Eduard Čech
Geometrie pro I.-III. třídu středních škol

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1943, 160 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501338

EDUARD ČECH

GEOMETRIE

PRO I.-III. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

UČEBNICE 153

CENA VÁZ. VÝT. K 30,–

UČEBNICE A POMOCNÉ KNIHY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKÝCH. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
153

GEOMETRIE

PRO I.-III. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

Napsal

EDUARD ČECH

Se 266 obrazci a 2 tabulkami

Schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 5. února 1943, čís. 11 172/43-II/2, jako učebnice pro střední školy s českým jazykem vyučovacím

CENA VÁZ. VÝTISKU 30,— K

PRAG-PRAHA 1943

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“, PRAG-PRAHA VIII-94

Část prvá (pro I. třídu).

§ 1. Základní geometrické výrazy.

Všimněme si určitého předmětu, třeba kostky cukru! Bílá barva kostky, její sladká chuť, její váha a podobně, to vše není předmětem geometrie. Pouze **tvar** kostky, její **velikost** a její **poloha** patří mezi věci, které studujeme v geometrii.

Velká řada předmětů má podobný tvar jako kostka cukru: krabice, bedny, cihly atd. Předměty takového tvaru mají v geometrii název **kvádr**. V této učebnici obr. 6 na str. 14 představuje kvádr ve třech různých polohách. Protože se v geometrii nezajímáme o látku, ze které je předmět vyroben, ani o jeho barvu, váhu atd., užíváme v geometrii místo slova předmět raději jiného slova, a to slova **těleso**. Tedy těleso je předmět, u kterého se nezajímáme o nic jiného nežli jaké místo zaujímá v prostoru.

Každé těleso má **vnitřek** a **povrch**. Všimněme si blíže povrchu kvádru! Vaše třída má tvar kvádru. Povrch tohoto kvádru, neboli okraj té části prostoru, který třída zaujímá, skládá se ze čtyř stěn, z podlahy a ze stropu. Ale v geometrii dáváme slovu **stěna** širší význam a počítáme také podlahu a strop mezi stěny, takže v tomto geometrickém smyslu má třída šest stěn. Obecně pravíme v geometrii o každém kvádru, že má šest stěn.

Dvě sousední stěny kvádru se sbíhají v **hraně**. Pozorujte třeba třídu jako příklad kvádru a spočítejte, kolik má kvádr hran! Tři sousední stěny kvádru se sbíhají ve **vrcholu**. Kolik vrcholů má kvádr?

Myslíme-li si vrchol kvádru sám o sobě a odmyslíme-li si ostatek krychle, pak pravíme, že je to **bod**. Podobně každé jiné určité místo na kvádru, ať již na povrchu či uvnitř, je bod. Bod je nejjednodušší prvek v geometrii, nemá žádnou velikost, jen určitou polohu; je to pouhé místečko v prostoru.

Pohybem bodu vznikne **čára**. Příkladem čáry je každá hrana kvádru. Je to čára přímá, na obě strany omezená. Taková čára se v geometrii nazývá **úsečka**. Úsečka má dva **krajní body**; u hrany kvádru jsou to dva vrcholy kvádru. Myslíme-li si hranu kvádru prodlouženu na obě strany neomezeně, vznikne nám neomezená přímá čára, která se v geometrii nazývá **přímka**: Mezi slovy přímka a úsečka musíte dobře rozlišovat.

Jsou také křivé čáry. Z nich je nejdůležitější **kružnice** (viz na př. obr. 61 na str. 49). Tvar kružnice má na př. horní okraj sklenice. Jmenujte jiné praktické příklady!

Abychom mohli o bodech pohodlně mluviti, označujeme si v každém obrazci význačné body písmeny, a to velkými tiskacími písmeny. Každé písmeno, které značí bod, pište těsně k tomu bodu, ke kterému patří. V témž obrazci musí býti ovšem každý bod označen jiným písmenem. Dbejte na to, aby písmena označující body byla velmi zřetelná. Pouze úpravný obrazec je přehledný! Úsečku jmenujeme obyčejně tak, že řekneme za sebou oba její krajní body (v libovolném pořádku). Na př. úsečku, jejíž krajní body mají názvy A a B, nazýváme úsečkou AB nebo úsečkou BA.

Pohybem čáry vznikne **plocha**. Příkladem plochy je každá stěna kvádru. Plocha, která má takový tvar jako stěna kvádru, jmenuje se **obdélník**. Obdélník je omezen čtyřmi úsečkami; říkáme, že tyto čtyři úsečky tvoří **obvod** obdélníka. Jednotlivé úsečky, z nichž se skládá obvod obdélníka, jmenují se jeho **strany**. Tedy pozor: u tělesa mluvíme o hranách, ale u plochy mluvíme o stranách. Dvě sousední strany obdélníka se sbíhají ve vrcholu. (Tedy zde máme totéž slovo pro plochy jako pro tělesa.)

Obr. 7 na str. 17 představuje obdélník. Jeho vrcholy jsou označeny písmeny. Mluvíme-li o obdélníku, jmenujeme jeden po druhém všecky čtyři jeho vrcholy; začneme libovolným z nich, potom jmenujeme kterýkoli z obou sousedních a pak jmenujeme zbývající dva v tom pořádku, jak jdou za sebou na obvodě. Na př. obdélník z uvedeného obrazce, chceme-li začíti třeba vrcholem B, nazveme buďto obdélníkem $BADC$ nebo obdélníkem $BCDA$.

Jiný důležitý příklad plochy je **trojúhelník**. Obvod trojúhelníka se skládá ze tří úseček, které se zase jmenují jeho strany; dvě sousední strany zase se sbíhají ve vrcholu. V obr. 59 na str. 47 vidíte dva trojúhelníky; můžeme jeden pojmenovat trojúhelník ABC a druhý trojúhelník BCD. Oba ty trojúhelníky dohromady tvoří **čtyrúhelník**, který má čtyři vrcholy a čtyři strany. Čtyrúhelník v obr. 59 můžeme nazvati třeba čtyrúhelník $ABDC$; o pořádku vrcholů platí totéž, co už bylo řečeno o obdélníku. V témž obrazci je narýsována úsečka BC, jejíž krajní body jsou vrcholy čtyrúhelníka $ABDC$, ale ne sousední vrcholy; říkáme, že je to **úhlopříčka** čtyrúhelníka. Druhá úhlopříčka AD není v obr. 59 vyznačena.

Obdélník patří mezi čtyrúhelníky, ale každý čtyrúhelník není obdélníkem. U obdélníka dvě sousední strany vždycky **stojí na sobě kolmo** neboli jak se také říká, tvoří **pravý úhel**.

U trojúhelníka mohou dvě strany státi na sobě kolmo; takový trojúhelník se jmenuje **pravoúhlý**. Ty dvě strany, které tvoří pravý úhel, jmenují se **odvěsny** pravoúhlého trojúhelníka; třetí strana je **přepona** pravoúhlého trojúhelníka. Viz obr. 78 na str. 59.

V tomto paragrafu jste poznali řadu důležitých geometrických výrazů a postupně se budete i v dalších paragrafech seznamovati s novými výrazy, kterých se musíte naučit správně užívat. Abyste měli dobrý přehled výrazů, které již znáte, pořiďte si malý sešitek, do kterého budete probrané výrazy postupně zapisovat. Budeme mu krátce říkati slovníček. Každý výraz si zapište do slovníčka perem; kde je to účelné, připojte na vysvětlenou malý obrázek tužkou a od ruky (bez nástrojů). Jednotlivé výrazy oddělujte zřetelnými mezerami.

Cvičení k § 1.

1. Zapište do slovníčka: Tvar, velikost, poloha. Těleso, kvádr. Vnitřek a povrch tělesa. Stěny, hrany a vrcholy kvádru. Bod. Čára. Přímka a úsečka; krajní body úsečky. Kružnice. Plocha. Obdélník, jeho obvod, strany a vrcholy. Trojúhelník, jeho obvod, strany a vrcholy. Čtyrúhelník, jeho obvod, strany, vrcholy a úhlopříčky. Pravoúhlý trojúhelník, jeho odvěsny a přepona.

2. Jmenujte vrcholy, strany a úhlopříčky obdélníka z obr. 7 na str. 17!

3. Jmenujte všecky trojúhelníky, které vidíte v obr. 57 na str. 45!

4. Které čtyrúhelníky vidíte v obr. 57 na str. 45? Zapište každý z nich všemi přípustnými pořádky vrcholů!

5. Jmenujte všecky viditelné stěny kvádru v obr. 6a, 6b, 6c na str. 14!

6. Zapište nejprve všecky hrany, potom všecky stěny kvádru znázorněného v obr. 9 na str. 18!

§ 2. Délka úsečky.

Dva body A a B můžeme spojit mnoha křivými čarami, ale jen jedinou úsečkou. Tato úsečka je kratší nežli kterákoli z oněch křivých čar. Její **délku** značíme $\overline{AB}$ nebo $\overline{BA}$; jinak jí také říkáme **vzdálenost** bodů A a B neboli vzdálenost bodu A od bodu B nebo bodu B od bodu A.

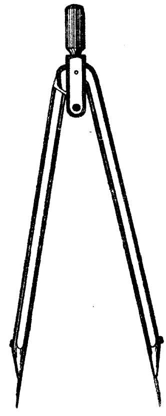
Délku úsečky narýsované v sešitě vyjadřujeme v centimetrech nebo milimetrech, délku úsečky narýsované na tabuli vyjadřujeme v decimetrech nebo v centimetrech. Určíme ji měřítkem, které bývá na většině pravítek; také můžeme užívati papírového měřítka.

Při rýsování přímek užíváme pravítka, které pevně přidržíme levou rukou. Pravou rukou rýsujeme přímku; netlačte příliš na tužku, aby čáry nebyly do papíru vyryty.

Chceme-li si na narýsované přímce vytknouti určitý bod, přetneme přímku kratičkou úsečkou. Chceme-li si vytknouti určitý bod, který není na žádné již narýsované přímce, narýsujeme si křížek, t. j. dvě kratičké úsečky; bod, který máme na mysli, je ovšem ten bod, který je společný oběma úsečkám, ze kterých se křížek skládá. Viz obr. 52a na str. 42, ve kterém je poloha bodů A, B a C lépe a zřetelněji vyznačena nežli v obr. 52b.

Často se vyskytuje úloha, **nanésti** na danou (t. j. již narýsovanou) přímku od jednoho daného bodu úsečku, jejíž délka (v cm nebo mm) je předepsána. Takové úsečky jsou ovšem dvě. Jeden krajní bod je dán, druhý se právě má určiti. Obdržíme jej tak, že k dané přímce přiložíme měřítko buďto tak, že jeho počátek se kryje s daným krajním bodem, vyčteme z měřítka polohu druhého krajního bodu, kterou si vyznačíme krátkou příčnou úsečkou; nebo obráceně přiložíme měřítko tak, aby se daný krajní bod kryl s tím dílkem měřítka, který odpovídá předepsané délce, kdežto druhý krajní bod se bude krýti s počátkem měřítka. Kterého z obou způsobů užijeme, to záleží na tom, na kterou stranu dané přímky od daného bodu máme úsečku nanést, neboť měřítko přikládáme obyčejně zdola.

K nanášení úsečky předepsané délky můžeme také užívat odpichovátka (viz obr. 1). Potřebné rozevření odpichovátka si najdeme podle měřítka; ale není radno přikládati stále jeden hrot k počátku měřítka, protože by nám odpichovátko tento bod propíchalo tak, že bychom nemohli jeho polohu zřetelně rozeznat. Raději přiložíme jeden hrot odpichovátka k nějakému jinému dílku měřítka (pokaždé k jinému) a vypočteme si, ke kterému dílku je třeba přiložiti druhý hrot. Odpichovátka můžeme také obráceně užívat ke změření délky úseček. K těmto účelům je odpichovátko vhodnější nežli kružítko. Proč? Odpichovátko je velmi výhodné zejména, má-li se úsečka dané délky nanésti na danou přímku několikrát za sebou.



Obr. 1.

Odpichovátka můžeme vhodně užíti také k **přenášení** úsečky, t. j. k nanesení úsečky, jejíž délka není dána číselně, nýbrž má býti stejná jako délka určité úsečky, která je již narýsována. Místo odpichovátka můžeme k přenášení úsečky užíti také proužku papíru. Ten přiložíme napřed k úsečce již narýsované a vyznačíme si tužkou polohu jejích krajních bodů na proužku; potom přiložíme proužek ke přímce, na kterou máme úsečku přenést; jeden z obou bodů na proužku vyznačených se ovšem kryje s bodem, od kterého máme úsečku nanášet a druhý s tím, jehož polohu jsme měli určit. Při tom vlastně mnoho nezáleží na tom, zdali proužek papíru, kterého užíváme, je přímý. Ale můžeme si snadno opatřiti přesně přímý proužek tím, že kus papíru ostře přehneme. Přímého proužku je třeba, chceme-li rychle přenésti několik úseček s jedné přímky na druhou.

Často se také vyskytuje úloha **rozpůliti** danou úsečku neboli, jak se také říká, najíti její **střed**. Máme-li úsečku HK rozpůlit, můžeme to provésti takto (viz obr. 65 na str. 51). Nejprve ji rozpůlíme zkusmo, t. j. vytkneme si na ní ten bod M, o kterém se nám zdá, že je asi uprostřed. Může se státi, že se nám to povede, t. j. že bod M je s dostatečnou přesností uprostřed. Nestane-li se to, nýbrž přesvědčíme-li se třeba, že bod M je blíže k bodu H nežli k bodu K, určíme si na dané úsečce HK (odpichovátkem nebo proužkem papíru) ten bod N, pro který platí, že

$$\overline{HM} = \overline{NK}.$$

Potom rozpůlíme od oka úsečku MN a její střed S je už hledaným středem úsečky HK. Úsečka MN je kratičká a je proto snadné rozpůliti ji od oka s dostatečnou přesností. Při provedení si polohu bodů M a N vyznačíme velmi tence a také je ovšem neoznačujeme žádnými písmeny.

Ve vyšších třídách se naučíte, jak lze úsečku rozpůliti pomocí geometrických nástrojů docela přesně.

Cvičení k § 2.

7. Zapište do slovníčka: Délka $\overline{AB}$ úsečky AB. Vzdálenost dvou bodů. Nanésti úsečku dané délky na danou přímku od daného bodu. Přenésti danou úsečku na danou přímku od daného bodu. Rozpůliti úsečku; střed úsečky.

8. Narýsujte si přímku, zvolte si na ní bod A a určete na přímce tři další body B, C, D tak, aby bylo

$$\overline{AB} = 36 \text{ mm}, \quad \overline{BC} = 28 \text{ mm}, \quad \overline{CD} = 26 \text{ mm}.$$

Jak dlouhá musí vyjíti úsečka $\overline{AD}$? Vypočtěte si to a teprve potom ji přeměřte.

9. Všimněte si trojúhelníka ABC v učebnici v obr. 59 na str. 47. Odhadněte, která strana je nejdelší a která je nejkratší. Potom se přesvědčte měřením, zdali váš odhad byl správný.

10. V obr. 59 na str. 47 změřte nejprve vzdálenosti $\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GC}$, potom vzdálenosti $\overline{DF}, \overline{DG}, \overline{CE}, \overline{EG}$.

11. Zvolte si úsečku a přeneste ji na jednu přímku pomocí odpichovátka, na druhou pomocí proužku papíru. Změřte obě přenesené úsečky.

12. Cvičte se v půlení úseček.

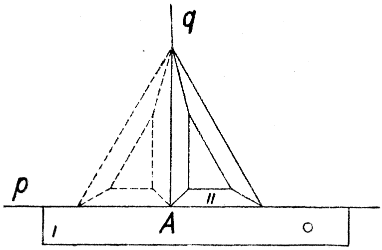
§ 3. Kolmice a rovnoběžky.

Nejprve několik nových geometrických výrazů! Říkáme, že bod **leží** na přímce a že přímka **prochází** bodem. Leží-li bod A na dvou přímkách, říkáme, že se ty přímky v bodě A **protínají** nebo že A je jejich **průsečík**.

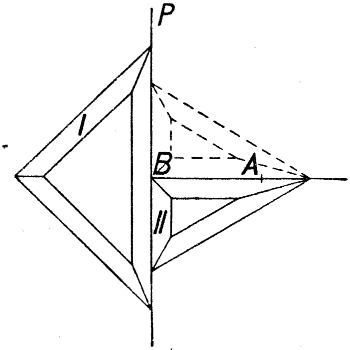
Dvěma body prochází jenom jediná přímka. Proto říkáme, že přímka je určena dvěma body; slovem určena právě naznačujeme, že není možné, aby dvě různé přímky procházely obě týmiž dvěma body. Přímka procházející dvěma body A a B se jmenuje **spojnice** těchto dvou bodů, krátce také říkáme, že je to přímka AB (nebo přímka BA). Někdy také označujeme přímku jediným písmenem, a to vždy písmenem malé abecedy. Toto písmeno je vhodné psáti při okraji narýsované části přímky, protože tak nejsnáze poznáme, ke které přímce písmeno patří.

Pro geometrii je výhodné pravítko trojúhelníkové. Má vždy tvar pravoúhlého trojúhelníka. Obyčejně kupujeme dvě taková pravítka; u jednoho jsou obě odvěsny stejně dlouhé, u druhého je kratší odvěsna tak dlouhá jako polovina přepony. Přepona prvého ať je dlouhá asi 2 dm, u druhého asi 3 dm.

Budiž dána přímka p a bod A. Důležitá je úloha sestrojiti přímku q, která stojí kolmo na přímce p (krátce se říká **kolmici** ke přímce p) tak, aby procházela bodem A. Při tom může bod A ležeti na přímce p, ale nemusí. Leží-li bod A na přímce p, říkáme, že **vztyčujeme** kolmici,



Obr. 2.



Obr. 3.

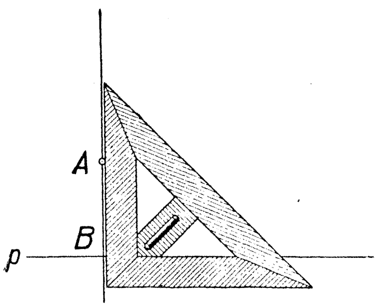
neleží-li bod A na přímce p, říkáme, že **spouštíme** kolmici. Při provedení těchto úloh užíváme dvou pravítek; jedno (v obr. označené I) nemusí býti trojúhelníkové, druhé (v obr. označené II) musí. Pravítko II můžeme přiložiti dvojím způsobem; v obrazcích je jedna poloha pravítka II naznačena plně, druhá čárkovaně. Vše bližší je patrné z obr. 2 (vztyčení kolmice) a z obr. 3 (spouštění kolmice). Jak se rýsují kolmice na tabuli, je viděti na obr. 4.

Vztyčíme-li k přímce p v bodě A kolmici dvojím způsobem, t. j. přiložíme-li trojúhelníkové pravítko nejprve s jedné strany, potom s druhé, musí obě kolmice splynout. Tím zkoušíme, zdali máme na pravítku přesný pravý úhel. Aspoň jedno z vašich dvou trojúhelníkových pravítek musí míti přesný pravý úhel.

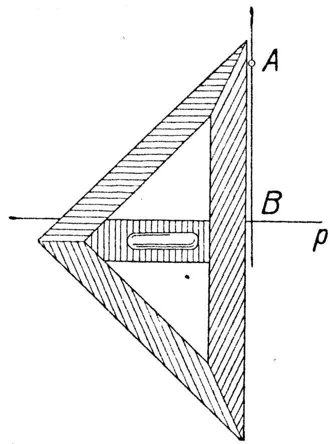
V obr. 3 protne kolmice přímku p v bodě B; tomuto bodu se říká **pata** kolmice. Ze všech bodů přímky p je B nejblíž k bodu A; přesvědčte se proužkem papíru! Proto se délce $\overline{AB}$ říká **vzdálenost bodu A od přímky p.**

Prodloužíme-li si dvě protější strany obdélníka, dostaneme dvě přímky, které jsou všude od sebe stejně vzdáleny a nikde se neprotnou. Takové dvě přímky se jmenují **rovnoběžné přímky** neboli krátce **rovnoběžky.**

Daným bodem B můžeme vždy vésti jedinou rovnoběžku s danou přímkou a. Sestrojíme ji zase pomocí dvou pravítek, z nichž aspoň jedno je trojúhelníkové. Provedení je patrné z obr. 86 na str. 63 nebo z obr. 87 na str. 64.



Obr. 4*a*.



Obr. 4*b*.

Vzdálenost dvou rovnoběžek měříme na kterékoli společné kolmici. Máme-li sestrojiti k dané přímce p rovnoběžku ve vzdálenosti třeba 3 cm, zvolíme si na přímce p libovolný bod A, vztyčíme v něm k přímce p kolmici a na ní naneseme od bodu A (na jednu nebo na druhou stranu) délku $\overline{AB} = 3$ cm. Bodem B prochází žádaná rovnoběžka.

Máme-li na tabuli vésti bodem B rovnoběžku s přímkou a, spustíme nejprve s bodu B na přímku a kolmici b a potom vztyčíme v bodě B kolmici c na přímku b. Přímka c je žádaná rovnoběžka.

Pro kolmost a rovnoběžnost se někdy užívá značek. $AB \perp AC$ znamená, že přímky AB a AC stojí na sobě kolmo. $EF \parallel GH$ znamená, že přímky EF a GH jsou rovnoběžky.

Cvičení k § 3.

13. Zapište do slovníčka: Bod leží na přímce. Přímka prochází bodem. Dvě přímky se protínají v bodě; průsečík dvou přímek. Spojnice dvou bodů. Kolmice. Vztyčiti kolmici v bodě; spustiti kolmici s bodu. Pata kolmice. Vzdálenost bodu od přímky. Rovnoběžné přímky neboli rovnoběžky. Vzdálenost dvou rovnoběžek.

14. Narýsujte si do sešitu čtyři přímky tak, aby se každé dvě z nich v sešitě protaly. (Celkem budete míti šest průsečíků.) Označte si písmeny všecky čtyři přímky a všech šest průsečíků. Je z vašeho obrazce jasně vidět, kam které písmeno patří?

15. Zvolte si na přímce p dva body A a B a vztyčte v nich kolmice ke přímce p. Přesvědčte se dvěma pravítky, že vaše kolmice jsou mezi sebou rovnoběžné.

16. Zvolte si přímku p a mimo ni dva body A a B. Spusťte s nich kolmice na přímku p. Zase se přesvědčte, že jsou obě rovnoběžné.

17. Zvolte si přímku p a mimo ni bod A. Bodem A veďte rovnoběžku s přímkou p.

18. Zvolte si přímku p. Veďte obě rovnoběžky s přímkou p ve vzdálenosti 27 mm.

§ 4. Kružnice.

V obr. 61 (str. 49) vidíte kružnici označenou písmenem k. (Také kružnice značíme malými písmeny.) Bod označený písmenem S je její střed. Úsečky spojující střed S s jednotlivými body kružnice k se jmenují **poloměry** kružnice k. Také společná délka všech poloměrů se obyčejně nazývá krátce poloměr.

V obr. 74 na str. 56 vidíte dva poloměry AP, AQ kružnice h. Tyto dva poloměry leží oba v jediné přímce a proto tvoří dohromady úsečku, která se jmenuje **průměr** kružnice. Zase jsou všecky průměry kružnice stejně dlouhé a jejich společná délka se obyčejně nazývá krátce průměr. Je patrné, že průměr je dvojnásobek poloměru.

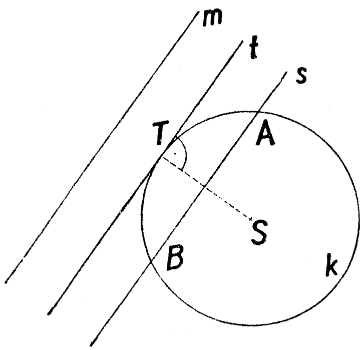
Dvěma body se kružnice rozdělí na dvě části, které se jmenují **oblouky**.

Kružnici rýsujeme kružítkem. Než začneme kružnici rýsovati, vyznačíme si její střed křížkem (nebyl-li již předem dán) a popíšeme jej nějakým písmenem (často se volí písmeno S). Aby byla kružnice určena, potřebujeme znáti mimo její střed ještě buďto délku poloměru nebo nějaký bod A na kružnici. Při rýsování kružnice je třeba dbáti toho, aby ve středu S kovový hrot nevnikal hluboko do papíru.

Je-li kružnice určena průměrem AB, musíme napřed úsečku AB rozpůliti, abychom dostali střed kružnice.

Kružnice je čára; plocha, která je kružnicí omezena, jmenuje se v geometrii **kruh**; kružnice je obvod kruhu. (Již dříve jsme mluvili o obvodě; u čeho?)

V obr. 5 vidíme kružnici k se středem S a tři přímky m, s a t. Vzdálenost přímky m od středu S kružnice k je větší než poloměr této kružnice; taková přímka nemá s kružnicí žádný společný bod. Vzdálenost přímky s od středu S kružnice k je menší než poloměr; taková přímka se jmenuje **sečna** kružnice. Každá sečna protíná kružnici ve dvou bodech. Vzdálenost přímky t od středu S kružnice k je rovna poloměru; taková přímka se jmenuje **tečna** kružnice. O tečně neříkáme, že kružnici protíná, nýbrž pravíme, že se kružnice **dotýká**. Bod T, ve kterém se tečna t dotýká kružnice k, jmenuje se **bod dotyku.** Poloměr AT stojí kolmo na tečně.



Obr. 5.

Dvě kružnice buďto nemají žádný bod společný, nebo se protínají ve dvou bodech, jako na př. kružnice v obr. 71 na str. 53 nebo se dotýkají v jednom bodě, jako na př. kružnice v obr. 70 na str. 52.

Kružítka užíváme při řešení důležité úlohy, sestrojiti trojúhelník, u kterého známe délky všech tří stran. Zatím se omezíme na ten případ, kdy všecky tři strany jsou stejně dlouhé; takový trojúhelník se jmenuje **rovnostranný**. Máme-li na př. sestrojiti rovnostranný trojúhelník s délkou strany 3 cm, narýsujeme si napřed úsečku AB tak, aby bylo $\overline{AB} = 3$ cm. Potom sestrojíme kružnici h se středem A procházející bodem B a kružnici k se středem B procházející bodem A. Obě kružnice h a k se protnou ve dvou bodech C a D. Oba trojúhelníky ABC i ABD vyhovují úloze. Vystřihněte si je a přesvědčte se, že lze položiti jeden na druhý tak, aby se přesně kryly.

Cvičení k § 4.

19. Zapište do slovníčka: Poloměr kružnice; průměr kružnice. Oblouk. Kružnice a kruh; obvod kružnice. Sečna kružnice; sečna protíná kružnici. Tečna kružnice; tečna se dotýká kružnice; bod dotyku. Dvě kružnice se mohou protínati ve dvou bodech. Dvě kružnice se mohou dotýkati v jednom bodě. Rovnostranný trojúhelník.

20. Sestrojte kružnici k se středem S a s poloměrem 36 mm. Sestrojte dva k sobě kolmé průměry AB a CD kružnice k. Sestrojte kružnice procházející bodem S, které mají středy v bodech A, B, C, D.

21. Sestrojte si pravoúhlý trojúhelník EFG s přeponou EF. Sestrojte kružnici s průměrem EF. Prochází vám tato kružnice bodem G?

22. Ke kružnici s poloměrem 45 mm sestrojte sečnu ve vzdálenosti 23 mm od středu. Změřte vzdálenost obou průsečíků sečny s kružnicí a porovnejte s poloměrem kružnice.

23. Na kružnici si zvolte tři body a sestrojte v nich tečny. (Jsou to kolmice vztyčené k poloměru v bodě dotyku.)

24. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC. Dále sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABD, BCE, CDF, z nichž každý má jednu stranu společnou s trojúhelníkem ABC. Všecky čtyři rovnostranné trojúhelníky vám dají dohromady nový rovnostranný trojúhelník.

§ 5. Kvádr.

Každý předmět, který vidíte ve škole, doma nebo venku, zaujímá určitou část **prostoru.** V geometrii nás nezajímá ani látka, ze které je předmět vyroben, ani jeho váha, teplota, barva a podobně. V geometrii soustřeďujeme pozornost pouze na část prostoru, kterou ten předmět zaujímá. Když máme na mysli pouze geometrické vlastnosti předmětu, nazýváme jej **tělesem** (viz § 1).

Většina těles má složitý a nepravidelný tvar. Ale jsou některá zvláště jednoduchá tělesa, která musíme poznat a umět pojmenovat a popsat. V tomto paragrafu budeme probírat jenom nejjednodušší a nejčastěji se vyskytující tvar: z §u 1 již známý **kvádr.** Budeme jej ze začátku popisovat užívajíce školního dřevěného **modelu.** Musíte se s kvádrem dobře seznámit, abyste později dovedli odpovídat na jednoduché otázky i když nebudete mít model před sebou a budete odkázáni jen na vlastní představu.

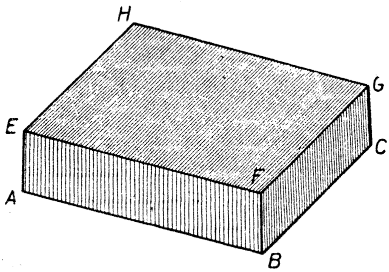
Obr. 6 představuje týž kvádr ve třech různých polohách.

Každé těleso má **vnitřek** a **povrch.** Dovnitř dřevěného modelu nevidíme. Ani povrch nevidíme nikdy celý najednou. Musíme měnit polohu kvádru (nebo svou vlastní polohu), abychom přehlédli celý povrch.

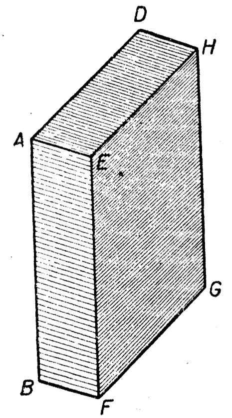
Povrch kvádru se skládá ze šesti jednoduchých ploch tvaru **obdélníka.** Slovo obdélník už máme ve slovníčku. Jsou to **stěny** kvádru.

Když model kvádru položíme třeba na stůl, pak ta stěna, na které kvádr spočívá, jmenuje se **dolní podstava** kvádru a protější stěna se jmenuje **horní podstava** kvádru. Obě podstavy jsou docela stejné obdélníky. Ostatní čtyři stěny se pak jmenují **poboční** stěny. Máme tedy dvě podstavy a čtyři poboční stěny, celkem šest stěn.

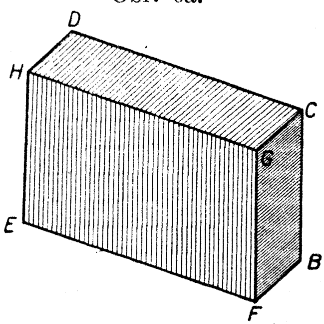
Hrany kvádru jsou úsečky. Dolní podstava má čtyři hrany, horní podstava má další čtyři hrany, a pak jsou ještě čtyři **poboční hrany.** Celkem má kvádr dvanáct hran.



Obr. 6a.



Obr. 6b.



Obr. 6c.

Vrcholy kvádru jsou body. Dolní podstava má čtyři vrcholy, horní podstava také čtyři. Celkem má kvádr osm vrcholů.

Upoutejme pozornost na jednu stěnu kvádru. Zvolíme-li si na ní kdekoli dva body a spojíme-li je úsečkou, vždycky leží celá ta úsečka v pozorované ploše. Zkoušejme to pravítkem.

Nyní si všecky úsečky, o nichž jsme právě mluvili, mysleme neomezeně prodlouženy. Vzniknou z nich přímky, které vyplní plochu ve všech směrech neomezenou. Taková plocha se jmenuje **rovina.** Dobrý obraz roviny nám dává klidná hladina vodní v rybníce.

Dobře si pamatujte **základní vlastnost roviny:**

Zvolíme-li si v ní libovolné dva body a spojíme je přímkou, leží celá ta spojnice v rovině. Takovou vlastnost nemá žádná jiná plocha, jenom právě rovina.

Plocha, která se dá rozšířit v rovinu, se jmenuje **rovná** nebo **rovinná.** Každá jiná plocha se jmenuje **zakřivená.** Pamatujte: čára je přímá nebo křivá, plocha je rovná nebo zakřivená.

Cvičení k § 5.

25. Zapište do slovníčka: Kvádr má šest stěn. Kvádr má osm vrcholů. Kvádr má dvanáct hran. Kvádr je těleso. Rovina. Rovná plocha a zakřivená plocha.

Vaše třída má tvar kvádru. Tento kvádr mějte na mysli při úlohách 26 až 35. Zopakujte si ty úlohy doma s jiným kvádrem, třeba s krabicí od bot.

26. Ukažte jeden vrchol kvádru. Kolik stěn z něho vychází? Ukažte je. Má kvádr nějaký vrchol, který neleží na žádné z těch stěn? Ukažte.

27. Opakujte úlohu 26 znova, ale teď začněte tím vrcholem, kterým jste prve skončili.

28. Ukažte jeden vrchol kvádru. (Teď ukážete nějaký jiný, než kterým jste začali v úlohách 26 a 27.) Kolik hran z něho vychází? Ukažte je. Kolik je hran, které neprotnou žádnou z ukázaných hran? Ukažte je. Odkud vycházejí?

29. Opakujte úlohu 28 znova, ale začněte nějakým vrcholem, kterým jste dosud ani nezačali ani neskončili. Kolik je takových vrcholů?

30. Ukažte jednu hranu kvádru. Ukažte stěny, které z ní vycházejí. Má kvádr nějakou hranu, která je celá (i se svými vrcholy) mimo každou z ukázaných stěn? Ukažte.

31. Ukažte znovu obě hrany z úlohy 30: tu, kterou jste začali i tu, kterou jste skončili. Probírejte jednotlivé stěny kvádru a všímejte si u každé stěny, v jaké je poloze k těm dvěma hranám. Rozdělí se vám stěny ve tři skupiny po dvou stěnách?

32. Ty dvě hrany, kterými jste začali v úloze 31, nejsou obě ve stejné stěně, ale jsou mezi sebou rovnoběžné. Umíte ukázat jiný příklad takových dvou hran? Kolik je celkem takových párů hran?

33. Ukažte jednu stěnu kvádru. Ukazujte ty další stěny, které první stěnu protnou. Zbývá ještě nějaká stěna?

34. Ukažte jednu stěnu kvádru. Ukazujte ty hrany, které neleží ve zvolené stěně: napřed ty, které z té stěny vycházejí, potom ostatní.

35. Ukažte jednu hranu kvádru. Hledejte hrany, které ani s ukázanou hranou nemají společný vrchol ani s ní nejsou rovnoběžné. Kolik jich je?

V úlohách 36 až 39 doplňte ústně vynechaná čísla.

36. V jedné stěně kvádru leží ... vrcholů. Kvádr má ... stěn; to dává dohromady ... krát ..., to jest ... vrcholů. Ale kvádr má jen ... vrcholů. Kolikrát jsme tedy počítali každý vrchol? Proč?

37. Z jednoho vrcholu kvádru vychází ... stěn. Kvádr má ... vrcholů; to dává dohromady ... krát ..., to jest ... stěn. Ale kvádr má jen ... stěn. Kolikrát jsme tedy počítali každou stěnu? Proč?

38. V jedné stěně kvádru leží ... hran. Kvádr má ... stěn; to dává dohromady ... krát ..., to jest ... hran. Ale kvádr má jen ... hran. Kolikrát jsme tedy počítali každou hranu? Proč?

39. Z jednoho vrcholu kvádru vychází ... hran. Kvádr má ... vrcholů; to dává dohromady ... krát ..., to jest ... hran. Ale kvádr má jen ... hran. Kolikrát jsme tedy počítali každou hranu? Proč?

40. Sestavte sami ještě dvě úlohy podobné úlohám 36 až 39. Jedna začíná: Na jedné hraně kvádru leží ... vrcholů. Druhá začíná: Jednou hranou kvádru prochází ... stěn.

Úlohy 41 až 44 máte řešit bez modelu, dívajíce se na obr. 6. Neviditelný vrchol v obr. 6a je vrchol D. Neviditelný vrchol v obr. 6b je vrchol C. Neviditelný vrchol v obr. 6c je vrchol A.

41. Představte si, že kvádr byl přemístěn z polohy naznačené v obr. 6a do polohy naznačené v obr. 6b. Stěna $ABCD$ byla podstavná stěna a teď je to pobočná stěna. Podle tohoto vzoru mluvte o ostatních pěti stěnách.

42. Zase si představujte, že kvádr byl přemístěn z polohy v obr. 6a do polohy v obr. 6b. Hrana AB byla podstavná hrana a teď je to pobočná hrana. Podle tohoto vzoru mluvte o ostatních jedenácti hranách.

43. Opakujte úlohy 41 a 42 při přemístění z polohy v obr. 6b do polohy v obr. 6c.

44. Opakujte úlohy 41 a 42 při přemístění z polohy v obr. 6c do polohy v obr. 6a.

§ 6. Svislá a vodorovná poloha.

Držíme-li v klidu nit zatíženou závažím, pak nám nit znázorňuje **svislou přímku.** Svislé přímky jsou mezi sebou rovnoběžné. Každá rovina, ve které leží svislé přímky, se jmenuje **svislá rovina.**

Klidná hladina vodní nám znázorňuje **vodorovnou rovinu.** Každá přímka, která leží v nějaké vodorovné rovině, se jmenuje **vodorovná přímka.**

Přímka nebo rovina se jmenuje **šikmá,** když není ani vodorovná ani svislá.

