{1}{f}\right)$; n) $\frac{e}{2}(2+e)-\frac{e}{2}(2-e)$.

133. Řešte rovnice (provádějte zkoušku):

a) $32=5(s+4)-3(s-2)$;
b) $2(3x-4)+4(x+5)=3(2x+8)$;
c) $3(z-4)-2(z-2)=5$;
d) $5(y-7)+10=2(y+7)$;
e) $5(u-2)=2(u+3)+u-4$;
f) $8(3v-2)-7(v+2)=15(4-v)+8v$.

12. Vnitřní a vnější závorky. Často se vyskytují závorky, uvnitř kterých je jiná závorka. Pak mluvíme o **vnější** a **vnitřní** závorce. Obyčejně užíváme pro vnitřní závorku **okrouhlého** tvaru ( ) a pro vnější **lomeného** tvaru [ ].

Příklad. Zjednodušte výraz

$$2[(x+y)-(x-y)]+3[x(y+1)-y(x+1)].$$

Nejprve odstraníme vnitřní závorky, pak sloučíme uvnitř zbývajících závorek, potom odstraníme i tyto a na konec zase sloučíme. Lomené závorce ponecháváme její tvar, i když uvnitř ní už není jiná závorka. Provedení:

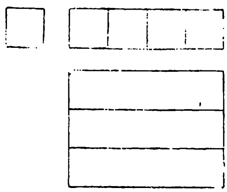
$$\begin{aligned}&2[(x+y)-(x-y)]+3[x(y+1)-y(x+1)]=\\&=2[x+y-x+y]+3[xy+x-(yx+y)]=\\&=2[2y]+3[xy+x-yx-y]=4y+3[x-y]=\\&=4y+[3x-3y]=4y+3x-3y=3x+y.\end{aligned}$$

134. Vyložte slovy význam daného početního výrazu! Potom jej zjednodušte!

a) $20-[10-2(u-1)]$;
b) $11s+6-2[s-(2-s)]$;
c) $3r-[(1+r)-(1-r)]$;
d) $12(p+q)-4[4p+2q-2(q+p)]$;
e) $\frac{n}{2}[4+4+2(n-1)]$;
f) $3u-2[3u-2(1+u)]$.

§ 4. Vzorce.

13. Sestavování vzorců. Příklad: obsah obdélníka. Čtverec se stranou 1 cm má obsah 1 cm^2. Obdélník se základnou 4 cm a výškou 1 cm se dá rozdělit na čtyři takové čtverce, proto jeho obsah je čtyřikrát 1 cm^2 neboli 4 cm^2. Obdélník se základnou 4 cm a výškou 3 cm se dá rozdělit na tři menší obdélníky s obsahem po 4 cm^2, proto jeho obsah je třikrát 4 cm^2 neboli 12 cm^2.



Obr. 16.

Byla by to velká ztráta času, kdybychom pokaždé, když máme vypočísti obsah obdélníka, prováděli znovu a znovu podobnou úvahu. Proto si stanovíme obsah obdélníka **obecně**, t. j. provedeme úvahu pro obdélník, jehož rozměry jsou naznačeny písmeny. Jsou-li oba rozměry 1 cm, je obsah 1 cm^2. Kolikrát se při stejné výšce zvětší základna, tolikrát se zvětší obsah. Proto při základně a cm a výšce 1 cm je obsah a cm^2. Kolikrát se při stejné základně zvětší výška, tolikrát se zvětší obsah. Proto při rozměrech a cm a b cm obsah je b-krát a cm^2 neboli ab cm^2. Obsah budiž P cm^2. Tedy

$$P = ab.$$

To je **vzorec** pro obsah obdélníka. Chceme-li určiti na př. obsah obdélníka s rozměry 42 cm a 38,3 cm a známe-li vzorec, nemusíme už prováděti žádnou úvahu, nýbrž prostě **dosadíme do vzorce** $a = 42$; $b = 38{,}3$. Vyjde $P = 1608{,}6$; tedy obsah je 1608,6 cm^2. Při užívání vzorce je třeba míti na paměti, že jsou-li rozměry vyjádřeny v jednotce 1 cm, vyjde obsah v jednotce 1 cm^2, kdežto je-li třeba 1 m jednotka pro rozměry, vyjde obsah v jednotce 1 m^2 atp.

Příklad: průměrná rychlost. Ujede-li auto 90 km za 3 hodiny, jeho průměrná rychlost je $\frac{90}{3}$ km za hodinu neboli 30 km za hodinu. Ujede-li vlak 250 km za 4 hodiny, jeho průměrná rychlost je $\frac{250}{4}$ km za hodinu neboli $62\frac{1}{2}$ km za hodinu.

Obecně: urazí-li se s km za t hodin, průměrná rychlost je $\frac{s}{t}$ km za hodinu. Je-li tedy c km za hodinu průměrná rychlost, platí vzorec

$$c = \frac{s}{t},$$

z něhož počítáme průměrnou rychlost dosazením. Na př. ušel-li turista 24 km za $4\frac{1}{2}$ hodiny, je $s = 24$; $t = 4\frac{1}{2}$, tedy

$$c = \frac{24}{4\frac{1}{2}} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3} = 5\tfrac{1}{3},$$

tedy turista kráčel s průměrnou rychlostí $5\frac{1}{3}$ km za hodinu.

Ve cvičeních 135 až 142 máte sestaviti vzorec. Aby se vám to ulehčilo, řešíte napřed úlohu a) s jednoduchými zvláštními čísly a teprve potom sestavujete vzorec. Vyskytne-li se ve vzorci závorka, neodstraňujte ji!

135. a) Jaký obvod má obdélník 7 cm dlouhý a 3 cm široký?

b) Rozměry obdélníka jsou a cm, b cm; obvod je o cm. Sestavte vzorec pro o pomocí a a b.

136. a) Jaká je délka základny rovnoramenného trojúhelníka, je-li obvod 11 cm a je-li 4 cm délka ramen?

b) Základna rovnoramenného trojúhelníka měří z cm, ramena r cm; obvod je o cm. Sestavte vzorec pro z pomocí o a r.

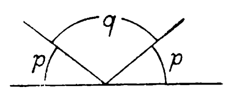
137. a) Dva úhly trojúhelníka měří 70° a 80°; určete třetí úhel.

b) Úhly trojúhelníka jsou x, y a z stupňů. Sestavte vzorec pro z pomocí x a y.

138. (Viz obr. 17.) V obrazci úhly jsou udány ve stupních.

a) Je-li $p = 40$, čemu se rovná q?

b) Sestavte vzorec pro q pomocí p!

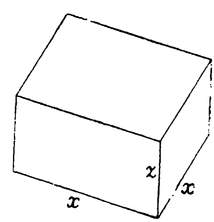


Obr. 17.

139. (Viz obr. 18.) Obrazec představuje kvádr se čtvercovou podstavou. Jednotka 1 cm.

a) Jaký je součet délek všech hran, je-li $x = 5$, $z = 3$?

b) Součet délek všech hran je s cm; sestavte vzorec pro s pomocí x a z.



Obr. 18.

140. (Viz zase týž obr. 18.) a) Jaký je objem, je-li $x = 5$, $z = 3$?

b) Objem je V cm³; sestavte vzorec pro V pomocí x a z!

141. a) Kolo vozu se otočí desetkrát, ujede-li vůz 40 m. Jaký je obvod kola?

b) Kolo vozu se otočí n-krát, ujede-li vůz s metrů; obvod kola je p metrů. Sestavte vzorec pro p pomocí n a s!

142. Mezi čísly 6 a 10 jsou tři celá čísla, totiž 7, 8 a 9.

a) Kolik celých čísel je mezi čísly 3 a 11?

b) Písmena r a s značí dvě celá čísla; $r < s$. Písmeno n značí počet celých čísel mezi čísly r a s. Sestavte vzorec pro n pomocí r a s!

14. Dosazování do vzorců. Procvičme si znovu dosazování zvláštních čísel do početních výrazů, kterého je třeba při užívání vzorců!

143. Dosaďte $a = 34$, $b = 19$, $c = 22$:

a) $4abc$; b) $a^2 - b^2$; c) $a(2b - c)$;
d) $3b + 2c$; e) $(a - b)^2$; f) $4ab^2$.

144. Dosaďte $r = 7{,}32$; $s = 8{,}24$; $t = 0{,}936$:

a) $2st^2$; b) $s^2 - 2rt$; c) $r + s - 2t$; d) $\frac{1}{2}rst$.

145. Dosaďte $x = 3$, $y = 6$, $z = 2$:

a) $\dfrac{x}{12}$; b) $\dfrac{y}{x^2}$; c) $\dfrac{y-1}{x+z}$; d) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{y}$;
e) $\dfrac{18}{x}$; f) $\dfrac{24}{yz}$; g) $\dfrac{y-z}{y+z}$; h) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

146. Dosaďte $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$:

a) $2p^3$; b) $3p - 6q$; c) $\frac{1}{2}p + 3q$; d) $p^2 + 2q^2$.

147. Dosaďte $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$:

a) $4mn$; b) $1 - 1\frac{1}{2}n$; c) $m - n$; d) $6n^2$;
e) $\dfrac{m}{n}$; f) $\dfrac{3}{m} - \dfrac{2}{n}$; g) $\dfrac{4}{mn}$; h) $\dfrac{5}{m} - \dfrac{3}{n}$.

148. Dosaďte $h = \frac{2}{5}$, $k = 1\frac{1}{4}$:

a) $k - 2\frac{1}{2}h$; b) h^2k; c) $4hk^2$; d) $4k^2 - 5h^2$;
e) $\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{k}$; f) $\dfrac{1}{h^2} - 3k$; g) $\dfrac{k-h}{k+h}$; h) $\dfrac{k+h}{hk}$.

149. Pustíme-li kámen s vrcholu věže, je vzdálenost s m, kterou proběhne kámen za t vteřin, dána vzorcem $s = 4{,}9 \,.\, t^2$. Jakou dráhu urazí kámen za 3 vteřiny?

150. Je-li F stupňů Fahrenheita totéž co C stupňů Celsia, platí vzorec $F = 32 + \frac{9}{5}C$. Kolik stupňů Fahrenheita je

a) 100° Celsia; b) 0° Celsia; c) 15° Celsia?

151. Je-li r cm poloměr kruhu, o cm obvod, K cm² obsah, platí vzorce

$$o = 2\pi r; \quad K = \pi r^2.$$

Řecké písmeno π (čteno pí) znamená určité číslo, které je přibližně rovné $3\frac{1}{7}$. Určete obvod a obsah kruhu s poloměrem

a) $10\frac{1}{2}$ cm; b) $3\frac{1}{2}$ cm.

152. V řadě čísel

$$3;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19 \text{ atd.},$$

ve které je vždy následující číslo o čtyři větší nežli předcházející, n-té číslo se rovná $4n - 1$.

a) Přesvědčte se, že je to správné pro $n = 9$.
b) Určete sté číslo řady.

153. Součet prvních n lichých čísel (1; 3; 5; 7 atd.) se rovná n^2.

a) Přesvědčte se, že je to správné pro $n = 7$!

b) Určete součet prvých padesáti lichých čísel!

154. Součet třetích mocnin čísel 1; 2; 3 atd. až po číslo n se rovná $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

a) Přesvědčte se, že je to správné pro součet $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$.

b) Vypočtěte součet $1^3 + 2^3 + 3^3 +$ atd. (sto sčítanců)!

15. Úprava vzorců. Vzorce se většinou píší a pamatují v jednom základním tvaru, ale pro určitý účel bývá výhodné vyjádřiti si vzorec jinak. Na př. pro objem V cm³ kvádru s rozměry a cm, b cm, c cm platí vzorec

$$V = abc.$$

V tomto tvaru se hodí vzorec k výpočtu objemu, známe-li všecky tři rozměry. Známe-li objem a prvé dva rozměry, **upravíme si vzorec** k výpočtu třetího rozměru. Obě strany dělíme číslem ab a dostaneme

$$\frac{V}{ab} = c \quad \text{neboli} \quad c = \frac{V}{ab}.$$

K takové úpravě vzorců užíváme týchž zásad jako při řešení rovnic.

155. Měří-li úhly trojúhelníka x, y a z stupňů, platí vzorec $x + y + z = 180$. Upravte jej k výpočtu čísla y!

156. Je-li s stupňů součet úhlů n-úhelníka (t. j. mnohoúhelníka o n stranách), platí vzorec $s = 180(n - 2)$. Upravte jej k výpočtu čísla n.

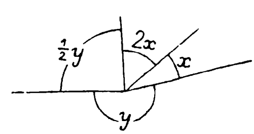
157. Sestavte vzorec pro obvod o cm obdélníka s rozměry a cm, b cm a upravte jej k výpočtu čísla a!

158. (Viz obr. 19.) Úhlová jednotka v obrazci je 1°.

a) Jakým vzorcem jsou vázána čísla x a y? Upravte vzorec

b) k výpočtu čísla x;

c) k výpočtu čísla y!



Obr. 19.

159. Při rovnoměrné rychlosti c km za hodinu se urazí za t hodin dráha s km, kde číslo s je dáno vzorcem $s = ct$. Upravte vzorec

a) k výpočtu čísla c;

b) k výpočtu čísla t!

160. Vzorec ze cvič. 150 upravte k výpočtu stupňů Celsia!

161. p procent ze základu z má hodnotu $č$, kde

$$č = \frac{pz}{100}.$$

a) Odůvodněte tento vzorec! Potom jej upravte
b) k výpočtu čísla z;
c) k výpočtu čísla p!

162. Je-li u korun úrok z jistiny j korun za r roků při úrokové míře p procent, tu platí, jak je vám známo, vzorec $100u = jpr$. Upravte jej k výpočtu

a) čísla u; b) čísla j; c) čísla p; d) čísla r!

163. V trojúhelníku ABC budiž $\overline{AB} = z$ cm; dále budiž v cm výška spuštěná s vrcholu C (t. j. vzdálenost bodu C od přímky AB). Potom pro obsah P cm^2 trojúhelníka ABC platí vzorec $P = \frac{1}{2}zv$. Upravte jej k výpočtu

a) čísla z; b) čísla v!

164. V lichoběžníku $ABCD$ budiž $AB \parallel DC$; dále budiž $\overline{AB} = z_1$ cm, $\overline{CD} = z_2$ cm; konečně budiž v cm vzdálenost rovnoběžek AB a CD. Potom pro obsah L cm^2 lichoběžníka platí vzorec $L = \frac{1}{2}v\,(z_1 + z_2)$. Upravte jej k výpočtu

a) čísla v; b) čísla z_1; c) čísla z_2!

165. (Viz cvič. 151.) Sestavte vzorec k výpočtu poloměru kruhu, známe-li

a) obvod kruhu; b) obsah kruhu!

16. Identity. Vzorce, které se vyskytovaly v předcházejících odstavcích, jsou většinou platné pouze tehdy, když písmena v nich se vyskytující mají určitý geometrický nebo fysikální význam. Ale jsou také takové vzorce, které jsou správné, ať písmena, která se v nich vyskytují, mají **jakýkoli** číselný význam. Takové vzorce se jmenují **identity** (identita je slovo původu latinského, které znamená totožnost). Příklady identit:

$a + b = b + a$ (komutativní zákon sčítání);
$ab = ba$ (komutativní zákon násobení);
$(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativní zákon sčítání);
$(ab)c = a(bc)$ (asociativní zákon násobení);
$(a + b)c = ac + bc$ (distributivní zákon).

Další příklady na identity:

1° $a + 0 = a$; 2° $a - 0 = a$;
3° $1a = a$; 4° $0a = 0$;
5° $(a + b) - a = b$; 6° $a - (b + c) = a - b - c$.

Udejte ještě nějaké příklady!

Místo „identita“ se také říká **identická rovnice.** Proti identickým rovnicím máme **určující rovnice**, které se nám po prvé vyskytly v § 2.

Na př.

$$3(x+2)=3x+6$$

je identická rovnice, protože je správná, ať písmeno x znamená jakékoli číslo. Naproti tomu na př.

$$3(x+2)=4x+2$$

je určující rovnice; je správná pouze tehdy, když písmeno x znamená číslo 4, které se jmenuje **kořen** rovnice. Určující rovnice, které se nám dosud vyskytly, měly vždy jen jediný kořen. Ale jsou také určující rovnice, které mají několik kořenů. Na př. rovnice $y^2+10=7y$ má kořen 2 a kořen 5; přesvědčte se! Rovnice

$$(r-1)(6-r)=25-3\,\frac{r^2+10}{r}$$

má kořeny 2, 3 a 5; přesvědčte se!

166. Odstraněním závorek rozhodněte, zda běží o identickou či o určující rovnici a najděte kořeny všech určujících rovnic!

a) $3(a+2)-2(a+3)=a$;
b) $5(a+2)-2(a-6)=4a$;
c) $r^2-4(r-1)=r^2+4(r+1)-8r$;
d) $r^2+4(r-1)=r^2+4(r+1)-8r$;
e) $s^3-1=s^2(s-1)+s(s-1)+s-1$;
f) $s(s+2)+2(s+1)=s^2+2s+6$.