Co je olovnice? Co je vodováha (libela)?

Když mluvíme o svislých a vodorovných přímkách v sešitě nebo v knize, máme na mysli určitou polohu sešitu nebo knihy. Ukažte kterou.

Postavme školní model kvádru na vodorovnou podložku. Umístěme jej tak, aby jedna pobočná stěna byla přímo před vámi. Říkáme, že kvádr je v **průčelné poloze.** Všecky čtyři pobočné hrany jsou svislé. Všecky podstavné hrany jsou vodorovné. Čtyři z nich směřují odleva doprava, ostatní čtyři směřují odpředu dozadu.

Cvičení k § 6.

45. Zapište do slovníčka: Přímky svislé, vodorovné a šikmé. Roviny svislé, vodorovné a šikmé. Průčelná poloha kvádru.

46. Jmenujte ve třídě nějaké vodorovné a svislé přímky a roviny.

47. Kousek křídy má tvar kvádru. Držte ji tak, aby jedna hrana byla vodorovná. Kolik hran musí míti vodorovnou polohu? Musí některá hrana býti svislá? Musí některá stěna býti vodorovná? Musí některá stěna býti svislá?

48. Představte si dvě svislé roviny, které se protínají v přímce. Co můžete tvrdit o této přímce?

49. Opakujte úlohu 48 s tím rozdílem, že jen jedna rovina je svislá a druhá je vodorovná.

50. Držte tužku šikmo. Můžete jí proložit vodorovnou rovinu? Můžete jí proložit svislou rovinu?

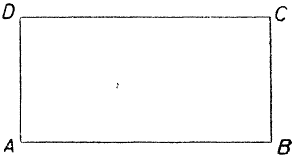
51. Rozevřete kružítko do pravého úhlu. Nejdříve držte jedno rameno svisle; musí druhé rameno býti vodorovné?

Teď držte jedno rameno vodorovně; musí druhé rameno býti svislé? Na konec držte jedno rameno šikmo; může druhé rameno býti buďto vodorovné nebo svislé?

52. Umístěme si model kvádru do průčelné polohy. Všimněme si určitého vrcholu, třeba předního horního levého vrcholu. O tomto vrcholu mohu říci: Z předního horního levého vrcholu vycházejí tři hrany; jedna vede k přednímu hornímu pravému vrcholu, druhá vede k přednímu dolnímu levému vrcholu a třetí vede k zadnímu hornímu levému vrcholu. Podle tohoto vzoru mluvte také o ostatních sedmi vrcholech.

§ 7. **Obdélník.**

Víme už, co je to **obdélník.** V obr. 7 máme obdélník $ABCD$. Obdélník má čtyři vrcholy a čtyři strany. Je to tedy čtyrúhelník, ale čtyrúhelník zvláště jednoduchého tvaru. Ta vlastnost, kterou se obdélník liší od obecného čtyrúhelníka, zní: Z každého vrcholu vycházející dvě strany stojí na sobě kolmo.



Obr. 7.

Je tedy na př. v obr. 7

$$AD \perp AB, \quad BC \perp AB,$$

tedy obě přímky AD i BC stojí kolmo na přímce AB a tedy

$$AD \parallel BC$$

nebo slovy: Dvě protější strany obdélníka jsou rovnoběžné.

Tedy u obdélníka $ABCD$ jest

$$AD \parallel BC, \quad AB \parallel CD.$$

Když u nějakého čtyrúhelníka $ABCD$ jest $AD \parallel BC$ a také $AB \parallel CD$, musí to býti obdélník? Obr. 8 ukazuje, že nemusí.

Vraťme se k obdélníku $ABCD$ (obr. 7). Vzdálenost rovnoběžek AD a BC můžeme měřit na společné kolmici AB, ale můžeme ji měřit také na společné kolmici CD. Tedy

$$\overline{AB} = \overline{CD},$$

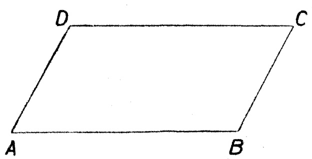
nebo slovy: Dvě protější strany obdélníka jsou stejně dlouhé.

Tedy u obdélníka $ABCD$ jest

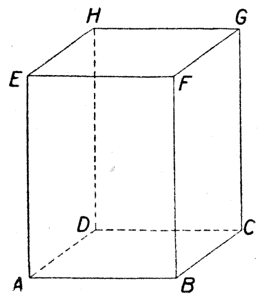
$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Když u nějakého čtyrúhelníka $ABCD$ jest $\overline{AB} = \overline{CD}$ a také $\overline{AD} = \overline{BC}$, musí to býti obdélník? Zase obr. 8 ukazuje, že nemusí.

Často se vyskytují obdélníky, které mají dvě strany svislé; ostatní dvě strany musí pak býti vodorovné. Ukažte ve třídě čtyři takové obdélníky. Obr. 7 představuje právě obdélník v takové poloze: Vodorovným stranám AB a CD říkáme **základny** obdélníka (AB je dolní základna, CD je horní základna) a svislým stranám AD a BC říkáme **výšky** obdélníka. Společná délka $\overline{AB} = \overline{CD}$ obou základen se jmenuje **délka** obdélníka a slovem **výška** značíme často společnou délku $\overline{AD} = \overline{BC}$ obou svislých stran (výšek). Také se často mluví o **šířce** obdélníka.



Obr. 8.



Obr. 9.

Obr. 9 představuje kvádr v poloze průčelné. U stěn $ABFE$ a $CDHG$ mluvíme o délce a výšce, u stěn $ABCD$ a $EFGH$ mluvíme o délce a šířce, u stěn $BCGF$ a $ADHE$ mluvíme o šířce a výšce.

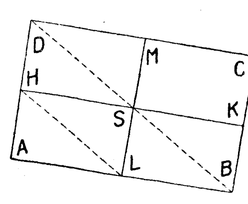
Celkem jsou tedy dvě vzdálenosti, které je u obdélníka třeba znát. Výhodný je společný název **rozměry** pro tyto dvě vzdálenosti. Tento název se hodí pro obdélník v jakékoli poloze, kdežto názvy „délka a výška“ nebo „délka a šířka“ nebo „šířka a výška“ jsou vhodné pro obdélníky ve zvláštních polohách.

Obdélník má dva rozměry. Také u kvádru mluvíme o rozměrech, ovšem: Kvádr má tři rozměry. Je-li kvádr v poloze průčelné, pak rozměry kvádru se jmenují: délka (vodorovně odleva doprava), šířka (vodorovně odpředu dozadu), výška (svisle).

Sestrojte si v sešitě obdélník s rozměry 7 cm a 5 cm. Nejprve zvolte přímku AB a na ni naneste $\overline{AB} = 7$ cm. V bodech A a B vztyčte k přímce AB kolmice a na ně naneste délky $\overline{AD} = \overline{BC} = 5$ cm. (Musíte obě délky nanášet na stejnou stranu od přímky AB.) Zbývá jen spojit CD. Přeměřte, že je přesně $\overline{CD} = 7$ cm. Přesvědčte se, že také u vrcholů C a D máte pravé úhly.

Opakujte stejnou konstrukci (se stejnými rozměry) na list papíru. Obdélník, který jste narýsovali na list papíru, vystřihněte a přesvědčte se, že se dá položit na obdélník $ABCD$, který máte v sešitě, tak, že se oba obdélníky přesně kryjí. Takové dva obrazce, které lze přemístit tak, aby se přesně kryly, jmenují se **shodné.** Tedy: dva obdélníky se stejnými rozměry jsou shodné. Také dva kvádry se stejnými rozměry jsou shodné, ale zde není tak lehké provésti pokus. Vzpomeňte si, že jsme si v paragrafu 4 sestrojili dva rovnostranné trojúhelníky, které jsme pak položili na sebe tak, že se přesně kryly, tedy trojúhelníky shodné. Shodné trojúhelníky budou jednou z hlavních partií geometrického učiva ve vyšších třídách. Proto učiníte dobře, když už teď si budete pamatovat: Dva trojúhelníky se stejně dlouhými stranami jsou shodné.

Na listu papíru si opatřte (hodně veliký) obdélník. Obdélník si vystřihněte a označte jej $ABCD$. Přehněte jej dvojím způsobem: jednak tak, aby se kryly strany AB a CD, jednak tak, aby se kryly strany AD a BC. Tím dostanete úsečky HK a LM (viz obr. 10). Přímka HK je kolmá na přímky AD a BC. Přímka LM je kolmá na přímky



Obr. 10.

AB a CD. Mimoto H je střed strany AD, K je střed strany BC, L je střed strany AB a M je střed strany CD. Úsečky HK a LM se proto jmenují **střední příčky** obdélníka $ABCD$; stojí na sobě kolmo. Označte ještě S průsečík obou středních příček.

Vidíte, že střední příčky rozdělí obdélník $ABCD$ na čtyři obdélníky. Jmenujte je. Jaké jsou jejich rozměry? Jsou u všech čtyř malých obdélníků stejné a proto jsou tyto obdélníky shodné. Chceme-li, aby se na př. obdélníky $ALSH$ a $HSMD$ kryly, stačí přehnouti papír podél přímky HSK. Ale obdélník $ALSH$ můžeme přemístit do polohy $HSMD$ ještě jinak. Stačí pošinouti obdélník $ALSH$ podél přímky LSM o délku $\overline{LS}$. Přímka LH se při tom pošine do polohy SD. Z toho vidíme, že $SD \parallel LH$; mimoto $\overline{SD} = \overline{LH}$.

Když pošineme zase obdélník $ALSH$, ale tentokrát podél přímky HSK o délku $\overline{HS}$, přejde $ALSH$ do polohy $LBKS$ a přímka LH se pošine do polohy BS. Z toho vidíme, že $BS \parallel LH$; mimoto $\overline{BS} = \overline{LH}$.

Kudy tedy prochází rovnoběžka s přímkou LH vedená bodem S? Ta rovnoběžka prochází jednak bodem D, jednak bodem B. Tedy tři body D, S a B leží na přímce. Přesvědčte se přehnutím papíru, že přímka BD opravdu prochází bodem S. Mimoto jsme si všimli, že obě délky $\overline{SD}$ i $\overline{BS}$ jsou tak dlouhé jako $\overline{LH}$; tedy jsou obě stejně dlouhé, to jest bod S je střed úhlopříčky BD obdélníka $ABCD$. Samozřejmě je bod S také střed druhé úhlopříčky AC obdélníka $ABCD$. Přesvědčte se přehnutím papíru, že přímka AC prochází bodem S. Které další dvě úsečky mají střed v bodě S? Bod S se jmenuje **střed obdélníka** $ABCD$.

Pamatujte: Obě úhlopříčky obdélníka jsou stejně dlouhé. Úhlopříčky obdélníka se navzájem půlí.

V sešitě máte narýsovaný obdélník $ABCD$ s rozměry 7 cm a 5 cm. Narýsujte si v něm obě úhlopříčky a označte S jejich průsečík. Přesvědčte se proužkem papíru, že

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}.$$

Jsou tedy všecky čtyři vrcholy obdélníka $ABCD$ stejně vzdáleny od bodu S. Proto můžeme opsati ze středu S kružnici k, která prochází všemi vrcholy. Narýsujte kružnici k. Říkáme, že kružnice k je **opsána** obdélníku $ABCD$. Říkáme, že obdélník $ABCD$ je **vepsán** do kružnice k. Změřte všichni poloměr kružnice k. Vyšel vám všem stejný?

Když obě úhlopříčky čtyrúhelníka jsou stejně dlouhé, nemusí to býti obdélník. Narýsujte příklad od ruky. Když úhlopříčky čtyrúhelníka se navzájem půlí, nemusí to býti obdélník. Narýsujte příklad od ruky. Ale když čtyrúhelník má obě úhlopříčky stejně dlouhé a když se obě mimoto navzájem půlí, pak to musí býti obdélník. To už patří do vyšších tříd, ale neuškodí, když se už teď o tom přesvědčíme příkladem. Zvolte si tedy bod S, veďte jím dvě přímky libovolně, naneste na prvou $\overline{AS} = \overline{SB} = 43$ mm, na druhou $\overline{CS} = \overline{SD} = 43$ mm a sestrojte čtyrúhelník $ABCD$. Přesvědčte se přiložením trojúhelníkového pravítka, že všecky čtyři úhly jsou pravé.

Cvičení k § 7.

53. Zapište do slovníčka: Základna a výška obdélníka. Rozměry obdélníka. Rozměry kvádru. Délka, šířka, výška. Střední příčky obdélníka. Střed obdélníka. Kružnice opsaná obdélníku. Obdélník vepsaný do kružnice. Shodné obdélníky.

54. Sestrojte obdélník 72 mm dlouhý a 54 mm široký. Opište mu kružnici. Změřte a zapište poloměr opsané kružnice.

55. Zvolte bod S (asi uprostřed sešitu) a veďte jím libovolně přímku p. Potom sestrojte obdélník stejně veliký jako v úloze 54, ale tak, aby S byl střed obdélníka a aby jedna střední příčka ležela v přímce p. Jsou dva takové obdélníky? Sestrojte je oba. Můžete oběma opsat stejnou kružnici?

56. Zvolte si kružnici s poloměrem 52 mm a narýsujte si dva libovolné průměry ESF, GSH. Jaký čtyrúhelník je $EGFH$? Změřte strany a přesvědčte se, že všecky jeho úhly jsou pravé.

57. Zvolte si přímku p a mimo ni bod H. Sestrojte obdélník $HKLM$ (jeden vrchol je tedy dán) tak, aby strana KL ležela v přímce p a byla dlouhá 26 mm. Jsou dva takové obdélníky? Sestrojte je oba.

58. Zvolte zase přímku p a mimo ni bod H. Zase sestrojte obdélník $HKLM$ tak, aby strana KL ležela v přímce p. Ale strana KL ať je teď tak dlouhá, aby obvod obdélníka $HKLM$ byl 20 cm. Jsou dva takové obdélníky? Sestrojte jen jeden.

59. Zvolte ještě jednou přímku p a mimo ni bod H. Sestrojte obdélník $CDEF$ tak, aby strana CD ležela v přímce p a byla dlouhá 5 cm a aby bod H byl středem obdélníka.

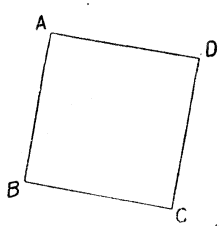
§ 8. Čtverec.

Obdélník může míti oba rozměry stejné (viz obr. 11). Pak se jmenuje čtverec.

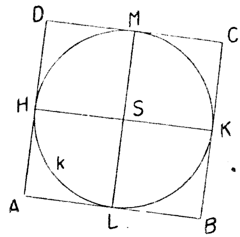
Když má čtyrúhelník všecky strany stejně dlouhé, nemusí to býti čtverec. Narýsujte příklad od ruky.

Protože čtverec je zvláštní případ obdélníka, platí o něm všecky vlastnosti, které jsme poznali u obdélníka. Opakujte je.

Protože jsou střední příčky obdélníka tak dlouhé jako strany, obě střední příčky čtverce jsou stejně dlouhé (a jsou tak dlouhé jako strana čtverce).



Obr. 11.



Obr. 12.

Sestrojte si čtverec $ABCD$ o straně 6 cm. (Jak to provedete?) Sestrojte obě střední příčky HSK a LSM (viz obr. 12). Protože je $\overline{SH} = \overline{SK} = \overline{SL} = \overline{SM} = 3$ cm (proč?), leží všecky čtyři body H, K, L a M na kružnici k o středu S a poloměru 3 cm. Narýsujte si kružnici k. Všimněte si, že se každá strana čtverce $ABCD$ dotýká kružnice k. Říkáme, že k je kružnice **vepsaná** do čtverce $ABCD$. Říkáme, že čtverec $ABCD$ je **opsán** kružnici k. Sestrojte ve svém obrazci také kružnici opsanou čtverci $ABCD$.

Do **obecného** obdélníka (t. j. takového, který není čtverec) se nedá vepsat kružnice.

Pod ten list v sešitě, na kterém jste teď rýsovali, si položte list papíru. Propíchnutím si přeneste body A, B, C, D ze sešitu na volný papír. Sestrojte pravítkem nebo přehnutím papíru také na volném papíře strany čtverce $ABCD$ a vystřihněte si ten čtverec. Přeložte vystřižený čtverec podél úhlopříčky AC; vrcholy B a D se vám přesně kryjí. Přeložte čtverec podél druhé úhlopříčky BD; teď se zase vrcholy A a C přesně kryjí. Tím jsme se přesvědčili, že obě úhlopříčky čtverce stojí na sobě kolmo. (Mimoto je ovšem ještě $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$ jako u každého obdélníka.)

V obrazci, který máte v sešitě (viz obr. 12), je také $HLKM$ čtverec. Změřte všecky strany a přesvědčte se také trojúhelníkovým pravítkem, že všecky čtyři úhly jsou pravé. Přímky HK a LM ve vašem obrazci stojí na sobě kolmo. Čím jsou úsečky HK a LM ve čtverci $ABCD$? Čím jsou ve čtverci $HLKM$?

Sestrojte si čtverec $EFGH$ tak, aby délka úhlopříčky byla 9 cm. Vyložte sami, jak konstrukci provedete.

Kvádr má tři rozměry, ale může se stát, že jsou dva z nich stejné. Ve škole máme také takový model. Když je na př. délka a šířka stejná, jsou obě podstavné stěny čtverce, kdežto všecky pobočné stěny jsou obecné obdélníky. Všecky ty čtyři obdélníky jsou shodné.

Když jsou všecky tři rozměry kvádru stejné, pak se kvádr jmenuje **krychle.** Ve škole máme také model krychle. Všecky stěny krychle jsou čtverce.

Cvičení k § 8.

60. Zapište do slovníčka: Čtverec. Krychle. Kružnice vepsaná do čtverce. Čtverec opsaný kružnici.

61. Sestrojte čtverec o straně 69 mm a čtverec s úhlopříčkou 92 mm. Zapište, který čtverec je větší.

62. Sestrojte čtverec o straně 53 mm a čtverec s úhlopříčkou 8 cm. Zapište, který čtverec je větší.

63. Opakujte cvičení 56, str. 21, ale volte $EF \perp GH$.

64. Sestrojte čtverec s úhlopříčkou 7 cm a vpište do něho kružnici.

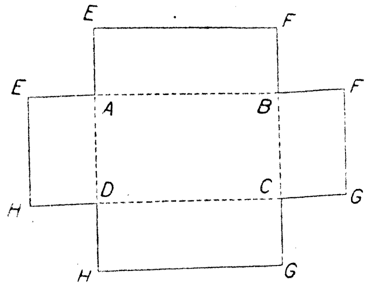
65. Sestrojte čtverec $ABCD$ o straně 3 cm. Sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABF, BCG, CDH, DAK tak, aby nezasahovaly dovnitř čtverce $ABCD$. Přesvědčte se, že $FGHK$ je čtverec.

66. Opakujte cvičení 65 se stranou čtverce dvojnásobnou, ale rovnostranné trojúhelníky sestrojujte tak, aby zasahovaly dovnitř čtverce.

67. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC o straně 3 cm. Sestrojte čtverce $ABED, BCGF, CAKH$ tak, aby nezasahovaly dovnitř trojúhelníka ABC. Přesvědčte se, že trojúhelníky DFH a EGK jsou rovnostranné. Jsou ty dva trojúhelníky shodné?

§ 9. Sítě a modely.

Vezměme otevřenou (vnitřní) část krabičky od zápalek a rozřízněme ji podél pobočných hran. Potom můžeme ohnouti pobočné stěny a dostaneme rovnou plochu naznačenou v obr. 13. Tato rovná plocha se jmenuje **síť** otevřené krabičky.



Obr. 13.

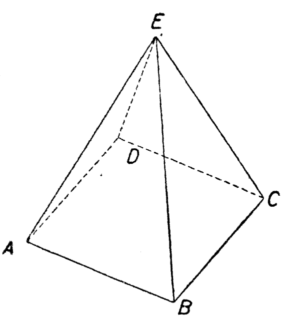
Proč jsou v obr. 13 některá písmena dvakrát? Musí na př. obě úsečky označené *EA* býti stejně dlouhé? Proč? Je na př. čára *EABF* přímá? Proč?

Narýsujte si síť otevřené krabičky na tužším papíru. Nařízněte jemně papír podél úseček čárkovaných v obr. 13. Potom ohněte a dostanete **papírový model** otevřené krabičky. Slepte pobočné stěny kousky lepicí pásky. Chceme-li si opatřiti síť a potom model uzavřené krabičky, musíme připojiti k síti otevřené krabičky ještě šestý obdélník. Kolikerým způsobem jej můžeme umístiti? Naznačte jednotlivé možnosti malými obrazci od ruky. V každém obrazci označte vrcholy písmeny. Body, které na modelu splynou, označujeme stejně. Která umístění šesté stěny považujete za nejvýhodnější?

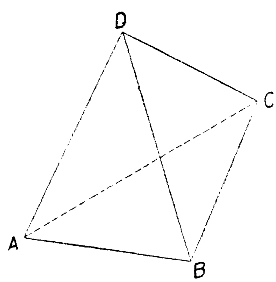
Cvičení k § 9.

68. Zapište do slovníčka: Síť kvádru.

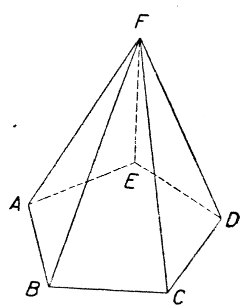
V úlohách 69 až 78 máte sestrojiti síť tělesa. Udělejte si nejprve malý obrazec od ruky a do něho zapište předepsané rozměry (jednotka 1 cm). Potom



Obr. 14.



Obr. 15.



Obr. 16.

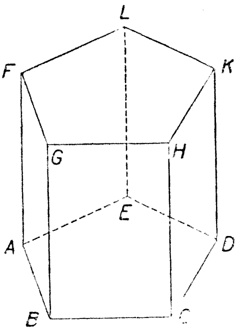
teprve rýsujte přesnou síť. Vrcholy označujte v síti písmeny. Zhotovte si doma model jednoho nebo dvou z těch těles podle vlastní volby.

69. Uzavřená krabice dlouhá 6 cm, široká 4 cm a vysoká 16 mm.

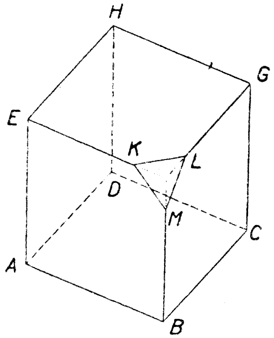
70. Pravidelný čtyrboký jehlan (viz obr. 14). Podstava je čtverec o straně 3 cm. Délka pobočných hran je 4 cm.

71. Pravidelný čtyrstěn (viz obr. 15). Délka hrany je 5 cm. Všecky hrany jsou stejně dlouhé.

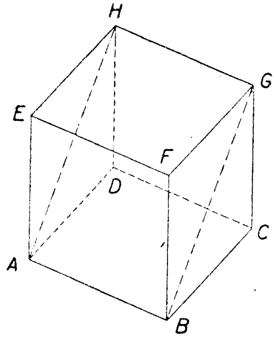
72. Pravidelný pětiboký jehlan (viz obr. 16). Délka pobočných hran je 5 cm. Podstava je pravidelný pětiúhelník. Body C, D, E, F a G v obr. 8 (str. 8)



Obr. 17.



Obr. 18.



Obr. 19.

jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníka tak velikého, jako má být vaše podstava. Přeneste si ten pětiúhelník do sítě jehlanu buďto propíchnutím ve vrcholech nebo pomocí průsvitného papíru.

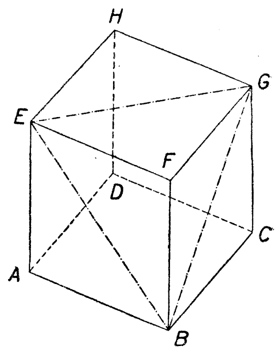
73. Pravidelný pětiboký hranol (viz obr. 17). Délka pobočných hran je 4 cm. Podstavné pravidelné pětiúhelníky dostanete stejně jako v úloze 72.

74. Z krychle o hraně 5 cm je u vrcholu F odříznut kus $FKLM$ (viz obr. 18). Jest $\overline{FK} = \overline{FL} = = \overline{FM} = 1$ cm. (Bod F není v obr. 18 vyznačen.)

75. Stejně jako v úloze 74 až na to, že teď jsou odříznuty stejné kusy u tří vrcholů E, F a G.

76. Stejně jako v úloze 74 až na to, že teď jsou odříznuty stejné kusy u všech osmi vrcholů krychle.

77. Krychle naznačená v obr. 19 je rozříznuta podél obdélníka $ABGH$, takže se rozpadne ve dvě tělesa. Sestrojte sítě obou těles. Délka hrany krychle je 4 cm.



Obr. 20.

78. Krychle naznačená v obr. 20 je rozříznuta podél trojúhelníka BEG, takže se rozpadne ve dvě tělesa. Sestrojte sítě obou těles. Délka hrany krychle je 4 cm.

§ 10. Průmět kvádru.

Je důležité, abyste se naučili udělat si v sešitě pěkné náčrty jednoduchých těles. Nemůžeme ovšem do sešitu narýsovat přesný tvar tělesa, neboť v sešitě můžeme míti pouze **rovinné** obrazce. Ale přece jen si můžeme lehko pořídit náčrty, které vystihnou hlavní vlastnosti tělesa a často nám nahradí model. Dokonce mají takové náčrty dvě přednosti před modely. Předně si je můžeme pořídit velmi rychle a za druhé můžeme do nich snadno vpisovat písmenka pro vrcholy. Budeme postupovat podle určitých **zásad**, podle kterých byly také v učebnici zhotoveny obr. 6, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19 a 20. Obraz tělesa, který si podle těchto zásad narýsujeme, budeme nazývat **průmět** tělesa. V tomto odstavci si všimneme pouze kvádru.

Hlavní zásady jsou dvě:

(a) rovnoběžné úsečky rýsujeme rovnoběžně,

(b) úsečky stejně dlouhé, které jsou buďto obě na stejné přímce nebo na dvou rovnoběžkách, rýsujeme stejně dlouhé.

Naproti tomu úhly pravé se nebudou vždycky v průmětu jevit jako úhly pravé a úsečky stejně dlouhé, které nejsou rovnoběžné, nebudou v průmětu vždycky stejně dlouhé.

Pak máme ještě dvě vedlejší zásady, ze kterých si zatím uvedeme jenom jednu:

(c) svislé úsečky rýsujeme svisle.

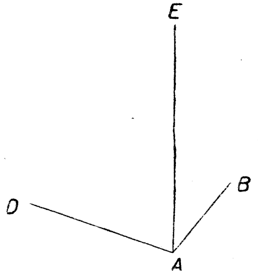
Naproti tomu vodorovné úsečky se nebudou v průmětu jevit vždycky vodorovně.

Narýsujme si podle těchto zásad průmět kvádru, který spočívá na vodorovné podložce. [Nebudeme rýsovat průmět kvádru v obecnější (šikmé) poloze.] Nejprve narýsujeme jednu svislou hranu, označme ji AE. Podle zásady (c) ji narýsujeme svisle. Nyní narýsujeme ještě obě vodorovné hrany AB a AD vycházející z vrcholu A (viz obr. 21a).

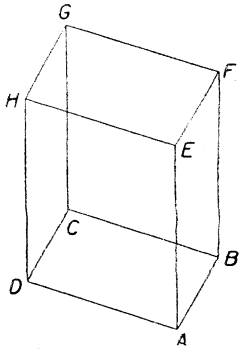
Až dosud bylo vlastně všecko libovolné až na to, že úsečku AE rýsujeme svisle. Teď však už dokončíme průmět docela jednoznačně (viz obr. 21b) podle zásad (a) a (b).

Nejprve doplníme dolní podstavu $ABCD$. Podle zásady (a) rýsujeme $DC \parallel AB$, $BC \parallel AD$. Ale místo abychom takto určili polohu bodu C dvěma pravítky, můžeme určit polohu bodu C kružítkem podle zásady (b): opíšeme-li ze středu D oblouk kružnice s poloměrem $\overline{AB}$ a ze středu B oblouk kružnice s poloměrem $\overline{AD}$, protnou se ty dva oblouky v bodě C.

Když už máme dolní podstavu $ABCD$ a jednu pobočnou hranu AE, dokončíme průmět snadno. Vedeme svislé přímky BF, CG, DH a naneseme na každou z nich délku $\overline{AE}$.

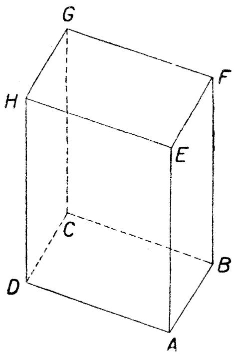


Obr. 21a.

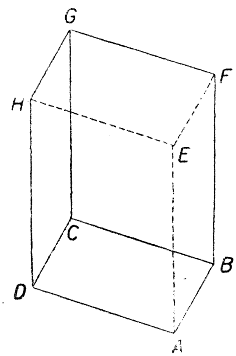


Obr. 21b

Nebylo podstatné, že jsme v obr. 21a vyšli právě od tří hran vycházejících z jednoho vrcholu. Procvičíme si také jiné možnosti.



Obr. 21c.



Obr. 21d.

Aby byl průmět opravdu názorný, můžeme se říditi ještě druhou vedlejší zásadou:

(d) neviditelné hrany čárkujeme. Této zásady můžeme pokaždé užít dvojím způsobem. V obr. 21c vidíte t. zv. **pohled shora,** při kterém je horní podstava viditelná a dolní neviditelná. V obr. 21d vidíte t. zv. **pohled zdola,** při kterém je horní podstava neviditelná a dolní viditelná. Obyčejně rýsujeme pohled shora.

Při úlohách o kvádru je dobře, když se naučíme označovat kvádr tím, že napíšeme jednotlivé vrcholy za sebou v určitém pořádku. Píšeme nejdříve vrcholy dolní podstavy, a to **popořádku.** Za ně napíšeme vrcholy horní podstavy, a to ve stejném pořádku jako u podstavy dolní. Na př. kvádr, který jsme právě zobrazovali, můžeme označiti třeba $ABCDEFGH$ nebo $BADCFEHG$, ale nesprávně je $AEBFCGDH$ nebo $ABCDEHGF$.

Cvičení k § 10.

79. Zapište do slovníčka: Kvádr $ABCDEFGH$. Průmět tělesa. Pohled shora. Pohled zdola.

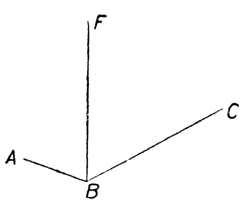
80. Jmenujte pobočné hrany kvádru $LMRTUVAX$. Jmenujte podstavné hrany.

81. Jmenujte podstavné stěny kvádru $AEDFGKLV$. Jmenujte pobočné stěny.

82. U kvádru $CDEFGHKL$ jmenujte: které hrany vycházejí z vrcholu C, které hrany vycházejí z vrcholu H, které stěny vycházejí z vrcholu E, které stěny procházejí hranou EF, které stěny procházejí hranou DH.

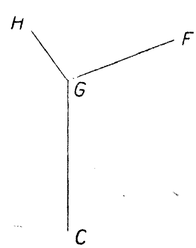
V úlohách 83 až 90 máte sestrojiti průmět kvádru $ABCDEFGH$. Část průmětu vyznačená v učebnici má míti ve vašem průmětu přibližně stejný tvar,

83.



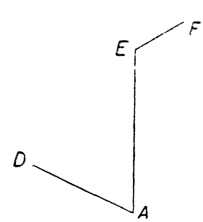
Obr. 22.

84.



Obr. 23.

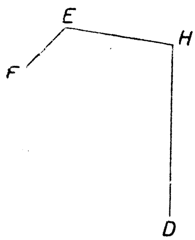
85.



Obr. 24.

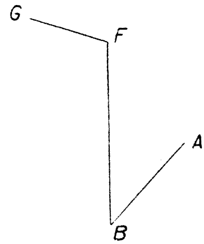
ale váš obrazec má býti asi třikrát tak veliký. Potom doplníte průmět přesnou konstrukcí. V úlohách 89 a 90 má bod E ležet někde na vytečkované přímce. Zásady (d) užijte za předpokladu, že běží o pohled shora. Je dobře, když si uděláte nejdříve na list papíru menší obrazec od ruky, ve kterém nepřihlížíte k viditelnosti, ale ve kterém si také všecky vrcholy popíšete písmeny.

86.



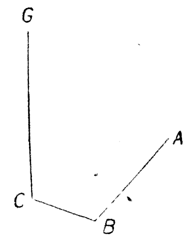
Obr. 25.

87.



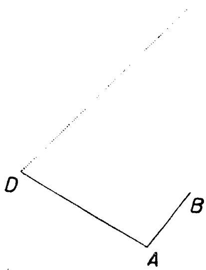
Obr. 26.

88.



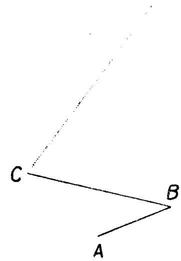
Obr. 27.

89.



Obr. 28.

90.

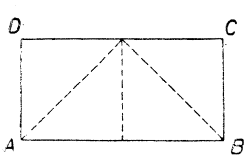


Obr. 29.

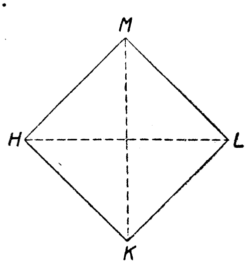
§ 11. Obsah čtverce a obdélníka.

Slovo **geometrie** je řeckého původu (gé = země, metrein = měřiti). Už z dosavadního vyučování je patrné, že v geometrii běží také o jiné věci než měření. Proto se také dnes málo užívá českého názvu **měřictví** a říká se raději cizí slovo, jehož původní úzký význam už necítíme.

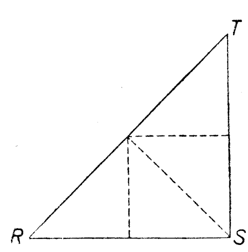
Přesto tvoří měření důležitou a zejména prakticky významnou část geometrie. Dosud jsme měřili pouze délky. Nyní si všimneme, jak se měří velikost jednoduchých rovných ploch. Později budeme měřit ještě velikost těles a úhly.



Obr. 30a.



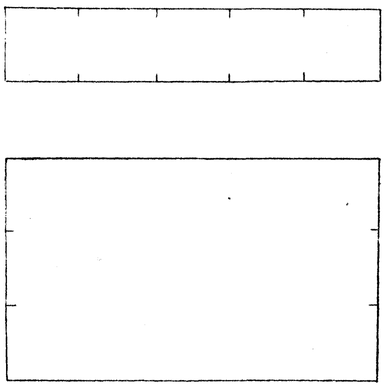
Obr. 30b.



Obr. 30c.

Plochy, které jsou stejně veliké, nemusí míti stejný tvar. Na př. obdélník $ABCD$ v obr. 30a, čtverec $HKLM$ v obr. 30b a trojúhelník RST v obr. 30c jsou tvarově úplně odlišné. Ale můžeme kterýkoli z nich rozstříhat podél čárkovaných úseček a z kusů složit druhý nebo třetí, takže mají všecky stejnou velikost.

Délku čáry můžeme měřit v centimetrech, t. j. srovnáváním s jednotkou délky 1 cm. Podobně velikost rovné plochy nebo, jak se zpravidla říká, její **plošný obsah** (krátce **obsah**) měříme ve čtverečních centimetrech, t. j. srovnáváním s plošnou jednotkou 1 cm^2. Je to velikost čtverce o straně 1 cm nebo ovšem velikost jakékoli plochy jiného tvaru, ale stejně veliké jako čtverec o straně 1 cm.



Obr. 31.

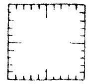
V obr. 31 máme dva obdélníky o základně 5 cm; prvý má výšku 1 cm, druhý 3 cm. Na kolik čtverců o straně 1 cm se dá rozdělit prvý obdélník? Na kolik kusů stejných jako prvý obdélník se dá rozdělit druhý obdélník? Jaký je tedy obsah prvého obdélníka? Jaký je obsah druhého obdélníka?

Vezměte list papíru, narýsujte na něm čtverec o straně 8 cm a vystřihněte. Vystřižený čtverec přeložte po délce přesně v polovině a překládejte stále po délce ještě dvakrát. Po rozvinutí vidíte čtverec rozdělený na osm obdélníků s rozměry 8 cm a 1 cm. Opakujte trojité přeložení, ale tentokrát po šířce. Po rozvinutí máte celý čtverec rozdělen na čtverce o straně 1 cm. Kolik je těch malých čtverečků? Jaký je tedy obsah celého papírového čtverce? Odstřihněte dva kusy tak, aby vám zbyl čtverec o straně 6 cm. Také tento čtverec máte rozdělen na čtverečky o straně 1 cm. Jaký je tedy obsah čtverce o straně 6 cm?

Délkové jednotky jsou: 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, dekametr = 10 m, hektometr = 100 m, 1 km. **Měnitel** je deset: každá následující jednotka je desetinásobek předcházející jednotky.

Obsah čtverce, jehož strana je délková jednotka, tvoří příslušnou **plošnou jednotku.** Tedy plošné jednotky jsou: 1 m^2, 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m², čtvereční dekametr, čtvereční hektometr, 1 km². Dekametru a hektometru se v praksi neužívá, ale příslušných plošných jednotek se užívá, arci s kratšími jmény. Čtvereční dekametr se jmenuje **ar** (1 a), čtvereční hektometr se jmenuje **hektar** (1 ha).

V obr. 32 je naznačeno, jak by se čtverec o straně 1 cm mohl rozdělit na čtverečky o straně 1 mm. Kolik by jich bylo? Měnitel plošných jednotek je sto. Tedy



Obr. 32.

$$1\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{mm}^2,\quad 1\ \mathrm{dm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2,\quad 1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2,$$
$$1\ \mathrm{a} = 100\ \mathrm{m}^2,\quad 1\ \mathrm{ha} = 100\ \mathrm{a},\quad 1\ \mathrm{km}^2 = 100\ \mathrm{ha}.$$

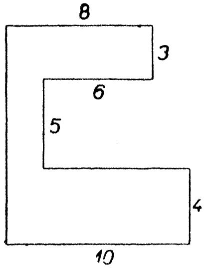
Pamatujte: obsah obdélníka dostaneme, když délku násobíme výškou. Ale musíte umět připojit k tomuto základnímu pravidlu ještě vysvětlení: Délka a výška musí býti dána ve stejné délkové jednotce a obsah pak vyjde v příslušné jednotce plošné.

Není-li dána výška ve stejné jednotce jako délka, musíme dávati pozor. Když máme na př. obdélník délky 7 m a šířky 32 dm a když vypočteme $7 \times 32 = 224$, co to znamená? Znamená to, že se náš obdélník dá rozložit ve 224 menší obdélníky s rozměry 1 m a 1 dm. Každý z těch menších obdélníků má obsah 10 dm² neboli 0,1 m². Tedy daný obdélník má obsah 2240 dm² neboli 22,4 m².

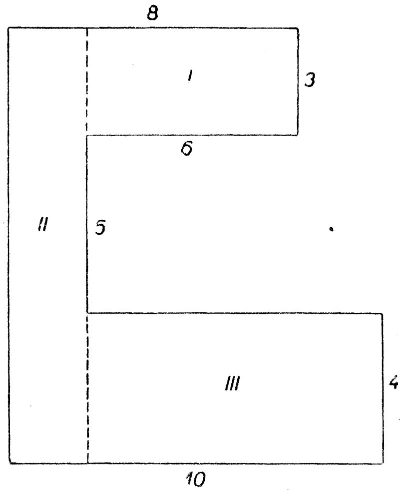
Umocnit číslo na druhou znamená znásobiti je samo sebou. Obsah čtverce dostaneme, když délku strany umocníme na druhou. Které vysvětlení musíte k tomu umět dodat?

K obdélníku *ABCD* v obr. 30a si mysleme připojen podél strany *CD* ještě jeden s ním stejný obdélník. Dostaneme čtverec s délkou strany $\overline{AB}$ a obdélník *ABCD* je polovina toho čtverce. Tedy obsah obdélníka *ABCD* dostaneme, když délku $\overline{AB}$ umocníme na druhou a výsledek dělíme dvěma. Čtverec *HKLM* v obr. 30b je stejně velký jako obdélník *ABCD*. Délka $\overline{AB}$ je stejná jako délka $\overline{HL}$. Tedy obsah čtverce *HKLM* dostaneme, když délku $\overline{HL}$ umocníme na druhou a výsledek dělíme dvěma. Protože *HL* je úhlopříčka čtverce *HKLM*, máme toto pravidlo: Obsah čtverce dostaneme, když délku úhlopříčky umocníme na druhou a výsledek dělíme dvěma. Jak k tomu zní nutné vysvětlení?

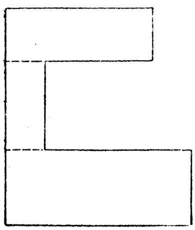
Jak se počítá obsah jiných ploch než je obdélník (trojúhelníků, kruhu, atd.), tomu se budete soustavně učit až později. Ale jsou některé plochy, které se dají snadno rozložit v obdélníky, takže už teď umíme najít jejich obsah. Provedeme si tři příklady.



Obr. 33.



Obr. 34.



Obr. 35.

Příklad 1. Najděte obsah plochy naznačené v obr. 33 (jednotka 1 cm).

Řešení: Nejprve narýsujeme do sešitu od ruky náčrt dané plochy podle obr. 33, ale ovšem větší (viz obr. 34).

Potom danou plochu rozložíme (viz čárkované úsečky v obr. 34) na tři obdélníky *I*, *II*, *III*.

I má rozměry: 6; 3, tedy obsah $6 \times 3 = 18$,

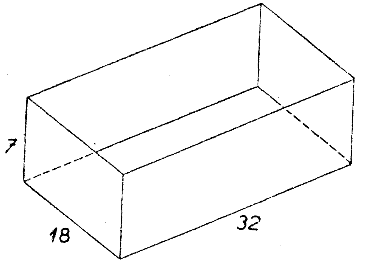
II má rozměry: $3 + 5 + 4 = 12$; $8 - 6 = 2$, tedy obsah $12 \times \times 2 = 24$,

III má rozměry: $10 - 2 = 8$; 4, tedy obsah $8 \times 4 = 32$, celkový obsah je $18 + 24 + 32 = 74$.

Daná plocha má obsah 74 cm². (Plošnou jednotku uvádíme až ve výsledku.)

Poznámka. Bylo možné rozložiti danou plochu v obdélníky také jinými způsoby. Jeden způsob je naznačen v obr. 35. Proveďte. Vychází vám stejný výsledek jako při prvním způsobu?

Příklad 2. Otevřená krabice (bez víka) je 32 cm dlouhá, 18 cm široká a 7 cm vysoká. Vnějšek krabice je polepen bílým papírem. Kolik dm² papíru se spotřebuje?



Obr. 36.

Řešení (viz obr. 36). Počítáme v cm a teprve výsledek převedeme na dm².

Obsah přední a zadní stěny:

$$2 \times 32 \times 7 = 448.$$

Obsah postranních stěn:

$$2 \times 18 \times 7 = 252,$$

obsah podstavy:

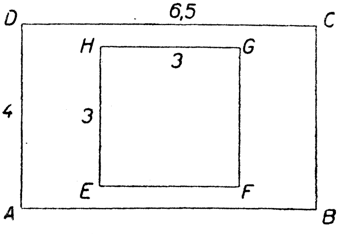
$$32 \times 18 = 576,$$

celkový obsah:

$$448 + 252 + 576 = 1276.$$

Spotřebujeme 12,76 dm² papíru.

Příklad 3. V pokoji 6,5 m dlouhém a 4 m širokém leží třímetrový čtvercový koberec. Najděte obsah nepokryté části podlahy.



Obr. 37.

Řešení (viz obr. 37). Naše plocha je rozdíl mezi obdélníkem *ABCD* a čtvercem *EFGH*.

ABCD má obsah:

$$6{,}5 \times 4 = 26,$$

EFGH má obsah:

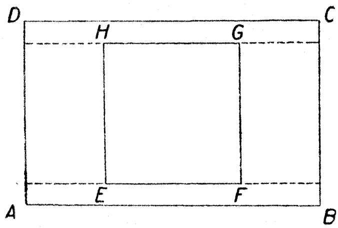
$$3 \times 3 = 9,$$

rozdíl:

$$26 - 9 = 17.$$

Obsah nepokryté části podlahy je 17 m².

Poznámka. Mohli jsme počítati také pomocí rozkladu v obdélníky (viz obr. 38). Proveďte. Je odčítací metoda rychlejší?



Obr. 38.

V § 5 jsme si řekli, že součet všech šesti stěn kvádru se jmenuje povrch kvádru. Také celkový obsah všech stěn se jmenuje povrch kvádru. Jak se počítá povrch, jsou-li rozměry na př. 5 m, 4 m a 3 m? Jak se počítá povrch krychle, je-li délka hrany třeba 7 cm?

Cvičení k § 11.

91. Zapište do slovníčka: Obsah neboli plošný obsah. Umocniti číslo na druhou. Povrch kvádru. Plošné jednotky jsou . . . ; měnitel je sto.

V úlohách 92 až 94 počítejte obsah a vyjádřete jej v té jednotce plošné, která je udána v závorce.

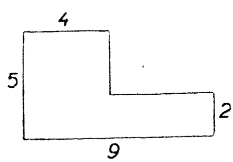
92. Obdélník 48 cm široký a 1 m dlouhý (dm^2).

93. Podlaha čtvercové místnosti dlouhé 62 dm (m^2).

94. Prkno dlouhé 3 m a široké 12 cm (dm^2).

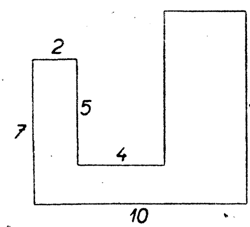
95. Kolem obdélníkové zahrady šířky 40 m je plot dlouhý 300 m. Jaký je obsah zahrady?

96.



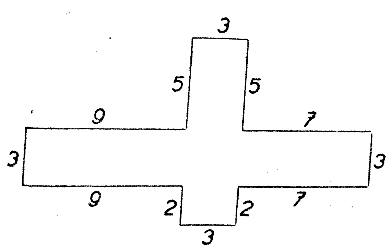
Obr. 39.

97.



Obr. 40.

98.



Obr. 41.

V úlohách 96 až 98 máte najíti obsah naznačené plochy rozkladem v obdélníky. Rýsujte od ruky vlastní obrazec a zapisujte postup. Jednotka je 1 cm.

99. Obsah obdélníkového pole širokého 30 m je 48 a. Jaká je délka pole?

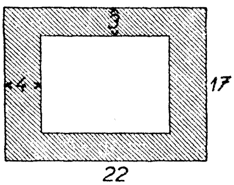
100. Čtverec o straně 7 m a obdélník 49 dm široký jsou stejně veliké. Najde délku obdélníka.

101. Přesvědčte se o správnosti svých odpovědí k úlohám 61 a 62 (str. 23) tím, že vypočtete obsahy.

102. Sestrojte si přesně čtverec (dosti veliký). Změřte pečlivě délku strany i délku úhlopříčky. Počítejte obsah i na základě strany i na základě úhlopříčky. Souhlasí vám oba výsledky?

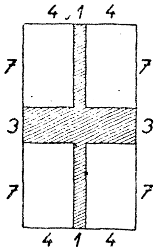
V úlohách 103 až 105 máte najít obsah čárkované plochy odčítacím způsobem. Jednotka 1 cm. Jednu úlohu řešte také rozkladem v obdélníky.

103.



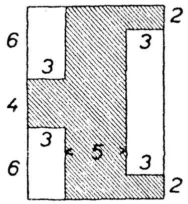
Obr. 42.

104.



Obr. 43.

105.



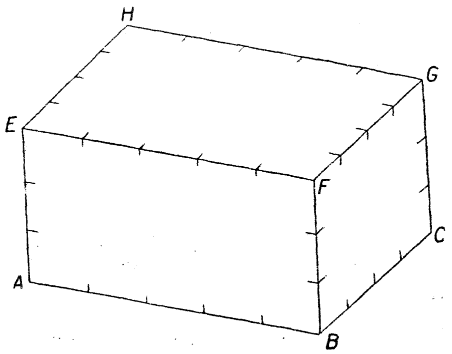
Obr. 44.

106. Fotografie rozměrů 18 cm a 12 cm je nalepena na papír rozměrů 24 cm a 18 cm. Najděte obsah prázdného pruhu.

107. Zavřená bedna 1 m dlouhá, 35 cm široká a 6 dm vysoká je pobita plechem. Kolik dm^2 plechu se spotřebuje?

§ 12. Objem kvádru a krychle.

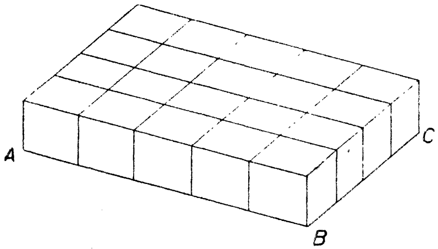
Jako u ploch měříme obsah, tak u těles měříme **objem.** Když volíme za délkovou jednotku 1 cm a za plošnou jednotku 1 cm^2, volíme za **prostorovou jednotku** 1 cm^3 (krychlový centimetr). Je to objem krychle o hraně 1 cm nebo také objem tělesa jiného tvaru, ale stejně velikého jako krychle o hraně 1 cm.



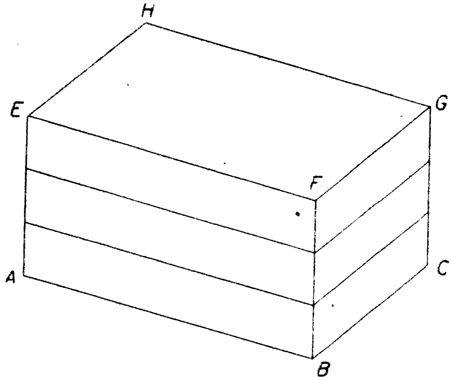
Obr. 45.

V obr. 45 máme znázorněn kvádr *ABCDEFGH* dlouhý 5 cm, široký 4 cm a vysoký 3 cm. Nazveme jej stručně kvádr **K**.

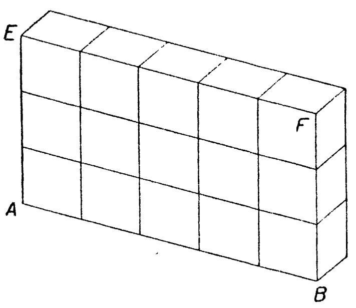
Víme, že obdélník *ABCD* se dá rozložit ve 20 čtverců o straně 1 cm. Když na každý z těchto čtverců postavíme krychli, dostaneme kvádr **L** (viz obr. 46a). Jaký je tedy objem kvádru **L**? Ale kvádr **K** se dá rozložit ve tři vrstvy (viz obr. 46b), z nichž každá má tvar kvádru **L**. Jaký je tedy objem kvádru **K**?



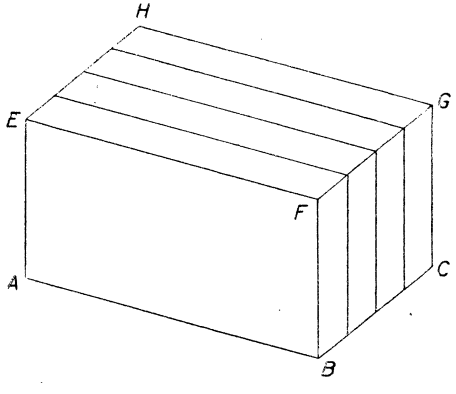
Obr. 46a.



Obr. 46b.



Obr. 47a.

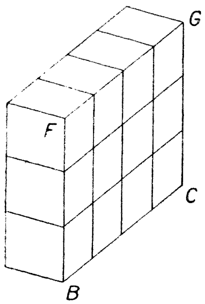


Obr. 47b.

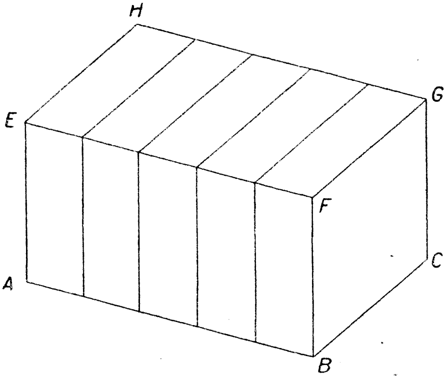
Jiným způsobem se dá kvádr **K** rozložit na čtyři vrstvy **M** (viz obr. 47a, 47b).

Ještě jiným způsobem se dá kvádr **K** rozložit na pět vrstev **N** (viz obr. 48a, 48b).

Všecky tři způsoby vedou ke stejnému výsledku: **objem kvádru K je** $60\ cm^3$.



Obr. 48a.



Obr. 48b.

Pamatujte: Objem kvádru dostaneme, když znásobíme mezi sebou všecky tři rozměry. Pamatujte si také vysvětlení: Všecky tři rozměry musí býti dány ve stejné jednotce délkové a objem pak vyjde v příslušné jednotce prostorové.

Umocnit číslo na třetí znamená nejprve je umocnit na druhou a pak výsledek násobit původním číslem.

Objem krychle dostaneme, když délku hrany umocníme na třetí. Jaké vysvětlení k tomu patří?

Krychle o hraně 1 dm má objem $1\ dm^3$. Protože $1\ dm = 10\ cm$ a protože deset umocněno na třetí dává tisíc, je $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$. Délkovým jednotkám 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m s měnitelem deset odpovídají **prostorové jednotky** $1\ mm^3$, $1\ cm^3$, $1\ dm^3$, $1\ m^3$ s měnitelem tisíc. Tedy

$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3,\ 1\ dm^3 = 1000\ cm^3,\ 1\ m^3 = 1000\ dm^3.$$

Pro praksi je jednotka $1\ cm^3$ (tím spíše $1\ mm^3$) zpravidla příliš malá a jednotka $1\ m^3$ je často příliš veliká. Zato $1\ dm^3$ je vhodná jednotka zejména pro měření objemu kapalin (ale také drobného ovoce atd.). Při takovém měření se zpravidla místo $1\ dm^3$ užívá názvu litr (1 l).

Litrová nádoba nemívá tvar krychle, ale je tak veliká jako krychle o hraně 1 dm. Ne tvarem, ale velikostí souhlasí litr s krychlí o hraně 1 dm. Větší jednotka je hektolitr (1 hl = 100 l), menší jednotka je decilitr (1 l = 10 dl). 1 hl, 1 l a 1 dl jsou míry **duté.** Geometricky není ovšem rozdílu mezi měrami prostorovými a měrami dutými.

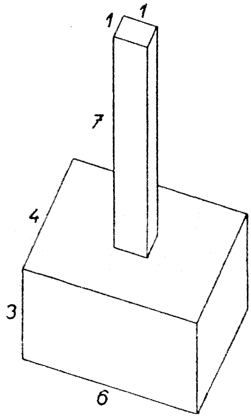
Cvičení k § 12.

108. Zapište do slovníčka: Objem tělesa. Umocniti číslo na třetí. Prostorové jednotky jsou ...; měnitel je tisíc. Míry prostorové a míry duté. 1 l = = 1 dm^3, 1 hl = 100 l = 100 dm^3, 1 m^3 = 10 hl, 1 l = 10 dl, 1 dl = 100 cm^3.

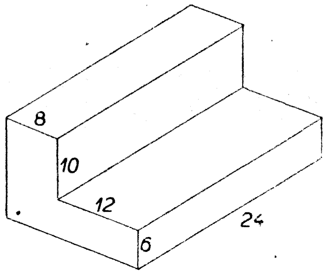
109. Jaký objem má vnitřek otevřené dřevěné bedny (bez víka), dlouhé (zvenčí) 6 dm, široké (zvenčí) 32 cm a vysoké 5 dm, je-li dřevo 2 cm tlusté?

110. Jaký objem má vnitřek zavřené dřevěné bedny, jsou-li vnější rozměry 6 dm, 32 cm, 5 dm a je-li dřevo 2 cm tlusté?

111. Jaký je objem dřeva u beden z úloh 109 a 110?



Obr. 49.



Obr. 50.

112. Jaký je vnitřní povrch bedny z úlohy 110?

113. Najděte objem tělesa znázorněného v obr. 49. Jednotka 1 cm.

114. Najděte povrch tělesa z úlohy 113.

115. Kolik hl vody musí přitéci do basenu dlouhého 25 m a širokého 8 m, má-li hladina vodní stoupnout o 18 cm?

116. Najděte objem tělesa znázorněného v obr. 50. Jednotka 1 dm.

117. Najděte povrch tělesa z úlohy 116.

118. Najděte nejmenší rozměry dřevěného kvádru, ze kterého se dá vyřezat těleso z úlohy 116. Kolik dřeva se musí odříznout?

§ 13. Vzájemná poloha přímek a rovin.

Když máme v nějaké rovině (třeba v sešitě) dvě přímky p a q, pak jsou dvě možnosti: buďto přímky p a q nemají žádný společný bod a jsou rovnoběžné, nebo p a q mají jediný společný bod S. (Jsou-li přímky p a q v sešitě, může se státi, že bod S je nepřístupný, t. j. že se nevejde do sešitu). Dvě přímky p a q, které mají společný bod S, jmenují se **různoběžné přímky,** krátce **různoběžky.** Bod S se jmenuje průsečík obou rovnoběžek; také se říká, že se přímky p a q protínají v bodě S.

Lze dvěma danými rovnoběžkami vždycky proložit rovinu? Lze dvěma danými různoběžkami vždycky proložit rovinu?

Dvě přímky p a q, kterými nelze proložit rovinu, jmenují se **mimoběžné přímky,** krátce **mimoběžky.** Ukažte ve třídě několik párů mimoběžek. (Viz cvič. 35.)

V geometrii se hojně užívá písmen z malé řecké abecedy, zejména k označení rovin a úhlů. Nebudeme se učit celé řecké abecedě najednou. Teď se naučíme psát zatím jen dvě řecká písmena: ϱ (čteme ro) a σ (čteme sigma). Těchto dvou písmen se užívá nejčastěji k označení rovin. Slovo rovina začíná písmenem r, kterému odpovídá řecké písmeno ϱ. Písmeno σ následuje v řecké abecedě za písmenem ϱ.

Zvolme si nějakou rovinu ϱ (třeba rovinu tabule). Když přímka p je rovnoběžná s některou přímkou ležící v rovině ϱ, říkáme, že přímka p je **rovnoběžná** s rovinou ϱ.

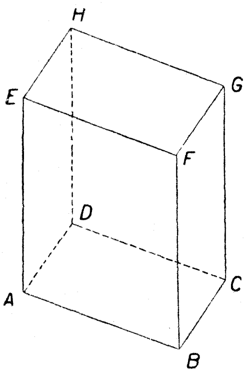
Ukažte dvě rovnoběžky, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ. Ukažte dvě různoběžky, obě rovnoběžné s rovinou ϱ. Ukažte dvě mimoběžky, obě rovnoběžné s rovinou ϱ.

Když si zvolíme v rovině ϱ bod S a vedeme jím přímku p, která neleží v rovině ϱ, pak přímka p má s rovinou ϱ společný pouze bod S. Říkáme, že přímka p je **různoběžná** s rovinou ϱ. Bod S se jmenuje průsečík přímky p s rovinou ϱ; také se říká, že se přímka p a rovina ϱ protínají v bodě S. Ukažte dvě přímky různoběžné s rovinou ϱ tak, aby obě přímky byly mezi sebou třeba různoběžné.

Dvě roviny ϱ a σ jsou mezi sebou buďto **rovnoběžné** nebo **různoběžné:** Ukažte několik příkladů ve třídě. Dvě různoběžné roviny se protínají v přímce, která se jmenuje jejich **průsečnice.**

Místo abychom značili rovinu řeckým písmenem, značíme ji ještě častěji tak, že napíšeme za sebou několik bodů, které leží v té rovině. Musíme zapsat aspoň tři body; proč? Stačí kterékoli tři body v té rovině?

Zvolme si rovinu ϱ (třeba stěnu třídy, která je před vámi) a mimo ni bod A. V rovině ϱ je jeden bod P, který je ze všech bodů roviny ϱ nejblíže k bodu A. Spojme si body A a P přímkou p. V rovině ϱ si veďme bodem P nějakou přímku q. Protože je bod P nejblíže k A ze všech bodů roviny ϱ, je tím spíše bod P nejblíže k A ze všech bodů přímky q. Proto stojí přímky p a q na sobě kolmo. Říkáme, že přímka p stojí kolmo na rovině ϱ. Také říkáme, že je p kolmice spuštěná s bodu A na rovinu ϱ a že bod P je pata této kolmice. Přímka p je také kolmice vztyčená k rovině ϱ v bodě P.



Obr. 51.

Spustíme-li s bodu A na rovinu ϱ kolmici p a vedeme-li patou té kolmice v rovině ϱ libovolnou přímku q, stojí ty přímky na sobě kolmo.

Všimněme si modelu kvádru. Postavíme-li kvádr tak, aby se dotýkal podložky jen jedním vrcholem, je-li tedy ten vrchol ze všech osmi vrcholů nejníž, pak **protější vrchol** kvádru je ten, který je ze všech nejvýš.

Jmenujte páry protějších vrcholů kvádru $ABCDEFGH$ (viz obr. 51).

Úsečka omezená dvěma protějšími vrcholy kvádru se jmenuje **úhlopříčka kvádru.** Určitěji říkáme **tělesná úhlopříčka** na rozdíl od **stěnových úhlopříček,** t. j. od úhlopříček jednotlivých stěn. Kolik tělesných úhlopříček má kvádr v obr. 51? Jmenujte je. Kolik má stěnových úhlopříček? Jmenujte je.

Všimněme si blíže dvou tělesných úhlopříček, třeba BH a CE. Vidíte, že bod B je ze všech bodů roviny $ABFE$ nejblíž k bodu C. Proto přímka BC je kolmá k rovině $ABFE$ a pata této kolmice je B. Tedy přímka BC stojí kolmo na každé přímce roviny $ABFE$ procházející bodem B. Zejména je $BC \perp BE$. Podobně se přesvědčíme, že $BC \perp CH$, dále že $EH \perp EB$ a konečně, že $EH \perp CH$. Čím je tedy čtyrúhelník $BCHE$? Co jsou v něm úsečky BH a CE? Co víme o úhlopříčkách obdélníka?

Výsledek: Všecky čtyři tělesné úhlopříčky jsou stejně dlouhé a půlí se navzájem. Mají tedy společný střed S. Bod S se jmenuje střed kvádru $ABCDEFGH$.

Cvičení k § 13.

119. Zapište do slovníčka: Dvě přímky jsou mezi sebou buďto rovnoběžné nebo různoběžné nebo mimoběžné. Rovnoběžky, různoběžky, mimoběžky. Přímka rovnoběžná s rovinou. Přímka různoběžná s rovinou. Dvě roviny jsou mezi sebou buďto rovnoběžné nebo různoběžné. Průsečík dvou přímek, průsečík přímky s rovinou. Průsečnice dvou rovin. Přímka kolmá k rovině. Vztyčit kolmici k rovině ABC v bodě A. Spustit kolmici na rovinu ABC s bodu D. Pata kolmice. Protější vrcholy kvádru. Tělesné úhlopříčky kvádru. Stěnové úhlopříčky kvádru. Střed kvádru.

120. Napište dva řádky písmen ϱ a dva řádky písmen σ.

121. Naznačte dvěma tužkami: dvě rovnoběžky, dvě různoběžky, dvě mimoběžky.

122. Naznačte tužkou a sešitem možné vzájemné polohy přímky a roviny.

123. Držte tužku tak, aby se opírala o sešit v bodě S. Je možné vésti v sešitě bodem S přímku kolmou ke přímce znázorněné tužkou? Kolik je takových kolmic?

124. Narýsujte si pečlivě průmět kvádru a přesvědčte se, že také v průmětu procházejí všecky čtyři úhlopříčky jedním bodem a že se navzájem půlí.

125. Narýsujte si vedle sebe tři stejné průměty kvádru $ABCDEFGH$. Jmenujte všecky čtyři tělesné úhlopříčky. V jednom průmětu vyznačte obdélník, který má úhlopříčky BH a CE, ve druhém obdélník s úhlopříčkami BH a AG, ve třetím obdélník s úhlopříčkami BH a DF.

Úlohy 126 až 132 se týkají kvádru $ABCDEFGH$. U každé úlohy si udělejte od ruky průmět kvádru a odpovídejte na základě představy získané z průmětu. Při každé úloze nový obrazec. Ať nejsou všecky obrazce stejné.

126. Napište za sebou všecky hrany kvádru. Začněte hranou AB, potom pište hrany rovnoběžné s AB, dále hrany různoběžné s AB, konečně hrany mimoběžné s AB.

127. Opakujte úlohu 126, ale s hranou BF místo hrany AB.

128. Jmenujte bod přímky AD a bod přímky CF tak, aby si ty body byly co nejblíž.

129. Jakou vzájemnou polohu mají roviny ADF a BEH? Je jejich průsečnice rovnoběžná s některou hranou kvádru? Které stěny protne?

130. Jakou vzájemnou polohu k přímce AC mají jednotlivé tělesné úhlopříčky?

131. Je možné osmerým způsobem udat trojici hran tak, aby každé dvě hrany ve stejné trojici byly mimoběžné. Jedna taková trojice je AB, CG, EH. Dovedete najít všech sedm ostatních takových trojic?

132. Zvolte si dva protější vrcholy. Můžete proběhnout jedním tahem všecky ty hrany, které nejdou žádným z obou zvolených vrcholů?

Část druhá (pro II. třídu).

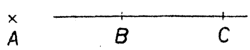
§ 14. Rýsování přímek.

Myšlená **čára** nemá tloušťku. Proto čáry, které rýsujeme v sešitě, musí býti tenké. V geometrii pracujeme pouze tvrdou tužkou. Tužka musí býti stále dobře ořezána.

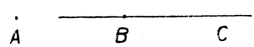
Čáry jsou **přímé** a **křivé.** Nás budou teď zajímati jen čáry přímé. Rýsujeme je podle **pravítka.** Pro geometrii je vhodné **pravítko trojúhelníkové.**

Slovem **přímka** označujeme celou neomezenou přímou čáru. Slovem **úsečka** označujeme přímou čáru na obou stranách omezenou.

Bod nemá velikost, jen určitou polohu. Body budeme značit velkými tiskacími písmeny. Dávejte si záležet na tomto **popisování bodů.** Umísťujte písmena právě tam, kam patří. Dělejte písmena právě tak velká, co stačí, aby byla hezky zřetelná. Navykněte si psát písmena pevné velikosti, pevného tvaru, pevného směru.



Obr. 52a.



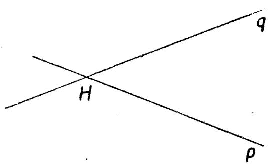
Obr. 52b.

Abychom si znázornili bod na dané přímce, přetneme přímku kratičkou úsečkou. (Děláme to od ruky, ale ať je přímá.) Bod, který není na dané přímce, znázorníme křížkem, t. j. dvěma kratičkými úsečkami, které se v něm protnou. Proč to děláme jako v obr. 52a a ne jako v obr. 52b?

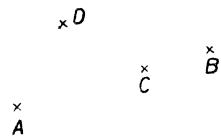
Říkáme: Bod **leží** na přímce. Přímka **prochází** bodem. Přímku **vedeme** nebo **sestrojujeme.**

Chceme-li si označit písmenem přímku nebo vůbec nějakou čáru, užíváme **malých písmen.** V obr. 53 máme narýsovány dvě přímky p a q. Všimněte si, jak jsou umístěna písmena p a q. Proč je píšeme až na kraj narýsované části přímky? Bod H v obr. 53 se jmenuje **průsečík** přímek p a q. Také můžeme říci: přímky p a q se **protínají** v bodě H.

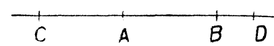
Jedním daným bodem procházejí rozmanité přímky. Ale dvěma danými body A a B už prochází právě jediná přímka. I když v obr. 54 není narýsována přímka, která prochází body A a B, můžeme si tu přímku představit a vidíme, že bod D na ní určitě neleží, kdežto bod C na ní asi leží. (Přesvědčte se přiložením pravítka.)



Obr. 53.



Obr. 54.



Obr. 55.

Říkáme: **Přímka je určena dvěma body.** Vyložte, co to znamená.

Místo, abychom označili přímku malým písmenem, označujeme ji velmi často tak, že napíšeme za sebou několik bodů, které na přímce leží. Na př. přímku v obr. 55 můžeme nazvati: přímka $CABD$ nebo přímka $DBAC$. Píšeme tedy a jmenujeme jednotlivé body přímky vždycky **popořádku.** Můžeme říci také, že je to přímka CAB nebo že je to přímka BA, ale není to ani přímka $ABCD$ ani to není přímka CBA.

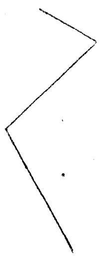
Na přímce AB v obr. 55 **omezují** body A, B úsečku, kterou nazýváme: úsečka AB (nebo také: úsečka BA). Říkáme, že A a B jsou **krajní body** úsečky AB.

Přímka AB se skládá ze tří částí: předně z úsečky AB, za druhé z **prodloužení úsečky** AB za bod A, za třetí z prodloužení úsečky AB za bod B. V obr. 55 je bod C na prodloužení úsečky AB za bod A a bod D je na prodloužení úsečky AB za bod B.

Přímka AB se jmenuje **spojnice** bodů A a B. Když vedeme přímku AB, říkáme, že vedeme (nebo sestrojujeme) spojnici bodů A a B nebo také stručně, že **spojujeme** bod A s bodem B.

Čára v obr. 56 není přímá. Ale bylo by nehezké říkat jí křivá. Říkáme, že je to čára **lomená.** Jak byste vyložili ústně (bez ukazování na obrázek), co je to lomená čára?

Zvolte si v sešitě dva body A, B (ne příliš blízko u sebe). Máte sestrojit jejich spojnici. Vezměte pravítko do levé ruky a



Obr. 56.

pohybujte jím zlehka, až je umístíte do správné polohy. V této poloze přidržte pevně levou rukou pravítko a tím také sešit. Do pravé ruky vezměte nyní tužku a rýsujte. Tužku držte pevně, ale netlačte ji do papíru; rýsování není rytí! Tužka je při rýsování velmi mírně nakloněna vpřed a neopírá se o horní, nýbrž o dolní hranu pravítka. Rýsujeme volným pohybem a vždycky jedním tahem celou přímku. Obyčejně rýsujeme od levé strany k pravé. Pravítko se dá přiložit k sestrojované přímce s jedné nebo druhé strany. Přikládejte pravítko tak, aby přímka, kterou máte rýsovat, nepadla do stínu pravítka.

Máte-li danou úsečku prodloužit, přiložte pravítko tak, aby se dotýkalo celé už narýsované části přímky. Úsečku velmi krátkou je těžké přesně prodloužit.

Celá přímka je neomezená a nedá se do sešitu narýsovat. Ale když máte spojit dva dané body A a B, nerýsujte nikdy pouze úsečku AB, nýbrž přímou čáru, která na obě strany přesahuje úsečku AB. Když si to hned teď budete navykat, budete jen zřídka musit při složitějších úlohách prodlužovat už narýsované čáry a zvýšíte přesnost.

Vaše obrazce v sešitě musí býti úhledné a přesné; také to bude mít vliv na váš prospěch. Rýsujte obrazce veliké, mnohem větší nežli jsou obrazce v této knížce.

Mimo sešit noste na geometrii pokaždé ještě několik listů čistého papíru.

Vedle rýsování pravítkem je důležité také rýsování od ruky. Obrazce od ruky nebudou ovšem přesné, ale musí býti úhledné. Přímé čáry ať vypadají přímé.

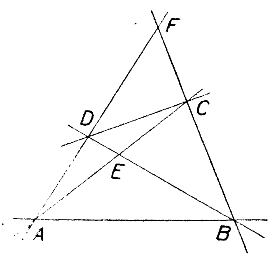
Cvičení k § 14.

Poznámka. Jako loni tak i letos budete si zapisovati do slovníčka nové geometrické výrazy a geometrická rčení. V prvém cvičení každého paragrafu jsou uvedeny výrazy, které se v tom paragrafu vyskytují. Také ty výrazy, které znáte z loňska, jsou zde uvedeny znovu.

133. Zapište do slovníčka: Přímá čára, křivá čára, lomená čára. Přímka AB, úsečka AB. Přímka p je spojnice bodů H a K. Body E, F a G leží na přímce t. Přímky r, s a u procházejí bodem P. Bod R je na prodloužení úsečky ST za bod S. Úsečka má dva krajní body. Přímky a a c se protínají v bodě B; bod B je průsečík přímek a a c. Přímka $RSTU$ neboli přímka $UTSR$.

134. Z kolika úseček se skládají písmena **A, E, N**? Která jiná písmena se skládají jen z úseček? Napište nejdříve písmena složená ze dvou úseček, potom ze tří, potom ze čtyř.

135. Zvolte si dva body A a B (hezky daleko od sebe). Spojte je dvakrát, přikládajíce pravítko pokaždé s jiné strany. Spojujte pozorně, aby přímka, kterou rýsujete, opravdu přesně procházela i bodem A i bodem B. Je-li vaše pravítko opravdu přímé, musí se obě spojnice úplně krýt. Proveďte takovou zkoušku se všemi třemi hranami svého pravítka. Pro každou hranu volte body A a B jinak.



Obr. 57.

136. Sestrojte si na volném listu papíru obrazec podobný obr. 57, ale mnohem větší. Zvolte si napřed body A, B, C a D, ovšem v takové poloze, aby se vám celý obrazec vešel na list. Potom propíchněte papír v bodech A, B, C a D a udělejte si stejný obrazec na rubu papíru. Když jste přesně rýsovali, musí body E a F na líci přesně splynout s body E a F na rubu. Přesvědčte se propíchnutím v bodech E a F. Nevyšlo-li vám to, opakujte na novém listě papíru a rýsujte pozorněji.

137. Rozhodněte pomocí obrázku od ruky, kolik spojnic můžete rýsovat, když si zvolíte pět bodů. Popište spojnice malými písmeny. Z vašeho obrázku musí býti docela zřetelné, ke které přímce které písmeno patří.

Úlohy 138 a 139 čtěte pomalu a pozorně. Při čtení si dělejte předběžný obrázek od ruky, a to na volném papíře a hezky velký. Nesmíte číst celou úlohu najednou, nýbrž po malých částech a postupně si obrázek doplňujte. Teprve potom rýsujte do sešitu pravítkem. Zas velký obrazec!