17. Rozdíl čtverců. V tomto odstavci poznáme jednu zajímavou identitu, které se v algebře často užívá. Víme, že

$$s(x-y)=sx-sy;$$

to je správné, ať písmena s, x, y znamenají jakákoli čísla. (Jenom musíme předpokládati, aby šlo počítat rozdíl $x-y$, že číslo y není větší nežli číslo x; ale až poznáme záporná čísla, bude i tento předpoklad zbytečný.) Zejména tedy můžeme za číslo s voliti součet $x+y$, takže je

$$(x+y)(x-y)=(x+y)x-(x+y)y.$$

Avšak

$$(x+y)x=xx+yx=x^2+xy,$$
$$(x+y)y=xy+yy=xy+y^2.$$

Proto je

$$(x+y)(x-y) = (x^2+xy)-(xy+y^2) = x^2+xy-xy-y^2 = x^2-y^2$$

neboli

$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

a to je identita, ke které jsme chtěli dospěti. Místo písmen x, y můžeme v ní ovšem psáti kterákoli jiná písmena, na př.

$$a^2-c^2 = (a+c)(a-c),$$
$$r^2-t^2 = (r+t)(r-t),$$
$$n^2-p^2 = (n+p)(n-p).$$

Je účelné voliti si taková písmena, kterých se jinak v algebře málo užívá; zvolíme si písmena A, B **velké** abecedy, takže základní tvar naší identity bude

$$A^2-B^2 = (A+B)(A-B).$$

Naše identita má jednoduchý geometrický význam. Mějme dva čtverce, z nichž větší má stranu A cm a menší B cm. Jejich obsahy jsou A^2 cm² a B^2 cm², takže (A^2-B^2) cm² je rozdíl obou obsahů. Naše identita praví, že rozdíl obsahů obou čtverců je roven obsahu obdélníka, jehož jeden rozměr $(A+B)$ cm je součet stran obou čtverců a druhý rozměr $(A-B)$ cm je rozdíl těchto stran.

Slovy můžeme naši identitu stručně vyjádřiti jako poučku: **Součet dvou čísel znásobený jejich rozdílem rovná se rozdílu jejich čtverců.** Výraz „čtverec" zde znamená totéž co „druhá mocnina". Jak vysvětlíte název čtverec pro druhou mocninu?

167. Užijte poučky o rozdílu čtverců k výpočtu:

a) 100^2-99^2; b) 51^2-49^2; c) 79^2-1;
d) 27^2-23^2; e) 98^2-4; f) 48^2-16.

168. Zjednodušte podle poučky o rozdílu čtverců:

a) $(a+3b)(a-3b)$; b) $(4x+5y)(4x-5y)$;
c) $\left(r-\frac{1}{r}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)$; d) $(1-7s)(1+7s)$;
e) $(u^2-uv)(u^2+uv)$; f) $(p^3+q^2)(p^3-q^2)$.

169. Rozložte v součin dvou činitelů:

a) $9-z^2$; b) $4n^2-25$; c) $(a+3)^2-4$;
d) $16-t^4$; e) a^6-a^4; f) $4s^2-(s-2t)^2$;
g) x^4-y^4; h) $(a+b)^2-(a-b)^2$; i) $4(a+b)^2-(a-b)^2$.

§ 5. Relativní čísla.

18. **Význam záporných čísel.** Znamení + a — dosud vám znamenala sčítání a odčítání a v tomto smyslu se vždy vyskytovala **mezi dvěma čísly**; říkáme, že to jsou **znamení výkonná** (znamenají, že se má provésti početní výkon sčítání nebo odčítání). Ale jak si nyní o tom pohovoříme, dávají se znamení + a — někdy také **před jednotlivá čísla**; takovým znamením budeme říkati **znamení přívlastková.**

Čísla opatřená přívlastkem plus nebo minus se jmenují **čísla relativní**; čísla se znamením plus jsou **čísla kladná** neboli **positivní,** čísla se znamením minus jsou **čísla záporná** neboli **negativní.** Význam relativních čísel si vyložíme na příkladech.

Dejme tomu, že někdo koupil a prodal různé věci. Co přijal a co vydal, zapsal si takto:

	hříbě	2 telata	2 selata	uhlí
příjem	3150 K	720 K		
vydání			265 K	690 K

Pomocí relativních čísel dá se zápis provésti kratčeji:

	hříbě	2 telata	2 selata	uhlí
příjem	+3150 K	+720 K	—265 K	—690 K

Tedy + 720 K příjmu je úplně totéž jako 720 K příjmu, ale —690 K **příjmu** znamená 690 K **vydání.** Podobně —3150 K vydání by znamenalo 3150 K příjmu.

Jiný praktický příklad dává teploměr. Teplem se rtuť roztahuje a proto můžeme teplotu měřit podle výšky sloupce rtuti v trubici teploměru. Vedle trubice jsou čísla, která udávají teplotu, při které sloupec rtuti dosahuje právě k místu číslem vyznačenému. Nejčastěji měříme teplotu ve **stupních Celsia.** Číslem 0 je vyznačen **bod mrazu,** t. j. bod odpovídající teplotě, při které voda zamrzá, číslem 100 **bod varu,** t. j. bod odpovídající teplotě, při které se voda vaří. Teploty vyšší než 0° se značí čísly kladnými; na př. + 15° je 15 stupňů tepla neboli teplota o 15° vyšší než 0°. Teploty nižší než 0° se značí čísly zápornými; na př. —8° je 8 stupňů mrazu neboli teplota o 8° nižší než 0°.

Relativních čísel se často užívá k vyznačení směru nahoru (plus) a dolů (minus). Čteme-li na př. na mapě, že Mont Blanc má nadmořskou výšku + 4800 m, znamená to, že vrchol Mont Blancu je 4800 m **nad** hladinou moře. Naproti tomu Mrtvé moře má nadmořskou výšku —394 m; je to jezero, jehož hladina leží 394 m **pod** hladinou moře.

Jindy jsou to směry na sever a na jih. Na př. zeměpisná šířka Berlinu je + 52°, zeměpisná šířka Rio de Janeira je —23°; to znamená, že Berlin leží 52° **severně** od rovníka a Rio de Janeiro 23° **jižně** od rovníka. U zeměpisné délky jsou to zase směry na východ a na západ. Na př. zeměpisná délka Berlinu je + 13°, zeměpisná délka Rio de Janeira je —43°; to znamená, že Berlin leží o 13° **východněji** a Rio de Janeiro o 43° **západněji** nežli greenwichský poledník.

Čísla bez znamení se jmenují **čísla prostá** neboli **absolutní**; užívá se jich tam, kde nula znamená nic, takže pod nulu již jíti nelze; na př. **počet obyvatel** města vyjádříme číslem prostým. Čísel relativních užíváme tam, kde nula znamená stav, od kterého je možná **změna na obě strany**; na př. **roční přírůstek obyvatel** města můžeme vhodně vyjádřit relativními čísly: přírůstek + 927 znamená, že 927 obyvatel **přibylo, přírůstek** —564 znamená, že 564 obyvatel **ubylo.**

170. Čtvery hodinky byly správně nařízeny a za 24 hodin byl učiněn tento záznam:

hodinky	I	II	III	IV
zrychlení ve vteřinách	15		17	
zpoždění ve vteřinách		9		26

Proveďte stručnější záznam pomocí relativních čísel!

171. Označte poledne nulou, zvolte hodinu za jednotku doby a vyjádřete pomocí relativních čísel tyto časy:

a) 3 hodiny ráno; b) 11 hodin dopoledne;
c) 2 hodiny odpoledne; d) 8 hodin večer;
e) 9 hod. 30 min. ráno; f) 3 hod. 45 min. odpoledne.

172. Jaký význam mají tyto výroky?

a) Lodka ujela — 3 km po proudu.
b) Počet obyvatel vzrostl o — 125.
c) Václavův věk v r. 1930 byl — 3 roky.
d) Výška vrcholu stromu nad mým oknem je — 4 m.

e) Cena zboží stoupla o — 2 K za kilogram.
f) Euklidova geometrie byla psána kolem roku — 300.
g) Hodinky se zpozdily o — 4 minuty.
h) Karel je Janovi dlužen — 5 K.

Relativní číslo se skládá ze dvou částí: ze znamení plus nebo minus a z prostého čísla, které se jmenuje **prostá** (neboli **absolutní**) **hodnota** relativního čísla. Ke každé prosté hodnotě máme dvě relativní čísla, jedno kladné a jedno záporné; na př. obě čísla $+5$ a -5 mají prostou hodnotu 5, obě čísla $+\frac{3}{7}$ a $-\frac{3}{7}$ mají prostou hodnotu $\frac{3}{7}$. **Výjimkou je číslo nula**; $+0$ i -0 je oboje totéž co 0. **Nulu nepočítáme ani mezi čísla kladná ani mezi čísla záporná.**

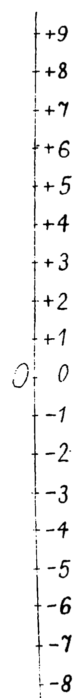
19. Sčítání a odčítání relativních čísel. Relativní čísla se dají pěkně znázorniti na přímce, které se při tom říká **číselná osa.** V obr. 20 je číselná osa ve svislé poloze. Na číselné ose si zvolíme určitý bod **0**, kterému říkáme **počátek**; jím je znázorněno číslo 0. **Kladná** čísla jsou znázorněna body ležícími **nad** počátkem, **záporná** čísla body ležícími **pod** počátkem. Zvolíme si určitou délku za jednotku; pak jsou na př. čísla $+5$ a -5 znázorněna těmi dvěma body na číselné ose, které jsou vzdáleny od počátku o 5 jednotek. V obr. 20 jsou vyznačeny body, které zobrazují několik **celých** čísel, záporných i kladných; ale také každé lomené číslo, ať záporné či kladné, je znázorněno určitým bodem číselné osy.

Mnohdy se číselná osa volí ve vodorovné poloze; kladná čísla se potom obyčejně znázorňují body ležícími napravo od počátku, záporná čísla body ležícími nalevo od počátku.

Nyní se naučíme sčítat a odčítat relativní čísla. Pro větší jasnost budeme z počátku psáti značky $+$ a $-$ pouze pro **přívlastková** znamení, kdežto **výkonná** znamení budeme vypisovati slovy plus a minus.

Začneme sčítáním celých čísel (kladných i záporných). Představme si, že číselná osa (viz obr. 20) je žebřík, jehož příčkami jsou znázorněna celá čísla. Při tomto znázornění se na př. sčítání (-5) plus $(+2)$ provede takto: od příčky znázorňující číslo -5 postoupíme o 2 příčky **nahoru,** t. j. ke příčce znázorňující číslo -3, tedy:

$$(-5) \text{ plus } (+2) = -3.$$



Obr. 20.

Jiný příklad: $(+3)$ plus (-4); od příčky znázorňující číslo $+3$ postoupíme o 4 příčky **dolů**, tedy:

$$(+3) \text{ plus } (-4) = -1.$$

Obecně při svislé číselné ose:

plus $(+n)$ znamená, že na číselné ose postoupíme o n jednotek nahoru;

plus $(-n)$ znamená, že na číselné ose postoupíme o n jednotek dolů.

Jak je to při vodorovné číselné ose?

Sčítání relativních čísel si můžeme znázorniti také pomocí příjmů a vydání. Na př. (-5) plus $(+2)$; 5 K vydání a 2 K příjmu dá dohromady 3 K vydání, tedy (-5) plus $(+2) = -3$. Nebo $(+3)$ plus (-4); 3 K příjmu a 4 K vydání dá dohromady 1 K vydání, tedy $(+3)$ plus $(-4) = -1$.

Odčítání je u čísel prostých, jak je vám známo, obrácený výkon ke sčítání. Na př. 12 minus 8 je to číslo x, pro které platí $x + 8 = 12$, tedy $x = 4$. Docela stejně je tomu také u čísel relativních. Na př. (-3) minus $(+2)$ je to relativní číslo x, pro které platí x plus $(+2) = (-3)$. Při znázornění žebříkem je tedy x na tom místě, od kterého se musí postoupiti o 2 příčky nahoru, aby se došlo k číslu -3; proto obráceně od čísla -3 musíme postoupiti o 2 příčky dolů, abychom došli k číslu x. Tedy $x = -5$, t. j. (-3) minus $(+2)$ znamená totéž jako (-3) plus (-2). Jiný příklad: je-li (-1) minus $(-4) = y$, pak y plus $(-4) = -1$. Tedy od čísla y se postoupí o 4 příčky dolů k číslu -1, takže obráceně od čísla -1 se postoupí o 4 příčky nahoru k číslu y. Tedy $y = +3$, t. j. (-1) minus (-4) znamená totéž jako (-1) plus $(+4)$. Obecně

minus $(+n)$ znamená totéž jako plus $(-n)$;
minus $(-n)$ znamená totéž jako plus $(+n)$.

173. Vyložte na číselné ose a potom vypočtěte:

a) $(+9)$ minus $(+6)$;
b) $(+7)$ plus (-5);
c) $(+8)$ minus (-3);
d) (-2) minus $(+4)$;
e) (-4) plus (-7);
f) (-5) minus (-8);
g) 0 minus (-4);
h) (-5) plus $(+5)$;
i) $(+4)$ plus (-4).

Všimněte si ve cvič. 173 zejména úloh h) a i); jaké obecné pravidlo můžete vysloviti?

174. Místo A leží 76 m nad hladinou moře; místo B leží 23 m pod hladinou moře. Oč leží A výše nežli B? Čemu se rovná $(+76)$ minus (-23)?

175. Někdo měl na začátku roku 1000 RM dluhu a na konci roku mu zůstalo 400 RM dluhu. Kolik získal průběhem roku? Čemu se rovná (-400) minus (-1000)?

176. Kolik musíme přičísti k číslu

a) $+7$, aby vyšlo $+3$?
b) -5, aby vyšlo -2?
c) -5, aby vyšlo -8?
d) -6, aby vyšlo 0?
e) $+3$, aby vyšlo -3?
f) -6, aby vyšlo $+6$?

Nyní bude na čase, abychom si zjednodušili označení! Za tím účelem nejprve uvažme, že **výkonné znamení minus vždy se dá nahradit výkonným znamením plus,** neboť víme, že odečísti relativní číslo je totéž jako přičísti druhé relativní číslo, které se od prvního liší pouze znamením. Můžeme se tedy omeziti na výkonné znamení plus a dohodneme se, že **výkonné znamení plus mezi dvěma relativními čísly budeme prostě vynechávat.** Tedy budeme psáti na př.:

$-7-4$ místo (-7) plus (-4) a také místo (-7) minus $(+4)$;
$-3+8$ místo (-3) plus $(+8)$ a také místo (-3) minus (-8).

177. Úlohy ze cvič. 173 přepište jednodušeji! Neprovádějte žádný počet!

Mezi kladným číslem $+5$ a prostým číslem 5 není žádného věcného rozdílu; proto přívlastkové znamení $+$ můžeme vynechat. Ale když před přívlastkovým znamením $+$ už bylo vynecháno výkonné znamení plus, tu se ovšem přívlastkové znamení vynechat nesmí! Přívlastkové znamení $-$ se vůbec nesmí vynechávat (až na to, že -0, stejně jako $+0$, je totéž číslo jako 0). Podle této dohody můžeme sčítání relativních čísel $+7$ a -9 zapsati ve tvaru $7-9$ místo $+7-9$, tedy vynechati přívlastkové znamení $+$. Ale napíšeme-li sčítance v obráceném pořádku, musíme psáti $-9+7$ a nesmíme už žádné znamení vynechat.

Podle dohod, které jsme učinili, znamená na př. $3+6$ součet dvou relativních čísel $+3$ a $+6$, výkonné znamení plus je vynecháno, rovněž přívlastkové znamení prvního sčítance je vynecháno a napsáno je pouze přívlastkové znamení druhého sčítance. Ale zajisté můžeme i nadále $3+6$ chápati také tak, jak jste na to zvyklí z obecné školy, tedy jako součet prostých čísel 3 a 6, při čemž napsané znamení je znamení výkonné. Nezáleží na tom, protože při obojím pojetí znamená $3+6$ totéž číslo, totiž číslo 9 neboli $+9$.

Podobně znamená na př. 7 — 5 podle dohod učiněných v tomto odstavci součet dvou relativních čísel + 7 a — 5, při čemž je vynecháno jednak výkonné znamení plus, jednak přívlastkové znamení prvého sčítance. Opět můžeme chápati 7 — 5 také tak, jak jste na to zvyklí z obecné školy, tedy jako rozdíl s menšencem 7 a menšitelem 5, při čemž napsané znamení je znamení výkonné. Zase na tom nezáleží, protože při obojím pojetí znamená 7 — 5 totéž číslo, totiž číslo 2 neboli + 2.

Při sčítání a odčítání relativních čísel jsme se dosud řídili v každém jednotlivém příkladě představou číselné osy. Nyní si však vyslovíme jednoduchá pravidla, jejichž správnost plyne z představy číselné osy. Protože umíme odčítání relativních čísel nahraditi sčítáním, stačí, vyslovíme-li si pravidla pro sčítání dvou relativních čísel:

Součet dvou čísel stejného znamení má s nimi společné znamení a jeho prostá hodnota se dostane sečtením prostých hodnot sčítanců.

Součet dvou čísel nestejného znamení má to znamení, které je u větší prosté hodnoty a jeho prostá hodnota se dostane, odečteme-li menší prostou hodnotu od větší. Co když mají oba sčítanci stejnou prostou hodnotu?

Pravidly právě vyslovenými se řiďte ve cvič. 178 až 181!

178. (Zpaměti.)

a) 13 — 17; b) 12 — 20; c) 18 — 100; d) 9 — 46;
e) 18 — 24; f) 18 — 36; g) 19 — 200; h) 27 — 72;
i) 9 — 37; j) 2 — 40; k) 1 — 1000; l) 100 — 801.

179. (Zpaměti.)

a) — 8 + 12; b) — 12 + 8; c) — 8 — 12; d) — 18 + 35;
e) — 35 + 18; f) — 16 + 4; g) — 24 + 41; h) — 31 — 13;
i) — 27 — 72; j) — 27 + 72; k) — 47 — 73; l) — 1 — 111;
m) — 29 — 84; n) — 29 + 84; o) — 300 + 81; p) — 25 — 145.