138. Zvolte si přímku ABC a přímku DEF. (Volte je tak, aby se proťaly teprve v myšleném prodloužení sešitu.) Označte X průsečík přímek AE a BD. Označte Y průsečík přímek BF a CE. Označte Z průsečík přímek AF a CD. Spojte X s Y. Zapište, co pozorujete.

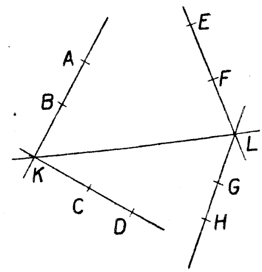
139. Zvolte body A, B, C, D a E tak, aby AEB a CED byly přímky. (Jak to provedete?) Na úsečce AC zvolte bod F. Na úsečce BC zvolte bod G. Označte H průsečík přímek AE a DF. Označte K průsečík přímek BE a DG. Označte X průsečík přímek CH a EF. Označte Y průsečík přímek CK a EG. Označte Z průsečík přímek AX a BY. Zapište, co pozorujete.

140. Opakujte úlohu 138 v jiné poloze.

141. Opakujte úlohu 139 v jiné poloze.

142. Sestrojte si obrazec podobný obr. 58 (ovšem větší). Dovedli byste popsat jedinou větou všecko, co jste sestrojili?

Průsečík K přímek AB a CD jsme spojili s průsečíkem L přímek EF a GH.



Obr. 58.

§ 15. Měření a přenášení délek.

Délku úsečky AB označíme $\overline{AB}$. Najdeme ji měřítkem. Každý žák musí míti své měřítko. Přiložíme měřítko tak, aby se jeho začátek kryl třeba s bodem A; délku potom čteme u bodu B. Délku vyjadřujeme buďto v **centimetrech** nebo v **milimetrech.**

Jak víte, je na př.

$$37 \text{ mm} = 3{,}7 \text{ cm} = 3 \text{ cm } 7 \text{ mm}.$$

Posledního způsobu psaní se málo užívá. Je to příliš zdlouhavé.

Znáte také větší **jednotky délkové:** dm, m, km.

Vzdálenost dvou bodů A a B není nic jiného než délka úsečky AB.

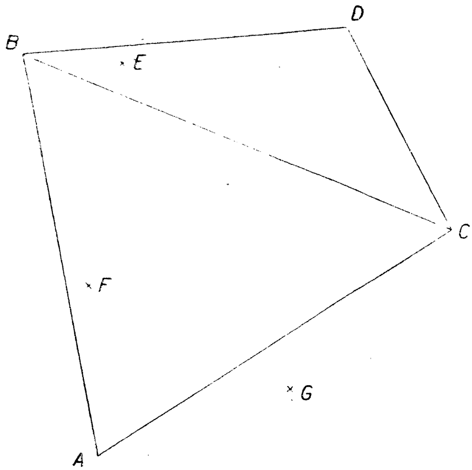
Narýsujte si přímku p a zvolte si na ní bod C. Máte **nanésti** na přímku p od bodu C délku 37 mm. Nejprve přiložíte správně měřítko. Potom přidržíte měřítko pevně levou rukou, dobře si všimnete polohy toho bodu na přímce p, který je vzdálen 37 mm od bodu C a na tom místě uděláte velmi jemnou tečku. Po odsunutí měřítka si vyznačíte tu polohu, ve které jste udělali tečku, obvyklou příčnou úsečkou; tečka musí při tom zmizet beze stopy. Nalezený bod pak označte D. Na přímce p je mimo bod D ještě jeden bod E vzdálený 37 mm od bodu C. Bod E najdeme stejně jako jsme našli bod D. Proveďte to. Jak velká musí býti vzdálenost $\overline{DE}$? Přeměřte.

Často se stává, že délka, kterou máme nanésti, není dána číselně, nýbrž že je to vzdálenost $\overline{AB}$ daných bodů A a B. V takovém případě nikdy neužíváme měřítka. Můžeme užíti kružítka; o tom se zmíníme v následujícím paragrafu. Stačí však také proužek papíru. Ten přiložíme nejprve k přímce AB a vytkneme si na něm příčnými čárečkami polohu bodů A a B. Potom přiložíme proužek k dané přímce p a vytkneme si zase polohu bodu D nejprve jemnou tečkou a potom příčnou úsečkou.

Pomocného proužku papíru užijeme také, když délka, o kterou běží, je sice předepsána číselně, ale má se nanášet několikrát.

V obr. 59 se vyskytuje **trojúhelník** ABC. Body A, B a C jsou **vrcholy** trojúhelníka ABC. Úsečky AB, BC a CA jsou **strany** trojúhelníka ABC. Která strana je nejdelší? Odpovězte a teprv potom se přesvědčte o správnosti své odpovědi. Která strana je nejkratší? Který trojúhelník vidíte ještě v obr. 59? Jmenujte jeho strany.

Trojúhelník je **plocha.** Všecky tři strany trojúhelníka dohromady tvoří čáru (lomenou), která se jmenuje **obvod** trojúhelníka. V obr. 59 je bod F **uvnitř** trojúhelníka ABC a body D, E a G jsou **vně** trojúhelníka ABC.



Obr. 59.

Nevšímejte si bodů E, F a G. Celý obr. 59 je **čtyrúhelník** $ABDC$. Jmenujte jeho vrcholy a jeho strany. Úsečka BC je jedna z obou **úhlopříček** čtyrúhelníka $ABDC$. Druhá úhlopříčka AD není v obrazci vyznačena.

Vrcholy čtyrúhelníka píšeme vždycky **popořádku.** Tedy můžeme říci, že máme v obr. 59 čtyrúhelník $BDCA$ nebo $BACD$, ale špatně je $ABCD$ nebo $BADC$. Proč byla taková poznámka zbytečná u trojúhelníka?

Délku obvodu trojúhelníka ABC (krátce se říká **obvod** místo délka obvodu) můžeme počítati tak, že změříme všecky strany a výsledky sečteme. Ale je výhodnější prováděti sčítání **graficky** (od řeckého slova grafein, které znamená psáti nebo rýsovati): narýsujeme pomocnou přímku $HKLM$, naneseme na ni (pomocí proužku papíru)

$$\overline{HK} = \overline{AB},\ \overline{KL} = \overline{BC},\ \overline{LM} = \overline{CA},$$

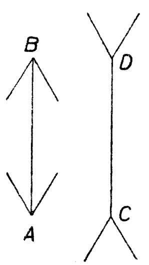
načež změříme $\overline{HM}$ a dostaneme hledaný obvod. Proč je tento způsob lepší? Stejnou cestou najdeme také obvod $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC} + \overline{CA}$ čtyrúhelníka $ABDC$.

Jistě sami přijdete na to, jak se provádí **grafické odčítání**, třeba $\overline{AB} - \overline{CD}$, a **grafické násobení**, třeba $3 . \overline{AB}$ nebo $4 . \overline{CD}$.

Narýsujte nějaký **pětiúhelník.** Popište jeho vrcholy nějakými písmeny. Jmenujte vrcholy ve správném pořádku; v nějakém jiném správném pořádku. Opakujte to se **šestiúhelníkem.**

Cvičení k § 15.

143. Zapište do slovníčka: Délka $\overline{AB}$ úsečky AB neboli vzdálenost bodů A a B. Trojúhelník má tři vrcholy a tři strany. Čtyrúhelník má čtyři vrcholy a čtyři strany. Pětiúhelník má pět vrcholů a pět stran. Šestiúhelník má šest vrcholů a šest stran. Čtyrúhelník má dvě úhlopříčky. Obvod trojúhelníka. Obvod čtyrúhelníka. Grafické sčítání úseček. Grafické odčítání úseček. Grafické násobení úsečky číslem. Čáry a plochy.



Obr. 60.

144. Narýsujte si vedle sebe dvě přesně stejně dlouhé úsečky AB a CD. Připojte další úsečky jako v obr. 9. Co se zdá?

Úlohy 145 až 151 se týkají obr. 59. Každý žák provede měření samostatně a zapíše svůj výsledek do sešitu. Potom se porovnávají výsledky třídy.

145. Změřte strany trojúhelníka ABC.

146. Změřte strany trojúhelníka BCD.

147. Najděte graficky obvod trojúhelníka ABC.

148. Najděte graficky obvod trojúhelníka BCD.

149. Najděte graficky obvod čtyrúhelníka $ABDC$.

150. Najděte graficky napřed součet a potom rozdíl obou úhlopříček čtyrúhelníka $ABDC$.

151. Najděte graficky délku $3 . \overline{AC} - 2 . \overline{AB}$.

152. Naneste na přímku délky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ vesměs rovné 11 mm. Které úsečky ve vašem obrazci musí býti stejně dlouhé jako AC? Přeměřte. Opakujte s úsečkou AD. Jak dlouhá musí býti úsečka AF? Přeměřte.

153. Zvolte si bod S a veďte jím dvě přímky. Na jednu z nich naneste $\overline{AS} = \overline{SB} = 57$ mm; na druhou naneste $\overline{CS} = \overline{SD} = 36$ mm.

Spojte a změřte AC, AD, BC, BD. Zapište, co pozorujete.

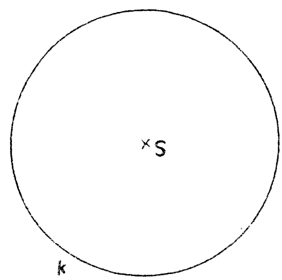
154. Zvolte si na obvodě čtyrúhelníka $ABCD$ dva body H a K tak, aby nebyly oba na stejné straně čtyrúhelníka. Nač rozdělí úsečka HK čtyrúhelník $ABCD$? Je několik různých výsledků podle toho, jak si zvolíte body H a K. Naznačte jednotlivé možnosti různými obrazci od ruky.

155. Narýsujte si pětiúhelník $HKLMN$. Přemýšlejte, kolik asi má úhlopříček. Potom je všecky narýsujte.

156. Narýsujte si šestiúhelník $ABCDEF$. Kolik je úhlopříček, které rozdělí šestiúhelník ve dva čtyrúhelníky? Jmenujte je všecky a jednu z nich narýsujte. Jsou ještě jiné úhlopříčky? Kolik jich je? Jmenujte je všecky a jednu z nich narýsujte. Jak ta rozdělí šestiúhelník? Kolik je všech úhlopříček dohromady?

§ 16. Rýsování kružnic.

Nejdůležitější křivá čára je **kružnice** (v. obr. 61). Vnitřek kružnice je plocha, která se jmenuje **kruh**. Pamatujte si: kružnice je čára, kruh je plocha; záměna těchto dvou slov se ve škole považuje za hrubou chybu. Uvnitř kružnice je mimo jiné body zejména její střed. V obr. 61 je kružnice označena písmenem k a její střed je označen písmenem S (počátečním písmenem slova střed). Spojujeme-li střed kružnice s jednotlivými body na kružnici, dostáváme **poloměry** kružnice. Všecky poloměry kružnice jsou stejně dlouhé; **délka poloměru** (obyčejně se říká krátce poloměr) kružnice se velmi často značí písmenem r. Je to začáteční písmeno latinského slova **radius,** které právě znamená poloměr.



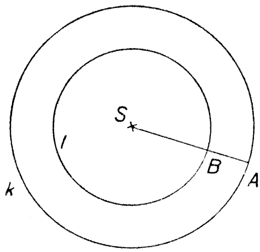
Obr. 61.

Všecky body na kružnici k mají od středu S kružnice k stejnou vzdálenost r. Jakou vzdálenost od středu S mají body uvnitř k? Jakou vzdálenost od středu S mají body, které jsou vně kružnice k?

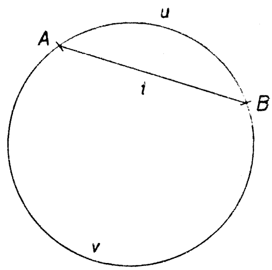
Kružnici rýsujeme **kružítkem.** Máme-li narýsovati kružnici, která má střed v daném bodě S a má daný poloměr r, nejprve rozevřeme kružítko tak, aby kovový hrot a hrot tužky měly vzdálenost r. Než začneme rýsovati, přesvědčíme se, že jsme kružítko správně rozevřeli. (To je důležité zejména tehdy, když poloměr je buďto hodně malý nebo hodně velký.) Je-li kružítko správně rozevřeno, zabodneme jemně kovový hrot do středu S a rýsujeme pravou rukou pomalu jedním tahem celou kružnici. Kružítko je při rýsování velmi mírně nakloněno vpřed; obyčejně rýsujeme ve směru pohybu hodinových ručiček. Kružítko je v bodě S jen jemně zabodnuto, tedy nesmí snad dokonce propíchnouti papír. Aby nám nevyklouzlo, můžeme je u bodu S zlehka přidržovat levou rukou. Pravá ruka drží kružítko nahoře (za hlavici); musíme totiž dbáti toho, abychom zachovali pevné rozevření ramen.

V obr. 62 máme dvě **soustředné** kružnice k a l. Plocha mezi oběma soustřednými kružnicemi se jmenuje **mezikruží.** Mezikruží má všude stejnou **šířku** ($\overline{AB}$ v obr. 62). Jak se vypočte šířka mezikruží?

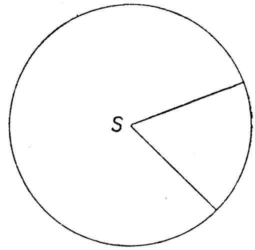
Kružnice se **sestrojuje** nebo se **opisuje.**



Obr. 62.



Obr. 63.



Obr. 64.

Když si na kružnici zvolíme dva body A a B, rozdělí se nám kružnice na dva **oblouky** (u a v v obr. 63). Úsečka AB se jmenuje **tětiva** (t v obr. 63). K jednomu oblouku patří jediná tětiva, k jedné tětivě patří dva oblouky. Odkud jsou vzaty názvy oblouk a tětiva? Kruh je tětivou rozdělen na dvě plochy, které se jmenují **kruhové úseče.**

Také dvěma poloměry můžeme kruh rozdělit ve dvě plochy (viz obr. 64). Těmto plochám říkáme **kruhové výseče.**

Tětiva, která prochází středem, jmenuje se **průměr.** Všecky průměry kružnice jsou stejně dlouhé. **Délka průměru** (obyčejně se říká krátce průměr) se často označuje písmenem d. Je to začáteční písmeno řeckého slova diametros, které znamená průměr. Jest

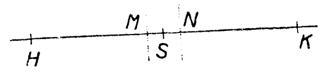
$$d = 2r, \quad r = \tfrac{1}{2}d,$$

t. j. průměr je dvojnásobek poloměru, poloměr je polovina průměru.

Průměr rozdělí kruh ve dva **polokruhy.** Krajní body průměru rozdělí kružnici ve dvě **polokružnice.**

Máme-li sestrojit kružnici **nad průměrem** HK, musíme nejprve úsečku HK **rozpůlit** nebo, jak se také říká, najít její **střed** S: ten bude středem kružnice. Rozpůlit úsečku můžeme **zkusmo.** Vytkneme si nejprve bod M, který se nám od oka jeví jako střed úsečky HK

a naneseme $\overline{KN} = \overline{HM}$ (v obr. 65). Úsečka MN bude docela kratičká (mnohem menší než v obr. 65) a snadno už najdeme od oka její střed S, který je také středem úsečky HK. Vysvětlete proč. Příčky vyznačující body M a N (tečkované v obr. 65) rýsujeme velmi tenké a velmi krátké, aby je bylo sotva vidět. Také je ovšem nepopisujeme žádnými písmeny. (V obr. 65 jsou tyto body označeny písmeny jen pro jasnost výkladu.)



Obr. 65.

Je-li délka průměru dána číselně, pak ovšem nepůlíme, nýbrž vypočteme poloměr.

Jiný způsob, jak rozpůlit úsečku HK, je tento. Přiložíme přímý proužek papíru k dané úsečce a vyznačíme si body, které se kryjí s body H a K. Potom proužek přeložíme v půli tak, aby se oba vyznačené body kryly. Nato přiložíme proužek papíru opět v původní poloze k úsečce HK a vyznačíme si ten bod S, kde byl papír přeložen.

Přenášení úseček pomocí proužku papíru bylo popsáno v odst. 15. Místo proužku papíru můžeme k témuž cíli užíti také kružítka. Sami popište jak. S tím souvisí malá úprava rozpůlení úsečky (viz obr. 65). Rozevřeme kružítko do délky, která se nám zdá asi polovinou délky HK a opíšeme s tím poloměrem malé obloučky kružnic ze středů H a K. Tím dostaneme zase body M a N a opět kratičkou úsečku MN rozpůlíme zkusmo.

Dovedli byste rozdělit úsečku zkusmo na tři stejné díly?

Ještě něco si zapamatujte: Když máte narýsovat kružnici, která nemá střed v daném bodě, nýbrž si máte střed zvolit buďto libovolně nebo někde na dané čáře, vždycky si napřed vyznačte střed. Stává se totiž často, že při rýsování dalších čar potřebujeme znát polohu středu.

Cvičení k § 16.

157. Zapište do slovníčka: Kružnice a kruh. Střed kružnice. Poloměr r a průměr d. Polokružnice a polokruh. Oblouk, tětiva a kruhová úseč. Bod uvnitř kružnice; bod na kružnici; bod vně kružnice. Střed úsečky. Rozpůliti úsečku. Soustředné kružnice. Mezikruží. Šířka mezikruží. Kruhová výseč.

158. Jaký je průměr kružnice, když poloměr je:
a) 4 cm; b) 9 mm; c) 47 mm; d) 32 mm; e) 1,5 cm; f) 6,3 cm; g) 5 dm; h) 2 m 5 dm?

159. Jaký je poloměr kružnice, když průměr je:
a) 6 cm; b) 48 cm; c) 54 mm; d) 3,6 mm; e) 7 cm; f) 43 mm; g) 5 dm; h) 1 m; i) 3 m 4 cm?

160. Zvolte bod S a sestrojte tři soustředné kružnice s poloměry 3 cm, 4 cm, 53 mm. Nepropíchli jste papír v bodě S? Veďte bodem S přímku $ABCSDEF$. (Body A, B atd. jsou na sestrojených kružnicích.) Vypočítejte (zpaměti), jak velké musí býti vzdálenosti

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CS}, \overline{SD}, \overline{DE}, \overline{EF},$$

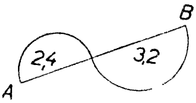
zapište a přeměřte. Opakujte měření s jinou volbou přímky. (Vedete ji ovšem zase středem S.)

V úlohách 161 až 165 máte sestrojit obrazce takového tvaru, jaké jsou v učebnici, ale větší. Velikost vašich obrazců je předepsána čísly udanými u tištěných obrazců. Udaná čísla znamenají centimetry, ale znak cm je vynechán. Říkáme krátce, že v obr. 66 až 70 **jednotka je 1 cm.**

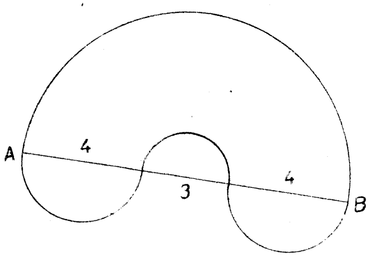
U každé z těchto úloh si vypočtěte délku $\overline{AB}$ a kontrolujte ji měřením ve svém obrazci.

162.

161.

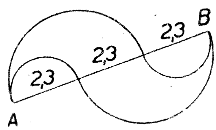


Obr. 66.



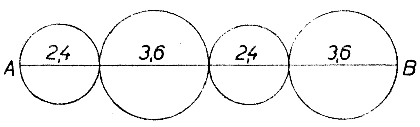
Obr. 67.

163.



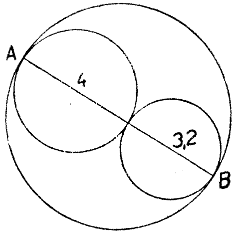
Obr. 68.

164.



Obr. 69.

165.

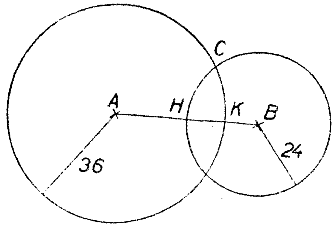


Obr. 70.

166. Sestrojte mezikruží šířky 27 mm tak, aby průměr vnitřní kružnice byl 42 mm. Přesvědčte se měřením, že vaše mezikruží má všude správnou šířku. Veďte středem S přímku $ABSCD$. (Body A, B, C, D jsou na sestrojených kružnicích.) Jak dlouhé musí býti úsečky AC a BD? Zapište a přeměřte.

167. Sestrojte dvě kružnice tak, aby vzdálenost středů byla přesně 5 cm. Prvá kružnice má míti poloměr 3 cm, druhá 4 cm. Veďte společnou tětivu AB. Změřte $\overline{AB}$ ve a zapište, co jste naměřili.

Úlohy 168 a 169 se vztahují k obr. 71, ve kterém je jednotka 1 mm.



Obr. 71.

168. Jaká musí býti délka $\overline{AB}$, aby vyšlo $\overline{HK} = 14$ mm? Jaký bude potom obvod trojúhelníka ABC? Sestrojte.

169. Jaká musí býti délka $\overline{HK}$, aby trojúhelník ABC měl obvod 11 cm? Sestrojte.

170. Opište kružnici k ze středu S s poloměrem 27 mm. Zvolte si čtyři body A, B, C a D na kružnici k. Opište ze středů A, B, C a D kružnice tak, aby procházely bodem S. Jak velké musí býti jejich poloměry?

171. Zvolte si bod A a veďte jím kružnici k s poloměrem 5 cm. (Jak si tedy musíte zvoliti střed S kružnice k?) Najděte na kružnici k body B a C tak, aby obě tětivy AB a AC měly délku přesně 8 cm. Veďte průměr AD kružnice k. Změřte tětivy DB a DC a zapište, co jste naměřili.

172. Zvolte si trojúhelník ABC (dosti veliký). Najděte střed H strany AB a střed K strany AC. Označte P průsečík přímek CH a BK. Změřte délky $\overline{P,B}$ $\overline{PK}$, $\overline{CP}$, $\overline{PH}$. Vyšlo vám $\overline{BP} = 2 \,.\, \overline{PK}$, $\overline{CP} = 2 \,.\, \overline{PH}$?

173. Opakujte cvičení 147, 148, 149 (str. 48), ale neužívejte proužku papíru, nýbrž kružítka.

§ 17. Konstrukce trojúhelníka.

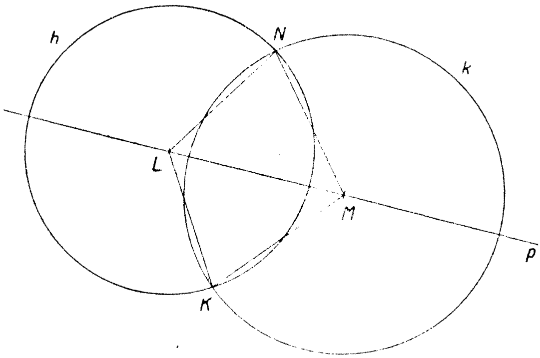
Slovo **konstrukce** pochází z latiny. V geometrii se ho často užívá. Znamená sestrojení.

Sestrojíme si trojúhelník LMN tak, aby jeho strany měly délky

$$\overline{LM} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{LN} = 48 \text{ mm}, \quad \overline{MN} = 53 \text{ mm}.$$

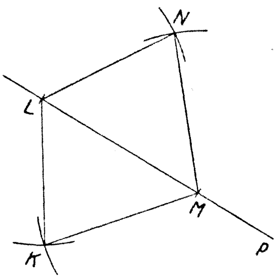
Zvolte si nejprve (asi uprostřed sešitu) přímku p a na ní dva body L a M vzdálené 6 cm od sebe. Máme už dva vrcholy L a M a jednu stranu LM trojúhelníka LMN. Kde musí býti třetí vrchol N? Protože má býti $\overline{LN} = 48$ mm, musí bod N ležeti na kružnici h opsané ze středu L s poloměrem 48 mm. Narýsujte si kružnici h. Protože má býti $\overline{MN} = 53$ mm, musí bod N ležeti na kružnici k opsané ze středu M s poloměrem 48 mm. Narýsujte si kružnici k. Kružnice h a k se vám protnou ve dvou bodech. Zvolte si jeden z nich a označte jej N.

Sestrojte si úsečky LN a MN a máte žádaný trojúhelník LMN. Úloze vyhovuje ovšem nejen trojúhelník LMN, ale také trojúhelník LMK, který dostanete, když místo bodu N vezmete druhý průsečík K kružnic h a k.



Obr. 72a.

Obyčejně nerýsujeme při této úloze kružnice h a k celé jako v obr. 72a, nýbrž pouze malé oblouky v blízkosti průsečíků jako v obr. 72b.

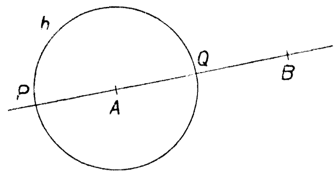


Obr. 72b.

Nyní si narýsujte na list papíru trojúhelník ABC s tak velkými stranami jako má trojúhelník ABC v učebnici v obr. 59 (str. 47). Neužívejte číselných hodnot délek stran, nýbrž přenášejte délky z obr. 59 kružítkem. Proveďte to celkem třikrát. Poprvé začněte konstrukci se stranou AB, podruhé se stranou BC, potřetí se stranou CA. Volte místo tak, aby vaše trojúhelníky nezasahovaly jeden do druhého. Vystřihněte si všecky tři trojúhelníky a přesvědčte se, že je můžete položit na sebe tak, že se přesně kryjí. Přesvědčte se také, že každým vystřiženým trojúhelníkem se dá přesně zakrýt trojúhelník ABC z učebnice.

Narýsujte si v sešitě úsečku AB dlouhou 58 mm. Budeme se zajímat o trojúhelníky ABC, které tedy mají dva vrcholy A a B všem společné. Strana AB bude míti u všech našich trojúhelníků stejnou délku $\overline{AB} = 58$ mm. Ale také strana AC bude u všech trojúhelníků, o které se budeme zajímat, stejně dlouhá, a to $\overline{AC} = 27$ mm. Naproti tomu délka $\overline{BC}$ se bude od trojúhelníka k trojúhelníku měnit.

Kde musí ležet vrchol C? Protože už máme bod A a protože má býti $\overline{AC} = 27$ mm, musí bod C ležet na kružnici h se středem A a poloměrem 27 mm. Narýsujte si kružnici h. Přímka AB protne kružnici h ve dvou bodech. Označte je P a Q jako v obr. 73. (Tedy Q je blíž k B než je P). Smíme si zvolit bod C libovolně na kružnici h?



Obr. 73.

Ne docela, protože bod C nesmí přijít ani do polohy P ani do polohy Q. Jinak je poloha bodu C na kružnici h libovolná.

Body P a Q rozdělí h na dvě polokružnice. Sledujte pohyb bodu C po jedné z těch polokružnic od polohy Q do polohy P. Přesvědčte se měřením, že délka $\overline{BC}$ stále vzrůstá. Přesvědčte se, že je to pravda také, když se bod C pohybuje po druhé polokružnici od polohy Q do polohy P. Tedy ať si už zvolíme bod C ve kterékoli dovolené poloze, rozhodně bude délka $\overline{BC}$ větší než $\overline{BQ}$ a menší než $\overline{BP}$, což píšeme

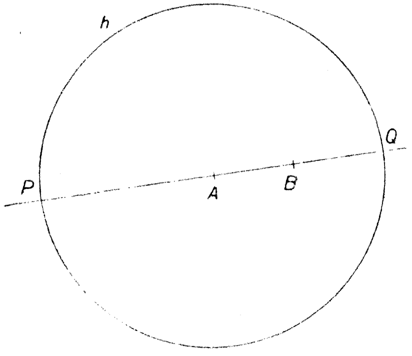
$$\overline{BC} > \overline{BQ}, \quad \overline{BC} < \overline{BP}.$$

Z obrázku vidíte, že

$$\overline{BQ} = \overline{AB} - \overline{AQ} = 31 \text{ mm}, \quad \overline{BP} = \overline{AB} + \overline{AP} = 85 \text{ mm}.$$

Tedy délka $\overline{BC}$ strany BC trojúhelníka ABC je předně menší než součet 85 mm délek stran AB a AC a zadruhé je $\overline{BC}$ větší než rozdíl 31 mm délek stran AB a AC. V těchto mezích si můžeme délku $\overline{BC}$ libovolně zvolit. Tedy si nemůžeme zvolit ani $\overline{BC} = 3$ cm (to je příliš málo) ani $\overline{BC} = 9$ cm (to je příliš mnoho), ale můžeme si zvolit třeba $\overline{BC} = 5$ cm.

Naše číselné údaje byly $\overline{AB} = 58$ mm, $\overline{AC} = 27$ mm, tedy $\overline{AB} > \overline{AC}$. Zvolme si teď naopak $\overline{AB} = 27$ mm, $\overline{AC} = 58$ mm, tedy $\overline{AB} < \overline{AC}$. Budeme míti trochu jiný obrazec (viz obr. 74), ale dojdeme zase stejnou cestou ke stejnému výsledku. Proveďte to podrobně. Proberte také podrobně případ, kdy $\overline{AB} = \overline{AC}$, na př. $\overline{AB} = 45$ mm, $\overline{AC} = 45$ mm.



Obr. 74.

Vyslovme si výsledek, který si musíte dobře zapamatovat. (Procvičíme si jej na řadě příkladů.) Délky všech tří stran trojúhelníka si nesmíme zvolit úplně libovolně. Smíme si libovolně zvoliti délky dvou stran. Délka třetí strany nesmí býti ani příliš veliká ani příliš malá. Třetí strana musí býti kratší nežli součet prvních dvou. Třetí strana musí býti delší nežli rozdíl prvních dvou. V těchto mezích se smí zvolit libovolně také délka třetí strany.

Trojúhelník, který má všecky tři strany nestejně dlouhé, jmenuje se **různostranný.**

Jsou-li dvě strany trojúhelníka stejně dlouhé, říkáme, že je to trojúhelník **rovnoramenný.** Těm dvěma stranám, které jsou stejně dlouhé, říkáme obyčejně **ramena** a třetí strana se pak jmenuje **základna.**

Trojúhelník, který má všecky tři strany stejně dlouhé, jmenuje se trojúhelník **rovnostranný.**

Cvičení k § 17.

174. Zapište do slovníčka: Konstrukce znamená sestrojení. Různostranný trojúhelník. Rovnoramenný trojúhelník, ramena, základna. Rovnostranný trojúhelník. $17 < 24$ znamená, že číslo 17 je menší než číslo 24. $24 > 17$ znamená, že číslo 24 je větší než číslo 17.

175. Opište tyto trojice délek:

a) 24 mm, 37 mm, 41 mm.
b) 24 mm, 47 mm, 7 cm.
c) 24 mm, 57 mm, 90 mm.
d) 34 mm, 21 mm, 12 mm.
e) 1 dm, 2 cm, 3 mm.
f) 1 dm, 74 mm, 26 mm.

U každé trojice zapište, může-li znamenati délky tří stran trojúhelníka. (Pište pouze Ano nebo Ne.)

176. Dvě strany trojúhelníka mají délky 97 mm a 46 mm. Délku třetí strany neznáme. Co můžete říci o obvodě trojúhelníka?

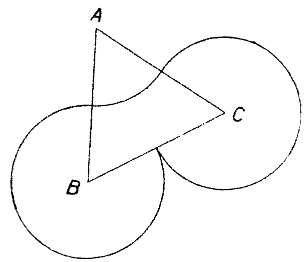
177. Opakujte s délkami 4 m 37 cm, a 6 m 58 cm.

178. Opište tyto dvojice délek:

a) 37 cm, 57 cm.	b) 42 cm, 35 cm.
c) 5 dm, 32 cm.	d) 47 cm, 3 dm.
e) 1 dm, 368 mm.	f) 83 mm, 125 cm.

U každé dvojice zkoumejte, může-li znamenati délky dvou stran trojúhelníka s obvodem 1 m. (Zapište pouze buďto délku třetí strany nebo slovo Ne.)

179. Zvolte si libovolný trojúhelník ABC. Sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABH, BCK, CAL tak, aby nezasahovaly dovnitř trojúhelníka ABC. Spojte CH, AK, BL a zapište, co pozorujete. Změřte $\overline{CH}$, $\overline{AK}$, $\overline{BL}$ a zapište, co pozorujete.



Obr. 75.

180. Opakujte znovu s tím rozdílem, že teď rovnostranné trojúhelníky ABH, BCK, CAL budou zasahovati dovnitř trojúhelníka ABC.

181. Sestrojte obrazec podobný obr. 75. Trojúhelník ABC je rovnostranný. V obr. jsou oblouky kružnic, které mají míti všecky poloměr 26 mm.

Obr. 76.

182. Zvolte délku $\overline{AB} = 42$ mm. Sestrojte všecky rovnoramenné trojúhelníky se základnou AB a s délkou ramene 34 mm. Sestrojte dále všecky rovnoramenné trojúhelníky s délkou základny 34 mm, které mají jedno rameno v poloze AB. Kolik trojúhelníků budete celkem sestrojovati?

183. Opakujte úlohu 182, ale vyměňte mezi sebou délky 42 mm a 34 mm.

184. Zvolte délku $\overline{AB} = 4$ cm. Kde musí ležeti střed kružnice s poloměrem 3 cm, má-li tato kružnice procházeti oběma body A a B? Kolik je takových kružnic? Sestrojte je.

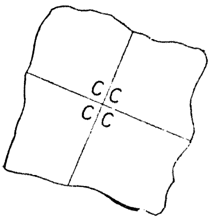
185. Sestrojte obrazec podobný obr. 76. Má býti $\overline{HK} = 32$ mm, dvě kružnice mají mít poloměr 32 mm a třetí má mít poloměr 43 mm.

§ 18. Rýsování kolmic.

Vezměte list papíru. Můžete si na něm snadno opatřit docela přesnou přímku bez tužky a bez pravítka. Stačí, když papír ostře přehnete. Přesvědčte se pravítkem, že jste opravdu dostali přímku. Označte si ji p.

Nyní přeložte papír znovu, ale tak, aby se vám část přímky p, která je na horním papíře, přesně kryla s tou částí přímky p, která je na dolním papíře. Dostali jste novou přímku, kterou označte q. Když byl papír přeložen podél přímky q, měli jsme přesně nad sebou dvě části přímky p. Přesvědčte se, že také obráceně, když přeložíte papír podél přímky p, budete míti přesně nad sebou dvě části přímky q. Dvě přímky, které jsou v takové poloze jako přímka p a q, jmenují se **přímky k sobě kolmé.** Také se říká, že přímky p a q **stojí na sobě kolmo.** Stručně se to zápisuje takto:

$$p \perp q \text{ nebo } q \perp p.$$



Obr. 77.

Označte C průsečík přímek p a q. Napište C čtyřikrát jako v obr. 77. Nyní rozstřihněte papír i podél přímky p i podél přímky q. Dostanete čtyři kusy papíru, které můžete položit na sebe tak, že se v blízkosti bodu C všecky přesně kryjí. Proveďte to. Říkáme, že máme čtyři **pravé úhly.** Bod C je **vrchol** těch pravých úhlů.

Vezměte nový list papíru a opatřte si na něm přehnutím přímku a. Propíchněte papír ve dvou bodech: v bodě B, který si zvolte na přímce a, v bodě C, který si zvolte mimo přímku a. Přehnutím papíru si snadno opatříte dvě přímky kolmé k přímce a tak, že první z nich (označte ji b) prochází bodem B a druhá (označte ji c) prochází bodem C. Přímka c protne přímku a v bodě, který označte P. Říkáme, že jsme

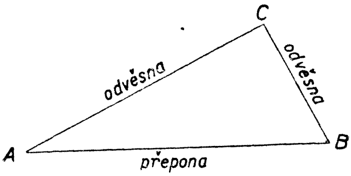
vztyčili v bodě B kolmici b k přímce a a že jsme
spustili s bodu C kolmici c na přímku a.

Bod P se nazývá **pata** kolmice spuštěné s bodu C na přímku a. Proč právě pata?

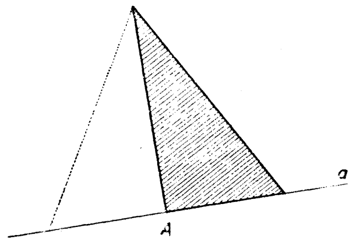
Když trojúhelník ABC má dvě strany AC a BC k sobě kolmé (viz obr. 78), říkáme, že je to **trojúhelník pravoúhlý.** Strana AB, tedy ta strana, která je proti pravému úhlu, jmenuje se **přepona** pravoúhlého trojúhelníka. Strany AC a BC, tedy ty strany, které jsou při pravém úhlu, jmenují se **odvěsny** pravoúhlého trojúhelníka.

Vaše trojúhelníkové pravítko je pravoúhlé a dá se ho tedy užít k rýsování kolmic. Máme-li na př. k přímce a vztyčiti kolmici v bodě A, který jsme si zvolili na přímce a, můžeme to provésti (viz obr. 79) tak, že přiložíme trojúhelníkové pravítko tak, aby vrchol pravého úhlu byl v poloze A a aby se jedna odvěsna kryla s přímkou a. Žádanou kolmici pak můžeme rýsovati podél druhé odvěsny.

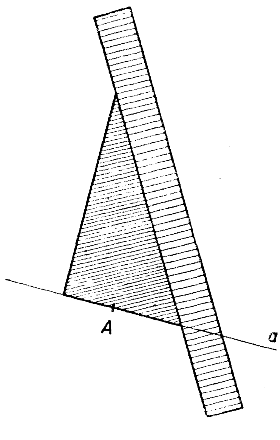
Je důležité si vyzkoušet, že vaše pravítko je opravdu pravoúhlé. Za tím účelem přiložte pravítko ještě jednou v poloze naznačené v obr. 79 tečkovanou čarou a rýsujte kolmici znovu. Je-li vaše pravítko správné, musí obě kolmice splynout. Kdo nemá na svém pravítku přesný pravý úhel, musí si koupit nové.