180. a) 37428 — 97632; b) — 53842 + 43258;
c) — 15621 — 79324; d) — 21074 — 989;
e) — 2387 minus (+ 3265); f) 8764 minus (— 35248).

181. a) 2,97 — 3,846; b) — 6,4 + 0,089;
c) — 32,8 — 3,28; d) — 32,8 + 0,328;
e) 0,24 minus (+ 5,769); f) — 8,08 minus (— 7,206).

Také u relativních čísel mluvíme o **slučování**, má-li se provésti postupně několik sčítání a odčítání. Příklad:

(—3) minus (+5) minus (—7) plus (—4).

Protože víme, že u relativních čísel lze odčítání převésti na sčítání, můžeme si úlohu přepsati ve tvaru:

$$(-3) \text{ plus } (-5) \text{ plus } (+7) \text{ plus } (-4);$$

nyní můžeme vynechati všecka **výkonná** znamení, takže naše úloha zní jednoduše:

$$-3-5+7-4$$

a výsledek je -5.

Protože u relativních čísel lze odčítání převésti na sčítání, není slučování relativních čísel obecnější výkon nežli sčítání, při čemž ovšem mohou býti více než dva sčítanci. **Pořádek sčítanců dá se libovolně měnit.** Neboť hořejší příklad se dá znázorniti tak, že napřed vydáme 3 K, potom vydáme 5 K, dále přijmeme 7 K a na konec vydáme 4 K. Konečný výsledek bude 5 K vydání a k témuž výsledku se dospěje zajisté, i když pořádek, ve kterém se peníze postupně vydávají a přijímají, nějak se změní. Jakmile tedy vypočteme, že je $-3-5+7-4=-5$, víme už bez dalšího výpočtu, je musí býti také na př. $+7-4-5-3=-5$. Píšeme obyčejně $7-4-5-3$, t. j. u **prvního** členu vynecháme přívlastkové znamení, je-li to znamení $+$.

182. a) (-2) minus (-7) minus (-8) minus $(+3)$;
b) (-10) plus (-9) minus $(+6)$ plus (-8);
c) $(+12)$ plus (-7) minus (-9) minus $(+6)$.

183. Přesvědčte se, že všech 24 výpočtů:

a) $8-12+7-16$;	b) $-12+8+7-16$;
c) $7+8-12-16$;	d) $-16+8-12+7$;
e) $8-12-16+7$;	f) $-12+8-16+7$;
g) $7+8-16-12$;	h) $-16+8+7-12$;
i) $8+7-12-16$;	j) $-12+7+8-16$;
k) $7-12+8-16$;	l) $-16-12+8+7$;
m) $8+7-16-12$;	n) $-12+7-16+8$;
o) $7-12-16+8$;	p) $-16-12+7+8$;
q) $8-16-12+7$;	r) $-12-16+8+7$;
s) $7-16+8-12$;	t) $-16+7+8-12$;
u) $8-16+7-12$;	v) $-12-16+7+8$;
x) $7-12-16+8$;	y) $-16+7-12+8$

dává týž výsledek!

184. Slučte postupně:

a) $-13+8+6-12-15$; b) $-20+11+13-5-12$;
c) $-21-18+13+16-17$; d) $-37+19+24-8-28$;

e) $23 - 15 - 16 + 4 + 34$; f) $17 - 25 - 35 + 13 + 43$;
g) $0{,}824 - 8{,}24 + 82{,}4 - 824$;
h) $-2{,}097 + 3{,}086 - 4{,}075 + 5{,}064$.

Můžeme také slučovati upraveným způsobem jako v odst. 3, na př.

$$-17 + 26 + 14 - 12 + 8 - 27 = 48 - 56 = -8.$$

185. Řešte znovu cvič. 184, ale slučujte upraveným způsobem.

20. Násobení relativních čísel. Nyní se naučíme násobit relativní čísla. Protože kladná čísla nejsou vlastně nic jiného nežli čísla prostá, umíme už kladná čísla násobit. Na př. součin čísel $+3$ a $+4$ je totéž jako součin čísel 3 a 4, tedy je to číslo 12 neboli $+12$. Je-li však některý činitel záporný, musíme si teprve vysvětlit, jak se má součin počítat. Při tom se budeme snažit, aby pravidla, na která jste zvyklí, podržela svou platnost i v oboru relativních čísel. Jedno pravidlo vám známé jest: **součin se rovná nule, jakmile některý činitel se rovná nule.** Tímto pravidlem se řídíme, i když jeden činitel je záporný, takže na př.

$$(-5) \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot (-4) = 0.$$

Jiné pravidlo vám známé je distributivní zákon: součet násobíme, když násobíme oba sčítance a potom sečteme, neboli

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

Budeme-li se také tímto pravidlem říditi i v oboru relativních čísel, bude na př., ať už písmeno c má jakýkoli číselný význam:

$$(-5 + 5) \cdot c = (-5) \cdot c \text{ plus } (+5) \cdot c.$$

Avšak $-5 + 5 = 0$, takže $(-5 + 5) \cdot c = 0 \cdot c$, což se rovná nule. Tedy nalevo máme nulu, a protože číslo napravo se rovná číslu nalevo, musí býti také napravo nula, t. j.

$$(-5) \cdot c \text{ plus } (+5) \cdot c = 0.$$

To znamená, že se oba součiny $(+5) \cdot c$ a $(-5) \cdot c$ liší od sebe pouze znamením.

Kdybychom si úvahu právě dokončenou provedli znovu, ale při tom vzali místo čísla 5 nějaké jiné číslo, dospěli bychom ovšem zase k témuž výsledku. Proto si můžeme vysloviti základní pravidlo:

Změníme-li znamení některého činitele, změní se znamení součinu.

Jelikož víme, že $(+5) \cdot (+3) = +15$, musí býti podle základního pravidla:

$$(+5) \cdot (-3) = -15, \quad (-5) \cdot (+3) = -15$$

a když na tento výsledek užijeme ještě jednou základního pravidla, dostaneme:

$$(-5) \cdot (-3) = +15.$$

186. Každé z čísel

$$-3, \ +5, \ +7, \ -8, \ -10, \ +100$$

znásobte zpaměti číslem

a) $+3$; b) -3; c) $+4$; d) -6; e) -7.

187. Vypočtěte:

a) $(+3{,}728) \cdot (-0{,}54)$; b) $(-5{,}26) \cdot (+82{,}4)$;
c) $(-0{,}093) \cdot (-0{,}039)$; d) $(-273000) \cdot (-0{,}00273)$.

Základního pravidla můžeme užíti také při více než dvou činitelích. Na př. součin $(-3) \cdot 5 \cdot (-7) \cdot (-2) \cdot 4$ vznikne ze součinu $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 = +840$ tím, že třikrát za sebou změníme znamení jednoho činitele; proto je podle základního pravidla

$$(-3) \cdot 5 \cdot (-7) \cdot (-2) \cdot 4 = -840.$$

188. Vypočtěte:

a) $(-2)^3$; b) $(-2)^4$; c) $(-2)^5$; d) $(-3)^3$;
e) $(-3)^4$; f) $(-4)^3$; g) $(-0{,}074)^2$; h) $(-2{,}4)^3$.

189. Vypočtěte:

a) $5 \cdot (-4) \cdot (-3)$; b) $(-8) \cdot (-2) \cdot (-4)$;
c) $(-6) \cdot 3 \cdot (-5)^2$; d) $8 \cdot 12 \cdot (-2)^4$;
e) $(-7)^2 \cdot (-3)^3$; f) $(-5)^3 \cdot 2 \cdot (-4)$.

Někdy je účelné, před relativní číslo, které tedy už je opatřeno jedním přívlastkovým znamením, dáti ještě jedno přívlastkové znamení. Jaký význam dáváme takovému dvojímu znamení, pochopíte snadno z příkladů:

$$+(+6) = 6; \quad +(-6) = -6; \quad -(+6) = -6; \quad -(-6) = 6.$$

Je-li před součinem znamení $+$ nebo $-$, může vzniknouti pochybnost, zdali toto znamení patří k součinu či k jeho prvnímu činiteli. Na př. $-2x$ můžeme chápati

$$\text{buďto jako } -(2x) \quad \text{nebo jako } (-2)\,x.$$

Ale to nevadí, protože podle základního pravidla o znamení součinu je právě

$$(-2)\,x = -(2x),$$

ať písmeno x má jakýkoli číselný význam.

190. Znamenají-li písmena a, b prostá čísla, platí identity

$$(+a) \cdot (+b) = +ab; \qquad (+a) \cdot (-b) = -ab;$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab; \qquad (-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Jsou tyto identity správné i když písmena a, b znamenají relativní čísla?

191. Do výrazu $100 - ab$ dosaďte:

a) $a = 12,\ b = 7$; b) $a = -11,\ b = 6$;
c) $a = 9,\ b = -8$; d) $a = -7,\ b = -7$.

192. Do výrazu $2r - st$ dosaďte:

a) $r = 14,\ s = -3,\ t = 4$; b) $r = -12,\ s = 8,\ t = -4$;
c) $r = 11,\ s = -5,\ t = -6$; d) $r = -23,\ s = -8,\ t = -6$.

193. Do výrazu $h^2px - k^3qy$ dosaďte:

a) $h = -3,\ k = -3,\ p = 12,\ q = -8,\ x = -6,\ y = -4$;
b) $h = 4,\ k = -2,\ p = -9,\ q = 10,\ x = -3,\ y = -8$.

21. Dělení relativních čísel. Podíl $12 : 4$ neboli zlomek $\frac{12}{4}$ je to číslo, které násobeno číslem 4 dává součin 12, tedy je to číslo 3. Stejnou úvahou najdeme

$$(+12) : (+4) = +3, \quad (+12) : (-4) = -3,$$
$$(-12) : (+4) = -3, \quad (-12) : (-4) = +3$$

neboli

$$\frac{+12}{+4} = +3, \quad \frac{+12}{-4} = -3, \quad \frac{-12}{+4} = -3, \quad \frac{-12}{-4} = +3.$$

Tedy: **změníme-li znamení dělence nebo dělitele (čitatele nebo jmenovatele), změní se znamení podílu (zlomku).**

194. Každé z čísel

$$-36, \ +48, \ -60, \ -72, \ +84$$

dělte zpaměti číslem

a) $+3$; b) -3; c) $+4$; d) -4; e) -6.

195. Do výrazu $\dfrac{2x + 10}{3x - 20}$ dosaďte:

a) $x = 3$; b) $x = 4$; c) $x = -2$; d) $x = -10$.

196. Do výrazu $\dfrac{rs - 1}{r - s}$ dosaďte:

a) $r = 4,\ s = -3$; b) $r = -4,\ s = -3$;
c) $r = -5,\ s = 2$; d) $r = -6,\ s = -8$.

197. Dosaďte $h = +3,\ k = -5,\ p = -1$ do výrazu

a) $\dfrac{p}{h}$; b) $\dfrac{k}{p}$; c) $\dfrac{kp}{h}$; d) $\dfrac{k^2}{h}$; e) $\dfrac{p^3}{k^3}$.

198. Zjednodušte

a) $\frac{-x^2}{(-x)^2}$; b) $\frac{(-r)^3}{-r^3}$; c) $\frac{(-2u)\,.\,(-3v)^2}{(-3u^2)\,.\,(-4v)}$.

Podíl s dělitelem nula (zlomek se jmenovatelem nula) nemá žádný význam. Na př. $\frac{10}{n}$ znamená to číslo x, které násobeno číslem n dává součin 10, neboli to číslo x, pro které platí $nx = 10$. Ale pro $n = 0$ nemá **žádné** číslo x tuto vlastnost, neboť $0\,.\,x$ se nerovná deseti při žádné volbě čísla x; proto zlomku $\frac{10}{0}$ nemůžeme dáti žádný číselný význam. Zlomek $\frac{0}{n}$ znamená to číslo y, pro které platí $ny = 0$. Pokud n znamená jiné číslo nežli nulu, jest $ny = 0$ **pouze** pro $y = 0$ a proto zlomek $\frac{0}{n}$ znamená číslo 0. Ale $0y = 0$ pro **každou** volbu čísla y; proto zlomku $\frac{0}{0}$ nelze dáti žádný číselný význam.

22. Početní výkony se zlomky. Jsou-li čitatel a jmenovatel zlomku relativní čísla, tu podle pravidla, které jsme poznali v minulém odstavci, můžeme uvésti zlomek na nový tvar, ve kterém je přívlastkové znamení pouze před zlomkem, kdežto čitatel a jmenovatel zlomku jsou čísla prostá; přívlastkové znamení + se obyčejně vynechává. Na př.

$$\frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}, \quad \frac{3}{-8} = -\frac{3}{8}; \quad \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}.$$

Protože základní početní výkony s relativními čísly vyžadují mimo jednoduché určení znamení výsledku pouze provádění základních početních výkonů s prostými čísly, není vlastně v následujících cvičeních nic pro vás nového a hlavní účel těchto cvičení je v tom, abyste si trochu zopakovali počítání se zlomky, které jste probírali už v minulé třídě. Ale několik drobných poznámek bude přece jen na místě! Mějme třeba tyto dva příklady:

$$\text{a)}\ -\frac{4}{15} + \frac{7}{20}; \qquad \text{b)}\ -\frac{7}{15} + \frac{9}{20}.$$

V obou příkladech máme sečísti dvě relativní čísla s nestejnými znameními. Podle pravidla vysloveného na str. 42 máme napřed zkoumat, který sčítanec má větší prostou hodnotu; znamení větší prosté hodnoty je znamení výsledku. Potom máme odečísti menší prostou hodnotu od větší a dostaneme prostou hodnotu výsledku. I při zkoumání, která prostá hodnota je větší, i při odčítání prostých hodnot potřebujeme uvésti oba zlomky na společného jmenovatele. Proto můžeme výpočet zahájit uvedením zlomků na společného jmenovatele:

$$\text{a)}\ -\tfrac{4}{15}+\tfrac{7}{20}=-\tfrac{16}{60}+\tfrac{21}{60};\qquad \text{b)}\ -\tfrac{7}{15}+\tfrac{9}{20}=-\tfrac{28}{60}+\tfrac{27}{60}.$$

Nyní už vidíme, že v příkladě a) vyjde číslo kladné a v příkladě b) číslo záporné. K určení prosté hodnoty výsledku vede výpočet:

$$\text{a)}\ \frac{7}{20}-\frac{4}{15}=\frac{21}{60}-\frac{16}{60}=\frac{21-16}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12};$$

$$\text{b)}\ \frac{7}{15}-\frac{9}{20}=\frac{28}{60}-\frac{27}{60}=\frac{28-27}{60}=\frac{1}{60},$$

takže celkem vyjde:

$$\text{a)}\ -\tfrac{4}{15}+\tfrac{7}{20}=\tfrac{1}{12};\qquad \text{b)}\ -\tfrac{7}{15}+\tfrac{9}{20}=-\tfrac{1}{60}.$$

Je však patrné, že postup právě vylíčený je zdlouhavý a že se dá zkrátit. Obyčejně postupujeme takto:

$$\text{a)}\ -\frac{4}{15}+\frac{7}{20}=\frac{-16+21}{60}=\frac{6}{60}=\frac{1}{12};$$

$$\text{b)}\ -\frac{7}{15}+\frac{9}{20}=\frac{-28+27}{60}=\frac{-1}{60}=-\frac{1}{60}.$$

Popište sami tento postup, odůvodněte jeho správnost a postupujte podobně ve cvičeních!

Proveďme si ještě příklad, ve kterém se vyskytují čísla smíšená:

$$\text{c)}\ -2\tfrac{1}{3}+4\tfrac{1}{2}-1\tfrac{5}{6}.$$

Smíšené číslo $-2\frac{1}{3}$ je patrně součet čísel -2 a $-\frac{1}{3}$; podobně je také každé z obou dalších smíšených čísel součet celého čísla a zlomku, takže vlastně máme sloučiti šest členů:

$$-2-\tfrac{1}{3}+4+\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{5}{6}.$$

Pořádek členů můžeme libovolně změnit; zejména můžeme dáti všecka celá čísla napřed:

$$-2+4-1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{6}.$$

Můžeme sloučiti zvlášť celá čísla a zvlášť zlomky, tedy:

$$-2+4-1=1,$$

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{-2+3-5}{6}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3},$$

takže vyjde číslo

$$1-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Obyčejně zapisujeme počet stručněji takto:

$$-2\tfrac{1}{3}+4\tfrac{1}{2}-1\tfrac{5}{6}=\left(-2+4-1\right)+\left(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{6}\right)=$$
$$=1+\frac{-2+3-5}{6}=1+\frac{-4}{6}=\frac{6-4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

199. a) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; b) $-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}$; c) $-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$;
d) $7:(-\frac{1}{3})$; e) $(-\frac{5}{12}):\frac{3}{4}$; f) $\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}$;
g) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$; h) $(-1\frac{1}{2}).(-1\frac{1}{3})$; i) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+1$.

200. a) $-2\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{6}$; b) $(-3\frac{1}{3}):(-2\frac{1}{3})$;
c) $-\frac{10}{3}+\frac{13}{5}-\frac{11}{10}$; d) $(-2\frac{1}{2}).[1\frac{3}{5}:(-\frac{2}{3})]$;
e) $(-3\frac{1}{4}+\frac{1}{6}):(-\frac{1}{4})$; f) $-3+1\frac{1}{4}-2\frac{1}{6}$;
g) $(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}):(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})$; h) $-1+\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}+\frac{2}{5})$.

201. a) $\dfrac{-10\frac{2}{5}+1\frac{3}{4}.10\frac{2}{3}}{-(3\frac{1}{4}:2\frac{1}{6})+1\frac{9}{16}}$; b) $\dfrac{1}{-1\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{-2\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{-1\frac{1}{9}}$;
c) $(1\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}).(-1\frac{3}{4}-2\frac{1}{4})$; d) $-1\frac{1}{5}(\frac{1}{8}-\frac{1}{12})+\frac{1}{4}(1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2})$;
e) $\dfrac{(1\frac{1}{2}+3\frac{3}{4})(2\frac{1}{5}-3\frac{2}{3})}{\frac{7}{8}-2\frac{1}{4}}$; f) $\dfrac{(-4\frac{1}{2}).8\frac{3}{4}.(-2\frac{4}{5})}{-4\frac{1}{6}-2\frac{1}{2}+5\frac{7}{9}}$.

23. Další příklady. Dosud jsme v tomto paragrafu užívali značek $+$ a $-$ pouze pro přívlastková znamení, kdežto výkonná znamení jsme vypisovali slovy plus a minus. Nyní však budeme užívati značek $+$ a $-$ v obojím významu. Všimněme si, že podle dohody o významu dvojího znamení učiněné na str. 45 **můžeme každé výkonné znamení plus nebo minus považovati za přívlastkové znamení, před kterým je vynecháno výkonné znamení plus.** Na př. rozdíl s menšencem -3 a menšitelem -7 můžeme psáti ve tvaru

$$(-3)\boldsymbol{-}(-7),$$

kde tučně vytištěné znamení je znamení výkonné. Tento rozdíl má hodnotu 4 a tato hodnota zůstane nezměněna, považujeme-li napsaný výraz za součet čísel

$$-3 \quad \text{a} \quad -(-7)=+7.$$

202. Zjednodušte:

a) $x+(-3x)$; b) $2y-(-y)$;
c) $u-(+u)+(-u)$; d) $-v+(-v)$;
e) $r-(-r)+(+r)$; f) $s+(-2s)-(-3s)-(+2s)$.

203. Zjednodušte:

a) $+(-2h)$; b) $-(-k)$; c) $(+2)(-3a)$;
d) $(-5)(-2t)$; e) $(+3p)(-p)$; f) $(-q)(+3q)$;
g) $(-3r)(-3s)$; h) $(-st)(-1)$; i) $(-2n^2)(+4)$;
j) $(-rs)(-3st)$; k) $(+4xy)(-8xz)$; l) $(-3m^2)\,0$.

204. Zjednodušte:

a) $\dfrac{-6r^2}{2r}$; b) $\dfrac{-12s^2}{-3s}$; c) $\dfrac{+10u^3}{-5u}$;

d) $\dfrac{-4v^6}{-2v^3}$; e) $\dfrac{+6ac}{-ac}$; f) $\dfrac{-9t^3}{-3t}$;

g) $\dfrac{-12bx}{-4}$; h) $\dfrac{-6hx^2}{-2hx}$; i) $\dfrac{yz}{-yz}$.

205. Zjednodušte:

a) $\dfrac{3bn}{-n}$; b) $\dfrac{-p^2}{-cp}$; c) $\dfrac{8r^3}{-4rs}$;

d) $\dfrac{(-2t)^3}{2t}$; e) $\dfrac{x}{-xy}$; f) $\dfrac{a^2c^2}{-a}$;

g) $\dfrac{-9af}{3a^3}$; h) $\dfrac{(-bz)^2}{b}$; i) $\dfrac{-a}{-at}$;

j) $y : (-y)^2$; k) $z : \left(-\dfrac{1}{z}\right)$; l) $\dfrac{r}{-s} + \dfrac{-r}{-s} - \dfrac{-r}{s}$.

§ 6. Užití relativních čísel.

24. Desítková soustava. V tomto paragrafu si prokážeme užitečnost relativních čísel několika příklady.

Jak se v desítkové soustavě píší čísla pomocí cifer, je vám známo. Víte, že každá číslice má určité místo. Na **základním místě** jsou jednotky, nalevo od základního místa jsou postupně desítky, sta, tisíce atd., napravo od základního místa jsou postupně desetiny, setiny, tisíciny atd. Nyní si zavedeme nová pojmenování. Místo jednotky budeme říkati určitěji **jednotky řádu 0.** Dále budeme říkati

desítkám	**jednotky řádu 1,**
stům	**jednotky řádu 2,**
tisícům	**jednotky řádu 3** atd.,
desetinám	**jednotky řádu — 1,**
setinám	**jednotky řádu — 2,**
tisícinám	**jednotky řádu — 3** atd.

Tedy na př. jednotky řádu + 4 jsou o čtyři místa **nalevo** od základního místa, jednotky řádu —3 jsou o tři místa **napravo** od základního místa atd.

206. V číslech

24,624; 0,06426; 426400

jmenujte řády všech

a) dvojek; b) čtyřek; c) šestek.

Známá pravidla o násobení a dělení čísly

$$10 = 10^1, \quad 100 = 10^2, \quad 1000 = 10^3, \quad 10000 = 10^4 \text{ atd.}$$

můžeme si po zavedení řádů vysloviti novým způsobem:

Číslem 10^n násobíme, přičteme-li n k řádům všech číslic.

Číslem 10^n dělíme, odečteme-li n od řádů všech číslic (nebo přičteme-li $-n$ k řádům všech číslic).

Hlavní pravidlo o řádech zní: **Při násobení se řády sčítají.** Jaký to má smysl, to si vyložíme na třech příkladech:

a) 300 . 4000; b) 300 . 0,004; c) 0,03 . 0,004.

Hodnotu všech tří součinů si můžeme odvoditi ze součinu 3 . 4 = 12 takto: Součin a) vznikl ze součinu 3 . 4 tím, že se jeden činitel znásobil číslem 100 neboli 10^2 a druhý číslem 1000 neboli 10^3; proto musíme součin 3 . 4 = 12 znásobiti číslem 10^2 a co vyjde, ještě číslem 10^3, neboli musíme vycházejíce od 12 jednotek řádu nula, zvýšiti řád nejprve o 2 a potom ještě o 3, takže hodnota součinu a) je 12 jednotek řádu 2 + 3 neboli řádu 5, tedy 300 . 4000 = 1200000. Podobně součin b) vznikne ze 12 jednotek řádu 0, když k řádu 0 přičteme nejprve + 2 a potom ještě —3, takže hodnota součinu b) je 12 jednotek řádu 2 — 3 neboli řádu —1, takže 300 . 0,004 = 1,2. Konečně hodnota součinu c) je 12 jednotek řádu — 2 — 3 = — 5, tedy 0,03 . 0,004 = = 0,00012.

Užívejte řádového pravidla ve cvič. 207!

207. Vypočtěte zpaměti:

a) 0,002 . 8;	b) 3 . 0,005;	c) 40 . 0,004;
d) 0,06 . 80;	e) 300 . 700;	f) 40000 . 800;
g) 90000 . 80000;	h) 700 . 20000;	i) 400 . 0,06;
j) 700 . 0,003;	k) 8000 . 0,09;	l) 6000 . 0,007;
m) 0,009 . 600;	n) 0,006 . 800;	o) 0,004 . 3000;
p) 0,003 . 800;	q) 0,0004 . 02;	r) 0,08 . 0,007;
s) 0,004 . 0,5;	t) 0,07 . 0,01;	u) 1200 . 0,008;
v) 0,011 . 600;	x) 700 . 0,012;	y) 0,04 . 0,25.

Při **písemném násobení** užíváme řádového pravidla takto: Počítejme na př. 2730000 . 0,00046. Jest:

$$\begin{array}{l} 2730000 \,.\, 0{,}00046 \\ \hline 1092 \\ 1638 \\ \hline 1255{,}8 \end{array}$$

Popis. Nejprve vypočteme obvyklým způsobem 273 . 46 = 12558. Na to si všimneme, že poslední cifra 3 čísla 273 má v daném činiteli 2730000 řád + 4 a že poslední cifra 6 čísla 46 má v daném činiteli 0,00046 řád —5. Proto poslední cifra 8 čísla 12558 musí míti v hledaném součinu 2730000 . 0,00046 řád 4 — 5 = — 1, takže součin je 1255,8. Při **zkoušce správnosti** postupujeme také tak, ale místo nejnižších cifer užijeme cifer nejvyšších. V činiteli 2730000 má nejvyšší cifra 2 řád + 6 a v činiteli 0,00046 má nejvyšší cifra 4 řád —4; proto součin 2730000 . 0,00046 je přibližně roven součinu 2 jednotek řádu + 6 se 4 jednotkami řádu —4, t. j. je přibližně roven 2 . 4 = 8 jednotkám řádu 6 — 4 = 2. Protože 1255,8 je přibližně 12 jednotek řádu 2, byl řád součinu správně určen.

Ve cvič. 208 nezapomínejte na zkoušku!

208. a) 37,49 . 8,36; b) 49,94 . 0,527; c) 86300 . 0,057; d) 428000 . 1,127; e) 0,593 . 490000; f) 976000 . 840000; g) 0,0042 . 376800; h) 0,00051 . 9230; i) 27000 . 0,02654.

Nyní se obrátíme k dělení. Protože 0,02 . 400000 = 8000, jest 8000 : 0,02 = 400000. Avšak

0,02 jsou 2 jednotky řádu —2,
400000 jsou 4 jednotky řádu + 5,
8000 je 8 jednotek řádu + 3.

Řád + 3 vznikl sečtením — 2 + 5 = + 3, proto řád + 5 vznikne odečtením + 3 — (—2) = + 5. **Řád podílu určíme, odečteme-li od řádu dělence řád dělitele.**

209. Vypočtěte zpaměti:

a) 0,006 : 2; b) 6 : 0,002; c) 42 : 0,007;
d) 81 : 900; e) 6300 : 0,9; f) 0,56 : 800;
g) 0,072 : 0,008; h) 0,36 : 0,006; i) 45 : 90000;
j) 450 : 5000; k) 4800 : 0,8; l) 4,8 : 600;
m) $\frac{16000}{0{,}0004}$; n) $\frac{0{,}00012}{3000}$; o) $\frac{720000}{900}$;

p) $\frac{0{,}0018}{0{,}000002}$; q) $\frac{84000}{0{,}007}$; r) $\frac{0{,}108}{1200}$;

s) $\frac{0{,}0048}{0{,}00012}$; t) $\frac{7700}{1{,}1}$.

Při písemném dělení si můžeme počínati takto: Počítejme třeba 0,07361 : 8,7 na tři platné cifry. Jest:

$$\begin{array}{l} 0{,}07361 : 8{,}7 \doteq 0{,}008460 \doteq 0{,}00846 \\ \quad 401 \\ \quad\; 530 \\ \quad\;\; 80 \end{array}$$

Popis. Při určování první cifry podílu hledáme, kolikrát je 87 obsaženo v 736. V dělenci 0,07361 máme 736 jednotek řádu —4, v děliteli 8,7 máme 87 jednotek řádu —1; proto první cifra podílu bude míti řád — 4 — (—1) = — 3. Jakmile víme, jaký řád má první cifra podílu, může provésti dělení obvyklým způsobem. Protože se zajímáme o tři cifry podílu, vypočteme čtyři cifry a potom zaokrouhlíme na tři. Při zkoušce správnosti vypočteme nejprve:

$$\begin{array}{r} \underline{846} \;.\; 87 + 8 \\ 6768 \\ 5922 \\ \underline{8} \\ 73610 \end{array}$$

Tato část zkoušky ukazuje, že cifry podílu byly určeny správně. Zbývá se přesvědčit, že také řády v podílu jsou správné. První cifra dělitele 8 má řád 0, první cifra podílu 8 má řád —3, tedy součin dělitele a podílu je přibližně rovný 8 . 8 = 64 jednotkám řádu 0 — 3 = — 3 a to souhlasí, neboť na nejvyšších místech dělence máme 73 jednotky řádu —3.

Dělíme-li „jednociferným" číslem, zapisujeme kratčeji a při zkoušce nepíšeme nic. Na př. dělme na 4 platné cifry:

$$\begin{array}{l} \underline{4\;3\;5{,}7} : 0{,}0\;6 \\ \quad 7\;2\;6\;1{,}6 \doteq 7\;2\;6\;2 \qquad \text{(zb. 4)} \end{array}$$

Popis. Nejprve dělíme obvyklým způsobem 4357 : 6 a určíme 5 cifer podílu bez ohledu na desetinnou čárku. Zbytek 4 jsme si poznamenali stranou. (Má význam pouze pro zkoušku.) Potom uvážíme, že v dělenci máme 43 jednotky řádu $+1$, v děliteli 6 jednotek řádu -2, takže první cifra podílu má řád $+1-(-2)=3$. Podle tohoto poznatku si vyznačíme v podílu desetinnou čárku a potom podíl zaokrouhlíme na 4 platné cifry. Při zkoušce vypočteme bez psaní $72616 \cdot 6 + 4 = 435700$. Vidíme, že cifry podílu byly určeny správně. Dělitel je 6 jednotek řádu -2, podíl je přibližně 7 jednotek řádu 3, tedy součin dělitele a podílu je přibližně $6 \cdot 7 = 42$ jednotek řádu $-2+3=1$ a to souhlasí, neboť v dělenci máme 43 jednotky řádu 1.

Ve cvič. 210 a 211 nezapomínejte na zkoušku!

210. Vypočtěte pokaždé 4 platné cifry podílu:

a) $873 : 0{,}07$; b) $0{,}39 : 7000$; c) $52{,}96 : 800$;
d) $0{,}0056 : 0{,}09$; e) $27{,}368 : 0{,}006$; f) $453{,}84 : 1200$.

211. Vypočtěte pokaždé 3 platné cifry podílu:

a) $39{,}64 : 7{,}3$; b) $0{,}0824 : 56{,}2$; c) $0{,}0888 : 3{,}14$;
d) $96000 : 7600$; e) $52{,}846 : 39000$; f) $0{,}0325 : 6{,}28$;
g) $0{,}00001 : 9200$; h) $100000 : 4{,}796$; i) $2500 : 0{,}0084$.

25. Závorková pravidla. Máme-li na př. k číslu -5 přičísti součet $-7+9-6=-4$, můžeme postupně přičítati jednotlivé sčítance, jak je zřejmé na př. ze znázornění na číselné ose (viz odst. 19). Proto je

$$-5+(-7+9-6)=-5-7+9-6=-9;$$

podobně je na př.

$$-5+(8+3-12)=-5+8+3-12=-6.$$

Obecněji platí: **Máme-li sečísti několik součtů, můžeme místo toho vypočísti součet, jehož sčítanci jsou všichni sčítanci všech původních součtů.** Na př.

$$(-3+5)+(6-7)+(-2+4)=-3+5+6-7-2+4=3.$$

Součty

$$10-3-4+6=9,$$
$$-10+3+4-6=-9$$

se liší od sebe pouze znamením. Tedy

$$-(10-3-4+6)=-10+3+4-6;$$

podobně je na př.

$$-(-12-15+7-11)=12+15-7+11=31.$$

Změníme-li znamení všech sčítanců, změní se znamení součtu. Proto je na př.

$$(3 - 5) - (-7 + 12) - (8 - 4 - 6) =$$
$$= (3 - 5) + (7 - 12) + (-8 + 4 + 6) =$$
$$= 3 - 5 + 7 - 12 - 8 + 4 + 6 = -5.$$

Pravidla právě vyslovená zahrnují v sobě mimo jiné pravidla o přičítání a odčítání součtu nebo rozdílu, která jsme měli v odst. **11**:

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad a + (b - c) = a + b - c,$$
$$a - (b + c) = a - b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

212. Počítejte napřed tak, jak je závorkami naznačeno. Potom odstraňte závorky a počítejte znovu. Vychází vám pokaždé při obojím způsobu týž výsledek?

a) $49 - (-32 + 18)$;
b) $-19 - (12 - 23)$;
c) $(56 - 32) - (47 + 29)$;
d) $36 - (15 + 19) + (-12 + 17)$;
e) $14 - (-14 + 12) - (-3 + 26)$;
f) $(57 - 19 + 36) - (57 + 19 - 36)$.

Z odst. 10 znáte pravidla o násobení součtu a rozdílu:

$$(a + b)c = ac + bc; \quad (a - b)c = ac - bc.$$

Podle těchto pravidel je na př.

$$(7 + 4) . 6 = 7 . 6 + 4 . 6, \quad (7 - 4) . 6 = 7 . 6 - 4 . 6.$$

Také je však

$$(-7 - 4) . 6 = -7 . 6 - 4 . 6; \quad (-7 + 4) . 6 = -7 . 6 + 4 . 6.$$

Neboť součin $(-7 - 4) . 6$ vznikne ze součinu $(7 + 4) . 6$ změnou znamení prvého činitele. Proto hodnota součinu $(-7 - 4) . 6$ vznikne změnou znamení z hodnoty součinu $(7 + 4) . 6$, která se rovná součtu $7 . 6 + 4 . 6$. Změnou znamení ze součtu $7 . 6 + 4 . 6$ vznikne součet $-7 . 6 - 4 . 6$. Proto je $(-7 - 4) . 6 = -7 . 6 - 4 . 6$. Docela stejně soudíme, že je také $(-7 + 4) . 6 = -7 . 6 + 4 . 6$.

Dále jest

$$(7 + 4) . (-6) = -7 . 6 - 4 . 6;$$
$$(7 - 4) . (-6) = -7 . 6 + 4 . 6;$$
$$(-7 - 4) . (-6) = 7 . 6 + 4 . 6;$$
$$(-7 + 4) . (-6) = 7 . 6 - 4 . 6.$$

Neboť na př. součin $(7 + 4) . (-6)$ vznikne změnou znamení druhého činitele ze součinu $(7 + 4) . 6$, který se rovná součtu $7 . 6 + 4 . 6$. Změnou znamení ze součtu $7 . 6 + 4 . 6$ vznikne součet $-7 . 6 - 4 . 6$.