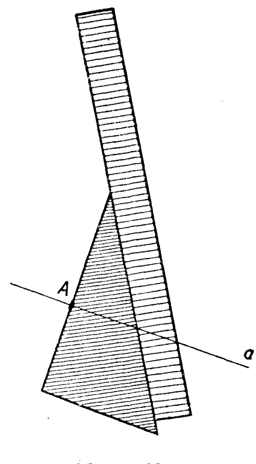
Obr. 78.



Obr. 79.

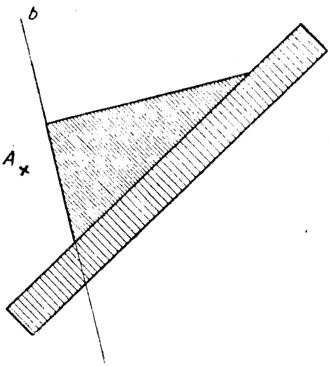


Obr. 80a.

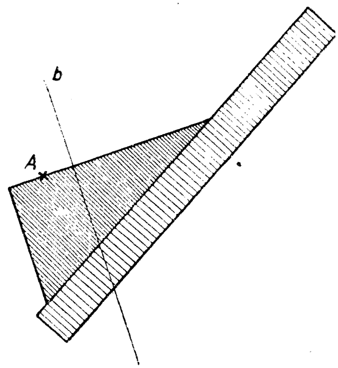


Obr. 80b.

Popsaný způsob vztyčování kolmic je sice jednoduchý, ale má tu vadu, že právě v blízkosti paty musíme kolmici teprve prodlužovat, což je na úkor přesnosti. Proto nebudeme tohoto způsobu vůbec užívat a procvičíme si způsob jiný, který je jen o malinko složitější. Potřebujeme k němu vedle trojúhelníkového pravítka s přesným pravým úhlem ještě **pomocné pravítko,** které nemusí (ale může) být trojúhelníkové. Máme-li zase v bodě A, který byl zvolen na přímce a, vztyčit k této přímce kolmici, umístíme trojúhelníkové pravítko tak jako v obr. 80a. Pozor, aby se jedna odvěsna opravdu přesně kryla s přímkou a! Pak přidržíme trojúhelníkové pravítko pevně levou rukou a pravou přisuneme k přeponě pomocné pravítko. Nato přidržíme pravou rukou pevně pomocné pravítko a levou posouváme zlehka trojúhelníkové pravítko až do polohy, ve které (viz obr. 80b) druhá odvěsna prochází bodem A. Potom přitiskneme



Obr. 81a.



Obr. 81b.

trojúhelníkové pravítko pevně levou rukou, pravou ruku uvolníme*) a rýsujeme žádanou kolmici. Podobně si počínáme (viz obr. 81), když máme s bodu A spustit kolmici na přímku b.

Zvolte si přímku b a mimo ni bod A. Spusťte s bodu A kolmici na přímku b a její patu označte P. Změřte vzdálenost $\overline{AP}$. Zvolte si na přímce b ještě třeba tři body B, C, D, a přesvědčte se, že délky $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ jsou větší než délka $\overline{AP}$. Pata kolmice spuštěné s bodu A na přímku b je ze všech bodů přímky b nejblíž k bodu A. Z tohoto důvodu se jmenuje délka $\overline{AP}$ **vzdálenost bodu A od přímky b.**

Každá odvěsna pravoúhlého trojúhelníka je kratší než přepona. Proč?

---

*) Tedy napřed přitiskneme levou ruku a teprve potom uvolníme pravou. Proč?

Cvičení k § 18.

186. Zapište do slovníčka: $a \perp b$ znamená, že přímky a a b stojí na sobě kolmo. Vztyčit kolmici k přímce p v bodě H. Spustit kolmici na přímku p s bodu K. Pata kolmice. Přepona a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka. Přímky k sobě kolmé tvoří čtyři pravé úhly. Vzdálenost bodu od přímky. Vrchol pravého úhlu.

187. Zvolte přímku $ABCD$ a ve všech čtyřech bodech A, B, C a D k ní vztyčte kolmice. Mají všecky vaše kolmice stejný směr?

188. Opakujte cvičení 187 při jiné poloze přímky $ABCD$.

189. Zvolte přímku p a mimo ni čtyři body A, B, C a D tak, aby přímka p oddělovala body A a B od bodů C a D. Se všech čtyř bodů A, B, C a D spusťte na přímku p kolmice. Mají všecky vaše kolmice stejný směr?

190. Opakujte cvičení 189 při jiné poloze přímky p.

191. Zvolte si dvě přímky a a b a mimo ně bod C. Změřte vzdálenosti bodu C od přímek a a b.

192. Sestrojte si rovnostranný trojúhelník ABC o straně 4 cm. Zvolte si dva body P a Q uvnitř trojúhelníka ABC. Najděte vzdálenosti bodu P od všech stran trojúhelníka ABC a všecky ty tři vzdálenosti graficky sečtěte. Totéž proveďte s bodem Q. Když jste přesně pracovali, musí oba vaše součty býti stejné. Přesvědčte se.

193. Zvolte si dva body H a K (dosti daleko od sebe). Bodem H veďte dvě libovolné přímky a a b. Spusťte na ně kolmice s bodu K. Paty těch kolmic označte A a B. Bodem K veďte libovolnou přímku c. Spusťte na ni kolmici s bodu H. Patu té kolmice označte C. Na konec opište kružnici nad průměrem HK. Zapište, co pozorujete.

194. Zvolte si bod S a veďte jím tři libovolné přímky. Naneste na první z nich $\overline{AS} = \overline{SB} = 35$ mm, na druhou $\overline{CS} = \overline{SD} = 35$ mm, na třetí $\overline{ES} = \overline{SF} = 35$ mm. V bodech A a B vztyčte kolmice k přímce AB. V bodech C a D vztyčte kolmice k přímce CD. V bodech E a F vztyčte kolmice k přímce EF. Potom opište ze středu S kružnici s poloměrem 35 mm. Zapište, co pozorujete.

195. Zvolte si kružnici k (dosti velikou) a na ní čtyři body A, B, C a D. S bodu D spusťte kolmice: na přímku AB, na přímku BC a na přímku CA. Paty těch kolmic označte X, Y a Z. Sestrojte spojnici bodů X a Y. Zapište, co pozorujete.

Úlohy 196 až 198 proveďte každou na listu papíru (hodně velikém). Potřebné přímky si opatřete přehnutím papíru. Tužky užíváte v těchto úlohách jen potud, že označujete body křížky a popisujete je písmeny. Kružnici v úloze 198 ovšem rýsujete kružítkem.

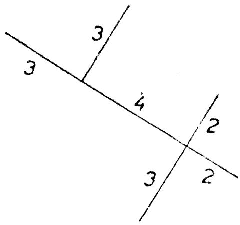
196. Proveďte bez pravítka úlohu 138 (str. 45).

197. Proveďte bez pravítka úlohu 139 (str. 45).

198. Proveďte bez pravítka úlohu 195.

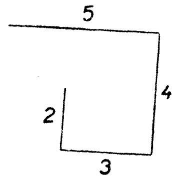
V úlohách 199 až 201 máte sestrojit obrazce podle obrazců z učebnice. Jednotka 1 cm. V úloze 201 je $CH \perp AB$, $BK \perp AC$, $AL \perp BC$.

199.



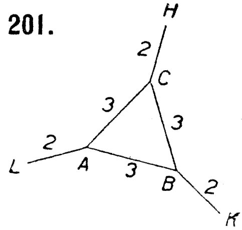
Obr. 82.

200.



Obr. 83.

201.



Obr. 84.

§ 19. Rýsování rovnoběžek.

Vezměte list papíru a přehnutím si opatřete přímku *p*. Dalším přehýbáním papíru si opatřete tři přímky kolmé k přímce *p* a označte je *a*, *b* a *c*. Volte je tak, aby *b* byla mezi *a* a *c*. Říkáme, že přímky *a*, *b* a *c* jsou **mezi sebou rovnoběžné** nebo že to jsou **rovnoběžky.** Chceme-li stručně zapsati třeba, že přímky *a* a *c* jsou mezi sebou rovnoběžné, píšeme

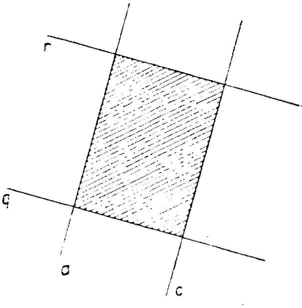
$$a \parallel c \quad \text{nebo} \quad c \parallel a.$$

Přímka *p* stojí kolmo na *c*. Opatřete si přehnutím papíru ještě dvě kolmice k přímce *c* a označte je *q* a *r*. Volte je tak, aby *p* byla mezi *q* a *r*. Také přímky *p*, *q* a *r* jsou mezi sebou rovnoběžné. Všimněte si, že je na př. $a \perp q$. Jak se o tom přesvědčíte?

Zapište (značkou $\parallel$) všecky páry rovnoběžek. Zapište (značkou $\perp$) všecky páry kolmic. Celkem musíte mít šest párů rovnoběžek a devět párů kolmic.

Pruh omezený dvěma rovnoběžkami, třeba přímkami *a* a *c*, se jmenuje **přímý pás.** Pozorujete, že takový pás má všude stejnou šířku, které se také říká **vzdálenost rovnoběžek** *a* a *c*. Tuto šířku můžeme měřit na každé společné kolmici. Přeměřte na kolmicích *p*, *q* a *r*. Přeměřte také šířku pásu omezeného rovnoběžkami *q* a *r*. Libovolný bod přímky *a* má od přímky *c* vzdálenost rovnou vzdálenosti rovnoběžek *a* a *c*.

Plocha omezená přímkami a, c, q a r se jmenuje **obdélník** (viz obr. 85). Vystřihněte si jej. Přímky b a p jej rozdělují na čtyři menší obdélníky (v obrazci nevyznačené).

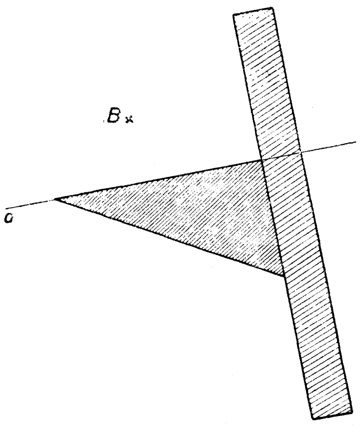


Obr. 85.

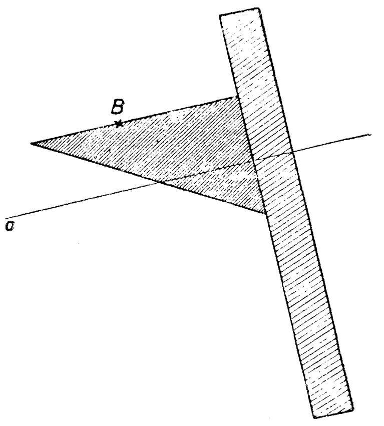
Obdélník budeme později podrobně probírat.

Zvolte si v sešitě přímku a a mimo ni bod B. Bodem B prochází jediná rovnoběžka s přímkou a.

Abychom ji narýsovali, užijeme zase trojúhelníkového pravítka a pomocného pravítka (viz obr. 86).



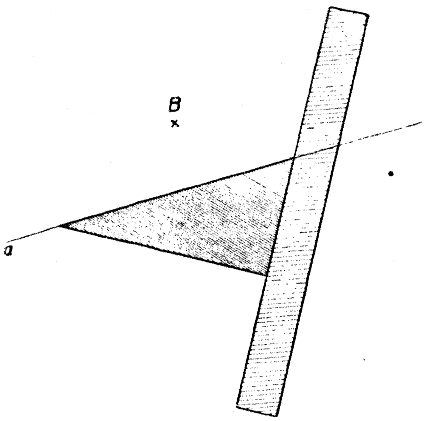
Obr. 86a.



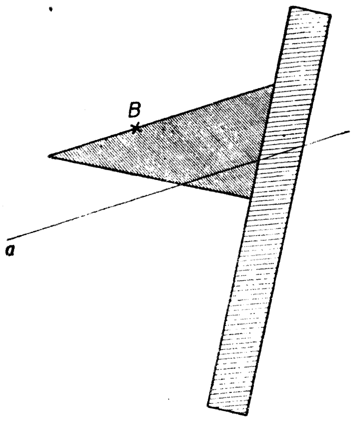
Obr. 86b.

Přiložíme trojúhelníkové pravítko tak, aby se jedna odvěsna kryla s přímkou a. Pak je přidržíme pevně levou rukou a pravou přisuneme ke druhé odvěsně pomocné pravítko. Nyní přitiskneme pravicí pomocné pravítko a levicí jemně posunujeme trojúhelníkové pravítko až do polohy naznačené v obr. 86b. Pak přidržíme pevně levicí trojúhelníkové pravítko a rýsujeme podél odvěsny (které?) žádanou rovnoběžku.

Můžeme rýsovati také podél přepony (viz obr. 87).

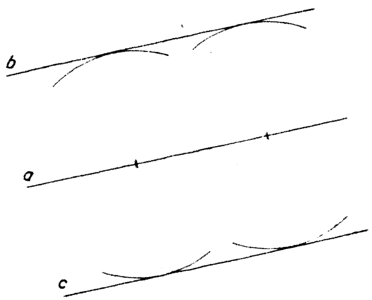


Obr. 87a.



Obr. 87b.

Může se stát, že vzájemná poloha bodu B a přímky a je tak nepříznivá, že nemůžeme žádanou rovnoběžku jedním posunutím pravítka sestrojit. Pomůžeme si tak, že si prvním posunutím opatříme rovnoběžku c k přímce a, která má příznivější polohu, a druhým posunutím si opatříme rovnoběžku s přímkou c, která prochází bodem B. Ale obyčejně vystačíme s jedním posunutím; jen musíme vhodně položit pravítko.



Obr. 88.

Zvolte si asi uprostřed sešitu přímku a. Chceme sestrojit v sešitě obě rovnoběžky b a c ve vzdálenosti 19 mm od přímky a. To můžeme výhodně provést jediným pravítkem s pomocí kružítka. Opíšeme dvě kružnice s poloměrem 19 mm, které mají středy na přímce a. Žádané rovnoběžky pak dostaneme, když přiložíme pravítko tak, aby se **dotýkalo** obou kružnic. Je zbytečné rýsovat ty kružnice celé (viz obr. 88).

Cvičení k § 19.

202. Zapište do slovníčka: $a \parallel b$ znamená, že přímky a a b jsou mezi sebou rovnoběžné. Dvě rovnoběžky omezují přímý pás; vzdálenost obou rovnoběžek je šířka pásu. Obdélník.

203. Zvolte přímku p a mimo ni čtyři body A, B, C a D tak, aby přímka p oddělovala body A a B od bodů C a D. Každým zvoleným bodem veďte rovnoběžku s přímkou p.

204. Zvolte si body S, A, B, C, D. Veďte rovnoběžky s přímkami SA a SB nejprve bodem C, potom bodem D.

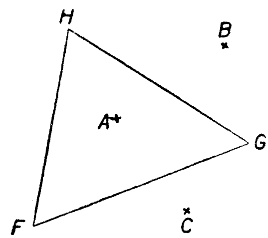
205. Opakujte úlohu 204 v jiné poloze.

206. Zvolte si dvě rovnoběžky (dosti daleko od sebe) a přesvědčte se měřením na čtyřech místech, že jsou všude stejně od sebe vzdáleny.

207. Zvolte si přímku a. Budete rýsovati rovnoběžky b, c, d a e s přímkou a tak, aby přímka a oddělovala přímky b a c od přímek d a e; vzdálenosti přímek b, c, d a e od přímky a ať jsou: 24 mm, 4 cm, 14 mm, 36 mm. Jaká je vzdálenost b od a, vzdálenost b od e, vzdálenost c od e? Přeměřte ty vzdálenosti (každou na jiné kolmici).

208. Opakujte cvičení 153 (str. 48) a pozorujte, zdají-li se vám některé přímky v obrazci rovnoběžné. Přesvědčte se posunutím pravítka. Změřte vzdálenosti rovnoběžek.

209. Sestrojte rovnostranný trojúhelník F, G, H o straně 33 mm. Zvolte si tři body A, B a C asi jako v obr. 89. Veďte bodem A přímku $a \parallel FH$, bodem B přímku $b \parallel GH$, bodem C přímku $c \parallel FG$. Přesvědčte se měřením, že přímky a, b a c vám dají nový rovnostranný trojúhelník.



Obr. 89.

210. Zvolte si úsečku AB dlouhou 5 cm. Určete si bod C tak, aby bylo $\overline{AC} = 4$ cm, $\overline{BC} = 63$ mm. (Jsou dva takové body C, ale zvolte si z nich jen jeden). Najděte střed S úsečky AB. Veďte bodem C rovnoběžku r s přímkou AB. Na přímce r si určete bod H ve vzdálenosti 25 mm od bodu C. (Takové body H jsou zase dva. Zvolte si ten, pro který se úsečky AC a BH protnou.) Bodem S veďte rovnoběžku s přímkou AC a označte si K její průsečík s přímkou r. Přesvědčte se, že $\overline{HC} = \overline{CK}$. Přesvědčte se, že

$$AH \parallel SC \parallel BK$$

a že

$$SH \parallel BC.$$

Změřte vzdálenost rovnoběžek AH a BK. Vychází všem žákům stejná vzdálenost?

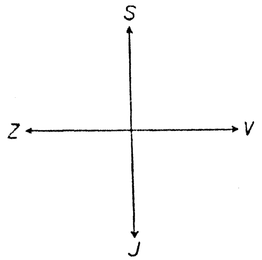
211. Zvolte si na přímce čtyři body A, B, C a D tak, aby vzdálenosti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ a $\overline{CD}$ byly všecky tři 26 mm. Bodem B si veďte přímku (libovolně) a určete si na ní bod K vzdálený 37 mm od bodu B. (Jsou dva takové body K, ale zvolte si jen jeden.) Najděte střed S úsečky BK a veďte bodem S rovnoběžku s přímkou $ABCD$. Tu rovnoběžku si označte r. Všecky tři body A, C a D spojte s bodem K. Průsečíky těch tří spojnic s přímkou r si označte popořádku písmeny P, T a U. Změřte délky $\overline{PS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$. Zapište, co jste naměřili.

212. Zvolte si čtyrúhelník $ABCD$ (dosti veliký). Najděte středy všech čtyř stran. Označte: H střed strany AB, K střed strany BC, L střed strany CD, M střed strany DA. Veďte spojnice HK a LM. Dále veďte spojnice HM a KL. Zapište, co pozorujete.

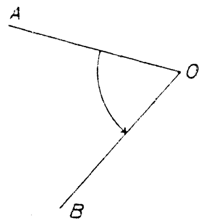
§ 20. Světové strany.

Stín svislé tyče v pravé poledne na vodorovnou plochu ukazuje k severu. Obrátíme-li se čelem k severu, máme napravo východ a nalevo západ; proti severu je jih.

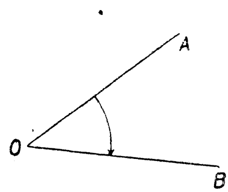
Sever, jih, východ a západ jsou světové strany; značky S, J, V, Z. Na mapách a plánech zobrazujeme sever svisle nahoru. Jak tedy zobrazujeme ostatní světové strany (viz obr. 90)?



Obr. 90.



Obr. 91a.



Obr. 91b.

Jak se určí světové strany podle hvězd?

Označte si (v mysli) písmenem O své místo ve třídě; označte si (v mysli) písmeny A, B dvě určitá místa ve třídě. Postavte se ve směru OA (t. j. na místě O se postavte tak, že se díváte na místo A). Nyní se otáčejte (na místě O), až stojíte ve směru OB. Říkáme, že jste se otočili o úhel AOB. (Musíme dávat pozor na pořádek písmen. Které písmeno značí vaše místo?)

Je dvoje otáčení: otáčení nalevo (viz obr. 91a) a otáčení napravo (viz obr. 91b). Ručičky na hodinách se otáčejí napravo.

Při porovnávání velikosti úhlů můžeme vzíti za jednotku úhel pravý. Pro pravý úhel užíváme značky R. (Je to začáteční písmeno latinského slova rectus, které znamená pravý.) Když se otočíme o $2R$, obrátíme se právě čelem vzad; říkáme, že jsme se otočili o **úhel přímý.** Když se otočíme o $4R$, dostaneme se zpátky do původního směru; říkáme, že jsme se otočili o **úhel plný.**

Postavte se směrem k severu a otočte se doprava o úhel $\frac{1}{2}R$. Nyní stojíte směrem k severovýchodu, značka SV, což tedy je právě v polovině mezi S a V. Podobně máme severozápad SZ, jihovýchod JV a jihozápad JZ.

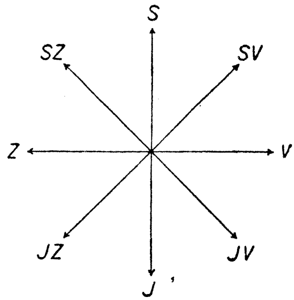
Cvičení k § 20.

213. Zapište do slovníčka: Sever S, ..., ..., jihozápad JZ. Pravý úhel R. Přímý úhel $2R$. Plný úhel $4R$. Otáčení napravo. Otáčení nalevo.

214. Opište a doplňte: Úhel pravý je ... úhlu přímého. Úhel přímý je ... úhlu plného. Úhel pravý je ... úhlu plného.

V úlohách 215 až 224 jmenujte velikosti úhlů při daných otáčeních. Jednotka R. Naznačte si v sešitě od ruky obrazec podle obr. 92.

215. Od J napravo k Z.
216. Od Z napravo k V.
217. Od V nalevo k J.
218. Od J napravo k SZ.
219. Od Z nalevo k SV.
220. Od JV napravo k SZ.
221. Od JZ nalevo k SZ.
222. Od SV napravo k J.
223. Od S nalevo k V.
224. Od SZ nalevo k Z.



Obr. 92.

V úlohách 225 až 236 jmenujte konečný směr, do kterého se dostanete z daného směru daným otočením.

225. Od J napravo o R.
226. Od V napravo o $2R$.
227. Od Z nalevo o $3R$.
228. Od S nalevo o $5R$.
229. Od J napravo o $\frac{1}{2}R$.
230. Od Z nalevo o $2\frac{1}{2}R$.
231. Od V nalevo o $3\frac{1}{2}R$.
232. Od S napravo o $4\frac{1}{2}R$.
233. Od JV napravo o $3R$.
234. Od SV napravo o $2\frac{1}{2}R$.
235. Od SZ nalevo o $1\frac{1}{2}R$.
236. Od JZ nalevo o $3\frac{1}{2}R$.

V úlohách 237 až 240 máte říci, o jaký úhel se otočí velká hodinová ručička za udaný čas. Jednotka R.

237. Za hodinu.
238. Za třicet minut.
239. Za pět minut.
240. Za $2\frac{3}{4}$ hodiny.

V úlohách 241 až 245 máte říci, o jaký úhel se otočí malá hodinová ručička za udaný čas. Jednotka R.

241. Za šest hodin.
242. Za čtyři hodiny.
243. Za hodinu.
244. Za 30 minut.

245. Muž kráčí k jihu, na křižovatce se obrátí k jihovýchodu a na další křižovatce se obrátí k jihozápadu. Naznačte obrazcem od ruky. Vyznačte (jako v obr. 91) obloučkem a šipkou úhly, o které se otočí na křižovatkách. Jak velké jsou ty úhly?

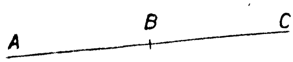
§ 21. Úhly.

Narýsujte si přímku a zvolte si na ní bod B. Zvolený bod rozdělí přímku ve dvě **polopřímky.** Tedy polopřímka je přímá čára, která je jen na jedné straně omezená. Na př. v obr. 93 rozdělí bod B přímku ABC v polopřímky BA a BC. (Bod B píšeme napřed.)

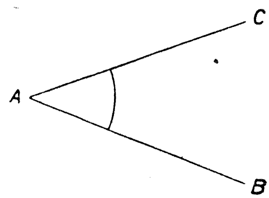
Úhel má dvě **ramena** a jeden **vrchol.** Vrchol úhlu je bod, ramena úhlu jsou polopřímky. Obě ramena vycházejí z vrcholu. Na př. v obr. 94 máme úhel s vrcholem A a rameny AB a AC. Značíme jej

$$\sphericalangle BAC \text{ nebo } \sphericalangle CAB.$$

$\sphericalangle$ je značka pro úhel. Vrchol se píše vždycky doprostřed.



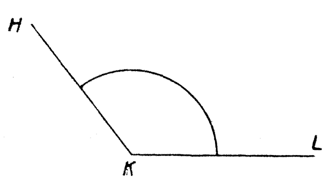
Obr. 93.



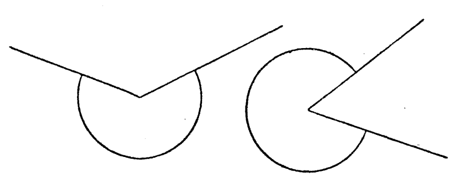
Obr. 94.

Úhel v obr. 94 je **ostrý.** To znamená, že je menší než úhel pravý. Naproti tomu $\sphericalangle HKL$ v obr. 95 je **tupý:** je větší než úhel pravý, ale je menší než úhel přímý. Společný název pro úhly ostré a tupé je: **úhly kosé.**

V obrazcích rýsujeme u každého úhlu obyčejně oblouček kružnice, který spojuje obě ramena (v. obr. 94 a 95). Střed kružnice je ve vrcholu



Obr. 95.

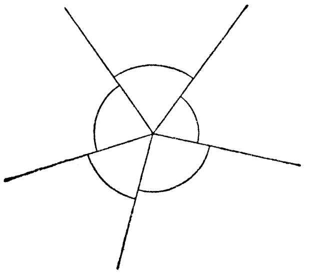


Obr. 96.

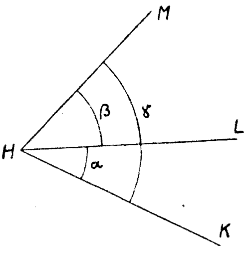
úhlu, poloměr je libovolný. Chceme-li naznačit, které rameno je první, tedy zdali úhel vznikl otáčením doprava či doleva, děláme na konci obloučku šipku (viz obr. 91). Ale obyčejně na tom nezáleží a šipku neděláme.

Úhly, které jsou menší než úhel přímý, tedy úhly ostré, pravé a tupé, se vyskytují nejčastěji. Nazývají se společným jménem **úhly duté.** Mnohem méně často se vyskytnou **úhly vypuklé** (viz obr. 96). To jsou úhly větší než úhel přímý, ale menší než úhel plný.

Zvolte si bod a veďte jím několik polopřímek. Dvě sousední polopřímky tvoří vždy úhel (viz obr. 97). Kolik měří dohromady všecky ty úhly? Když známe velikosti všech úhlů až na jeden, můžeme zbývající úhel počítat.



Obr. 97.



Obr. 98.

Označení úhlu třemi písmeny, třeba $\sphericalangle BAC$, je často nepohodlné a nepřehledné. Proto značíme často úhly jediným písmenem. Při tom užíváme malých řeckých písmen. Zejména se pro úhly často užívá prvních čtyř písmen řecké abecedy. Jsou to písmena α (čteme alfa), β (čteme béta), γ (čteme gama), δ (čteme delta). Tato čtyři řecká písmena musíte dobře znát. Která dvě řecká písmena už znáte?

Značíme-li úhel řeckým písmenem, neděláme už značku $\sphericalangle$. V obr. 98 je $\sphericalangle KHL = \alpha$, $\sphericalangle LHM = \beta$, $\sphericalangle KHM = \gamma$.

Všimněte si, že je v obr. 98 rýsován každý oblouček s jiným poloměrem a že je každé řecké písmeno umístěno těsně u toho obloučku, ke kterému patří. Když máme jako v obr. 98 několik úhlů se stejným vrcholem, rýsujeme velký obrazec, aby popis byl zřetelný.

Cvičení k § 21.

246. Zapište do slovníčka: Polopřímka UV. Úhel BCD má vrchol C a ramena CB, CD. Značka pro úhel: $\sphericalangle$. Duté úhly jsou pravé a kosé. Kosé úhly jsou ostré a tupé. Když $\alpha < R$, α je úhel ostrý. Když $\beta = R$, β je úhel pravý. Když $R < \gamma < 2R$, γ je úhel tupý. Když $\delta = 2R$, δ je úhel přímý. Když $2R < \alpha < 4R$, α je úhel vypuklý. Když $\beta = 4R$, β je úhel plný.

247. Napište dva řádky písmen α, dva řádky písmen β, dva řádky písmen γ a dva řádky písmen δ.

248. Jak velký je vypuklý úhel mezi JV a Z?

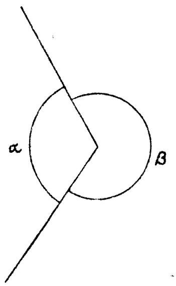
Úlohy 249 až 251 vztahují se k obr. 99.

249. Když $\alpha = 1\frac{1}{4}R$, kolik je β?

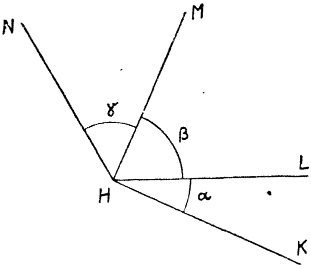
250. Když $\beta = 2\frac{1}{2}R$, kolik je α?

251. Když $\beta = 2\alpha$, kolik je α?

Úlohy 252 až 256 se vztahují k obr. 100. Narýsujte si od ruky vlastní obrazec.



Obr. 99.



Obr. 100.

252. Když $\alpha = \frac{1}{4}R$, $\beta = \frac{3}{4}R$, jaký je $\sphericalangle KHM$?

253. Vypočtěte γ, když $\sphericalangle LHN = 1\frac{1}{4}R$, $\sphericalangle LHM = \frac{3}{4}R$.

254. Zapište řeckými písmeny, že $HK \perp HM$.

255. Vypočtěte β a γ, když $\sphericalangle KHL = \frac{1}{3}R$, $\sphericalangle KHM = R$, $\sphericalangle KHN = 1\frac{1}{2}R$.

256. Když $\alpha = \frac{1}{3}R$, $\beta = \frac{2}{3}R$, $\gamma = \frac{1}{2}R$, vypočtěte: napřed vypuklý úhel s rameny HK a HN, potom vypuklý úhel s rameny HL a HM.

§ 22. Přenášení úhlů.

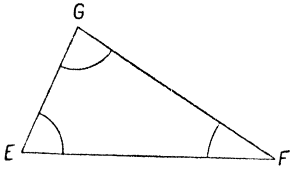
Narýsujte si trojúhelník EFG (viz obr. 101). Úhly $\sphericalangle FEG$, $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle EGF$ (v obrazci vyznačené obloučky) se jmenují **vnitřní úhly trojúhelníka** EFG nebo krátce **úhly trojúhelníka** EFG. Úhel FEG na př. je úhel při vrcholu E a je to úhel proti straně FG.

Velmi často se značí (viz obr. 102) vrcholy trojúhelníka písmeny ABC a úhly písmeny α, β, γ tak, že: α je úhel při vrcholu A, β je úhel při vrcholu B, γ je úhel při vrcholu C. Ale nebylo by dobře, kdybyste si už teď zvykali na pevné označení.

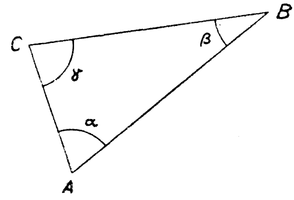
V sešitě máte narýsovaný trojúhelník EFG (viz obr. 101). Narýsujte si na list papíru trojúhelník ABC (viz obr. 102) tak, aby bylo

$$\overline{AB} = \overline{EF}, \quad \overline{AC} = \overline{EG}, \quad \overline{BC} = \overline{FG}.$$

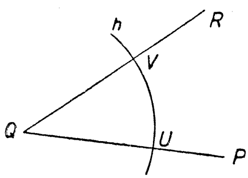
Už jsme mluvili o tom, že trojúhelníky ABC a EFG jsou **shodné.** Můžeme vystřihnout trojúhelník ABC a položiti jej na trojúhelník EFG tak, že vrchol A padne na vrchol E, vrchol B padne na vrchol F, a vrchol C padne na vrchol G. Učiňte to. Vidíte, že se vám kryjí nejen vrcholy a strany obou trojúhelníků, nýbrž také úhly. **Shodné trojúhelníky mají stejné úhly.**



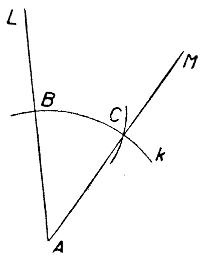
Obr. 101.



Obr. 102.



Obr. 103a.



Obr. 103b.

Tohoto poznatku užijeme k **přenesení daného úhlu,** a to pravítkem a kružítkem bez vystřihování. Při tom se užívá s výhodou trojúhelníka rovnoramenného.

Zvolte si v sešitě $\sphericalangle PQR$ (viz obr. 103a) a polopřímku AL (viz obr. 103b). Chceme sestrojit úhel, který je stejně veliký jako $\sphericalangle PQR$ a jehož jedním ramenem je daná polopřímka AL (takže vrchol je v bodě A).

Opište ze středu Q kružnici h s libovolným, ale dosti velkým poloměrem r. Kružnice h protne rameno QP daného úhlu v bodě U a rameno QR v bodě V (viz obr. 103a). Tím nám vznikne rovnoramenný trojúhelník QUV se základnou UV a s rameny QU a QV. Daný $\sphericalangle PQR$ je úhel proti základně v trojúhelníku QUV.

Abychom daný úhel přenesli na předepsané místo, potřebujeme pouze sestrojit rovnoramenný trojúhelník ABC shodný s trojúhelníkem QUV. Základna bude BC a ramena budou AB a AC. Přenesený úhel bude úhel při vrcholu A v trojúhelníku ABC. Protože jedním ramenem žádaného úhlu má býti polopřímka AL, musíme trojúhelník ABC sestrojit tak, aby vrchol B ležel na této polopřímce.

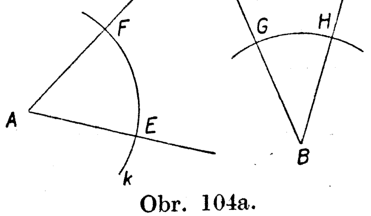
Délka ramen AB a AC rovnoramenného trojúhelníka ABC musí býti stejná jako délka ramen QU a QV rovnoramenného trojúhelníka QUV, tedy jako poloměr r kružnice h. Tedy opíšeme (viz obr. 103b) ze středu A kružnici k zase s poloměrem r. Body B a C jsou na kružnici k. Bod B je mimoto na polopřímce AL, takže jeho poloha je už určena. Abychom dostali také bod C, musíme si ještě vzpomenout, že základna BC trojúhelníka ABC musí býti stejně dlouhá jako základna UV trojúhelníka QUV. Tedy vezmeme do kružítka délku $\overline{UV}$ a přetneme kružnici k obloukem ze středu B a s tímto poloměrem $\overline{UV}$. Tím dostaneme bod C (viz obr. 103b) a zbývá jen spojit A s C, abychom dostali druhé rameno AM úhlu LAM, který je roven úhlu PQR a jehož jedním ramenem je polopřímka AL.

$\sphericalangle LAM$ vznikne otáčením ramene AL doprava. Úloze vyhovuje ještě jeden $\sphericalangle LAN$ (v obr. 103b nevyznačený), který vznikne otáčením ramene AL doleva. Sestrojte v sešitě také $\sphericalangle LAN$.

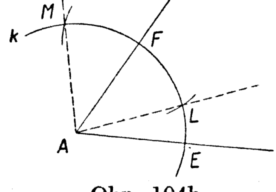
Tuto jednoduchou konstrukci, kterou jste právě poznali, musíte se naučit hbitě provádět. Aby byla přesná, musí se poloměr r kružnic h a k volit dosti velký. Proč?

Stejnou konstrukcí můžeme řešit také jiné úlohy. Máme-li na př. rozhodnout, který z obou úhlů v obr. 104a je větší, narýsujeme jako v obrazci stejným poloměrem dva oblouky. Kde jsou středy? Potom porovnáváme délky $\overline{EF}$ a $\overline{GH}$. Je-li $\overline{EF} > \overline{GH}$, pak úhel při vrcholu A je větší než úhel při vrcholu B.

Vezmeme-li do kružítka délku $\overline{GH}$ a s tímto poloměrem opíšeme kružnici ze středu F, dostaneme dva body L a M na kružnici, která je označena k v obr. 104a a 104b.



Obr. 104a.



Obr. 104b.

Vyložte sami, proč $\sphericalangle EAM$ v obr. 104b je součet obou úhlů z obr. 104a a proč $\sphericalangle EAL$ v obr. 104b je rozdíl týchž dvou úhlů. Umíme tedy **graficky sčítat** a **graficky odčítat** dané úhly. Jak byste sestrojili graficky dvojnásobek daného úhlu? Jak trojnásobek?

Cvičení k § 22.

257. Zapište do slovníčka: Vnitřní úhly trojúhelníka. Přenesení úhlu. Grafické sčítání a odčítání úhlů. Grafické násobení úhlu číslem.

258. Sestrojte si rovnostranný trojúhelník o straně 5 cm a přesvědčte se graficky, že všecky tři jeho úhly jsou stejné.

259. Sestrojte si rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou $\overline{BC} = 42$ mm a rameny 63 mm. Přesvědčte se graficky, že úhly při vrcholech B a C jsou stejné.

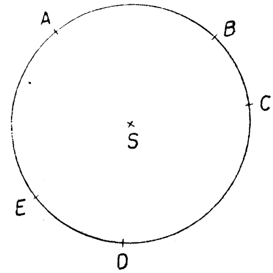
260. Zvolte si přímku p a na ní bod H. Sestrojte úhel tak velký jako $\sphericalangle ABC$ z úlohy 259 tak, aby vrchol byl H a jedno rameno bylo v přímce p. Proveďte všecka čtyři řešení.

261. Zvolte si body K, L a M tak, aby bylo $LK \perp LM$, $\overline{LK} = 5$ cm, $\overline{LM} = 2$ cm. Kolikrát musíte zvětšit $\sphericalangle LKM$, abyste dostali úhel tupý? Kolikrát, abyste dostali úhel vypuklý?

262. Sestrojte trojúhelník BCD shodný se stejně označeným trojúhelníkem v obr. 59 (str. 47). Označte β, γ a δ úhly při vrcholech B, C a D. Sestrojte graficky tyto tři úhly: $\delta - 2\gamma$, $\delta - 3\beta$, $2\beta + 3\gamma$.

263. Na kružnici (hodně velké) o středu S si zvolte pět bodů jako v obr. 105. Porovnejte úhly: $\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle ABE$. Zapište, co vám vyšlo.

264. Sestrojte graficky dvojnásobek $\sphericalangle ACE$ ze cvič. 263 a porovnejte jej s $\sphericalangle ASE$. Zapište, co vám vyšlo.



Obr. 105.

§ 23. Měření úhlů.

Pro praksi je R příliš velká úhlová jednotka. Zpravidla se užívá jednotky devadesátkrát menší, která se jmenuje **stupeň**. Značka pro stupeň je malá nula nahoře vpravo. Tedy

$$R = 90°,\ 2R = 180°,\ 3R = 270°,\ 4R = 360°,$$
$$\tfrac{1}{2}R = 45°,\ \tfrac{1}{3}R = 30°,\ \tfrac{2}{3}R = 60°,\ \tfrac{1}{4}R = 22\tfrac{1}{2}°.$$

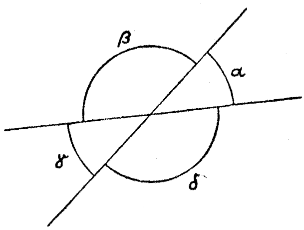
Dva úhly, které dohromady dávají 180°, jmenují se **výplňkové**. Tedy 70° a 110° jsou výplňkové úhly, $\frac{2}{3}R$ a $\frac{4}{3}R$ jsou výplňkové úhly.

Při jemných měřeních se užívá ještě také menších jednotek, zvaných **minuta** (úhlová) a **vteřina** (úhlová). Značka pro minutu je čárka nahoře vpravo, pro vteřinu dvě čárky. Jest

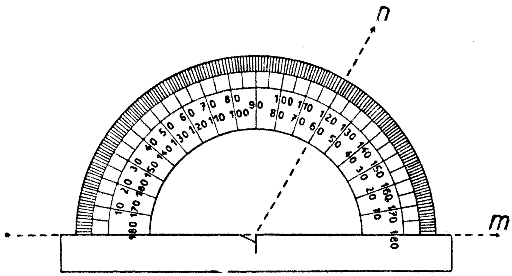
$$1° = 60', \ 1' = 60''.$$

My budeme měřit jen na stupně.

Narýsujte si dvě různoběžky. Vzniknou vám čtyři úhly. Označte si je jako v obr. 106. Říkáme, že α a β jsou dva **vedlejší úhly** a že α a γ



Obr. 106.



Obr. 107.

jsou dva **vrcholové úhly.** Celkem máte ve svém obrazci čtyři páry vedlejších úhlů a dva páry vrcholových úhlů. Jmenujte je všecky. Dovedli byste vyložit slovy (bez ukazování na obrázek), kdy jsou dva úhly vedlejší? Dovedli byste to pro vrcholové úhly?

Vedlejší úhly α a β tvoří dohromady úhel přímý. Tedy vedlejší úhly jsou výplňkové. To si musíte pamatovat. Jsou dva výplňkové úhly vždycky vedlejší?

V obr. 106 jsou α a β dva vedlejší úhly. Také β a γ jsou vedlejší úhly. Tedy

$$\alpha + \beta = 180°, \text{ takže } \alpha = 180° - \beta,$$
$$\beta + \gamma = 180°, \text{ takže } \gamma = 180° - \beta.$$

Tedy $\alpha = \gamma$. Ale jaké úhly jsou α a γ? Vrcholové úhly jsou si rovny. Také to si musíte pamatovat. Když rozvíráme nůžky, vznikají dva vrcholové úhly. Nemusíme nic počítat, abychom se přesvědčili, že jsou stejné: oba úhly vznikly stejným otáčením.

V sešitě měříme úhly **úhloměrem** (viz obr. 107).

Na úhloměru čteme vždy dva údaje, které mají součet 180. Vysvětlete, proč to je a jak poznáte, který z obou údajů máte číst.

Jak narýsujete podle úhloměru úhel předepsané velikosti?

Cvičení k § 23.

265. Zapište do slovníčka: Výplňkové úhly. Vedlejší úhly. Vrcholové úhly.

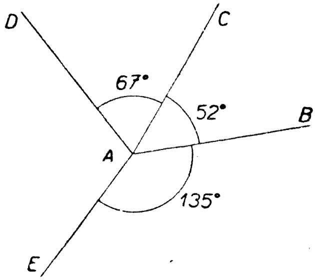
266. Vyjádřete ve stupních:
$\frac{2}{5}R$, $\frac{3}{4}R$, $1\frac{1}{3}R$, $1\frac{2}{5}R$, $2\frac{3}{5}R$, $3\frac{1}{4}R$.

267. Vyjádřete pomocí pravého úhlu:
60°, 15°, 210°, $22\frac{1}{2}$°, 135°, 270°, 315°.

268. Jmenujte úhly výplňkové k úhlům:
97°, 36°, 130°, 48°, 148°, 100°, 1°.

269. Sestrojte pomocí úhloměru v rozmanitých polohách úhly:
55°, 38°, 142°, 200°, 300°.

270. Podobně sestrojte úhly:
100°, 72°, 85°, 330°, 254°.

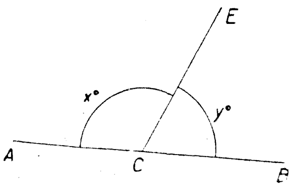


Obr. 108.

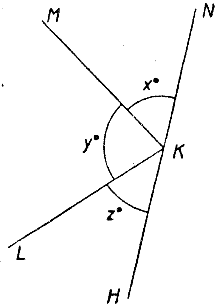
271. V obr. 59 (str. 47) změřte: $\sphericalangle\, ACB$, $\sphericalangle\, CDB$, vypuklý úhel ABD. Zapište své výsledky. Porovnávejte výsledky třídy.

272. Vypočtěte $\sphericalangle\, DAE$ v obr. 108.

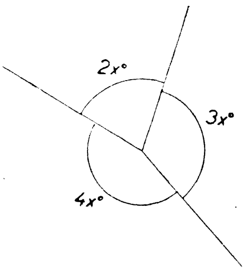
273. Narýsujte od ruky obrazec, třeba nepřesný, ve kterém vychází z bodu S za sebou šest polopřímek SA, SB, SC, SD, SE, SF tak, že $\sphericalangle\, ASB = 43°$, $\sphericalangle\, BSC = 67°$, $\sphericalangle\, CSD = 70°$,



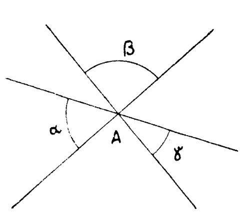
Obr. 109.



Obr. 110.



Obr. 111.



Obr. 112.

$\sphericalangle\, DSE = 59°$, $\sphericalangle\, ESF = 51°$. Zapište velikosti úhlů do svého obrazce. Rozhodněte počtem nejdříve, zdali by při přesném rýsování čára ASD byla přímá, potom zdali by čára BSE byla přímá, konečně zdali by čára CSF byla přímá.

Úlohy 274 až 279 řešte napřed počtem, potom sestrojte pomocí úhloměru přesný obrazec.

Úlohy 274 až 276 se vztahují k obr. 109. Čára ACB je přímá.

274. Když $y = 72$, kolik je x?

275. Když $x = 134$, kolik je y?

276. Když $x = 2y$, kolik je y?

Úlohy 277 až 279 se vztahují k obr. 110. Čára HKN je přímá.

277. Když $x = 52$ a $y = 62$, kolik je z?

278. Když $y = z = 57$, kolik je x?

279. Když $y = z = 2x$, kolik je x?

280. Když máte obrazec podobný jako obr. 110, ale nevíte, zda čára HKN je přímá, co o tom můžete říci, když naměříte $x = 40$, $y = z = 70$? Co když naměříte $x = 30$, $y = 85$, $z = 75$?

281. V obr. 111 najděte, kolik je x.

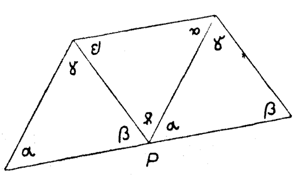
282. V obr. 112 jsou tři přímky, procházející bodem A. Najděte α, když $\beta = 72°$, $\gamma = 36°$.

283. V obr. 112 je $\alpha = 4x°$, $\beta = 5x°$, $\gamma = 3x°$. Najděte x.

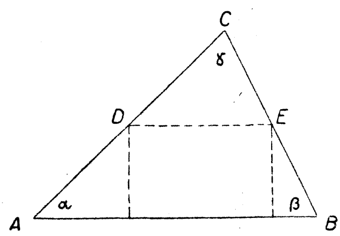
§ 24. Součet úhlů v trojúhelníku.

Vezměte list papíru a dvakrát jej přeložte, abyste měli trojí papír nad sebou. Na vrchním papíře si narýsujte libovolný trojúhelník a vystřihněte. Dostanete tři úplně stejné (shodné) trojúhelníky. Označte jejich úhly tak, že v původní poloze by byly tři α nad sebou, tři β nad sebou a tři γ nad sebou. Položte (viz obr. 113) všecky tři trojúhelníky vedle sebe tak, aby určitý bod P byl vrcholem úhlu α prvního trojúhelníka, úhlu β druhého trojúhelníka a úhlu γ třetího trojúhelníka. Jaký úhel $\alpha + \beta + \gamma$ vám vznikne při vrcholu P?

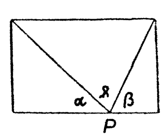
Narýsujte si na list papíru trojúhelník ABC (dosti veliký). Na rub poznamenejte značky α, β a γ pro úhly. Najděte střed D strany AC a střed E strany BC. Přeložte papír podél úseček čárkovaných v obr. 114a, takže dostanete obr. 114b. Jaký úhel $\alpha + \beta + \gamma$ vám vznikl při vrcholu P?



Obr. 113.



Obr. 114a.



Obr. 114b.

Změřte úhloměrem úhly trojúhelníka ABC v obr. 59 (str. 47) a výsledky sečtěte. Opakujte s trojúhelníkem BCD v obr. 59 (str. 47).

Pamatujte: Součet všech tří úhlů trojúhelníka je roven 180° ($= 2R$).

Trojúhelník je ostroúhlý, když všecky tři jeho úhly jsou ostré. Trojúhelník je pravoúhlý, když jeden jeho úhel je pravý. Trojúhelník je tupoúhlý, když jeden jeho úhel je tupý. Společný název pro trojúhelníky ostroúhlé a tupoúhlé je: trojúhelníky kosoúhlé. Proč?

Proč má každý trojúhelník aspoň dva úhly ostré?

Pamatujte: Součet obou ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka je roven 90° ($= R$). Dva úhly, které mají součet 90°, se jmenují **doplňkové úhly.** Co to byly výplňkové úhly?

Naučte se psát ještě čtyři řecká písmena: ε (čteme epsilon), φ (čteme fi), ψ (čteme psi), ω (čteme omega).

Cvičení k § 24.

284. Zapište do slovníčka: Doplňkové úhly. Ostroúhlý trojúhelník. Tupoúhlý trojúhelník. Kosoúhlé trojúhelníky.

285. Napište dva řádky písmen ε, dva řádky písmen φ, dva řádky písmen ψ a dva řádky písmen ω.

286. Pravoúhlý trojúhelník má jeden úhel
a) 54°; b) 39°; c) 80°; d) 27°; e) 36°.
Jmenujte velikost druhého ostrého úhlu.

287. Jmenujte velikost třetího úhlu trojúhelníka, když dva úhly jsou
a) 52°, 68°; b) 112°, 36°; c) 8°, 3°; d) 90°, 47°.

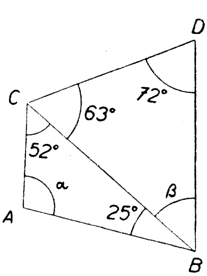
288. Řekněte, může-li trojúhelník míti tyto úhly:
a) 45°, 65°, 80°; b) 43°, 64°, 73°; c) 95°, 95°, x°.

289. Najděte x, když úhly trojúhelníka jsou
a) $x°$, $2x°$, $3x°$;
b) $3x°$, $4x°$, $5x°$.

290. Najděte x, když úhly trojúhelníka jsou
$x°$, $(x + 35)°$, $(x + 25)°$.

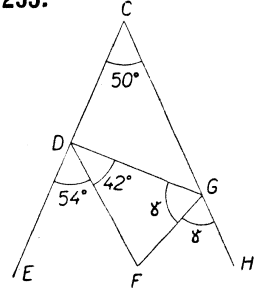
291. V trojúhelníku ABC je úhel α větší než $\beta + \gamma$. Může trojúhelník býti ostroúhlý?

292.



Obr. 115.

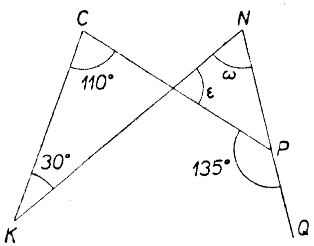
293.



Obr. 116.

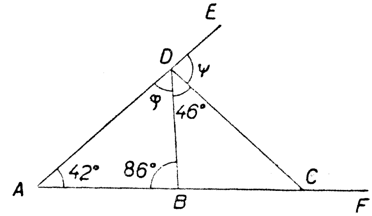
V úlohách 292 až 295 máte vypočíst, jak velké jsou úhly označené řeckými písmeny. Rýsujte vždy sami svůj obrazec od ruky. (Nemusí býti přesný, ale ať je úpravný.)

294.



Obr. 117.

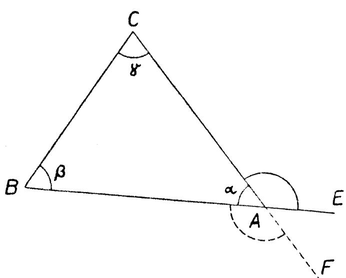
295.



Obr. 118.

§ 25. Vnější úhly trojúhelníka.

Narýsujte si trojúhelník ABC (viz obr. 119) a úhly označte α, β, γ. Prodlužte stranu BA za bod A. Úhel CAE se jmenuje **vnější úhel trojúhelníka** ABC při vrcholu A. Mohli jsme také místo strany BA prodloužit stranu CA za bod A (čárkováno v obr. 119). Tím bychom místo $\sphericalangle CAF$ dostali $\sphericalangle BAF$. Ale ty dva úhly jsou stejné. Proč?



Obr. 119.

Úhly α a $\sphericalangle CAE$ jsou vedlejší. Tedy jsou výplňkové, takže

$$\sphericalangle CAE = 180° - \alpha.$$

Ale my víme, že $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, takže

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha.$$

Porovnejte oba výsledky.

Pamatujte: Vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protějších úhlů vnitřních. Mnohé úlohy se řeší rychleji, když se užije pravidla o vnějším úhlu než kdyby se užilo pravidla $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Cvičení k § 25.

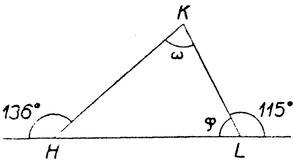
296. Zapište do slovníčka: Vnější úhly trojúhelníka.

297. Trojúhelník CDE má při vrcholu C úhel 32°. Jaký má úhel při vrcholu D, když vnější úhel při vrcholu E je

a) 100°? b) 85°? c) 136°?

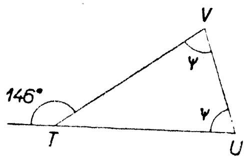
V úlohách 298 až 302 máte vypočíst úhly označené řeckými písmeny. Rýsujte vlastní obrazce od ruky.

298.



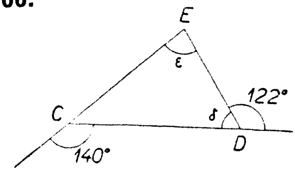
Obr. 120.

299.



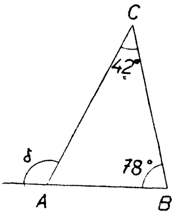
Obr. 121.

300.



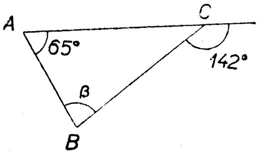
Obr. 122.

301.

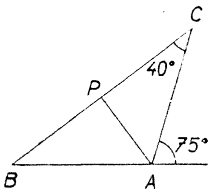


Obr. 123.

302.



Obr. 124.



Obr. 125.

303. V obr. 125 je $AP \perp BC$. Vypočtěte $\sphericalangle PAB$.

§ 26. Euklidovské konstrukce.

Geometrie je velmi stará věda. Všecko, čemu se budete v geometrii učit až do kvinty, bylo známo už ve starověku. Byli to staří Řekové, kteří vybudovali geometrii v soustavnou vědu. Již kolem roku 300 př. Kr. vydal **Euklid** (vlastně **Eukleides**) soustavnou učebnici geometrie pod názvem **Základy** (řecky **Stoicheia**). Tato kniha vyšla pak v nesčetných vydáních a může se v tomto ohledu srovnávati i s biblí. I nejmodernější geometrické bádání navazuje přímo na Euklida.

Staří Řekové nerýsovali tužkou na papír, nýbrž buďto kreslili své obrazce do jemného písku nebo je ryli do vosku. S tím souvisí, že při konstrukcích, které jsou popsány u Euklida, se neužívá dvou pravítek. Budeme říkat **euklidovská konstrukce** takové konstrukci, při které se užívá pouze dvou základních úkonů:

(1) spojit dva body přímkou,

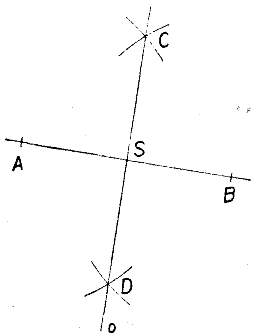
(2) narýsovat kružnici, je-li dán střed a poloměr.

V tomto odstavci se naučíme řešit některé jednoduché úlohy euklidovsky.

K takovým euklidovským konstrukcím pohodlně dospějeme studiem **osové souměrnosti.**

Vezměte list papíru a přeložte jej podél přímky, kterou označte o. Budeme jí říkat osa souměrnosti. Rozevřete papír a položte jej třeba tak, aby osa o byla svislá. Napravo od o si narýsujte výjimečně inkoustem několik bodů a čar a chcete-li, třeba také několik menších kaněk. Nyní papír znovu přeložte, aby se vám inkoust přetiskl i nalevo od o. Po opětném rozevření papíru máte dva obrazce souměrné vzhledem k ose o.

Vezměte nový list papíru a opět jej přeložte podél přímky o. V přeložené poloze papír na jednom místě propíchněte a pak rozevřete. Vzniknou vám dva body A a B (položené souměrně vzhledem k o). Veďte úsečku AB. Vidíte, že přímka o je kolmá k AB a že prochází středem S úsečky AB. Říkáme, že o je **osa úsečky** AB. Nejenom bod S, nýbrž každý bod osy o je stejně vzdálen od A jako od B. Ty body papíru, které nejsou na ose o, nejsou stejně vzdáleny od A jako od B. Ty body, které jsou na stejnou stranu od o jako je bod A, jsou blíže k A než k B; ty body, které jsou na stejnou stranu od o jako je bod B, jsou dále od A než od B.

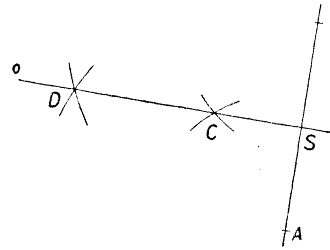


Obr. 126.

Zvolte si nyní úsečku AB v sešitě. Chceme sestrojit její osu o. Jak to provedeme? Protože o je přímka, stačí najít dva její body. Odměříme kružítkem libovolnou, jen ne příliš malou délku r. Opíšeme s poloměrem r kružnici nejprve ze středu A, potom ze středu B. Tyto dvě kružnice se protnou (viz obr. 126) v bodech C a D. Vzdálenost $\overline{AC}$ je rovná r; také $\overline{BC} = r$. Tedy bod C je stejně daleko od A jako od B a proto leží na o. Podobně také D je stejně daleko od A jako od B a také leží na o. Tedy spojnice CD je hledaná osa úsečky AB. Tím jsme se naučili euklidovské konstrukci osy úsečky. Přemýšlejte, jak velká musí býti délka r, aby se obě pomocné kružnice opravdu protaly.

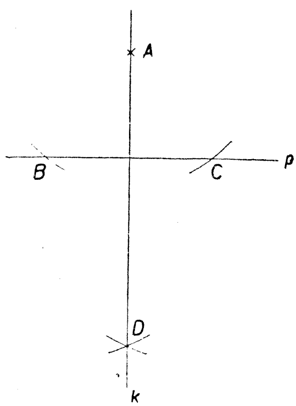
Chceme-li, aby naše konstrukce byla opravdu přesná, musíme volit r o dost větší než $\frac{1}{2}\overline{AB}$. Proč?

Může se stát, že úsečka AB je blízko kraje papíru. Potom by hořejší postup nedal osu o dosti přesně. Pak postupujeme trochu jinak, ale podle stejných zásad. Viz obr. 127. Popište sami konstrukci a proveďte ji v sešitě.

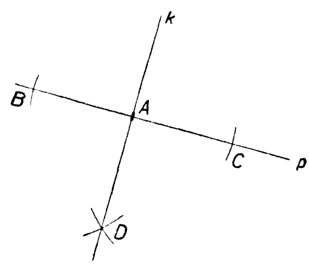


Obr. 127.

Protože střed S úsečky AB je v průsečíku přímky AB s osou o, umíme už také **euklidovskou konstrukci středu úsečky.** Jak byste rozdělili euklidovsky úsečku na čtyři stejné díly? Jak na osm? Rozdělit euklidovsky úsečku na jiný počet stejných dílů, třeba na tři nebo na pět, budeme se učit až ve vyšších třídách.



Obr. 128.



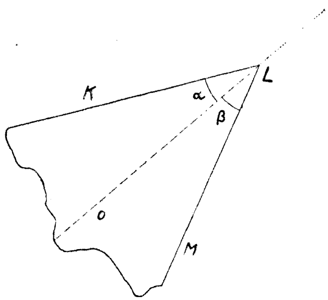
Obr. 129.

Zvolte si přímku p a mimo ni bod A. **Sestrojíme euklidovsky kolmici spuštěnou s bodu A na přímku p.** Opišme ze středu A kružnici s poloměrem libovolným, ale dosti velkým. Tato kružnice protne (viz obr. 128) přímku p ve dvou bodech B a C. Bod A je stejně vzdálen od B jako od C (proč?), tedy A leží na ose úsečky BC. Ale osa k úsečky BC stojí kolmo na přímce BC, t. j. na přímce p. Tedy žádaná kolmice k je osa úsečky BC. Protože už jeden bod A přímky k známe, stačí si opatřiti ještě jeden bod D (viz obr. 128) přímky k. Jak to uděláme?

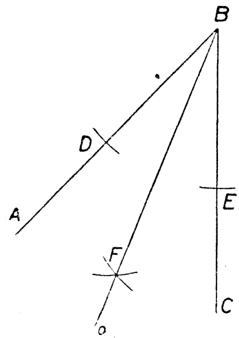
Konstrukce, kterou jsme právě prováděli, dá se beze změny provésti i když bod A leží na přímce p. Tedy dovedeme také **sestrojiti euklidovsky kolmici vztyčenou v bodě A k přímce p** (viz obr. 129).

V § 22 jsme se naučili **sestrojit úhel, který má jedno rameno dáno a který je roven danému úhlu.** To byla také euklidovská konstrukce.

Narýsujte si na listu papíru úhel KLM a vystřihněte si jej (viz obr. 130). Nyní přeložte papír tak, aby se obě ramena kryla. Polopřímka o, podél které jsme přeložili papír, jmenuje se **osa úhlu KLM.** Polopřímka o rozdělí $\sphericalangle KLM$ na dva úhly α a β. Protože můžeme papír přeložit tak, že úhly α a β se kryjí, jest $\alpha = \beta$, tedy **sestrojit osu úhlu znamená ten úhel rozpůlit.**



Obr. 130.



Obr. 131.

Prodloužíme-li polopřímku o za bod L, dostaneme polopřímku p (tečkovanou v obr. 130). Je to osa vypuklého úhlu KLM.

Sestrojte si v sešitě úhel ABC. Provedeme **euklidovskou konstrukci osy úhlu** ABC (viz obr. 131). Opišme s libovolným poloměrem kružnici ze středu B, která protne ramena daného úhlu v bodech D a E (viz obr. 131). Kdybychom přeložili papír podél hledané osy o, kryla by se polopřímka BA s polopřímkou BC. Protože je $\overline{BD} = \overline{BE}$, kryl by se bod D s bodem E. Tedy přímka, na které leží hledaná polopřímka o, je osa úsečky DE. Protože jeden bod osy už známe (který?), stačí nalézti ještě jeden její bod F. Jak se to provede? (Viz obr. 131.)

Je zajímavé si všimnout, že konstrukce, které jsme se právě naučili, dá se provést i když daný úhel je přímý. Tím dostaneme znovu jednu konstrukci, kterou jsme už dříve provedli. Kterou?

Máme-li **sestrojit euklidovsky k přímce p rovnoběžku bodem A,** můžeme to provésti tak, že spustíme euklidovsky kolmici q s bodu A na přímku p a potom vztyčíme euklidovsky kolmici r v bodě A k přímce q. Přímka r je žádaná rovnoběžka. Jsou jednodušší euklidovské konstrukce rovnoběžky, ale ty nejsou založeny na osové souměrnosti a budeme je probírat až ve vyšších třídách.

Jak byste sestrojili euklidovsky úhel 90°? Jak úhel 45°? Jak úhel 135°? Jak úhel $22\frac{1}{2}$°?

Víme už, že dva trojúhelníky ABC a DEF, které mají stejně dlouhé strany, jsou **shodné,** t. j. že se dají položit na sebe tak, že se kryjí. Ovšem ale jen ty strany se mohou krýt, které jsou stejně dlouhé.

Narýsujte si do sešitu nejdříve různostranný trojúhelník DEF, třeba tak, aby bylo

$$\overline{DE} = 5 \text{ cm}, \quad \overline{DF} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{EF} = 33 \text{ mm}.$$

Pak si narýsujte na list papíru trojúhelník ABC se stranami

$$\overline{BC} = 5 \text{ cm}, \quad \overline{AC} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{AB} = 33 \text{ mm}.$$

Trojúhelníky ABC a DEF jsou shodné. Vystřihněte trojúhelník ABC a položte jej na trojúhelník DEF. Jde to jen jediným způsobem. Říkejte, který vrchol se s kterým kryje.

Nyní si narýsujte do sešitu rovnoramenný trojúhelník DEF třeba tak, aby bylo

$$\overline{DE} = \overline{DF} = 45 \text{ mm}, \quad \overline{EF} = 3 \text{ cm}.$$

Co je základna? Co jsou ramena? Na list papíru narýsujte shodný trojúhelník ABC se stranami

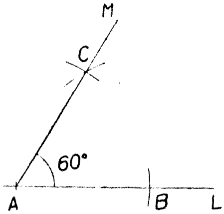
$$\overline{BC} = \overline{AC} = 45 \text{ mm}, \quad \overline{AB} = 3 \text{ cm}.$$

Vystřihněte trojúhelník ABC. Kolikerým způsobem můžete položit ABC na DEF? Jmenujte oba způsoby. S úhlem DEF se jednou kryje úhel při vrcholu A, podruhé úhel při vrcholu B trojúhelníka ABC. Tedy tyto dva úhly jsou stejné.

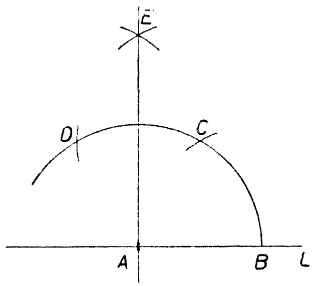
Pamatujte: Oba úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou stejné.

Konečně si narýsujte do sešitu rovnostranný trojúhelník DEF třeba se stranou 4 cm, a na list papíru shodný rovnostranný trojúhelník ABC. Vystřihněte trojúhelník ABC. Nyní můžete položit ABC na

DEF šesterým způsobem. Můžeme položit trojúhelník *ABC* na *DEF* tak, že se s $\sphericalangle$ *DEF* kryje libovolný úhel trojúhelníka *ABC*. Tedy všecky tři úhly trojúhelníka *ABC* jsou stejné. Umíte vypočítat, jak veliké musí být?



Obr. 132.



Obr. 133.

Pamatujte: Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníka má velikost 60°.

Zvolte si v sešitě libovolnou polopřímku *AL*. **Sestrojíme euklidovsky $\sphericalangle$ *LAM* = 60° s jedním ramenem daným.** Stačí zvolit bod *B* na polopřímce *AL* a sestrojit rovnostranný trojúhelník nad stranou *AB*. V obr. 132 je jen jedno řešení dané úlohy. Je ještě jedno řešení?

Úhel 120° můžeme sestrojit buďto jako vedlejší úhel k úhlu 60° nebo jako dvojnásobek úhlu 60°. Jak sestrojíte úhel 30°? Jak úhel 150°? Jak úhel 15°?

V obr. 133 je naznačena **euklidovská konstrukce kolmice vztyčené v bodě *A* k přímce *AL*,** založená na vztahu

$$90° = 60° + 30°.$$

Vyložte sami. Která konstrukce kolmice vztyčené v bodě k přímce se vám líbí lépe? (Viz obr. 129 a obr. 133.) Ve vyšších třídách poznáte ještě jiné euklidovské konstrukce kolmic.

Cvičení k § 26.

304. Zapište do slovníčka: Osová souměrnost. Osa úsečky. Osa úhlu. Euklidovské konstrukce.

Slovní výklad žádaný v úlohách 305 až 310 si ulehčete tím, že současně rýsujete obrazec od ruky.

305. Popište euklidovskou konstrukci osy úsečky.

306. Popište euklidovskou konstrukci kolmice vztyčené k přímce *p* v jejím bodě *A*.

307. Popište euklidovskou konstrukci kolmice spuštěné na přímku p s bodu B.

308. Popište euklidovskou konstrukci rozpůlení úhlu.

309. Popište euklidovskou konstrukci úhlu 60°.

310. Popište euklidovskou konstrukci úhlu 30°.

311. Zvolte úsečku AB dlouhou 4 cm a sestrojte euklidovsky čtverec nad stranou AB.

312. Zvolte úsečku AB dlouhou 5 cm a sestrojte euklidovsky obdélník $ABCD$ takový, aby bylo $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

313. Zvolte úsečku AB dlouhou 5 cm a sestrojte euklidovsky čtverec $ACBD$. (Čím je úsečka AB?)

314. Zvolte si trojúhelník EFG a sestrojte osy všech tří stran. Protínají se vám v jednom bodě?

315. Zvolte si trojúhelník HKL a sestrojte osy všech tří úhlů. Protínají se vám v jednom bodě?

316. Zvolte si kružnici a na ní tři body A, B a C. Sestrojte osy úseček AB a AC. Protínají se vám ve středu dané kružnice?

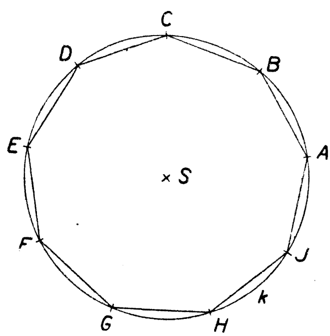
317. Kolik os souměrnosti má obdélník? Jakou mají polohu?

318. Kolik os souměrnosti má čtverec? Jakou mají polohu?

319. Písmeno **A** má svislou osu souměrnosti, písmeno **B** má vodorovnou osu souměrnosti. Hledejte všecky písmena souměrná: (1) podle svislé osy, (2) podle vodorovné osy, (3) i podle svislé i podle vodorovné osy.

§ 27. Pravidelné mnohoúhelníky.

Zvolte si body S a A. Při otáčení kolem bodu S vytvoří bod A kružnici k. Mysleme si kružnici k vytvořenu třeba otáčením doleva. Při otočení o plný úhel se opíše celá kružnice k. Rozdělme si plný úhel třeba na devět stejných otočení. Jest $360 : 9 = 40$, tedy velikost každého z těch otočení je 40°. Provedeme-li tedy za sebou devět otočení doleva o 40°, vrátí se bod A přes polohy B, C, D, E, F, G, H, I zpět (viz obr. 134) do původní polohy A. Sestrojte si bod B tak, že nanesete $\sphericalangle ASB = 40°$ pomocí úhloměru. Při otočení o 40° přejde úsečka AB do polohy BC. Tedy je $\overline{AB} = \overline{BC}$ a obecně

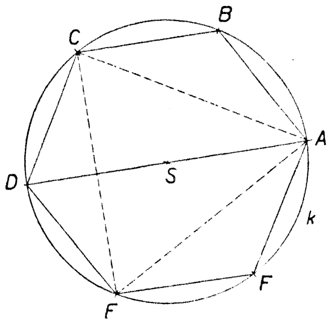


Obr. 134.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IA}.$$

Proto, když už bod B máme, dostaneme postupně další body C, D atd. pohodlněji bez úhloměru, vezmeme-li do kružítka délku $\overline{AB}$. Učiňte to a spojte AB, BC atd. jako v obr. 134. Dostanete pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Je **vepsán** do kružnice k a kružnice k je mu **opsána.** (Kde jsme už mluvili o opsané kružnici?)

Obecně mluvíme o **pravidelném mnohoúhelníku.** Pravidelný trojúhelník a pravidelný čtyrúhelník jsou nám už dobře známy, ale mají jiná jména. Jaká?



Obr. 135.

Zajímavý je **pravidelný šestiúhelník** $ABCDEF$ (v obr. 135). Protože $360 : 6 = 60$, můžeme konstrukci provádět euklidovsky (viz obr. 132). Trojúhelník ASB je zde rovnostranný. Proto: Strana pravidelného šestiúhelníka se rovná poloměru kružnice opsané a sestrojujeme jednoduše tak, že poloměr naneseme na kružnici šestkrát za sebou. Proveďte to. Pozorujete, že čára ASD je přímá. Vyložte proč.

Tedy tři úhlopříčky AD, BE, CF jsou tak dlouhé jako průměr opsané kružnice. Mimoto má náš šestiúhelník ještě šest kratších úhlopříček. Tři z nich jsou vyčárkovány v obr. 135 a tvoří rovnostranný trojúhelník vepsaný do kružnice k. Jmenujte ostatní tři úhlopříčky.

Cvičení k § 27.

320. Zapište do slovníčka: Pravidelný mnohoúhelník.

321. Zvolte úsečku AB dlouhou 42 mm a sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Proveďte oboje řešení.

322. Zvolte úsečku AD dlouhou 74 mm a sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$.

323. Do kružnice s poloměrem 5 cm vpište rovnostranný trojúhelník ACE. Změřte délky stran a porovnejte výsledky třídy.

324. Do kružnice s poloměrem 36 mm vpište euklidovsky pravidelný osmiúhelník.

325. Do kružnice s poloměrem 54 mm vpište euklidovsky pravidelný dvanáctiúhelník.

§ 28. Některá tělesa.