Proto je $(7 + 4) \cdot (-6) = -7 \cdot 6 - 4 \cdot 6$. Podobně soudíme v ostatních třech případech.

Výsledek: Pravidlo

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

je správné, znamená-li písmeno a buďto $+7$ nebo -7, písmeno b buďto $+4$ nebo -4, písmeno c buďto $+6$ nebo -6. Obecně je toto pravidlo správné, ať písmena a, b, c znamenají jakákoli relativní čísla. Jaké je slovní znění tohoto pravidla? Pravidlo o násobení rozdílu můžeme nyní zapomenout. Neboť máme-li rozdíl $a - b$ násobiti číslem c, můžeme $a - b$ považovati za součet čísla a s číslem $-b$, takže $(a - b)c$ je součet čísel ac, $-bc$.

213. Počítejte dvojím způsobem jako ve cvič. 212:

a) $(13 - 28) \cdot 6$; b) $(-50 + 18) \cdot 7$;
c) $(32 - 18) \cdot (-10)$; d) $(-27 - 72) \cdot (-20)$.

Pravidlo o násobení součtu je správné také pro více než dva sčítance. Na př. je

$$(-3 + 5 - 10) \cdot 7 = -3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 - 10 \cdot 7 = -56.$$

Neboť $-3 + 5 - 10$ můžeme považovati za součet čísla $-3 + 5$ s číslem -10, takže součin $(-3 + 5 - 10) \cdot 7$ dostaneme, sečteme-li součiny $(-3 + 5) \cdot 7$, $(-10) \cdot 7$. Avšak $(-3 + 5) \cdot 7 = -3 \cdot 7 + 5 \cdot 7$, takže sečtením vyjde $-3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 - 10 \cdot 7$.

214. Počítejte dvojím způsobem jako ve cvič. 212:

a) $(37 - 25 + 16) \cdot 8$; b) $(-14 - 15 - 18) \cdot (-9)$;
c) $(-3 + 6 - 8) \cdot (-12)$; d) $(4 - 20 + 40) \cdot (-30)$.

Pravidla o odstraňování závorek, která jsme probírali v tomto odstavci, jsou užitečná zejména pro úpravu početních výrazů s obecnými čísly. Ale tím se budeme zabývati až v následujícím paragrafu.

26. Řešení rovnic. Mějme třeba rovnici $4r + 12 = 6r - 2$. Můžeme ji řešiti takto:

$$4r + 12 = 6r - 2 \quad (1)$$
$$4r + 12 + 2 = 6r \quad (2)$$
$$12 + 2 = 6r - 4r \quad (3)$$
$$14 = 2r \quad (4)$$
$$7 = r \quad (5)$$

Kořen rovnice tedy je $r = 7$. Označili jsme si číslicemi (1) až (5) tvary, na které rovnici postupně uvádíme. Všimněme si zejména přechodu od tvaru (1) ke tvaru (2) a přechodu od tvaru (2) ke tvaru (3). Při prvém přechodu jsme na obou stranách přičtli číslo 2. Tím s pravé strany odpadl člen -2 a na levé straně přibyl člen $+2$. Při druhém přechodu jsme od obou stran odečtli číslo $4r$, což nyní můžeme vyjádřiti také tak, že jsme na obou stranách přičtli číslo $-4r$. Tím s levé strany odpadl člen $+4r$ a na pravé straně přibyl člen $-4r$. Oba ty přechody jsme mohli provésti podle pravidla: **Kterýkoli člen rovnice můžeme převésti s opačným znamením na druhou stranu.** V našem případě jsme nejprve převedli člen -2 s pravé strany na levou se změněným znamením a to je dovolená změna, neboť znamená, že jsme na obou stranách přičtli $+2$; potom jsme převedli člen $+4r$ s levé strany na pravou se změněným znamením a to je zase dovolená změna, neboť znamená, že jsme na obou stranách přičtli $-4r$. Tak je tomu vždy. Převedeme-li některý člen s opačným znamením na druhou stranu rovnice, nečiníme vlastně nic jiného nežli že na obou stranách přičítáme totéž číslo, což je dovolená změna. Proto pravidlo o převádění s jedné strany rovnice na druhou není vlastně nic nového, nýbrž je to pouze pohodlnější vyjádření něčeho, co už dávno děláme. Obyčejně provádíme všecky takové změny najednou podle zásady:

Členy obsahující neznámou dáme všecky na jednu stranu rovnice, známé členy dáme všecky na druhou stranu.

Na př. u naší rovnice

$$4r + 12 = 6r - 2 \tag{1}$$

můžeme dáti neznámé členy napravo, známé nalevo a tím dospějeme **naráz** od tvaru (1) ke tvaru:

$$12 + 2 = 6r - 4r \tag{3}$$

Na kterou stranu převedeme členy neznámé a na kterou známé, to je po zavedení relativních čísel lhostejné. Nejčastěji se převádějí **neznámé členy nalevo, známé napravo.** Učiníme-li tak v našem příkladě, dostaneme místo tvaru (3) tvar

$$4r - 6r = -2 - 12, \tag{3'}$$

z něhož vyjde sloučením

$$-2r = -14, \tag{4'}$$

takže

$$r = \frac{-14}{-2} = \frac{14}{2} = 7. \qquad (5')$$

Vyskytují-li se v rovnici závorky, napřed je odstraníme a teprve potom převádíme s jedné strany na druhou. Po převedení slučujeme.

215. Řešte znovu rovnice ze cvič. 117!

216. Řešte znovu rovnice ze cvič. 133!

Ve cvič. 217 mají některé rovnice **záporný** kořen, ale postup je stejný jako u dřívějších rovnic.

217. Řešte rovnice (provádějte zkoušku!):

a) $3r - 2(12 - r) = 4(2r - 3) + 3(r + 2)$;
b) $3(2 - 3s) - 2(5 - s) = s + 1 - 3(2s + 1)$;
c) $3(t - 2) - 4(2t - 3) = 2(3t - 1) - 3(3t + 1) + 3$;
d) $1 + (5x - 15) - (2x - 6) = 3x + 4 + 3(x + 2)$;
e) $8(3y - 2) - (7y + 4) - 15(4 - y) = 8y$;
f) $7(u - 3) - (7u - 3) = 5(2 - u) - (10 - u) - 18$;
g) $1 + (7v - 1) - 7(v - 1) = 3 + (3v + 8) + 3(v + 8)$;
h) $4(2 - c) - 3(7c + 5) + 6(3c - 1) = -2(c - 8)$.

Příklad. Čtyřicetiletý otec má tři syny ve věku 13, 10 a 7 let. Určete dobu, ve které je otcův věk o 10 let menší než trojnásobek součtu stáří všech tří synů.

Ačkoli nevíme, zda hledaný čas leží v budoucnosti či v minulosti, můžeme říci, že nastane za r roků, při čemž r je možná záporné:

za r roků	let
stáří otcovo	$40 + r$
stáří 1. syna	$13 + r$
stáří 2. syna	$10 + r$
stáří 3. syna	$7 + r$
součet stáří všech synů	$30 + 3r$

$$40 + r = 3(30 + 3r) - 10$$
$$40 + r = 90 + 9r - 10$$
$$r - 9r = 90 - 10 - 40$$
$$-8r = 40$$
$$r = \frac{40}{-8} = -\frac{40}{8} = -5$$

Hledaný čas nastal před 5 roky.

Zkouška. Věk otcův byl 35 let, věk dětí 8, 5, 2 roky; $8 + 5 + 2 = 15$, $3 \cdot 15 = 45$, $45 - 35 = 10$.

218. Auto jelo tři hodiny rychlostí 36 km za hodinu. Potom změnilo rychlost a jelo novou rychlostí ještě čtyři hodiny. Celkem ujelo

a) 228 km; b) 268 km.

Oč se změnila rychlost auta?

219. Karel má 31 K, Jan má 57 K. Kolik by musil jeden druhému dát, aby měl Jan

a) o 20 K méně; b) o 10 K více

než dvojnásobek toho, co by měl Karel?

§ 7. Mnohočleny.

27. Pojem mnohočlenu. Výrazy jako

$$4ab, \quad -2x, \quad 3x^2, \quad \tfrac{1}{2}r^3s, \quad -\tfrac{2}{3}t^2u^2$$

a pod. se jmenují **jednočleny.** Tedy jednočlen je součin několika činitelů, z nichž jeden je číslo zvláštní a ostatní jsou čísla obecná. Toho činitele, který je číslem zvláštním, píšeme obyčejně na prvním místě; říkáme mu **součinitel** neboli **koeficient** jednočlenu. Tedy jednočleny výše napsané mají součinitele

$$4, \quad -2, \quad 3, \quad \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{2}{3}.$$

Také

$$abc, \quad y, \quad p^2q, \quad uv^3$$

a pod. jsou jednočleny. **Jejich součinitelem je číslo 1,** neboť na př. $abc = 1 \, . \, abc$.

Také

$$-x, \quad -hk, \quad -n^2, \quad -c^3d^4$$

a pod. jsou jednočleny. **Jejich součinitelem je číslo —1,** neboť na př. $-x = (-1) \, . \, x$.

Je výhodné **počítati mezi jednočleny také čísla zvláštní.** Tedy

$$7, \quad -\tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}$$

a pod. jsou jednočleny; každý z nich se rovná svému koeficientu.

Mnohočlen neboli polynom je součet několika jednočlenů. Jednotliví sčítanci se jmenují **členy** mnohočlenu. Určitěji mluvíme o **dvojčlenech,** na př.

$$2a - 3b; \quad 3x^2 - x; \quad 2r^2st - 3rs^2t;$$

o **trojčlenech,** na př.

$$5 - 2v^3 + v^4; \quad y^3 - y + 2; \quad abc^3 + ab^3c + 2a^2b^2c;$$

o **čtyrčlenech** a pod. Také jednočleny počítáme mezi mnohočleny.

220. Jmenujte všecky koeficienty mnohočlenu (t. j. koeficienty jednotlivých členů):

a) $2a^2bc - abc^2 + ab^2c$; b) $3pqr - pq + r - 5$;
c) $u - v^5 + v^3 - 2$; d) $2h - 3h^2 - h^4 + 1$.

Ten člen mnohočlenu, který je zvláštním číslem, jmenuje se **prostý** neboli **absolutní člen.** Na př. trojčlen $3a^2 - 5a + 7$ má prostý člen 7, čtyrčlen $5ab - 3a + 4b - 6$ má prostý člen -6. Mnohočlen $x^2y + xy^2 - x - y$ nemá prostý člen. Ale také můžeme říci, že **má prostý člen rovný nule,** neboť jej můžeme psáti ve tvaru $x^2y + xy^2 - x - y + 0$.

Když se některé členy mnohočlenu liší mezi sebou nejvýš koeficientem, nazýváme je **stejnojmenné.** Stejnojmenné členy můžeme **sloučit,** t. j. můžeme je nahradit jediným členem s nimi stejnojmenným, jehož součinitel se dostane, sečteme-li součinitele původních členů. Na př. trojčlen $2ab - 3ab - ab$ má všecky členy stejnojmenné, je tedy **identicky roven** jednočlenu $-2ab$, neboť součet koeficientů je $2 - 3 - 1 = -2$. Podobně

$$3p^2 - 2p^2 - 2p^2 = -p^2,$$
$$6q^3 - 3q^3 - 2q^3 = q^3,$$
$$7rs - 6rs + rs - 2rs = 0,$$
$$t - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{6}t = 0,$$

neboť

$$3 - 2 - 2 = -1, \quad 6 - 3 - 2 = 1,$$
$$7 - 6 + 1 - 2 = 0, \quad 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} = 0.$$

Často se vyskytují mnohočleny s **jediným obecným číslem,** jako na př. mnohočlen

$$2x^3 + 7x^5 + 3x - 1.$$

Říkáme, že $2x^3$ je člen **třetího stupně,** že $7x^5$ je člen **pátého stupně,** že $3x$ je člen **prvního stupně.** Prostý člen -1 nazýváme někdy také členem **nultého stupně.**

Mnohočleny s jediným obecným číslem obyčejně uspořádáváme buďto **sestupně** nebo **vzestupně.** Při sestupném uspořádání napíšeme člen vyššího stupně přede člen nižšího stupně a prostý člen dáme až na konec. Při vzestupném uspořádání přijde naopak člen nižšího stupně před člen vyššího stupně a prostý člen stojí na prvním místě. Na př. mnohočleny

$$2x^3 + 7x^5 + 3x - 1, \quad 4a^2 - 5a^4 - 3a^3 - 5 + a$$

mají při sestupném uspořádání tvary

$$7x^5 + 2x^3 + 3x - 1, \quad -5a^4 - 3a^3 + 4a^2 + a - 5$$

a při vzestupném uspořádání mají tvary

$$-1 + 3x + 2x^3 + 7x^5, \quad -5 + a + 4a^2 - 3a^3 - 5a^4.$$

Také pro mnohočleny s několika obecnými čísly lze udati určité předpisy pro uspořádání členů, ale tím se zabývati nebudeme.

221. Slučte, pokud možno, a uspořádejte sestupně:

a) $3g^2 - 4g + 2g^2$; b) $1 + 9h^3 - 3h^3$;
c) $3k^2 - k^3 + k^2$; d) $7n^2 - 4n^2 + 3n$;
e) $6 + 2p^3 - 4p$; f) $7r^2 - r^3 + 2r^2$;
g) $2s^2 + 6s - 3 - 3s + s^2$; h) $5t^2 - 8 - 4t^2 + 2t - t^2 + 12$;
i) $x^3 - 3x - x^2 + 4x^3 - x$; j) $2y - 1 + y^2 - 1 + 3y$;
k) $6z^2 - z^2 + 2z^2 - 3z + 5z^2$; l) $9p^3 + 6 - 4p^3 - 3 - 2p^3$;
m) $8a^3 - 3a - 4a^2 + 2a^2 + 5a$; n) $10 - 2b^2 + b^2 - 5 + 5b^2$;
o) $3k^2 - 5k + 7 - k^2 + 1$; p) $6 + 6n^3 + 5n^2 - 4n^3 - 2n^3$.

222. Slučte, pokud možno, a uspořádejte vzestupně:

a) $5c^2 + 3c - c^2$; b) $4k^3 - k + 2k$;
c) $2e^3 + 3 - 6$; d) $9a^2 - 3a + 3$;
e) $5h - 3h^2 + h$; f) $8 - 2n + 2$;
g) $5t^2 - t^3 + 7 - 2t^2 - 1$; h) $5 - 2x^2 - x^2 + 1 + 3x^2$;
i) $7y - 4y^2 + 5y - y^2 + 6y^2$; j) $5r + r^3 + 2 - r + 6r^3$;
k) $8s^2 - 2 - 5s^2 - 5 - 3s^2 + 7$; l) $2t^3 - 3t^2 + 4t - t^2 + t$.

28. Sčítání a odčítání. Součet a rozdíl dvou mnohočlenů jsou zase mnohočleny. Na př.

$$(3xy - 5x + 6y - 7) + (xy + 5x + 6y - 9) =$$
$$= 3xy - 5x + 6y - 7 + xy + 5x + 6y - 9 =$$
$$= (3xy + xy) + (-5x + 5x) + (6y + 6y) + (-7 - 9) =$$
$$= 4xy + 0 + 12y - 16 = 4xy + 12y - 16;$$

$$(3xy - 5x + 6y - 7) - (xy + 5x + 6y - 9) =$$
$$= (3xy - 5x + 6y - 7) + (-xy - 5x - 6y + 9) =$$
$$= 3xy - 5x + 6y - 7 - xy - 5x - 6y + 9 =$$
$$= (3xy - xy) + (-5x - 5x) + (6y - 6y) + (-7 + 9) =$$
$$= 2xy - 10x + 0 + 2 = 2xy - 10x + 2.$$

Podobně je na př.

$$(3u^2 + 5v^2 - 6uv) - (2u^2 - 4v^2 + 3uv) + (-u^2 + v^2 - 2uv) =$$
$$= (3u^2 + 5v^2 - 6uv) + (-2u^2 + 4v^2 - 3uv) + (-u^2 + v^2 - 2uv) =$$

$= 3u^2 + 5v^2 - 6uv - 2u^2 + 4v^2 - 3uv - u^2 + v^2 - 2uv =$
$= (3u^2 - 2u^2 - u^2) + (5v^2 + 4v^2 + v^2) + (-6uv - 3uv - 2uv) =$
$= 0 + 10v^2 - 11uv = 10v^2 - 11uv.$

V těchto příkladech byl proveden tak podrobný zápis, aby z něho byl co nejzřetelněji patrný postup počtu. Obyčejně provádíme poněkud stručnější zápis, při kterém se úprava skládá jen ze dvou částí: (1) odstranění závorek, (2) sloučení. Při prvé části píšeme jeden za druhým členy jednotlivých mnohočlenů, při čemž však měníme znamení všech členů u takového mnohočlenu, před kterým je znamení minus. Při druhé části hledáme stejnojmenné členy, které slučujeme. Abychom na žádný člen nezapomněli, často je **zatrhujeme.** Slučování provádíme v každé skupině stejnojmenných členů obyčejně **zpaměti.** Vyjde-li v některé skupině jako součet koeficientů číslo 0, dá tato skupina do výsledku člen 0; tento člen se ani nemusí psát. V takovém případě často říkáme, že se členy té skupiny (navzájem) **ruší.** Příklad:

$(5a^2x - 7ax^2 + 3ax) - (2a^2x - 3ax^2 - 4ax) - (3a^2x - 4ax^2 - 2ax) =$
$= 5a^2x - 7ax^2 + 3ax - 2a^2x + 3ax^2 + 4ax - 3a^2x + 4ax^2 + 2ax =$
$= 9ax.$

Popis. Když jsou odstraněny závorky, zatrhneme nejprve první člen $5a^2x$ a potom postupně všecky členy s ním stejnojmenné, tedy $-2a^2x$, $-3a^2x$. Při tom vyslovujeme asi takto:

$5a^2x$ (t. j. zatrhneme první člen, který vyslovíme);

$3a^2x$ (zatrhneme člen $-2a^2x$ a vyslovíme hodnotu součtu $5a^2x - 2a^2x$);

0 (zatrhneme člen $-3a^2x$ a vyslovíme hodnotu součtu $3a^2x - 3a^2x$).