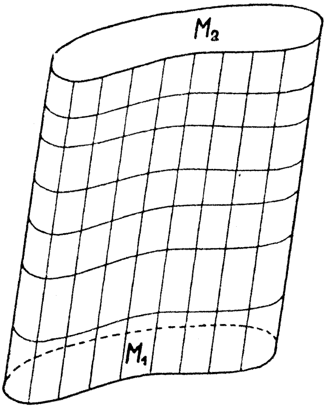
Kvádr, který byl již v prvé části této učebnice podrobně studován, je zvláštním případem kolmého hranolu (viz obr. 17 na str. 25). Mysleme si dán libovolný mnohoúhelník M_1 (třeba ve vodorovné rovině). Budiž A jeden vrchol mnohoúhelníka M_1 a budiž dána úsečka AF kolmá k rovině mnohoúhelníka M_1 (tedy svislá, je-li ta rovina vodorovná). Myslíme-li si, že z každého bodu mnohoúhelníka M_1 (uvnitř i na obvodě) vychází taková úsečka, stále kolmá na rovinu mnohoúhelníka M_1, stále stejně dlouhá (a stále na jedné straně od roviny mnohoúhelníka), tu všecky ty úsečky vyplní těleso, které se jmenuje **kolmý hranol.** Krajní body všech těch úseček vyplní jednak mnohoúhelník M_1, jednak ještě jeden mnohoúhelník M_2. Z mnohoúhelníka M_1 dostaneme M_2 posunutím, jímž se vrchol A dostane do polohy F. Proto jsou mnohoúhelníky M_1 a M_2 shodné. Říkáme jim **podstavy** (nebo **podstavné stěny**) hranolu. Vedle obou podstav má hranol ještě **pobočné stěny,** které mají tvar obdélníka; z každé strany mnohoúhelníka M vychází jedna pobočná stěna. Z každého vrcholu mnohoúhelníka M vychází jedna **pobočná hrana.** Všecky pobočné hrany jsou stejně dlouhé a jsou mezi sebou rovnoběžné (jsou svislé, je-li rovina mnohoúhelníka vodorovná). Vzdálenost rovin obou podstav se jmenuje **výška** kolmého hranolu; délka všech pobočných hran je rovna výšce hranolu. Je-li M_1 obdélníkem, je kolmý hranol kvádrem.

Kosý hranol vznikne tak jako kolmý hranol, jenomže úsečka AF není kolmá k rovině mnohoúhelníka M_1 (je šikmá, je-li ta rovina vodorovná). Také u kosého hranolu jsou obě podstavy M_1 a M_2 shodné a všecky pobočné hrany jsou stejně dlouhé a rovnoběžné. Výška kosého hranolu je menší nežli délka pobočných hran. Pobočné stěny kosého hranolu nejsou obdélníky; jsou to tak zvané rovnoběžníky. U rovnoběžníka jsou každé dvě protější strany stejně dlouhé a rovnoběžné; ale sousední strany rovnoběžníka nemusí tvořiti pravý úhel. Rovnoběžník vidíte v obr. 8 na str. 18; budeme jej podrobně studovati ve třetí části této učebnice.

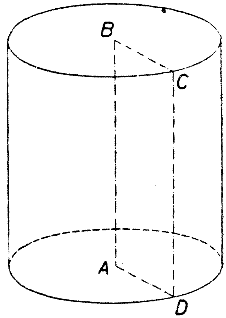
Je-li podstava M_1 na př. trojúhelník, mluvíme o **trojbokém** hranolu; podobně máme hranoly **čtyrboké, pětiboké** atd.

Je-li M_1 (a tedy také M_2) pravidelný mnohoúhelník, pak kolmý hranol s podstavou M_1 se jmenuje **pravidelný hranol.** Tedy pravidelný hranol je vždycky kolmý.

Nyní si promluvíme o jehlanech (viz obr. 16 na str. 24). Budiž dán zase mnohoúhelník M_1 (třeba zase ve vodorovné rovině) a dále budiž dán bod F, který neleží v rovině mnohoúhelníka M_1 (třeba nad touto rovinou). Myslíme-li si bod F spojen úsečkami se všemi body mnohoúhelníka M_1 (uvnitř i na obvodě), tu všecky ty úsečky vyplní těleso, kterému říkáme **jehlan.** M_1 je podstava (neboli podstavná stěna) jehlanu; ostatní stěny se jmenují pobočné stěny; jsou to trojúhelníky. Bod F, jakož i všecky vrcholy podstavy jsou vrcholy našeho tělesa. Ale rčením vrchol jehlanu rozumíme zpravidla bod F;



Obr. 136.



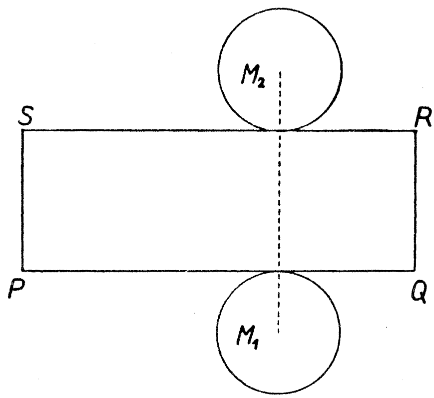
Obr. 137.

pro rozlišení od vrcholů podstavy se také může bodu F říkati temeno jehlanu. Kolmice spuštěná s bodu F na rovinu podstavy protne tuto rovinu v bodě, který označme S. Úsečce SF a také její délce $\overline{SF}$ se říká výška jehlanu. Bod S je pata výšky. **Pravidelný jehlan** je takový jehlan, u kterého podstava je pravidelný mnohoúhelník a mimoto pata výšky je středem kružnice podstavě opsané. Jehlan je trojboký, čtyrboký atd., je-li podstava trojúhelník, čtyrúhelník atd.

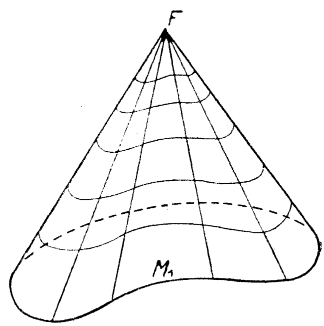
Trojboký jehlan se také nazývá **čtyrstěn** (viz obr. 15 na str. 24). Čtyrstěn můžeme považovati čtverým způsobem za jehlan, neboť kteroukoli ze čtyř stěn můžeme považovati za podstavu. **Pravidelný čtyrstěn** je takový, jehož každá stěna je rovnostranný trojúhelník. Pravidelný čtyrstěn patří mezi pravidelné trojboké jehlany.

Na začátku tohoto paragrafu bylo popsáno, jak z mnohoúhelníka M_1 vznikne kolmý nebo kosý hranol. Když M_1 neznamená mnohoúhelník, nýbrž část roviny omezenou nějakou křivou čarou, vznikne z M_1 docela stejným způsobem těleso, které se jmenuje **válec** (viz obr. 136). Také válec je buďto kolmý nebo kosý. Povrch válce se skládá ze dvou shodných podstav a z **pláště.** Plášť je zakřivená plocha, která se neskládá z rovných stěn. Co je to výška válce?

Jsou-li podstavy válce kruhy, je to **kruhový** válec. Kolmý kruhový válec (viz obr. 137) se také jmenuje **rotační válec,** protože vznikne rotací obdélníka kolem jedné strany; rotace je latinský název pro otáčení (rota = kolo).



Obr. 138.

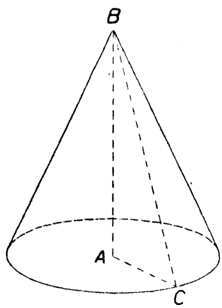


Obr. 139.

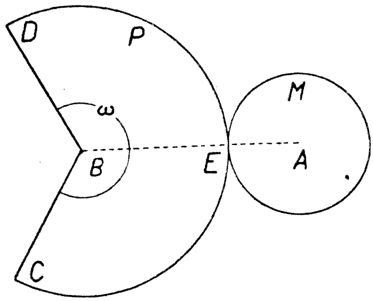
Síť rotačního válce (viz obr. 138) se skládá ze dvou kruhů M_1, M_2 (podstav) a z obdélníka $PQRS$, který tvoří síť pláště. Z obdélníka $PQRS$ dostaneme plášť válce, stočíme-li strany PQ a RS každou do tvaru kružnice, při čemž strany PS a QR splynou. Délka $\overline{PS} = \overline{QR}$ je výška válce. Délka $\overline{PQ} = \overline{RS}$ je délka obvodu podstavy. Pamatujte si, že obvod kružnice dostaneme (s dostatečnou přesností), násobíme-li průměr číslem $3\frac{1}{7}$.

Na str. 88 bylo popsáno, jak vznikne jehlan, je-li dána podstava M_1 (t. j. mnohoúhelník) a vrchol F. Když M_1 není mnohoúhelník, nýbrž část roviny omezená nějakou křivou čarou, vznikne z M_1 docela stejným způsobem těleso, které se jmenuje **kužel** (viz obr. 139). Povrch kužele se skládá z podstavy a z pláště. Plášť je zakřivená plocha, která se neskládá z rovných stěn. Co je to výška kužele? Bod F je vrchol (nebo temeno) kužele.

Je-li podstava kužele kruh, je to kruhový kužel. Je-li A střed podstavy kruhového kužele a je-li B vrchol kužele, je kruhový kužel kolmý nebo kosý podle toho, zda přímka AB je či není kolmá k rovině podstavy. (Tedy pouze kruhové kužele dělíme na kolmé a kosé.) Kolmý kruhový kužel (viz obr. 140) se také jmenuje rotační kužel,



Obr. 140.



Obr. 141.

protože vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníka ABC kolem jedné odvěsny AB. Je-li C libovolný bod na obvodě podstavy, je tedy ABC pravoúhlý trojúhelník. Odvěsny mají délky

$$r = \overline{AC}, \qquad v = \overline{AB};$$

tedy r je poloměr podstavy a v je výška kužele; přepona má délku

$$s = \overline{BC},$$

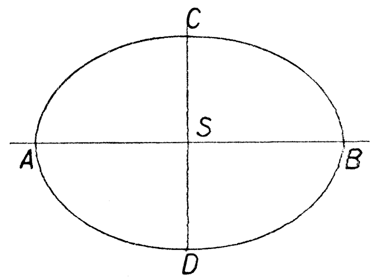
která se jmenuje strana rotačního kužele.

Síť rotačního kužele (viz obr. 141) se skládá z kruhu $\mathbf{M}_1$ (podstavy) a z kruhové výseče **P**, ze které dostaneme plášť kužele, stočíme-li ji tak, aby úsečky BC a BD splynuly. Délka $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{BE}$ je strana kužele s; úhel ω dostaneme z plného úhlu 360°, zmenšíme-li jej v poměru $r : s$ (odůvodnění se nebudeme učit). V případě obrazce v učebnici je $r = 15$ mm, $s = 25$ mm, tedy ω dostaneme ze 360°, násobíme-li zlomkem

$$\frac{r}{s} = \frac{15}{25} = \frac{6}{10},$$

takže $\omega = 216°$. Není-li dána strana s, nýbrž výška v, určíme si napřed s graficky (sestrojíme si pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky r a v; s je délka přepony).

Budiž ϱ rovina, která neprotne žádnou podstavu rotačního válce a každá podstava budiž po jiné straně od roviny ϱ. Rovina ϱ protne plášť válce v uzavřené křivé čáře e. Je-li rovina ϱ rovnoběžná s rovinami podstav, je e kružnice, je-li s nimi různoběžná, je e tak zvaná **elipsa.** Tedy elipsa vznikne na př., nalijeme-li vody do válcové nádoby a nakloníme-li nádobu. Podobně dospějeme k elipse také u kužele. Budiž ϱ rovina taková, že celá podstava kužele je na jedné straně od ní, kdežto vrchol kužele je na druhé straně. Je-li rovina ϱ rovnoběžná s rovinou podstavy, protne plášť kužele v kružnici, je-li různoběžná, protne jej v elipse. Řekneme si zde něco o elipse, ale bez odůvodňování.



Obr. 142.

Bod S (viz obr. 142) je střed elipsy. Přímky ASB, CSD jsou osy elipsy; stojí na sobě kolmo; ASB je hlavní osa, CSD je vedlejší osa. Probíhá-li bod X elipsu, nabude vzdálenost SX své největší hodnoty, když bod X je v poloze A nebo B, a své nejmenší hodnoty, když bod X je v poloze C nebo D. Délky

$$\overline{SA} = \overline{SB} = a, \qquad \overline{SC} = \overline{SD} = b$$

se jmenují poloosy elipsy; a je hlavní poloosa, b je vedlejší poloosa.

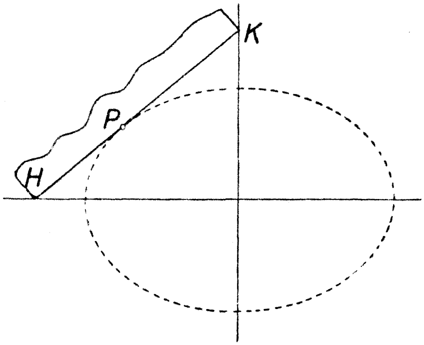
Elipsa se dá sestrojit různými způsoby. Naučíme se jednomu z nich, kterému se říká proužková konstrukce. Dá se provésti dvěma způsoby, znázorněnými v obr. 143 a 144.

Při obojím způsobu se užije přímého proužku papíru, na kterém jsou vyznačeny tři body H, K, P, a to tak, že

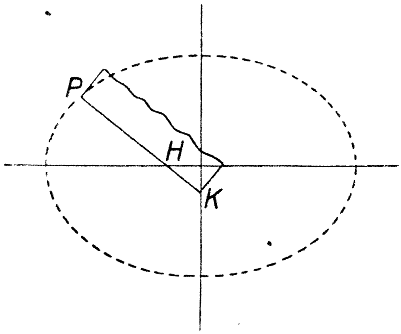
$$\overline{KP} = a, \qquad \overline{HP} = b,$$

t. j. že délka $\overline{KP}$ se rovná hlavní poloose a $\overline{HP}$ vedlejší poloose (je tedy $\overline{HP} < \overline{KP}$). Při prvém způsobu je bod P uvnitř úsečky HK, při druhém je P vně úsečky HK. Konstrukce spočívá v tom, že pohybujeme proužkem tak, že bod H leží stále na hlavní ose a bod K na vedlejší ose; bod P opisuje elipsu.

Rýsujete-li elipsu od ruky, pamatujte na to, že ASB a CSD jsou osy souměrnosti křivky, a že sledujeme-li křivku na př. od bodu C k bodu A, je stále zakřivenější.



Obr. 143.



Obr. 144.

V průmětu se obvody podstav rotačního válce jeví jako elipsy a průmět pláště je omezen úsečkami, které se těch elips dotýkají (viz obr. 137), body dotyku leží na hlavní ose. Stejně je tomu u kužele; obvod podstavy se v průmětu jeví jako elipsa a průmět vrcholu kužele leží na vedlejší ose té elipsy; průmět pláště je omezen úsečkami, které se elipsy dotýkají.

Cvičení k § 28.

326. Zapište do slovníčka: Kolmý a kosý hranol. Podstavy hranolu, pobočné stěny hranolu; podstavné a pobočné hrany hranolu. Výška hranolu. Trojboký, čtyrboký hranol atd. Pravidelný hranol. Jehlan. Podstava jehlanu, pobočné stěny jehlanu; podstavné a pobočné hrany jehlanu. Výška jehlanu. Trojboký, čtyrboký jehlan atd. Pravidelný jehlan. Čtyrstěn; pravidelný čtyrstěn. Vrchol neboli temeno jehlanu. Kolmý a kosý válec. Podstavy válce; plášť válce. Výška válce. Kruhový válec; rotační válec. Kužel. Podstava kužele; plášť kužele. Vrchol neboli temeno kužele. Výška kužele. Kruhový kužel (kolmý a kosý). Rotační kužel. Elipsa. Střed elipsy. Hlavní a vedlejší osa elipsy. Hlavní a vedlejší poloosa elipsy. Proužková konstrukce elipsy.

327. Sestrojte síť kvádru $ABCDEFGH$; $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm; $\overline{CG} =$ $= 4$ cm.

328. Sestrojte síť krychle $ABCDEFGH$; $\overline{AB} = 3$ cm.

329. Sestrojte síť kolmého trojbokého hranolu $PQRSTU$; $\overline{PQ} = 35$ mm, $\overline{PR} = 4$ cm, $\overline{QR} = 46$ mm, $\overline{PS} = 3$ cm.

330. Sestrojte síť pravidelného osmibokého hranolu; podstava je vepsána do kružnice s poloměrem 24 mm, výška 2 cm.

331. Sestrojte síť pravidelného šestibokého hranolu; délka podstavných hran 3 cm, výška $2\frac{1}{2}$ cm.

332. Sestrojte od ruky průmět nějakého

a) kolmého šestibokého hranolu;

b) kosého pětibokého hranolu.

(Neviditelné hrany čárkujte.)

333. Sestrojte síť pravidelného čtyrbokého jehlanu; délka podstavných hran 3 cm, délka pobočných hran 4 cm.

334. Sestrojte síť pravidelného šestibokého jehlanu; délka podstavných hran 3 cm, výška 3 cm.

335. Sestrojte síť jehlanu. Podstava je čtverec $ABCD$ o straně 32 mm; výška je 28 mm; pata výšky padne do bodu A.

336. Sestrojte od ruky průmět nějakého

a) trojbokého, b) čtyrbokého, c) pětibokého

jehlanu. (Neviditelné hrany čárkujte.)

337. Sestrojte síť a model rotačního válce:

a) průměr podstavy 38 mm, výška 54 mm;

b) průměr podstavy $4\frac{1}{2}$ cm, výška $3\frac{1}{2}$ cm;

c) průměr podstavy 6 cm, výška také 6 cm.

338. Sestrojte síť a model rotačního kužele:

a) poloměr podstavy 4 cm, strana 6 cm;

b) poloměr podstavy 36 mm, výška 32 mm;

c) výška 3 cm, strana 5 cm.

339. Sestrojte proužkovou konstrukcí elipsu (a je hlavní poloosa, b je vedlejší poloosa):

a) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm; b) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm;

c) $a = 45$ mm, $b = 37$ mm; d) $a = 45$ mm, $b = 23$ mm.

340. Narýsujte od ruky několik průmětů rotačních válců a kuželů.

§ 29. Opakování.

Cvičení A (geometrické výrazy).

341. Jak se jmenuje přímá čára na obě strany omezená, na jednu stranu omezená, neomezená? Je-li taková čára označena AB, smíme ji také označit BA?

342. Která jiná slova znamenají totéž jako slova „vzdálenost bodů U a V“?

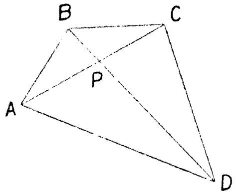
343. Jmenujte dva vrcholové úhly v obr. 145.

344. Čím je bod P vzhledem ke čtyrúhelníku $ABCD$ (viz obr. 145)?

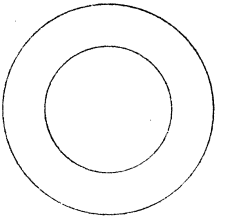
345. Jak se jmenují takové dvě kružnice, jaké vidíte v obr. 146? Jak se jmenuje plocha jimi omezená?

346. Co je to kruhová úseč? Naznačte obrazcem od ruky a potom vyložte slovy. Jak se jmenuje přímá část okraje? Co je to kruhová výseč?

347. Mnohé výrazy mají v geometrii dvojí význam. Na př. výraz „obvod trojúhelníka" může znamenat čáru, ale může také znamenat... Hledejte jiné příklady.



Obr. 145.



Obr. 146.

348. Co to znamená, když u některého obrazce v učebnici je poznámka „jednotka 1 mm"?

349. Které cizí slovo znamená „sestrojení"?

350. Čtěte: $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, $\overline{AD} < \overline{BC}$.

351. Jmenujte ty rovné plochy, kterým jsme dali jména. Každý druh plochy naznačte obrázkem od ruky a potom popište slovy.

352. Trojúhelníky jsme rozdělili ve tři druhy, a to dvojím způsobem; nejprve podle ..., potom podle ... Vyložte podrobně.

353. Co je to pata?

354. Jak se jmenují strany pravoúhlého trojúhelníka?

355. Co jsou doplňkové úhly? Co jsou výplňkové úhly?

356. Co znamená v geometrii slovo „síť"?

357. Jak se jmenují obrazce, kterými si v sešitě znázorňujeme krychle a jiná tělesa?

358. Co je to euklidovská konstrukce?

359. Jak se říká takovému počtu jako $7 \times 7 \times 7 = 343$ nebo $9 \times 9 \times 9 = 729$?

360. Co může být různoběžné? Co mimoběžné?

361. Jak se jmenuje přímka, ve které se protínají dvě roviny?

362. Co jsou vedlejší úhly? (Obrázek a výklad.)

363. Jak dělíme úhly podle velikosti?

364. Jak se jmenují obrazce, které se dají na sebe položit tak, že se přesně kryjí?

365. Co je to osa úsečky, co je to osa úhlu? (Obrázek a výklad.)

366. Co jsou vnější úhly trojúhelníka? (Obrázek a výklad.)

367. Mluvíme nejen o vzdálenosti dvou bodů, ale také o jiných vzdálenostech. O kterých?

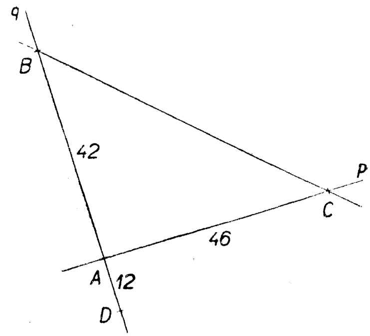
368. Co jsou vrcholové úhly? (Obrázek a výklad.)

Cvičení B (vyjadřování a čtení).

369. Vyložte zřetelně, jak se zkusmo půlí úsečka. Můžete si pomáhat obrazcem od ruky, ale vyjadřujte se tak, abyste nemusil na obrazec ukazovat. Stejně i v dalším.

370. Vyložte, jak se euklidovsky půlí úsečka.

371. Vyložte, jak byste si počínal, kdybyste měl k danému trojúhelníku DEF sestrojit shodný trojúhelník PQR, při čemž bod P by byl předepsán.



Obr. 147.

372. Dávejte slovy návod, podle kterého by vaši spolužáci mohli rýsovat obrazec naznačený v obr. 147 (jednotka 1 mm). Jest $q \perp p$. Dávejte návod tak, aby rýsovali napřed přímku p, potom bod A, pak přímku q, dále bod B, bod C, bod D a na konec přímku r.

373. Opakujte úlohu 372, ale začněte přímkou q a pak ať následuje za sebou bod D, bod B, bod A, přímka p, bod C a přímka r.

374. Dávejte slovy návod, podle kterého by spolužáci mohli rýsovat obrazec naznačený v obr. 67 na str. 52 (jednotka 1 cm).

375. Totéž s obr. 70 na str. 52.

376. (Čtěte pomalu a postupně rýsujte.) Zvolte si přímku p a na ní dva body A a B vzdálené 5 cm. Bodem A veďte přímku CAD a naneste $\overline{CA} = \overline{AD} = 1$ cm. Bodem B veďte přímku BE a určete bod E tak, aby bylo $\overline{BE} = 2$ cm a aby úsečka DE neproťala přímku p. Sestrojte kružnici nad průměrem CE.

377. Opište dvě kružnice h a k ze společného středu S s poloměry 3 cm (kružnice h) a 5 cm (kružnice k). Zvolte si na k bod A a veďte jím průměr, který protne h v bodech B a C ($\overline{AB} > \overline{AC}$). Najděte na k body D a E vzdálené 5 cm od B. Spusťte s bodu E kolmici na přímku BD a označte P její patu. Vztyčte v bodě D kolmici k přímce AD.

Cvičení C (přesné rýsování).

378. Propíchněte volný list papíru ve dvou bodech A a B ($\overline{AB} = 4$ cm). Na jedné straně sestrojte euklidovsky čtverec $ABCD$, na druhé straně sestrojte týž čtverec dvěma pravítky. Přesvědčte se, že poloha bodů C a D je přesně stejná na líci i na rubu.

379. Zvolte body A, B a C tak, aby bylo $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm, $AB \perp AC$. Sestrojte čtverec $BCDE$ tak, aby nezasahoval dovnitř trojúhelníka ABC. Najděte patu H kolmice spuštěné s bodu E na přímku AC. Najděte patu K kolmice spuštěné s bodu B na přímku EH. Přesvědčte se, že čtyrúhelník $ABKH$ je čtverec.

380. Uvnitř kružnice k (střed S) si zvolte bod A. Na kružnici k si zvolte body B a C tak, aby $\sphericalangle BAC$ byl ostrý. Bodem A veďte tětivy BD a CE. Přesvědčte se graficky, že součet $\sphericalangle BSC$ a $\sphericalangle DSE$ je rovný dvojnásobku $\sphericalangle BAC$.

381. Opište kružnici k ze středu S s poloměrem 25 mm. Sestrojte kružnici m s poloměrem 35 mm tak, aby procházela bodem S. Označte si A a B průsečíky kružnic k a m. Veďte přímku SPQ tak, aby bod P ležel na kružnici k a aby bod Q ležel na kružnici m. Sestrojte osu $\sphericalangle ABQ$. Prochází vám přesně bodem P?

382. Sestrojte si kružnici k a vpište do ní rovnostranný trojúhelník ABC. Na kružnici k si zvolte body D a E tak, aby bylo $\overline{AD} = \overline{BE}$ a aby šly na kružnici k za sebou popořádku body A, D, B, E a C. Přesvědčte se graficky, že součet úseček $\overline{AD}$ a $\overline{DB}$ se rovná $\overline{AE}$.

Cvičení D (poučky).

383. Když známe průměr kružnice, jak počítáme poloměr? Jak počítáme průměr z poloměru?

384. Co víte o délkách stran trojúhelníka?

385. Když přímka p neprochází bodem A, který bod přímky p je nejblíže k bodu A?

386. Která strana pravoúhlého trojúhelníka je nejdelší?

387. Jaká je vzájemná poloha přímek kolmých k přímce p: (1) v sešitě, (2) v prostoru?

388. Co víte o stranách obdélníka?

389. Co víte o úhlopříčkách obdélníka?

390. Kolik musí míti kvádr hran stejně dlouhých s danou hranou? Může jich být více?

391. Co víte o středních příčkách obdélníka?

392. Co víte o středních příčkách čtverce?

393. Co víte o úhlopříčkách čtverce?

394. Podle kterých zásad rýsujeme průmět kvádru?

395. Kolik úhlopříček má kvádr? Co o nich víte?

396. Jak počítáte obsah obdélníka? Jak obsah čtverce?

397. Můžete počítati obsah čtverce, když změříte úhlopříčku?

398. Jak počítáte objem kvádru?

399. Jak počítáte povrch kvádru? Jak povrch otevřené krabice (bez víka)?

400. Když P je pata kolmice spuštěné s bodu A na rovinu ϱ, co víte o přímkách, které leží v rovině ϱ a procházejí bodem P?

401. Co víte o čtyřech úhlech vytvořených dvěma různoběžkami?

402. Co víte o ostrých úhlech pravoúhlého trojúhelníka?

403. Co víte o úhlech při základně rovnoramenného trojúhelníka?

404. Co víte o úhlech obecného trojúhelníka?

405. Jak se počítá vnější úhel trojúhelníka?

406. Kudy prochází osa úsečky AB? Jaký úhel tvoří s přímkou AB?

407. Co ještě víte o ose úsečky?

408. Jaké jsou úhly rovnostranného trojúhelníka?

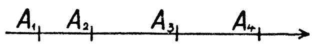
409. Co víte o pravidelném šestiúhelníku?

410. Která rotační tělesa znáte? Jak vzniknou?

Část třetí (pro III. třídu).

§ 30. Dvě přímky proťaté příčkou.

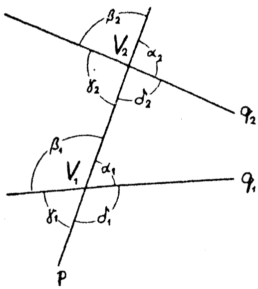
Víte, že body značíme velkými písmeny. Když jsme si v nějakém obrazci chtěli vyznačiti body písmeny, dělali jsme to dosud tak, že jsme užili pro každý bod jiného písmene. Ale můžeme také užíti jednoho písmene k vyznačení několika bodů. K rozlišení těch bodů pak užijeme indexů. Indexy jsou číslice, které píšeme dole vpravo. Na př. A_1, A_2, A_3, A_4 v obr. 148. (Čteme A jedna, A dvě atd.) Indexy píšeme maličké, ale zřetelné!



Obr. 148.

Víte, že body na dané přímce můžeme sledovati ve dvojím pořádku. Rozhodneme-li se pro určitý pořádek, můžeme si to znázorniti šipkou jako v obr. 148. Záleží na tom, na kterém místě přímky je šipka vyznačena? Na čem záleží?

Zvolme si v obr. 148 třeba bod A_2. Přímka se jím rozdělí na dvě polopřímky. Jedna z nich, totiž polopřímka A_2A_3, odpovídá pořádku vyznačenému šipkou; druhá z nich, totiž polopřímka A_2A_1, odpovídá druhému možnému pořádku bodů na naší přímce. O dvou polopřímkách na dané přímce říkáme, že mají (mezi sebou) stejný smysl, když odpovídají obě stejnému pořádku bodů na přímce; říkáme, že mají (mezi sebou) opačný smysl, když každá odpovídá jinému pořádku. Tak na př. mají v obr. 148 polopřímka A_1A_3 a A_2A_3 stejný smysl, odpovídající vyznačenému pořádku. Také polopřímky A_3A_1 a A_4A_1 mají stejný smysl, tentokrát neodpovídající zvolenému pořádku. Naproti tomu mají polopřímky A_1A_4 a A_4A_1 opačný smysl (první odpovídá vyznačenému pořádku, druhá mu neodpovídá).



Obr. 149.

V obr. 149 vidíme tři přímky. Jedna z nich je označena p, ostatní dvě jsou označeny q_1 a q_2. Přímky p a q_1 se protnou v bodě, který je označen V_1. Přímky p a q_2 se protnou v bodě, který je označen V_2. (Přímky q_1 a q_2 by se v našem případě také proťaly, kdybychom si obrazec prodloužili. Ale na tom nezáleží; přímky q_1 a q_2 v takovém obrazci by také mohly býti rovnoběžné.) Máme-li takový obrazec, říkáme přímce p příčka; q_1 a q_2 nazveme proťaté přímky. Celý obrazec se tedy jmenuje: dvě přímky proťaté příčkou.

Při vrcholu V_1 máme čtyři úhly, které jsou v obrazci označeny α_1, β_1, γ_1, δ_1. Také při vrcholu V_2 máme čtyři úhly, v obrazci označené α_2, β_2, γ_2, δ_2. Celkem máme v obrazci osm úhlů; každý z nich má jedno rameno v příčce a druhé rameno v jedné z obou proťatých přímek.

Z těchto osmi úhlů si můžeme mnoha způsoby vybrati dva. Tak dostaneme rozmanité dvojice úhlů. Některé z těch dvojic mají určitá jména, která si musíte zapamatovat. Jestliže oba úhly v dvojici mají stejný vrchol (ať už je to vrchol V_1 či vrchol V_2), je to buďto dvojice vedlejších úhlů nebo dvojice vrcholových úhlů. Oba ty názvy už znáte.

S novými jmény se tedy setkáme pouze u těch dvojic, kde jeden úhel má vrchol V_1 a druhý vrchol V_2. Důležité jsou především tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \alpha_2; \quad \beta_1, \beta_2; \quad \gamma_1, \gamma_2; \quad \delta_1, \delta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **souhlasných úhlů.** U souhlasných úhlů mají ramena ležící v příčce stejný smysl; ramena ležící v proťatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Dále jsou důležité tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \gamma_2; \quad \beta_1, \delta_2; \quad \gamma_1, \alpha_2; \quad \delta_1, \beta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **střídavých úhlů.** U střídavých úhlů mají ramena ležící v příčce opačný smysl; ramena ležící v proťatých přímkách leží každé na jiné straně od příčky.

Z ostatních dvojic si pojmenujeme ještě pouze dvojice:

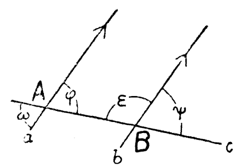
$$\alpha_1, \delta_2; \quad \beta_1, \gamma_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **přilehlých úhlů.** U přilehlých úhlů ramena ležící v příčce obsahují úsečku V_1V_2; ramena ležící v proťatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Často se vyskytují obrazce, ve kterých jsou dvě přímky, o kterých *je nám známo, že jsou rovnoběžné.* Abychom měli tu rovnoběžnost dobře na paměti, děláme si na obou rovnoběžkách *šipky* (viz obr. 150 a jiné). Na jedné z nich si zvolíme šipku libovolně, ale na druhé přímce uděláme šipku tak, aby obě šipky vyznačovaly *souhlasný pořádek.* Takový souhlasný pořádek dostaneme, představíme-li si, že se dva body pohybují současně, každý po jedné z obou rovnoběžek, a to tak, že jsou stále stejně od sebe vzdáleny.

V obrazcích, které sami rýsujete, můžete si rovnoběžnost vyznačit výrazněji, užijete-li barevné tužky. (Obě šipky stejnou barvou!) Někdy se vyskytují v témž obrazci *dva páry* rovnoběžek. Tak je tomu na př. v obr. 163; jeden pár rovnoběžek je vyznačen jednoduchými šipkami, druhý pár dvojitými. Ve vlastním obrazci můžete užíti dvou různých barev.

V obr. 150 vidíte, stejně jako v obr. 149, dvě přímky proťaté příčkou; ale tentokrát jsou proťaté přímky mezi sebou rovnoběžné. Budeme nyní obr. 150 zkoumat a to tak, že si pokaždé všimneme jedné dvojice úhlů. Výsledkem toho zkoumání budou poznatky, které si musíte dobře vštípiti v paměť, protože, jak uvidíte na příkladech, dá se jich užít k řešení rozmanitých úloh. Takovým důležitým poznatkům říkáme *poučky.* Některé poučky již znáte. Uveďme si dvě takové známé poučky.



Obr. 150.

Vrcholové úhly jsou si rovny. (Na př. $\omega = \varphi$ v obr. 150.)

Vedlejší úhly jsou výplňkové. (Na př. $\varepsilon + \psi = 2R$ v obr. 150.)

Všimněme si nyní v obr. 150 dvojice souhlasných úhlů φ, ψ. Posouváme-li úhel φ podél příčky c tak daleko, až vrchol přejde z polohy A do polohy B, přejde úhel φ na konec v úhel ψ. Protože při posouvání zůstává velikost úhlu nezměněna, je $\varphi = \psi$.

Souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Nyní si všimněme v obr. 150 dvojice střídavých úhlů ω, ψ. Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly), ale také $\psi = \varphi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami; proto je $\omega = \psi$.

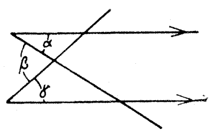
Střídavé úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Dále si všimněme v obr. 150 dvojice přilehlých úhlů φ, ε. Jest $\psi + \varepsilon = 2R$ (vedlejší úhly); ale $\varphi = \psi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami); proto je $\varphi + \varepsilon = 2R$.

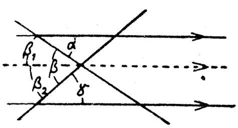
Přilehlé úhly mezi rovnoběžkami jsou výplňkové.

Příklad. V obr. 151a je $\alpha = 32°$, $\gamma = 41°$. Určete β.

Jako mnohé jiné geometrické úlohy, rozřeší se i tato úloha snadno, provedeme-li napřed pomocnou konstrukci. To znamená, že do daného obrazce přirýsujeme jednu novou čáru nebo několik nových čar, volených tak, aby se řešení úlohy ulehčilo. V našem případě je vhodné vésti k oběma daným rovnoběžkám třetí rovnoběžku vrcholem



Obr. 151a.



Obr. 151b.

úhlu β (viz obr. 151b). Úhel β se nám rozdělí na dva úhly β_1 a β_2. Jest $\beta_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami), dále $\beta_2 = \gamma$ (z téhož důvodu); tedy $\beta_1 = 32°$, $\beta_2 = 41°$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 73°$. Pomocná čára byla v obr. 151b čárkována, aby bylo patrné, že nepatří k původnímu obrazci.

Všimněme si znovu obrazce 150! V tomto obrazci jsou φ a ψ souhlasné úhly mezi rovnoběžkami a proto je $\varphi = \psi$. Nyní si mysleme náš obrazec poněkud změněn. Přímky a a c ať zůstanou stále v původní poloze, ale přímku b si mysleme z původní polohy pootočenu (kolem středu B). Co se stane se souhlasnými úhly φ a ψ? Úhel φ zůstane beze změny, ale velikost úhlu ψ se jistě změní. Proto už nebude $\varphi = \psi$. Kdežto souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou stejné, vidíte, že souhlasné úhly mezi různoběžkami stejné býti nemohou. Proto když o dvou souhlasných úhlech víme, že jsou stejné, můžeme z toho soudit, že jsou mezi rovnoběžkami. Říkáme, že poučka o rovnosti souhlasných úhlů mezi rovnoběžkami se dá obrátit. Původní poučka říká, že když víme, že proťaté přímky jsou rovnoběžné, můžeme usoudit, že souhlasné úhly jsou si rovny. Obrácená poučka říká, že když víme, že dva souhlasné úhly jsou si rovny, můžeme usoudit, že proťaté přímky jsou rovnoběžné.

Každá poučka se obrátit nedá. Na př. „Když dva úhly jsou vrcholové, jsou si rovné“ je správná poučka. Obrácení by znělo „Když dva úhly jsou si rovny, jsou to úhly vrcholové“, ale to není správné.