Potom zatrhneme první dosud nezatržený člen $-7ax^2$ a pokračujeme podobně dále.

Připomeňte si poznámku, která byla vyslovena na str. 9 dole!

223. Zjednodušte:

a) $4a - (5a + 3b) - 2b$;
b) $8c - (5 - 2c + 3d)$;
c) $(7x - 3x^2) - (3x - 7x^2)$;
d) $(4x^2 - 5x^3 + x^4) - (x^2 + 3x^3 - x^4)$;
e) $(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) + (a - b - c)$;
f) $(3pq + 4p - 5q - 7) - (2pq - 3p + 6q - 8) - (3pq - p + 7q)$;
g) $(3u + 5v - 7) - (2 - 3v) - (4 - 5u) + (6u - 3v)$.

Jsou-li koeficienty složitější, vypočteme si u každé skupiny součet koeficientů stranou. Příklad:

$$\begin{aligned} &(\tfrac{5}{8}x^2 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}) = \\ &= \tfrac{5}{8}x^2 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{8} = \\ &= \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8} \\ &-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-3+2}{4} = -\frac{1}{4} \\ &\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{4-3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

224. Zjednodušte:

a) $(32{,}7r^3 + 27{,}3r^2 - 13{,}8r - 0{,}46) - (25{,}3r^3 - 15{,}6r^2 - 17{,}36r + 2{,}9)$;

b) $(38{,}46 + 43{,}52s - 36{,}84s^2 - 27{,}94s^3) - (5{,}13 + 9{,}08s - 1{,}29s^2 + 8{,}72s^3)$;

c) $(234 + 7345a + 5456b + 1567ab) - (1385 - 2765a + 3843b - 2288ab)$.

225. Zjednodušte:

a) $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z) - (\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z) - (\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}y - \frac{5}{8}z)$;
b) $(\frac{3}{4}h + \frac{5}{12}k - \frac{5}{6}) - (-\frac{5}{6}h - \frac{3}{8}k + \frac{5}{4}) - (\frac{7}{8}h - \frac{5}{24}k - \frac{7}{12})$;
c) $(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3) - (\frac{1}{6} - \frac{7}{8}t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{4}t^3) + (-\frac{5}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}t^2 - t^3)$.

V dosavadních úlohách tohoto odstavce byla vždy buďto jenom jediná závorka anebo byly jednotlivé závorky jedna **vedle** druhé. Ale již v odst. 12 jsme upravovali výrazy obsahující jednu závorku **uvnitř** druhé. Při úpravě početních výrazů, které obsahují jednu závorku uvnitř druhé, můžeme si počínati dvojím způsobem: buďto napřed odstraníme závorku vnitřní, nebo napřed odstraníme závorku vnější. Proveďme si obojí způsob na příkladě: $8x - [5x - (4x - 3)]$. Při prvém způsobu začneme tím, že z výrazu $5x - (4x - 3)$, který je v lomené závorce, odstraníme okrouhlou závorku, při čemž vše, co je vně lomené závorky, zatím jen opíšeme; dostaneme výraz s jedinou závorkou, kterou potom odstraníme. Provedení:

$$\begin{aligned} 8x - [5x - (4x - 3)] &= 8x - [5x - 4x + 3] = \\ &= 8x - 5x + 4x - 3 = 7x - 3. \end{aligned}$$

Při druhém způsobu odstraníme napřed lomenou závorku. Aby bylo jasné, jak si máme počínati, upravme si napřed výraz $8x - [5x - y]$, který se liší od původního výrazu jen tím, že místo dvojčlenu $4x - 3$, který je ve vnitřní závorce původního výrazu, je teď pouhé písmeno y:

$$8x - [5x - y] = 8x - 5x + y.$$

Při úpravě původního výrazu začneme docela stejně, jenom že místo y bude na obou stranách $(4x - 3)$:

$$8x - [5x - (4x - 3)] = 8x - 5x + (4x - 3) =$$
$$= 8x - 5x + 4x - 3 = 7x - 3.$$

Ve cvič. 226 počítejte každý příklad dvojím způsobem! Při prvém způsobu odstraníte napřed závorky vnitřní, při druhém napřed závorky vnější.

226. Zjednodušte:

a) $[3r + 5s - (4r + 3s)] - [2r - 6s - (8r - s)]$;
b) $9ab - 1 - [3ab + (a + b - 2)] - [5ab - (3a + 4b - 6ab)]$,
c) $-[5x^3 - (2x^2 + 1)] - [2x^3 - 3x^2 + (3x - 2)]$;
d) $1 - 2z + z^2 - [1 - (2z - z^2)] - [(1 - 2z) - z^2]$;
e) $5t + 6p - [5t - (6p + 3t)] - [6p - (3t - 2p)]$;
f) $2 - 3u + 5u^3 - [3u + (1 - 5u^3)] - [5u^3 - (3u - 1)]$.

V úlohách, které jste právě řešili, měly vnější závorky **lomený** tvar [ ] a vnitřní **okrouhlý** tvar ( ). Někdy se však také vyskytuje závorka, uvnitř které je už i lomená i okrouhlá závorka. Takové závorce dáváme pro přehlednost tvar odlišný od okrouhlých i lomených závorek. Obyčejně je to tvar { }, kterému říkáme **složená** závorka. Při úpravě výrazů s trojími závorkami zase můžeme postupovati dvojím způsobem, jak je patrné z příkladu:

$$[3x - (5y - 7)] - \{3x - [5y - (7 - 3x)]\} =$$
$$= [3x - 5y + 7] - \{3x - [5y - 7 + 3x]\} =$$
$$= 3x - 5y + 7 - \{3x - 5y + 7 - 3x\} =$$
$$= 3x - 5y + 7 - 3x + 5y - 7 + 3x = 3x;$$

$$[3x - (5y - 7)] - \{3x - [5y - (7 - 3x)]\} =$$
$$= 3x - (5y - 7) - 3x + [5y - (7 - 3x)] =$$
$$= 3x - 5y + 7 - 3x + 5y - (7 - 3x) =$$
$$= 3x - 5y + 7 - 3x + 5y - 7 + 3x = 3x.$$

Při prvém způsobu začínáme od závorek vnitřních, t. j. takových, uvnitř kterých už není žádná jiná závorka a všecko, co je vně vnitřních závorek, opíšeme. Při druhém způsobu začínáme od závorek vnějších, t. j. takových, které nejsou uvnitř žádné jiné závorky, a opíšeme všecko, co je uvnitř ostatních závorek.

U některých příkladů nevystačíme s trojím tvarem závorek. Potom užíváme zase závorek okrouhlých, ale větších a silnějších, po případě ještě také větších závorek lomených a složených.

Ve cvič. 227 zase počítejte každý příklad dvojím způsobem!

227. Zjednodušte:

a) $2s - \{3s - [4s - (5s - 6)]\}$;
b) $3r + 1 - \{4r + 2 - [5r + 3 - (6r + 4)]\}$;
c) $1 + 3t - \{1 + t - [1 + 2t - (t - 3) - (1 + 4t)] - 1\}$;
d) $1 - [x^2 - (3x - 2) + x] - \{x^2 - 3x - [1 - x^2 - (1 - 2x)] + 1\}$;
e) $1 + 2a - 3b - 4ab - \{2 - a + 3b - 3ab - [3 - a - (b - ab)] - [4 + 5b - (4a - 2ab)]\}$;
f) $x + y - \{x + 2y + z - [x + z + 2y - (2x + y + z) - y - z] - x - z\}$;
g) $u + 1 - \{v - t - [u + v + 2 - (u + t + 2) - v - 1] - t - 1\}$;
h) $15 + 5c - \{3c - 8 + [4c - (2c - 11)]\} - 12$;
i) $1 - \big(p - \{p - [p - (p - 1) + 1] + 1\} + 1\big)$;
j) $y - \big[y^2 - \big(y - \{y^3 - [y - (y^2 - y)] - 2\} - 3\big) - 4\big] - 5$.

228. Řešte rovnice:

a) $4r - 1 - (3r - 2) = 5 - (r - 2)$;
b) $1 + 3s - (2 + s) = 4s + 1 - (s + 4)$;
c) $3 + 2t - (1 + 5t - t^2) = t^2 - 3 - (12 - 2t)$;
d) $1 - [2 - (3 - x)] = 2 - [3 - (4 - 2x)]$;
e) $5y - 3 - [3y + 2 - (y - 6)] = 8 - [y - (2 + 3y) - 11]$;
f) $1 - \{2x + [4 - (2 + x)] - 1\} = 3 - 5x$;
g) $5p - \{2p + [3p - (4p - 1) + 1] - 1\} = 5 - \{2 + [3 - (4 - p) + p] - p\}$.

V následujících cvičeních máme lomené koeficienty, ale jinak není v těchto cvičeních nic nového.

229. Zjednodušte:

a) $\frac{2}{3}r - [\frac{3}{4}r - (\frac{1}{2}r + 1)]$;
b) $\frac{1}{6}s + \frac{1}{4}t - [\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t - (\frac{1}{9}s + \frac{3}{8}t)]$;
c) $-[\frac{5}{12}a - (\frac{3}{4}b + \frac{1}{8}c)] - [\frac{5}{6}a - (\frac{5}{8}b - \frac{7}{12}c)]$;
d) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - [1 - (\frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2)] - [\frac{1}{3} - (\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}x^2)]$.

230. Zjednodušte:

a) $\frac{1}{6}x + \{\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z - [\frac{1}{4}x - (\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}x)]\} - \{y - \frac{1}{2}z - [\frac{1}{2}x - (\frac{1}{8}z - \frac{1}{4}y)]$;
b) $\frac{r}{3} - \left\{\frac{5}{6} - \frac{3t}{5} - \left[\frac{r}{4} - \frac{75}{18} + \left(\frac{t}{3} - \frac{3r}{8}\right) - \frac{2t}{5}\right] + \frac{3r}{8}\right\}$;
c) $\frac{a}{3} - \left\{-\frac{2a}{15} - \frac{b}{3} - \left[-\frac{a}{5} - \frac{2b}{3} - \left(\frac{2a}{15} + \frac{3b}{4} - 5\right) - 9\right] - 6\right\} + 4$.

29. Násobení. Mocniny o stejném základu se násobí, sečtou-li se exponenty. Podrobněji: Součin dvou mocnin o stejném základu je zase mocnina s týmž základem, jejíž exponent je součet exponentů obou činitelů.

231. Přesvědčte se o správnosti právě vysloveného pravidla na příkladech:

a) $x^2 . x^3 = x^5$; b) $r^4 . r^2 = r^6$; c) $s^5 . s^3 = s^8$.

232. Platí pravidlo o násobení mocnin se stejným základem také tehdy, když jsou více než dva činitelé? Vyložte na příkladech:

a) $u^3 . u^4 . u^2 = u^9$; b) $v^5 . v^2 . v^3 = v^{10}$.

Je účelné zavésti si také mocniny s exponentem 1, na př.

$$a^1 = a; \quad c^1 = c; \quad y^1 = y; \quad 10^1 = 10.$$

Mocnina s exponentem 1 rovná se svému základu.

233. Vyložte na příkladech:

a) $p^7 . p = p^8$; b) $q . q^6 = q^7$; c) $h^3 . h . h^5 = h^9$,

jak se pravidla o násobení mocnin se stejným základem užívá v případech, kdy některý exponent se rovná 1.

Příklad.

$$4x^3y^2z \;.\; 5x^4y^3z^3.$$

První činitel je součin 4 čísel; druhý činitel je také součin čtyř čísel. Tedy výraz, který se má upraviti, je součin osmi jednoduchých činitelů. Tyto činitele můžeme spolu násobiti v libovolném pořádku. Proto můžeme dáti k sobě oba součinitele 4 a 5, potom dáti k sobě oba činitele x^3 a x^4, kteří jsou mocninami čísla x, dále oba činitele y^2 a y^3, konečně oba činitele z a z^3, takže

$$4x^3y^2z \,.\, 5x^4y^3z^3 = (4 \,.\, 5) \,.\, (x^3 \,.\, x^4) \,.\, (y^2 \,.\, y^3) \,.\, (z \,.\, z^3) =$$
$$= 20x^7y^5z^4.$$

První krok provádíme obyčejně jen v mysli a píšeme hned

$$4x^3y^2z \,.\, 5x^4y^3z^3 = 20x^7y^5z^4.$$

Stejně si počínáme při více než dvou činitelích, na př.

$$9a^3b^2c \,.\, (-5ab^3cd^2) \,.\, (-4b^4c^4d^4) \,.\, (8ab^2c^3d) =$$
$$= 1440a^5b^{11}c^9d^7.$$

Zde už je obtížnější počítati součin koeficientů úplně zpaměti; proto si na př. znásobíme zpaměti nejprve součin prvých dvou koeficientů, potom součin ostatních dvou koeficientů a stranou si vypočteme písemně součin $(-45) \cdot (-32) = 1440$. Jakmile známe koeficient výsledku, je už lehké dokončiti počet zpaměti. Výsledek ovšem zapíšeme.

234. Zjednodušte:

a) $3c^4x^3 \cdot 5cx^4$; b) $7b^8y \cdot 9b^5y^6$;
c) $12d^6z^7 \cdot 9d^6z^5$; d) $8a^5xy \cdot (-3a^4y^2z)$;
e) $(-11bx^3y^4) \cdot (-7b^3xy^4)$; f) $8h^5kl^3 \cdot 12hkl^4$;
g) $r^4s^5t^6u^7 \cdot r^7s^6t^5u^4$; h) $r^3s^5v^9 \cdot r^9s^7u^4$;
i) $(-24ac^8d) \cdot 7a^8cd^4$.

235. Zjednodušte:

a) $8ab^2c \cdot 7a^2bc \cdot 6abc^2$;
b) $9rs^3t \cdot 12r^2s^2 \cdot 8r^3t^5$;
c) $(-4ah^3t^8) \cdot (-4a^3h^3t^6) \cdot (-4a^9h^{10})$;
d) $8c^3x^3y^3z^3 \cdot (-14x^4y^5z) \cdot (-16c^5y^6z^4)$;
e) $(r^4s^4t) \cdot (r^4s^4x) \cdot (r^4s^4y) \cdot (-3x^3y^3)$;
f) $-k^4u^5v^6 \cdot (-3k^5u^4v) \cdot (-7kuv^8)$.

Z příkladů, které jste počítali, je patrné, že součin dvou nebo i více jednočlenů je vždy zase jednočlen. Naproti tomu součet nebo rozdíl dvou jednočlenů se dá jen někdy psáti jako jednočlen. Kdy?

Z odst. 25 je nám známo, že máme-li součet násobiti nějakým číslem, můžeme jím násobiti každého sčítance a ty součiny sečíst. Podle tohoto pravidla můžeme násobiti mezi sebou mnohočlen a jednočlen, neboť mnohočlen je součet jednočlenů.

Příklad.

$$(4xy^2 - 3x^2y + 2x^2y^2) \cdot 2x^2y^3 = 8x^3y^5 - 6x^4y^4 + 4x^4y^5.$$

236. a) $(3u - 5v) \cdot 2x$; b) $(-4r + 6s) \cdot 3y$;
c) $(5 - 3a + 4a^2) \cdot 3a$; d) $(-8 + 7q - 6q^3) \cdot (-1)$;
e) $(5t^4 - 6t^3 + 2t^2 - 7) \cdot (-4t^2)$;
f) $(-3 + 7p + 7p^2 - 5p^3) \cdot 8p^3$;
g) $(-5a^2b^2 + 3a^2b - 3ab^2 + 6ab - 7a + 5b) \cdot 9ab^2$;
h) $(3x^3yz - 4xy^3z + 6xyz^3 - 7xyz + 2x^8 - 8yz) \cdot (-7x^2yz)$.

237. a) $3p\,(2p - 3q) + 2q\,(2p - 3q) - 3\,(p^2 + q^2)$;
b) $a\,(a + c) - c\,(a + c) - a^2 + c^2$;
c) $1 - 4x + x\,(1 - 4x) - 1 + x^2$;
d) $3x\,(x + 4y) + x\,(3x - 8y) - (3x - 8y)$;
e) $3r^3\,(1 - 2r + 3r^2) - 3r^2\,(1 - 2r + 3r^2) + 2r\,(1 - 2r + 3r^2)$.

238. a) $7r - 2\,[r + 2s - (s - 2r)]$;
b) $[3u\,(u + v) - 2v^2] - 3\,[v\,(u - v) - u^2]$;
c) $6s - [5s - 3\,(s - 2) - 8]$;
d) $a - 2\,[3a - 2\,(1 + a)]$;

e) $x(2x^2 - x - 2) - [1 - 3x(1 - 3x + x^2)]$;
f) $3[2p - 4(q - r)] - 2[5q - 3(r - p)]$;
g) $3z - 1 - \{2(3z - 1) - [1 - (3z - 1)]\}$;
h) $b + c - 3(b - c) - \{3(b - c) - 2[(b + c) - (b - c)]\}$.

239. a) $\frac{1}{2}(4a - 2)$; b) $\frac{1}{3}(6b + 2c)$; c) $\frac{1}{5}(10u - 15v)$;
d) $\frac{1}{2}x(y + 3z)$; e) $6xy(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y)$; f) $8rs(\frac{3}{4}r^2s - \frac{1}{2}rs^2)$;
g) $(\frac{3}{8}p^2qr - \frac{9}{4}pq^3r + \frac{3}{16}pqr^3) \cdot \frac{8}{9}p^2qr^2$;
h) $\frac{1}{3}(t - 1) + \frac{1}{2}(t + 1)$; i) $\frac{1}{5}(2a - 1) + \frac{1}{7}(1 - 2a)$;
j) $\frac{1}{10}(2c - 3) - \frac{1}{15}(2c + 3)$; k) $\frac{5}{6}(2f + 1) - \frac{3}{4}(2f + 3)$;
l) $\left[\frac{x}{3} - \frac{1}{2}(y - z)\right] - \left[\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}(y - x)\right]$.

240. Řešte rovnice:

a) $10 - 5(r + 2) = 7r$; b) $\frac{1}{4}s - \frac{1}{5}(s - 1) = 1$;
c) $5 = \frac{2}{3}(2x - 1)$; d) $\frac{3}{5}(1 + 2y) - \frac{1}{3}(7 - 2y) = 2$;
e) $\frac{1}{3}(z + 1) = \frac{2}{5}(z - 1)$; f) $\frac{4}{5}(t - 1) = \frac{1}{2}t$;
g) $p(p + 1) = p(p + 3) - (p + 3)$;
h) $2q(q + 5) - 3q(q - 7) = 27 - q(5 + q)$.

Nyní budeme násobiti mezi sebou dva mnohočleny, na př. $(3x - 5y + 2z)(a + b + c)$. Víte, že

$$r(a + b + c) = ra + rb + rc.$$

To je správné, když za písmeno r dosadíme jakékoli číslo, proto je to také správné, i když za písmeno r dosadíme výraz $3x - 5y + 2z$. Tedy

$$(3x - 5y + 2z)(a + b + c) =$$
$$= (3x - 5y + 2z)a + (3x - 5y + 2z)b + (3x - 5y + 2z)c.$$

Avšak
$$(3x - 5y + 2z)a = 3ax - 5ay + 2az,$$
$$(3x - 5y + 2z)b = 3bx - 5by + 2bz,$$
$$(3x - 5y + 2z)c = 3cx - 5cy + 2cz.$$

Tedy
$$(3x - 5y + 2z)(a + b + c) =$$
$$= 3ax - 5ay + 2az + 3bx - 5by + 2bz + 3cx - 5cy + 2cz.$$

Součin dvou mnohočlenů je zase mnohočlen. Jeho členy se dostanou, znásobíme-li jednotlivé členy prvého činitele napřed prvním členem činitele druhého, potom druhým atd. Při tom se obyčejně vyskytnou členy stejnojmenné, které je potom třeba ještě sloučit.

Příklad.

$$(a - 2b + 3c)(a + 2b - 3c) =$$
$$= a^2 - 2ab + 3ac + 2ab - 4b^2 + 6bc - 3ac + 6bc - 9c^2 =$$
$$= a^2 - 4b^2 + 12bc - 9c^2.$$

Abychom stejnojmenné členy poznali na prvý pohled, píšeme v každém členu obecná čísla v abecedním pořádku.

241. a) $(p+q)(r+s)$; b) $(p-q)(r+s)$; c) $(p-q)(r-s)$; d) $(a+b)(a-c)$; e) $(m-3)(n+2)$; f) $(p-3)(r-3)$; g) $(x+5)(x+7)$; h) $(y-2)(y+5)$; i) $(1-c)(1-4c)$; j) $(4-e)(10+e)$; k) $(5u-1)(5u+2)$; l) $(2a-x)(3a-x)$; m) $(x+z)^2$; n) $(x-z)^2$; o) $(2x+3z)^2$.

242. a) $(r+3)(r^2+2r+2)$; b) $(r+s)(r^2-rs+s^2)$; c) $(2a^2-3a-1)(3a-2)$; d) $(2+f)(1-7f-3f^2)$; e) $(p^2+2pq-q^2)(p-2q)$; f) $(3-4x)(5-2x-3x^2)$; g) $(3s^2-st-2t^2)(2s+3t)$; h) $(4-8x+5x^2)(5-4x)$.

243. a) $(2y+1)(2y+3)+(2y+3)(2y+5)-8(y+1)(y+2)$;
b) $(c+4r)^2-(c-4r)^2-8cr$;
c) $(8h+3k)(4h-2k)-(5h+4k)(3h-5k)+(2h-6k)(h-3k)$

244. a) $(x^3+3x+1)(x^2-3x+1)$;
b) $(2y^2-y+3)(2y^2+y-1)$;
c) $(6r^3+r^2-9r-4)(2r+1)$;
d) $(s^3-3s^2y-3sy^2+y^3)(s-y)$;
e) $(6t^4+t^3-16t^2+8)(3t^2+2t-4)$;
f) $(2u^4+u^3-16u^2+8)(2u^2+5u-3)$;
g) $(10a^4+11a^3b-2a^2b^2-13ab^3-6b^4)(2a^2+3ab+2b^2)$;
h) $(p^4+p^2q^2+q^4)(p^2-pq+q^2)$.

245. a) $(2x+3y+4z)(3x-4y-5z)-(3x+y+2z)(2x-3y-4z)$;
b) $(r^3+2r^2+3r-4)(2r-3)-(r^2+3r-2)(r^2-2r+3)$;
c) $8-[3+4t-(1+2t)(3-t)]$;
d) $(2a+3b)(a-b)-[a^2+ab-b^2-(a-b)(3a+b)]$;
e) $1-\{1-x-[2-(1+x)(1-2x)]\}$.

Máme-li mezi sebou znásobiti tři mnohočleny, vybereme si z nich dva, ty mezi sebou znásobíme a výsledek znásobíme činitelem třetím. Máme-li na př. počítati $(a+2b)(3a-b)(2a-5b)$, vypočteme si napřed stranou

$$(a+2b)(2a-5b)=2a^2+4ab-5ab-10b^2=2a^2-ab-10b^2$$

a potom počítáme

$$(2a^2-ab-10b^2)(3a-b)=6a^3-3a^2b-30ab^2-2a^2b+ab^2+10b^3=$$
$$=6a^3-5a^2b-29ab^2+10b^3.$$

Také jsme si mohli vypočísti napřed

$$(a+2b)(3a-b)=3a^2+6ab-ab-2b^2=3a^2+5ab-2b^2$$

a potom

$$(3a^2 + 5ab - 2b^2)(2a - 5b) =$$
$$= 6a^3 + 10a^2b - 4ab^2 - 15a^2b - 25ab^2 + 10b^3 =$$
$$= 6a^3 - 5a^2b - 29ab^2 + 10b^3$$

nebo napřed

$$(3a - b)(2a - 5b) = 6a^2 - 2ab - 15ab + 5b^2 = 6a^2 - 17ab + 5b^2$$

a potom

$$(6a^2 - 17ab + 5b^2)(a + 2b) =$$
$$= 6a^3 - 17a^2b + 5ab^2 + 12a^2b - 34ab^2 + 10b^3 =$$
$$= 6a^3 - 5a^2b - 29ab^2 + 10b^3.$$

246. Vypočtěte trojím způsobem:

a) $(1 - 3x)(1 - 5x)(1 - 7x)$;
b) $(x^2 - 3x + 4)(2 + x)(x - 3)$;
c) $(x - y - z)(x + y - 2z)(x + 2y - z)$.

247. Vypočtěte aspoň dvojím způsobem:

a) $(4r - 5s)(3r + 2s)(2r - 5s)(r - s)$;
b) $(7p - 3q)(6p - q)(p - 6q)(p + q)$.

30. Umocňování mnohočlenů. Jak zní pravidlo o násobení mocnin se stejným základem? Viz odst. 29. Tohoto pravidla můžeme užíti i tehdy, když mocniny, které máme mezi sebou násobiti, jsou si navzájem rovny. Na př. jest

$$(r^8)^2 = r^8 \,.\, r^8 = r^{8+8} = r^{16};$$
$$(s^5)^3 = s^5 \,.\, s^5 \,.\, s^5 = s^{5+5+5} = s^{15};$$
$$(t^7)^4 = t^7 \,.\, t^7 \,.\, t^7 \,.\, t^7 = t^{7+7+7+7} = t^{28}.$$

Z těchto příkladů je patrné: **Máme-li mocninu umocniti nějakým číslem, stačí tímto číslem znásobiti původní exponent.** Podrobněji: Mocnina se umocní číslem, umocní-li se základ součinem exponentu a čísla.

Nyní se budeme zabývati umocňováním součinu. Mějme na př. $(ab)^4$. To znamená

$$(ab)^4 = ab \,.\, ab \,.\, ab \,.\, ab,$$

což je součin osmi činitelů, které můžeme násobit v libovolném pořádku. Proto je také

$$(ab)^4 = aaaa \,.\, bbbb = a^4b^4.$$

Podobně je

$$(pq)^3 = pq \cdot pq \cdot pq = ppp \cdot qqq = p^3q^3,$$
$$(xyz)^2 = xyz \,.\, xyz = xx \,.\, yy \,.\, zz = x^2y^2z^2.$$

Z těchto příkladů je patrné: **Součin umocníme, umocníme-li každého činitele.**

Užijeme-li obou pouček vyslovených v tomto odstavci, můžeme počítati mocniny libovolného jednočlenu. Na př. $(2x^5y^4)^3$ je třetí mocnina součinu tří činitelů, takže podle druhé poučky

$$(2x^5y^4)^3 = 8 \,.\, (x^5)^3 \,.\, (y^4)^3.$$

Avšak podle první poučky je

$$(x^5)^3 = x^{15}, \quad (y^4)^3 = y^{12},$$

takže

$$(2x^5y^4)^3 = 8x^{15}y^{12}.$$

Podle známého znaménkového pravidla (viz odst. 20) jest

$$(-a)^2 = (-a) \,.\, (-a) = +a^2,$$
$$(-a)^3 = (-a) \,.\, (-a) \,.\, (-a) = -a^3,$$
$$(-a)^4 = (-a) \,.\, (-a) \,.\, (-a) \,.\, (-a) = +a^4 \text{ atd.}$$

Vidíte, že znamení se stále střídají. **Mocnina záporného čísla je kladná, je-li exponent sudý; mocnina záporného čísla je záporná, je-li exponent lichý. Proto je na př.**

$$(-2a^3b^2)^3 = -8a^9b^6, \quad (-2a^3b^2)^4 = +16a^{12}b^8.$$

248. a) $(x^2yz^3)^4$; b) $(r^3st^4)^3$; c) $(ab^2c^3)^5$; d) $(-p^4qr^2)^6$; e) $(-h^2q^4t^8)^2$; f) $(-d^3e^5f^6)^5$; g) $(2a^6b^5cd^2)^4$; h) $(3u^8v^6t^{12})^3$; i) $(-2k^3lm^4)^2$.

Jest

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Oba vzorce

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$
$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

si dobře pamatujte. Vlastně by stačilo si zapamatovat jen první z nich, neboť druhý vznikne z prvého, když na všech místech místo čísla B dáme číslo $-B$. Ale je pohodlnější pamatovati si oba vzorce. Užíváme jich k úpravě druhé mocniny dvojčlenu. Máme-li na př. počítati $(2x + 3y)^2$, užijeme prvého vzorce, do kterého dosadíme $A = 2x$, $B = 3y$. Dostaneme

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \,.\, 2x \,.\, 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

Podobně dostaneme

$$(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \,.\, 2x \,.\, 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2,$$

dosadíme-li $A = 2x$, $B = 3y$ do druhého vzorce; mohli jsme také dosaditi $A = 2x$, $B = -3y$ do prvého vzorce.

249. a) $(r + 5)^2$; b) $(s - 7)^2$; c) $(2t + 1)^2$;
d) $(3p + 4)^2$; e) $(5q - 6)^2$; f) $(8x - 9)^2$;
g) $(7a - 6b)^2$; h) $(10c - 12e)^2$; i) $(12h + 5k)^2$;
j) $(23u - 14v)^2$; k) $(57z - 46)^2$; l) $(138y - 264)^2$;
m) $(a - \frac{3}{2})^2$; n) $(2b - \frac{3}{4})^2$; o) $(3c - \frac{5}{6})^2$.

250. a) $(5x - 3x^2)^2$; b) $(6y^2 - 4y^3)^2$; c) $(3z^3 - 2z^5)^2$;
d) $(10ab^2c - 9abc^3)^2$; e) $(12p^2q^2r - 6pqr^3)^2$; f) $(4abc - 3bcd)^2$.

251. a) $(a + c)^2 - (a - c)^2$; b) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$;
c) $(2x + 5y)^2 + (5x + 2y)^2$; d) $(3r - 7y)^2 + (7r + 6y)^2$;
e) $3\,(4p - 2)^2 - 2\,(6p + 3)^2 + (8p - 1)^2$;
f) $5\,(4a + 3b)^2 - 4\,(5a + 3b)^2 - 3\,(4a - 5b)^2$;
g) $8\,(s + 1)^2 - 4\,(2s + 3)^2 - 6\,(s + 4)^2$.

Nyní počítejme $(A + B + C)^2$ neboli $(A + B + C)(A + B + C)$. Vyjde nám nejprve*)

$$\begin{aligned} &A^2 + AB + AC + \\ + &AB + B^2 + BC + \\ + &AC + BC + C^2. \end{aligned}$$

To je devět členů, z nichž se však některé dají sloučit. Provedeme-li sloučení, vyjde

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.$$

Podobně si vypočteme $(A + B + C + D)^2$ neboli $(A + B + C + D) \,.$ $. \,(A + B + C + D)$. Vyjde nejprve

$$\begin{aligned} &A^2 + AB + AC + AD + \\ + &AB + B^2 + BC + BD + \\ + &AC + BC + C^2 + CD + \\ + &AD + BD + CD + D^2 \end{aligned}$$

a po sloučení

$$(A + B + C + D)^2 =$$
$$= A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD.$$

*) Je-li nutné nebo vhodné rozděliti početní výraz na několik řádků, napíšeme na konec předcházejícího řádku ještě znamení následujícího členu, které potom v dalším řádku znovu opakujeme. Činíme to proto, aby bylo patrné, že celek je jediný početní výraz.

Přesvědčte se ještě sami, že

$$\begin{aligned}(A + B + C + D + E)^2 &= \\ = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 &+ \\ + 2AB + 2AC + 2AD + 2AE &+ \\ + 2BC + 2BD + 2BE &+ \\ + 2CD + 2CE &+ \\ + 2DE.\end{aligned}$$

Druhá mocnina mnohočlenu se skládá ze členů dvojího druhu: napřed přijdou druhé mocniny jednotlivých členů, potom ještě dvojnásobný součin každého členu (mimo poslední) **s každým následujícím členem.** Na př. druhá mocnina čtyrčlenu se skládá celkem z deseti členů: jsou to předně čtyři druhé mocniny jednotlivých členů, dále dvojnásobný součin prvního členu s druhým, prvního se třetím, prvního se čtvrtým, potom dvojnásobný součin druhého členu se třetím a druhého se čtvrtým, konečně dvojnásobný součin třetího členu se čtvrtým. Příklad:

$$\begin{aligned}(4x - 5y + 6z)^2 &= \\ = (4x)^2+(-5y)^2+(6z)^2+2 \,.\, 4x \,.\, (-5y)+2 \,.\, 4x \,.\, 6z+2 \,.\, (-5y) \,.\, 6z &= \\ = 16x^2 + 25y^2 + 36z^2 - 40xy + 48xz - 60yz.\end{aligned}$$

První krok se může provésti jen v mysli. V příkladech dávejte dobrý pozor na znamení!

252. a) $(r + 2s + 3)^2$; b) $(p + 3q + 4r)^2$; c) $(5a + 4b + 3c)^2$; d) $(r - 2s + 3)^2$; e) $(p + 3q - 4r)^2$; f) $(-5a + 4b + 3c)^2$; g) $(r - 2s - 3)^2$; h) $(-p + 3q - 4r)^2$; i) $(-5a - 4b + 3c)^2$; j) $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 7)^2$; k) $(5y^4 - 6y^2 - 3y + 2)^2$; l) $(ax - 2by - 3ay + 4bx)^2$; m) $(1 - 2s - 3t - 4u)^2$; n) $(2z^4 - 4z^3 + z^2 - 3z - 2)^2$; o) $(1 - 3c + 2c^2 - c^3 - 3c^4)^2$.

253. a) $[1 - (3x + 4y)^2]^2$; b) $[(3r - 2s)^2 + (2r - s)^2]^2$; c) $(3h + 4k - 2)^2 + (3h - 4k + 2)^2$; d) $(1 + t + 2t^2 - t^3)^2 - (1 + 2t + t^2 - 2t^3)^2$.

Podle pravidla o násobení mnohočlenů se snadno vypočte, že

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

To je vzorec, který už znáte z odst. 17.

254. Počítejte dvojím způsobem, napřed podle poučky o druhé mocnině mnohočlenu, potom podle poučky o rozdílu čtverců!

a) $(2x + y)^2 - (x + 2y)^2$; b) $b^2 - (a - b + c)^2$;
c) $100 - (3x + 4y - 10)^2$; d) $(a + b + c)^2 - (a + b - c)^2$;
e) $(r - s)^2 - 9s^2$; f) $(p + 2q)^2 - 4q^2$;
g) $16 (u - 2v)^2 - 25 (v - 2u)^2$; h) $(3a + 4b)^2 - 9a^2$;
i) $(2c + d - e)^2 - 4 (c + d + 2)^2$;
j) $4 (z^2 - 1)^2 - 9 (z - 1)^2$.

Ježto

$$(A + B)^3 = (A + B)^2 (A + B) = (A^2 + 2AB + B^2) (A + B),$$

vypočteme snadno, že

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Dáme-li sem $-B$ místo B, vyjde

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Oba vzorce si dobře pamatujte. Užíváme jich k úpravě třetí mocniny dvojčlenu.

255. a) $(5x - 2)^3$; b) $(3a + 4b)^3$;
c) $(x^3 + 2x^2)^3$; d) $(4 - 2x^3)^3$;
e) $(2x^3y + 3x^2y^2)^3$; f) $(6r^4 - 9rs^2)^3$;
g) $(-1 - z^2)^3$; h) $(-8 + 5t^3)^3$;
i) $(-7cd^3 - 9c^3d)^3$.

256. Odvoďte vzorec

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3A^2B + 3AB^2 + 3A^2C + 3AC^2 + 3B^2C + 3BC^2 + 6ABC$$

a podle něho upravte:

a) $(3x + 2y + 4z)^3$; b) $(3x + 2y - 4z)^3$;
c) $(3x - 2y - 4z)^3$; d) $(-3x - 2y - 4z)^3$;
e) $(5x^2 - 6x + 3)^3$; f) $(3a^2 - 5ab - 7b^2)^3$;
g) $(r^6 - 3r^3 + 8)^3$; h) $(7x^3 - 6x - 5)^3$;
i) $(1 - 5s + 3s^3)^3$; j) $(2r^3 st - 4rs^2t^2 + rs^3t)^3$.

31. Dosazování. Často se vyskytuje úloha, do mnohočlenu s jediným písmenem dosaditi za toto písmeno určité číslo zvláštní. Naučíme se nyní, jak se takové dosazování dá výhodně provésti. Vyložíme si postup na příkladě mnohočlenu $5x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 7x + 8$. Tento mnohočlen je poslední v řadě pěti mnohočlenů

$$5,$$
$$5x + 3,$$
$$5x^2 + 3x - 6,$$
$$5x^3 + 3x^2 - 6x - 7,$$
$$5x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 7x + 8.$$

Ale v této řadě vznikne: druhý mnohočlen z prvního, když násobíme číslem x a přičteme 3, třetí z druhého, když násobíme x a přičteme -6, čtvrtý z třetího, když násobíme x a přičteme -7, pátý ze čtvrtého, když násobíme x a přičteme 8. Napíšeme-li si pod sebe do sloupce všecky koeficienty našeho mnohočlenu, vidíme, že hodnotu našeho mnohočlenu dostaneme takto: První číslo sloupce, tedy číslo 5, násobíme číslem x, k součinu přičteme druhé číslo sloupce, tedy číslo 3, součet zase násobíme číslem x a přičteme třetí číslo sloupce a tak pokračujeme až do konce sloupce. Volíme-li na př. $x = 9$, máme tento výpočet:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{x = 9} \\
\hline
5 & 5 \\
3 & 48 \\
-6 & 426 \\
-7 & 3827 \\
8 & 34451
\end{array}$$

Popis. V prvém sloupci jsou pod sebou všecky koeficienty daného mnohočlenu. Ve druhém sloupci je nad vodorovnou čarou číslo, které dosazujeme za x. Potom je vedle prvního čísla z prvého sloupce napsáno totéž číslo znovu. Každé další číslo druhého sloupce dostaneme, když číslo, které je nad ním, znásobíme číslem nad vodorovnou čarou a k součinu přičteme číslo, které vidíme v prvém sloupci vedle čísla právě počítaného. Poslední číslo druhého sloupce je hodnota daného mnohočlenu při zvolené volbě čísla x.

Při užívání tohoto pravidla musíme pamatovati na dvě věci. Předně, že koeficienty píšeme do sloupce v tom pořádku, v jakém jdou za sebou při **sestupném** uspořádání mnohočlenu; za druhé, že když v daném mnohočlenu některá mocnina obecného čísla schází, musíme si ji mysliti doplněnu s koeficientem nula. Na př. máme-li do mnohočlenu $7 - 3t + 9t^3 - 6t^4$ dosaditi $t = 11$, provedeme výpočet:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{t = 11} \\
\hline
-6 & -6 \\
9 & -57 \\
0 & -627 \\
-3 & -6900 \\
7 & -75893
\end{array}$$

257. Do mnohočlenu $3x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ dosaďte za x číslo
a) 2; b) -1; c) 5; d) 8; e) -4; f) -6.

258. Do mnohočlenu $5r^4 - 3r^2 + 8r - 7$ dosaďte za r číslo
a) 3; b) -2; c) 4; d) -4; e) 7; f) -7.

259. Do mnohočlenu $1 + 2y - 3y^2 - y^3$ dosaďte za y číslo
a) 12; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $-\frac{1}{4}$.

260. Dosaďte $s = 20$ do mnohočlenů
a) $3 - s^2 + 2s^3 - s^4$; b) $5s - 3 + s^4 - 2s^5$;
c) $10s - 3s^3 + 2s^4 - 5s^2$; d) $15s^5 - 16s^3 + 12s^2 - 48$.

261. Dosaďte $p = -\frac{2}{3}$ do mnohočlenů
a) $3p^2 - 5p + 4$; b) $2p^2 - 6p + 7$;
c) $8 - 4p + 5p^2$; d) $1 - 2p + 4p^2 - 3p^3$.

Dosud jsme dosazovali za jednotlivá písmena zpravidla jen čísla zvláštní. Ale už jsme také dosazovali za písmena i početní výrazy. Když jsme na př. na straně 71 počítali $(2x + 3y)^2$ podle vzorce pro $(A + B)^2$, tu jsme vlastně do mnohočlenu $A^2 + 2AB + B^2$ dosazovali za písmena A, B určité početní výrazy, totiž $A = 2x$, $B = 3y$.

262. Do mnohočlenu $3x^2 + 4xy - 2y^2$ dosaďte
a) $x = 5r - 4s$, $y = 3r + 5s$; b) $x = 4p - 2$, $y = 3p - 1$;
c) $x = 1 - 3t$, $y = 3 - 2t$; d) $x = 2a + b + c$, $y = a - b - 2c$.

Třetí mocninu $(2x + 3y - z)^3$ můžeme počítati tak, že do vzorce pro $(A + B)^3$ dosadíme $A = 2x + 3y$, $B = -z$ nebo $A = 2x$, $B = 3y - z$ nebo $A = 3y$, $B = 2x - z$. Podobně můžeme počítati $(p + q + r + s)^3$ z téhož vzorce, dosadíme-li třeba $A = p + q$, $B = r + s$ nebo $A = p + r$, $B = q + s$ nebo $A = p + s$, $B = q + r$.

Tak si počínejte ve cvič. 263.

263. a) $(2x^2 - x + 3)^3$; b) $(1 - 2u + u^2)^3$;
c) $(ac - 2bc + 3ab)^3$; d) $(2 - v + 3v^2 - v^3)^3$;
e) $(4 - 3r + 2r^2 + r^3)^3$; f) $(z^3 + z - 2)^3$;
g) $(p^2q - 2pq^2 + 3p^2q^2 - 4pq)^3$; h) $(1 - 3x^2 + 3x^3 - 2x^4)^3$.

32. Vytýkání před závorku. Protože

$$a(x + y + z) = ax + ay + az,$$

je také obráceně

$$ax + ay + az = a(x + y + z).$$

Mají-li všecky členy mnohočlenu nějakého společného dělitele, dá se ten mnohočlen napsati jako součin, jehož jedním činitelem je ten společný dělitel. Říkáme tomu také, že jsme společného dělitele **vytkli před závorku.**

264. Vyplňte správně prázdná místa:

a) $xy + 2xz = x(\quad)$; b) $ax + xz = x(\quad)$;
c) $r^3 + r^5 = r^3(\quad)$; d) $4as^2 - 6as^2 = 2as^2(\quad)$;
e) $8x^3y^2z^5 - 12x^2y^4z^6 = 4x^2y^2z^5(\quad)$;
f) $p - 3q - 6r = p - 3(\quad)$;
g) $4a - 8b - 3c - 9d = 4(\quad) - 3(\quad)$.

265. a) $(8r + 6) : 2$; b) $(6s + 9) : 3$;
c) $(7x^2 + 3x) : x$; d) $(12x^3 + 8x^2 + 40x) : 8x$;
e) $(12p^3q - 18pq^3 + 30p^2q^2) : 3pq$;
f) $(6s^2 - 8t^2) : (-2)$; g) $(m - n) : (-1)$;
h) $(-m + n) : (-1)$;
l) $(-5a^3b + 20a^2b^2 - 10ab^3) : (-5ab)$;
m) $(27x^3y^4 - 54x^2y^5 - 63x^4y^3) : 9x^2y^2$.

266. Vytkněte společné činitele před závorku:

a) $5p - 10q$; b) $3r^2 - 9r$;
c) $2ab - 4ac + 2a^2$; d) $12u^3 - 9u^2v + 6uv^2$;
e) $42x^3y^2z - 63x^2y^2z^2 + 91x^4y^4z^4$;
f) $36r^7s^5t^2 - 48r^4s^3t^4 + 60r^5s^7t^6$;
g) $3(r - s)^3 - 6(r - s)^2 + 9(r - s)$;
h) $(p - 2q)^4 - (2q - p)^3$.

Někdy můžeme vytknouti před závorku také mnohočlen. Mějme na př. výraz

$$3x^2(2x^2 - x + 3) - 5x(2x^2 - x + 3) + 2x^2 - x + 3.$$

Zde můžeme vytknouti před závorku výraz $2x^2 - x + 3$, čímž daný výraz nabude tvaru součinu

$$(2x^2 - x + 3)(3x^2 - 5x + 1). \qquad (*)$$

Neboť hodnotu $2x^2 - x + 3$ si můžeme označit jediným písmenem, třeba písmenem A, čímž daný výraz nabude tvaru $3x^2A - 5xA + A$, ze kterého můžeme vytknouti A před závorku a dostaneme $A(3x^2 - 5x + 1)$, což je totéž jako (*) vzhledem k významu písmene A.

Při této příležitosti si všimněme důležitého vzorce

$$A - B = -(B - A),$$

jehož správnost je vám známa. Z něho plyne, že když se z nějakého výrazu dá vytknouti činitel $A - B$, pak se z téhož výrazu dá vytknouti také činitel $B - A$. Na př. jest

$$(3x - 5y)(x - 2y) = (5y - 3x)(2y - x),$$

$$(4r + 5s)(3r - 2s) = (-4r - 5s)(2s - 3r) = -(4r + 5s)(2s - 3r).$$

267. Rozložte na součin činitelů:
a) $x(y + 2) + 2(y + 2)$; b) $3(z + 5) + z(z + 5)$;
c) $a(t - 2) - 3(t - 2)$; d) $c(p - q) + (p - q)$;
e) $2x(3x + 1) + 3x + 1$; f) $a^2(a - b) + b^2(a - b)$;
g) $3x(x + 1) - x - 1$; h) $2s(s + 3) - s - 3$.

268. Napište jednodušeji:
a) $(3p - 5q)(5q - 3p)$; b) $3(a - b) + (b - a)$;
c) $a(x - 3) + a(3 - x)$;
d) $(h - k)(x - y) + 2(k - h)(y - x)$.

269. Rozložte na součin dvou činitelů:
a) $3x(y - 2) + 2 - y$; b) $5(1 - z) + t(z - 1)$;
c) $a(a^2 - b^2) + 3b(b^2 - a^2)$; d) $c^2(p - q) + (q - p)$;
e) $2c(3 - r) + 2r - 6$; c) $8 - 4s + 3(s - 2)$.

33. Dělení mnohočlenů. Při násobení dvou mnohočlenů s jediným písmenem je výhodné uspořádati si oba mnohočleny sestupně (nebo oba vzestupně) a psáti stejnojmenné součiny pod sebe. Na př.

$$\begin{array}{rrrrr}
\multicolumn{5}{l}{(3x^2 + x + 2)(2x^2 - 3x - 4)} \\
\hline
6x^4 & + 2x^3 & + 4x^2 & & \\
 & - 9x^3 & - 3x^2 & - 6x & \\
 & & - 12x^2 & - 4x & - 8 \\
\hline
6x^4 & - 7x^3 & - 11x^2 & - 10x & - 8
\end{array}
\quad \text{nebo} \quad
\begin{array}{rrrrr}
\multicolumn{5}{l}{(2 + x + 3x^2)(-4 - 3x + 2x^2)} \\
\hline
-8 & - 4x & - 12x^2 & & \\
 & - 6x & - 3x^2 & - 9x^3 & \\
 & & 4x^2 & + 2x^3 & + 6x^4 \\
\hline
-8 & - 10x & - 11x^2 & - 7x^3 & + 6x^4
\end{array}$$

270. a) $(3x^3 - x^2 + 5x - 2)(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3)$;
b) $(a^4 - 2a^2 + 3a - 5)(a^2 - 3a - 2)$;
c) $(p^3 - 3p + 6)(p^2 - 2p + 7)$;
d) $(1 - 2r + r^2)(1 - 2r + r^3)$;
e) $(3 - 4s + 5s^2 - 2s^3)(3s^3 - 4s^2 + 5s - 2)$;
f) $(3u^3 + 4u^2v - 5uv^2 + v^3)(3u^3 - 4u^2v - 5uv^2 + v^3)$;
g) $(y^4 - 5y^2z^2 + 2yz^3 - z^4)(z^4 + 5y^2z^2 - 2y^3z - y^4)$.

Obrácením našeho postupu dojdeme k postupu vhodnému při dělení mnohočlenu. Na př.

$$
\begin{array}{rl}
(6x^4 - 7x^3 - 11x^2 - 10x - 8) : (3x^2 + x + 2) = 2x^2 - 3x - 4 & \\
-6x^4 \pm 2x^3 \pm 4x^2 & \\
\hline
-9x^3 - 15x^2 - 10x & \\
\mp 9x^3 \mp 3x^2 \mp 6x & \\
\hline
-12x^2 - 4x - 8 & \\
\mp 12x^2 \mp 4x \mp 8 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Popis. Dělence i dělitele napíšeme třeba sestupně. Nejvyšší člen dělence dělíme nejvyšším členem dělitele, čímž dostaneme první člen podílu. Tímto členem násobíme dělitele a součin odečteme od dělence. Nejvyšší člen rozdílu dělíme nejvyšším členem dělitele, čímž dostaneme druhý člen podílu. Tímto zase násobíme dělitele, odečteme a pokračujeme postupně dále. Postupně také připisujeme jednotlivé členy dělence podobně jako při dělení dekadických čísel. **Zkoušku správnosti** provádíme obyčejně dosazováním jednoduše volených čísel zvláštních.

Jakmile propočtením prvních příkladů nabudeme dostatečné zběhlosti, zapisujeme stručněji:

$$
\begin{array}{l}
(6x^4 - 7x^3 - 11x^2 - 10x - 8) : (3x^2 + x + 2) = 2x^2 - 3x - 4 \\
\quad -9x^3 - 15x^2 - 10x \\
\qquad -12x^2 - 4x - 8 \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

271. a) $(x^3 + x^2 - 5x - 6) : (x + 2)$;
b) $(6y^3 + 5y^2 - 3y - 2) : (3y - 2)$;
c) $(2z^3 - 5z^2 + z + 2) : (z - 1)$;
d) $(6p^3 + p^2 - 9p - 4) : (2p + 1)$;
e) $(a^3 - b^3) : (a - b)$;
f) $(r^3 - 3r^2s + 3rs^2 - s^3) : (r - s)$;
g) $(u^3 + 8v^3) : (u + 2v)$;
h) $(c^4 - 3c^3d + 2d^4) : (c - d)$;
i) $(3 + 11t + 8t^2 - t^3 - t^4) : (3 + 2t - t^2)$;
j) $(10x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 13x - 6) : (2x^2 + 3x + 2)$;
k) $(6 + a - 16a^2 + 8a^4) : (3 + 2a - 4a^2)$;
l) $(6p^4 + 15p^3q - 17p^2q^2 - 20pq^3 + 12q^4) : (2p^2 + 5pq - 3q^2)$;
m) $(10 - c + 13c^2 - 14c^3 + 2c^4) : (5 - 3c - 2c^2)$;
n) $(x^4 + x^2z^2 + z^4) : (x^2 - xz + z^2)$;
o) $(u^6 + v^6) : (u^2 + v^2)$;
p) $(n + 8n^4) : (1 - 2n + 4n^2)$;
q) $(m^4 - m) : (m^2 + m + 1)$.

Nedojdeme-li ke zbytku nula, zakončíme dělitele zlomkem naznačujícím dělení, které by se ještě mělo provésti. Na př.

$$(3x^3 - 5x^2 - 14x + 4) : (x + 3) = 3x^2 - 4x - 2 + \frac{10}{x + 3}$$
$$- 4x^2 - 14x$$
$$- 2x + 4$$
$$10$$

272. a) $(3y^3 + 4y^2 - 17y - 9) : (y + 3)$;
b) $(8z^3 + 14z^2 - 23z - 6) : (4z - 3)$;
c) $(10t^4 - t^3 + 13t^2 - 14t + 2) : (5t^2 - 3t - 2)$.