Vyslovme si ještě jednou obrácenou poučku o souhlasných úhlech:

Jsou-li dva souhlasné úhly sobě rovny, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

Nyní se snadno přesvědčíme, že také poučka o střídavých úhlech se dá obrátit:

Jsou-li dva střídavé úhly sobě rovny, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

Abychom se o správnosti této poučky přesvědčili, podívejme se znovu na obr. 150. V něm jsou ω a ψ dva střídavé úhly. Víme, že $\omega = \psi$ a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme si na pomoc úhel φ. Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly). Proto je také $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Také obrácená poučka o přilehlých úhlech je správná:

Jsou-li dva přilehlé úhly výplňkové, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

Jsou-li dva přilehlé úhly výplňkové, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

O správnosti se přesvědčíme zase podle obr. 150. Víme, že $\varphi + \varepsilon = 2R$ a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme na pomoc úhel ψ. Jest $\psi + \varepsilon = 2R$ (vedlejší úhly). Proto je $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Vraťme se ještě jednou k obr. 150! Proťaté přímky a, b jsou rovnoběžné a jest $\varphi + \varepsilon = 2R$. Zase si mysleme, že přímky a a c zůstanou každá ve své poloze, ale že se přímka b pootočí kolem středu B. Pootočená přímka b bude s přímkou a různoběžná a proto ji protne. Pootočení přímky b můžeme provésti dvojím způsobem. Předně můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zmenší, takže bude $\varphi + \varepsilon < 2R$. V tomto případě se protnou ramena úhlů φ a ε ležící v proťatých přímkách. Za druhé můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zvětší, takže bude $\varphi + \varepsilon > 2R$. Teď se ramena úhlů φ a ε (ležící v přímkách a a b) neprotnou, protože průsečík přímek a a b bude teď na druhé straně od příčky.

Mají-li dva přilehlé úhly součet menší než $2R$, pak se ramena ležící v proťatých přímkách protnou.

Mají-li dva přilehlé úhly součet menší než $2R$, pak se ramena ležící v prot'atých přímkách protnou.

Cvičení k § 30.

411. Co můžete říci o smyslu dvou polopřímek, víte-li, že jedna je částí druhé?

412. Na dané přímce si zvolíme dvě polopřímky opačného smyslu. Které body jsou oběma polopřímkám společné? (Jsou tři možné případy.)

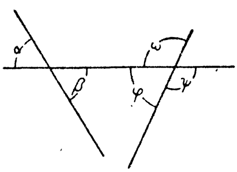
413. Mohou dvě polopřímky stejného smyslu dohromady vyplniti celou přímku?

414. Musí dvě polopřímky opačného smyslu dohromady vyplniti celou přímku?

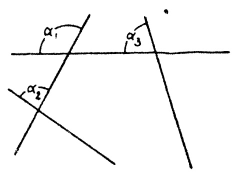
415. Jmenujte všecky dvojice vedlejších úhlů v obr. 149!

416. Jmenujte všecky dvojice vrcholových úhlů v obr. 149!

417. V obr. 152 udejte název dvojice úhlů:



Obr. 152.



Obr. 153.

a) α, β. b) α, ω. c) ω, φ.
d) β, ψ. e) β, ω. f) β, φ.

418. Narýsujte si od ruky obrazec podobný obr. 153.

α_1, α_2 a α_1, α_3 jsou dvě dvojice souhlasných úhlů.

a) Ve svém obrazci si označte β_1, γ_1, δ_1 ostatní tři úhly, které mají týž vrchol jako úhel α_1. Podobně pro úhly α_2 a α_3.

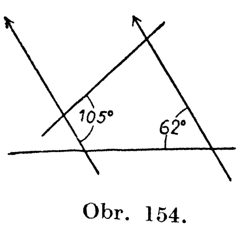
b) Vypište podle svého obrazce všecky dvojice souhlasných úhlů!

c) Vypište všecky dvojice střídavých úhlů!

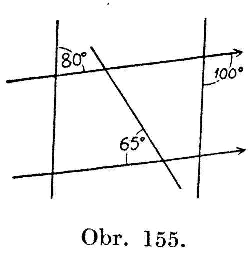
d) Vypište všecky dvojice přilehlých úhlů!

419. Sestrojte si od ruky obrazec podobný obr. 154. Vpište do svého obrazce velikosti všech úhlů! (Celkem máte 16 úhlů.)

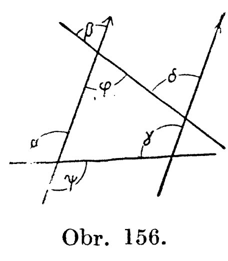
420. Opakujte s obr. 155. (Celkem máte 24 úhly.)



Obr. 154.



Obr. 155.



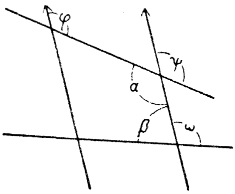
Obr. 156.

Také ve cvičeních 421 až 428 pokaždé si narýsujte vlastní obrazec od ruky.

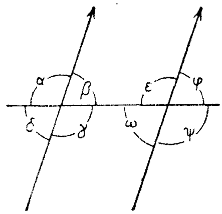
421. V obr. 156 jest $\varphi = 73°$, $\psi = 114°$. Určete α, β, γ, δ. Udávejte důvody!

422. V obr. 157 jest $\alpha = 127°$, $\beta = 87°$. Určete φ, ψ, ω. Udávejte důvody!

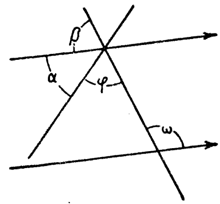
Také ve cvičeních 423 až 428 udávejte důvody!



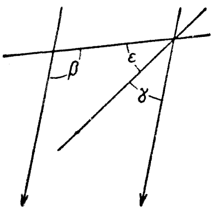
Obr. 157.



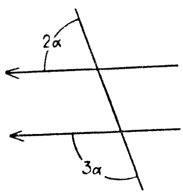
Obr. 158.



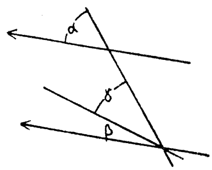
Obr. 159.



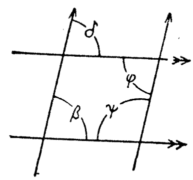
Obr. 160.



Obr. 161.



Obr. 162.



Obr. 163.

423. Následující úlohy se týkají obr. 158, který není přesně rýsován.

a) Jest $\beta = 72°$; určete ω.
b) Jest $\psi = 106°$; určete α.
c) Jest $\delta = 63°$; určete ε.
d) Jest $\varphi = 82°$; určete γ.
e) Jest $\alpha = 2\varphi$; určete φ.
f) Jest $\gamma - \omega = 72°$; určete ω.

424. V obr. 159 jest $\varphi = 65°$, $\omega = 114°$. Určete α a β.

425. V obr. 160 jest $\beta = 107°$, $\gamma = 35\frac{1}{2}°$. Určete ε.

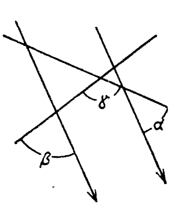
426. V obr. 161 určete α.

427. V obr. 162 je $\alpha = 51°$, $\gamma = 2\beta$. Určete β a γ.

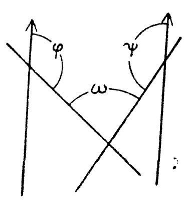
428. V obr. 163 je $\beta = 79\frac{1}{2}°$. Určete δ, φ a ψ.

Ve cvičeních 429 až 434 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Pomocné čáry čárkujte! Udávejte důvody!

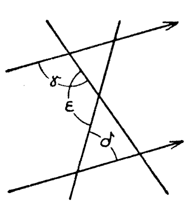
429. V obr. 164 jest $\alpha = 42°$, $\beta = 76°$. Určete γ.



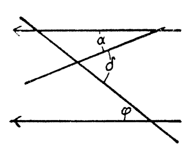
Obr. 164.



Obr. 165.

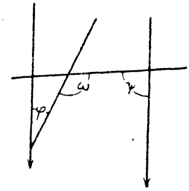


Obr. 166.

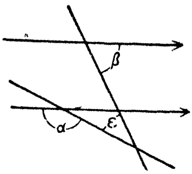


Obr. 167.

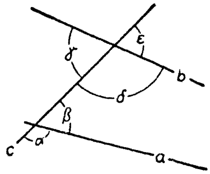
430. V obr. 165 jest $\varphi = 132°$, $\psi = 154°$. Určete ω.
431. V obr. 166 jest $\gamma = 112°$, $\delta = 58°$. Určete ε.
432. V obr. 167 jest $\alpha = 21°$, $\delta = 57°$. Určete φ.
433. V obr. 168 jest $\varphi = 25°$, $\omega = 121°$. Určete ψ.
434. V obr. 169 jest $\beta = 63°$, $\varepsilon = 36°$. Určete α.



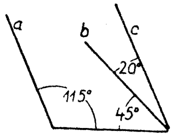
Obr. 168.



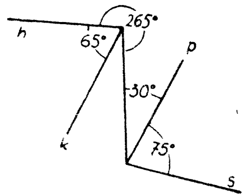
Obr. 169.



Obr. 170.



Obr. 171.



Obr. 172.

435. Dá se následující poučka obrátit?

a) Když úhel φ je ostrý, je menší než jeho vedlejší úhel.

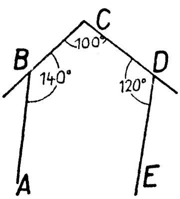
b) Když trojúhelník má jeden úhel pravý, má dva úhly ostré.

Ke cvič. 436 až 438 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Udávejte důvody!

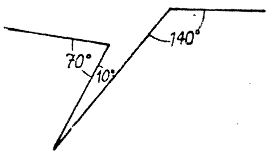
436. V obr. 170, který není přesně rýsován, zkoumejte podle daných číselných údajů, je-li $a \parallel b$. Není-li, řekněte, zda se přímky a a b protnou nalevo či napravo od přímky c.

a) $\beta = 60°$, $\varepsilon = 70°$. c) $\alpha = 115°$, $\varepsilon = 65°$.

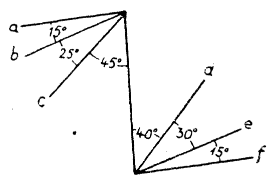
b) $\beta = 55°$, $\delta = 125°$. d) $\beta = 65°$, $\gamma = 60°$.



Obr. 173.



Obr. 174.



Obr. 175.

437. a) Zkoumejte, je-li v obr. 171 nějaký pár rovnoběžek!

b) Opakujte s obr. 172!

c) Opakujte s obr. 173! (Pomocná konstrukce: Bodem C veďte rovnoběžku s přímkou AB.)

d) Opakujte s obr. 174! (Zase pomocná konstrukce.)

438. Hledejte páry rovnoběžek v obr. 175!

439. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu? Zapište si je!

440. Zapište si všecky poučky, které jste poznali v tomto paragrafu.

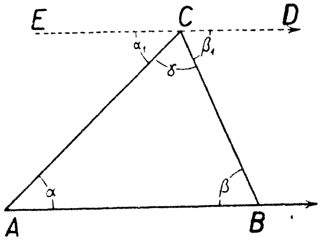
§ 31. Úhly mnohoúhelníka.

Součet úhlů trojúhelníka je $2R$. Tuto důležitou poučku už znáte. Můžeme si ji dokázati takto (viz obr. 176). Vrcholem C si vedeme přímku ECD rovnoběžnou s přímkou AB. Podle obrazce jest

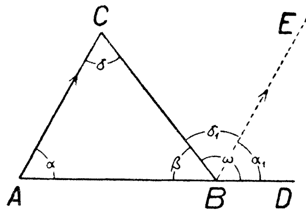
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 2R.$$

Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\beta_1 = \beta$ (z téhož důvodu). Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$



Obr. 176.



Obr. 177.

Při důkaze právě provedeném jsme vedli pomocnou čáru vrcholem C. Místo toho jsme mohli vésti pomocnou čáru vrcholem A nebo vrcholem B. Proveďte to!

Vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protějších úhlů vnitřních. Také poučka tato je vám už známa. Můžeme si ji dokázati takto (viz obr. 177). Máme dokázati, že $\omega = \alpha + \gamma$. Vrcholem B si vedeme přímku BE rovnoběžnou s přímkou AC. Podle obrazce jest $\omega = \alpha_1 + \gamma_1$. Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (proč?), $\gamma_1 = \gamma$ (proč?), takže je opravdu $\omega = \alpha + \gamma$.

Vnější úhel při vrcholu B jsme si mohli také opatřiti prodloužením strany BC za vrchol B (místo prodloužení strany AB). Proveďte důkaz s touto změnou.

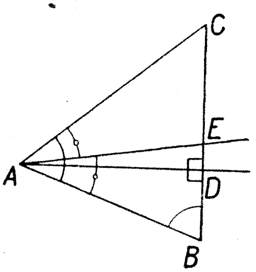
Proveďte důkaz také pro vnější úhel při vrcholu C!

Poučku o vnějším úhlu odvoďte z poučky o součtu úhlů!

Poučku o součtu úhlů odvoďte z poučky o vnějším úhlu!

U pravoúhlého trojúhelníka je jeden úhel roven R, tedy **součet obou ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka je R.**

Příklad (viz obr. 178). V trojúhelníku ABC úhel při vrcholu A měří $60°$, úhel při vrcholu B $70°$. AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$. D je pata kolmice spuštěné s bodu A na přímku BC. Vypočtěte $\sphericalangle DAE$.



Obr. 178.

[Polopřímka AE rozdělí $\sphericalangle BAC$ na dva stejné úhly. Abychom to měli na mysli, jsou oba úhly v obrazci vyznačeny malými obloučky, které jsou přerušeny malým kroužkem. Ve svém obrazci můžete užít barevných obloučků (oba stejné barvy). Všimněte si také obou malých čtverečků u bodu D. Ty nám připomínají, že oba úhly s vrcholem D jsou pravé. Zase můžete ve svém obrazci docíliti výraznosti barvou.]

Protože AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$, rovného $60°$, je

$$\sphericalangle BAE = 30°, \qquad \sphericalangle EAC = 30°.$$

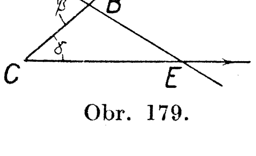
Všimněme si pravoúhlého trojúhelníka ABD. Víme, že jeho úhel při vrcholu B měří $70°$. Proto si můžeme vypočítat jeho úhel při vrcholu A. Najdeme

$$\sphericalangle BAD = 20°.$$

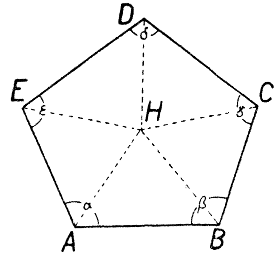
Nám běží o úhel $\sphericalangle DAE$. Ten dostaneme, když od úhlu $\sphericalangle BAE$ ubereme úhel $\sphericalangle BAD$. Protože $30 - 20 = 10$, jest $\sphericalangle DAE = 10°$.

Příklad. V obr. 151a je $\alpha = 32°$, $\gamma = 41°$. Určete β.

Tuto úlohu jsme už řešili tak, že jsme provedli pomocnou konstrukci (viz obr. 151b). Nyní si ji rozřešíme bez pomocné konstrukce. Obrazec máme narýsován znovu (viz obr. 179). Vidíme dva trojúhelníky: ABD a CBE. Kterýkoli z nich nám poslouží. V trojúhelníku ADB máme při vrcholu A úhel α a úhel při vrcholu D se rovná γ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde $\beta = \alpha + \gamma$, tedy $\beta = 73°$. V trojúhelníku CBE máme při vrcholu C úhel γ a úhel při vrcholu E se rovná α (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde zase $\beta = \alpha + \gamma$.



Obr. 179.



Obr. 180.

Narýsujte si libovolný pětiúhelník $ABCDE$. Jeho **vnitřní úhly** (nebo krátce **úhly**) jsou α, β, γ, δ, ε (viz obr. 180). Budeme hledati, čemu se rovná součet všech pěti úhlů. Za tím účelem si zvolme uvnitř pětiúhelníka bod H. Spojíme-li jej se všemi vrcholy, rozdělí se pětiúhelník na pět trojúhelníků. Součet všech úhlů všech těch trojúhelníků je $5 \times (2R)$ neboli $10R$. Ale tento součet se skládá

ze dvou úhlů s vrcholem A, které dohromady dají úhel α,
ze dvou úhlů s vrcholem B, které dohromady dají úhel β,
ze dvou úhlů s vrcholem C, které dohromady dají úhel γ,
ze dvou úhlů s vrcholem D, které dohromady dají úhel δ,
ze dvou úhlů s vrcholem E, které dohromady dají úhel ε

a ještě z pěti úhlů s vrcholem H, které dohromady dají $4R$ neboli $2 \times (2R)$. Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

takže $$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3 \times (2R) = 540°.$$

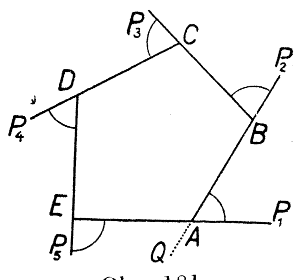
Stejnou cestou určete součet úhlů

a) u čtyrúhelníka, b) u osmiúhelníka, c) u dvacetiúhelníka.

Při určování součtu úhlů jsme nemusili bod H voliti uvnitř, mohli jsme jej také voliti na obvodě, a to buďto v některém vrcholu nebo také v jiné poloze. Proveďte to

a) pro pětiúhelník, b) pro osmiúhelník, c) pro dvacetiúhelník.

Výsledek: **Součet všech úhlů mnohoúhelníka je $(n - 2) \times 2R$, kde n značí počet stran** (neboli počet úhlů).



Obr. 181.

Vnější úhel mnohoúhelníka vznikne stejně jako u trojúhelníka. Na př. u pětiúhelníka $ABCDE$ v obr. 181 vnější úhel při vrcholu A je $\sphericalangle BAP_1$ nebo také $\sphericalangle EAQ$. Tyto dva úhly jsou stejné (proč?), takže rýsujeme zpravidla jen jeden, jak je to v obr. 181 provedeno pro vrcholy B, C, D, E. Zejména, když určujeme součet všech vnějších úhlů, bereme u každého vrcholu jen jeden vnější úhel.

U každého vrcholu pětiúhelníka máme tedy jeden vnitřní úhel a jeden vnější úhel, a ty dva úhly dají dohromady $2R$ (proč?). Tedy, když sečteme dohromady všech pět úhlů vnitřních i všech pět úhlů vnějších, dostaneme $5 \times (2R)$. Ale my víme, že součet vnitřních úhlů je $3 \times (2R)$. Tedy vnější úhly dají dohromady $2 \times (2R)$ neboli $4R$.

Stejnou cestou určete součet vnějších úhlů

a) u trojúhelníka, b) u čtyrúhelníka, c) u patnáctiúhelníka.

Výsledek: **Součet všech vnějších úhlů mnohoúhelníka je $4R$ neboli 360°.**

O správnosti této poučky se můžeme přesvědčiti z názoru. Proveďme si to třeba pro pětiúhelník. Na podlaze se narýsuje velký pětiúhelník $ABCDE$. Nyní se postavme do vrcholu E tak, abychom hleděli k bodu A (viz obr. 181). Potom obejděme celý pětiúhelník kolem dokola (nejprve jdeme do A). Při tom se musíme v každém z vrcholů A, B, C, D pootočit, a to právě o vnější úhel při tomto vrcholu. Když se vrátíme do vrcholu E, hledíme směrem k bodu P_5. Proto se také ve vrcholu E ještě pootočíme o vnější úhel při tomto vrcholu a pak jsme obráceni právě týmž směrem jako na začátku. Celkem jsme se otočili pětkrát, a to dohromady právě o plný úhel, neboli o $4R$. Proto součet všech vnějších úhlů pětiúhelníka je $4R$.

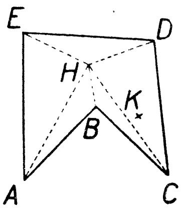
Pojem *pravidelného mnohoúhelníka* je vám již znám. Víte, že pravidelný mnohoúhelník je vepsán do kružnice k a že jeho vrcholy rozdělí kružnici k na stejné díly. Označme S střed kružnice k. Jsou-li P a Q kterékoli dva vrcholy pravidelného mnohoúhelníka, přejde vhodným otočením kolem středu S vrchol P ve vrchol Q. Tímto otočením přejde vnitřní úhel při vrcholu P ve vnitřní úhel při vrcholu Q a také vnější úhel při vrcholu P přejde ve vnější úhel při vrcholu Q. Proto *všecky vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny a také všecky vnější úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny.* Ostatně se stejným způsobem přesvědčíme, že *také délky všech stran pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny.*

Velikost vnitřního úhlu pravidelného mnohoúhelníka se ovšem dostane, když se součet všech úhlů dělí jejich počtem. Stejně můžeme počítat velikost vnějšího úhlu; ta tedy je

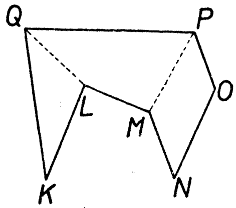
360° děleno počtem stran.

Nejlepší je vypočíst napřed velikost vnějšího úhlu. Potom určíme vnitřní úhel z toho, že je výplňkový k vnějšímu úhlu.

Mnohoúhelníky, které jsme dosud jedině měli na mysli, jsou t. zv. mnohoúhelníky vypuklé. Mají tu vlastnost, že když si kteroukoli stranou proložíme přímku, leží celý mnohoúhelník na jedné straně od této přímky. Všecky vnitřní úhly vypuklého mnohoúhelníka jsou duté. Ale jsou také mnohoúhelníky jiného tvaru, na př. pětiúhelník $ABCDE$ v obr. 182 nebo sedmiúhelník $KLMNOPQ$ v obr. 183. První z nich má jen čtyři úhly duté, druhý jen pět ze sedmi.



Obr. 182.



Obr. 183.

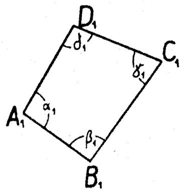
Součet vnitřních úhlů pětiúhelníka $ABCDE$ z obr. 182 můžeme nalézti právě tak jako u stejně označeného pětiúhelníka z obr. 180. Ale tam jsme si mohli bod H zvolit uvnitř pětiúhelníka libovolně, kdežto nyní si musíme bod H zvolit uvnitř pětiúhelníka vhodně; nešlo by na př. zvoliti si místo H bod, který je v obr. 182 označen K. U sedmiúhelníka z obr. 183 pak dokonce vůbec není možné, zvolit si uvnitř bod H tak, aby se součet úhlů dal počítat úvahou naznačenou v obr. 180 a 182. Přesto poučka o součtu vnitřních úhlů je správná i pro mnohoúhelníky, které nejsou vypuklé. Ale nebudeme si to obecně dokazovat; spokojíme se tím, že se o tom přesvědčíme na příkladě sedmiúhelníka z obr. 183. Úsečky LQ a MP rozdělí náš sedmiúhelník na trojúhelník KLQ a na vypuklé čtyrúhelníky $LMPQ$ a $MNOP$. Z obrazce je vidět, že součet úhlů našeho sedmiúhelníka dostaneme, když sečteme všecky úhly trojúhelníka i obou čtyrúhelníků. Dostaneme součet úhlů

$$2R + 2 \times (2R) + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

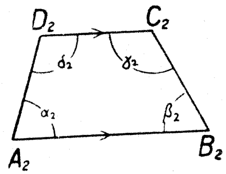
tedy stejný součet úhlů jako u vypuklých sedmiúhelníků.

Vypuklé mnohoúhelníky jsou mnohem důležitější než ostatní. V této učebnici budeme se jen jimi zabývati a budeme jim krátce říkat mnohoúhelníky.

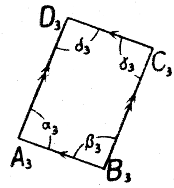
V každém z obrazců 184, 185, 186 máme čtyrúhelník.



Obr. 184.



Obr. 185.



Obr. 186.

Dva vrcholy čtyrúhelníka jsou buďto sousední nebo protější: spojnice sousedních vrcholů je strana, spojnice protějších vrcholů je úhlopříčka. Při dvou sousedních vrcholech máme dva sousední úhly; při dvou protějších vrcholech máme dva protější úhly. Dvě strany čtyrúhelníka jsou sousední, vycházejí-li obě z téhož vrcholu; jinak jsou protější.

U čtyrúhelníka $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 184) jsou protější strany A_1B_1 a C_1D_1 různoběžné a také protější strany A_1D_1 a B_1C_1 jsou různoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **různoběžník.**

U čtyrúhelníka $A_2B_2C_2D_2$ (obr. 185) jsou protější strany A_2B_2 a C_2D_2 rovnoběžné, ale protější strany A_2D_2 a B_2C_2 jsou různoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **lichoběžník.** Strany A_2B_2 a C_2D_2 jsou **základny** lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ z obr. 185; strany A_2D_2 a B_2C_2 jsou jeho **ramena.**

U čtyrúhelníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 186) jsou protější strany A_3B_3 a C_3D_3 rovnoběžné a také protější strany A_3D_3 a B_3C_3 jsou rovnoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **rovnoběžník.**

Úhly α_2 a δ_2 v obr. 185 jsou dva úhly přilehlé: proťaté přímky jsou A_2B_2 a D_2C_2, příčka je A_2D_2. Protože $A_2B_2 \parallel C_2D_2$, jest $\alpha_2 + \delta_2 = 2R$, t. j. úhly α_2 a δ_2 jsou výplňkové. Také úhly β_2 a γ_2 v obr. 185 jsou výplňkové, neboť zase to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami. α_2 a δ_2 jsou úhly při rameni A_2D_2 lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$; β_2 a γ_2 jsou úhly při rameni B_2C_2.

Úhly při ramenu lichoběžníka jsou výplňkové.

Všimneme-li si u rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 186) kteréhokoli páru sousedních úhlů, shledáme pokaždé, že to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami. Přesvědčte se o tom ve všech případech! Výsledek: **Dva sousední úhly rovnoběžníka jsou vždy výplňkové.**

Všimněme si jednoho páru protějších úhlů našeho rovnoběžníka, na př. páru α_3 a γ_3. Jest $\alpha_3 + \beta_3 = 2R$ a také jest $\gamma_3 + \beta_3 = 2R$, proto je $\alpha_3 = \gamma_3$. **Dva protější úhly rovnoběžníka jsou si rovny.**

Cvičení k § 31.

441. Úhly $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ mají takový význam jako v obr. 177. Mimoto znamená φ vnější úhel trojúhelníka ABC při vrcholu A, ψ vnější úhel při vrcholu B. (Vyznačte si všech šest úhlů ve vlastním obrazci!) Vypočtěte velikost všech úhlů podle těchto údajů:

a) $\alpha = 36° 51' 47''$, $\beta = 57° 48' 43''$;
b) $\varphi = 112° 21' 19''$, $\gamma = 53° 42' 26''$;
c) $\psi = 134° 26' 2''$, $\omega = 156° 58' 17''$.

Ve cvičeních 442 až 446 dojdete k cíli, budete-li hledat pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých znáte jeden ostrý úhel.

442. Sestrojte si trojúhelník FGH s pravým úhlem při vrcholu F. Spusťte s bodu F kolmici na přímku GH a její patu označte K. Je v obrazci nějaký úhel rovný úhlu $\sphericalangle HFK$? Udejte důvod!

443. Sestrojte si ostroúhlý trojúhelník RST. Spusťte s vrcholu R kolmici na přímku ST a patu označte P. Spusťte s vrcholu S kolmici na přímku RT a patu označte Q. Dokažte, že

$$\sphericalangle PRT = \sphericalangle QST.$$

(Můžete to provésti dvojím způsobem.)

444. V trojúhelníku HKL měří úhel při vrcholu K 110°, úhel při vrcholu L 50°. N je pata kolmice spuštěné s bodu H na přímku KL. Dokažte, že

$$\sphericalangle LHK = \sphericalangle KHN.$$

445. Uvnitř ostrého úhlu $\sphericalangle BAC$ leží polopřímka AD. S bodu B spusťte kolmice na přímky AC a AD; patu první označte E, patu druhé F. Dokažte, že

$$\sphericalangle EBF = \sphericalangle CAD.$$

446. Opakujte úlohu 445 s tím rozdílem, že úhel $\sphericalangle BAC$ bude tupý; úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAC$ budou ostré.

Ve cvičeních 447 až 451 se opírejte o poučky o součtu úhlů a o vnějším úhlu.

447. Ve čtyrúhelníku $FGHK$ úhlopříčka FH půlí jak úhel při vrcholu F tak také úhel při vrcholu H. Dokažte, že

$$\sphericalangle FGH = \sphericalangle FKH.$$

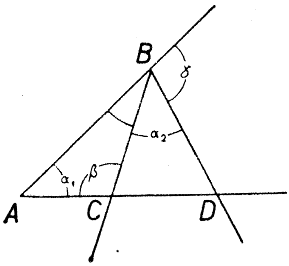
448. V obr. 187 jest $\alpha_1 = \alpha_2$. Dokažte, že $\beta = \gamma$. [Vyznačte si $\varepsilon = \sphericalangle ADB$.]

Cvičení 449 až 451 se vztahují k obr. 188, ve kterém YS je osa úhlu $\sphericalangle XYZ$ a ZR je osa úhlu $\sphericalangle XZY$. Vyčárkovaná přímka a body U, V přijdou jen ve cvič. 451.

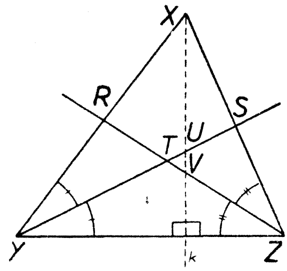
449. Jest $\sphericalangle YXZ = 81° 23' 18''$, $\sphericalangle XYZ = 32° 54' 58''$. Najděte $\sphericalangle YTZ$.

450. Jest $\sphericalangle XYZ = 43° 43' 34''$, $\sphericalangle YTZ = 125° 38' 26''$. Najděte $\sphericalangle YSZ$.

451. Jest $\sphericalangle YXZ = 65° 12' 8''$, $\sphericalangle XZY = 73° 8' 56''$. S bodu X spusťte kolmici k na přímku YZ. Určete úhly trojúhelníka TUV.



Obr. 187.



Obr. 188.

452. Řešte znovu, ale bez pomocné konstrukce
a) cvič. 429; b) cvič. 430; c) cvič. 431;
d) cvič. 432; e) cvič. 433; f) cvič. 434.

453. Vypočtěte čtvrtý vnitřní úhel čtyrúhelníka, když tři vnitřní úhly měří
a) $76° 34'$, $96° 42'$, $112° 56'$.
b) $118° 36'$, $72° 51'$, $48° 38'$.
c) $89° 42' 32''$, $123° 45' 20''$, $86° 50' 28''$.

454. Jeden vnitřní úhel čtyrúhelníka měří $113° 8' 54''$. Všecky tři ostatní jsou si rovny. Určete jejich velikost!

455. Ze šesti úhlů šestiúhelníka je pět sobě rovných. Zbývající úhel je o $71° 13'$ menší. Určete velikost všech úhlů!

456. Tři úhly pětiúhelníka jsou si rovny a každý měří $156° 52' 48''$. Zbývající dva úhly jsou si rovny. Určete jejich velikost!

457. Úhly pětiúhelníka měří (ve stupních)

$$2x,\ 3x,\ 4x,\ 5x,\ 6x.$$

Určete x.

458. Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka je 1080°. Kolik má stran?

459. Které mnohoúhelníky mají součet úhlů mezi sedmi a osmi tisíci stupňů?

460. Určete nejprve vnější úhel, potom vnitřní úhel pravidelného
a) 12úhelníka, b) 15úhelníka, c) 18úhelníka, d) 30úhelníka.

461. Může pravidelný mnohoúhelník míti vnější úhel

a) 15°? b) 7°? c) 11°? d) 6°? e) 5°? f) 4°?

Může-li, udejte počet stran.

462. Může pravidelný mnohoúhelník míti vnitřní úhel

a) 108°? b) 120°? c) 130°? d) 144°? e) 60°? f) 170°?

Může-li, udejte počet stran.

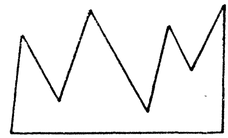
463. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Přímky AB a CD se protnou v bodě X. Určete úhel $\sphericalangle AXD$.

464. Rozdělte devítiúhelník z obr. 189 na vypuklé mnohoúhelníky a přesvědčte se, že součet všech úhlů je $14R$.

465. U čtyrúhelníka z obr. 184 jmenujte všecky páry a) sousedních vrcholů, b) protějších vrcholů.

466. U čtyrúhelníka z obr. 185 jmenujte všecky páry a) sousedních úhlů, b) protějších úhlů.

467. U čtyrúhelníka z obr. 186 jmenujte všecky páry a) sousedních stran, b) protějších stran.



Obr. 189.

468. Vypočtěte ostatní úhly lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ (viz obr. 185), víte-li, že

a) $\alpha_2 = 72° 13' 47''$, $\beta_2 = 43° 52' 36''$.
b) $\alpha_2 = 69° 24' 15''$, $\gamma_2 = 145° 23' 56''$.
c) $\beta_2 = 46° 12' 38''$, $\delta_2 = 110° 36' 28''$.
d) $\gamma_2 = 138° 57' 26''$, $\delta_2 = 112° 53' 7''$.

Dá se podobný výpočet provést, je-li známa velikost jiného páru úhlů?

469. Vypočtěte ostatní úhly rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$ (viz obr. 186), víte-li, že

a) $\alpha_3 = 98° 12' 47''$. b) $\beta_3 = 82° 44' 55''$.
c) $\gamma_3 = 102° 28' 35''$. d) $\delta_3 = 78° 57' 3''$.

470. Dokažte, že čtyrúhelník, o kterém víme, že má dva sousední úhly výplňkové, je buďto lichoběžník nebo rovnoběžník.

471. $ABCD$ je lichoběžník ($AB \parallel CD$); osa úhlu $\sphericalangle BAD$ a osa úhlu $\sphericalangle CDA$ se protnou v bodě X. Dokažte, že

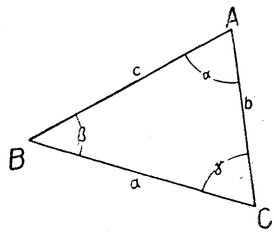
$$\sphericalangle AXD = R.$$

472. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu? Zapište si je!

473. Zapište si všecky poučky, které jste poznali v tomto paragrafu. Zopakujte si jejich důkazy.

§ 32. Shodné trojúhelníky.

U trojúhelníků se užívá velmi často takového označení jako v obr. 190. Vrcholy jsou označeny velkými písmeny A, B, C. Délky stran jsou označeny malými písmeny a, b, c a to tak, že strana je vždy označena písmenem stejného jména jako protější vrchol. Úhly jsou označeny řeckými písmeny α, β, γ a to tak, že úhel α leží při vrcholu A a proti straně a atd. Toto základní označení vám musí býti dobře známo, ale přesto musíte také umět řešit úlohy při jakémkoli označení.



Obr. 190.

Říkáme, že úhly α a β jsou přilehlé ke straně c. To je v souhlase s názvem přilehlých úhlů zavedeným na str. 99. (Považujeme AB za příčku, AC a BC za proťaté přímky.) Podobně jsou α a γ úhly přilehlé ke straně b, β a γ jsou úhly přilehlé ke straně a.

U trojúhelníka měříme celkem šest hodnot: tři délky a, b, c a tři úhly α, β, γ. Shodné trojúhelníky, t. j. takové, které lze položit jeden na druhý tak, že se navzájem kryjí, mají stejně dlouhé strany a stejně velké úhly.

Je vám již známo, že trojúhelník můžeme sestrojit, jakmile známe délky všech tří stran. Tedy stačí, když ze šesti hodnot $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ známe tři, totiž a, b, c. Pak je už možné trojúhelník sestrojit; zbývající tři hodnoty α, β, γ můžeme potom změřit úhloměrem. Říkáme, že

trojúhelník je určen, známe-li délky všech tří stran.

Slovo „určen" ovšem neznamená, že by existoval jen jediný takový trojúhelník, nýbrž že se dva takové trojúhelníky od sebe liší pouze umístěním, t. j. že jsou shodné. Tedy

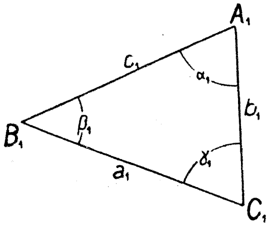
dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách (t. j. jsou-li strany prvého stejně dlouhé jako strany druhého).

Je vám také známo, že nesmíme libovolně zvolit všecky tři délky a, b, c. Můžeme si zvolit na př. a a b úplně libovolně, ale c musí býti menší než součet a větší než rozdíl prvých dvou stran.

Ale ze šesti hodnot $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ můžeme vybrati k určení trojúhelníka také jiné tři nežli právě a, b, c. Na př. platí:

trojúhelník je určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (t. j. úhlu, jehož ramena obsahují ty strany). I tuto poučku můžeme vysloviti ve druhém znění:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.



Obr. 191.

O správnosti této poučky se snadno přesvědčíme. V obr. 191 máme trojúhelník se stejným označením jako u trojúhelníka z obr. 190 až na ten rozdíl, že v obr. 191 je všude ještě index 1. Dejme tomu, že víme, že $b_1 = b$, $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$. Máme se přesvědčit, že je možné trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístit tak, aby se kryl s trojúhelníkem ABC. To je velmi jednoduché. Protože úhel $\alpha_1 = \sphericalangle B_1A_1C_1$ se rovná úhlu $\alpha = \sphericalangle BAC$, můžeme trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístiti tak, že vrchol A_1 úhlu α_1 se bude krýti s vrcholem A úhlu α, rameno A_1B_1 úhlu α_1 s ramenem AB úhlu α, rameno A_1C_1 úhlu α_1 s ramenem AC úhlu α. Tedy v nové poloze bude B_1 ležet na polopřímce AB ve vzdálenosti $c_1 = \overline{A_1B_1}$ od bodu A. Ale vzdálenost c_1 je rovna vzdálenosti $c = \overline{AB}$, takže nová poloha bodu B_1 se kryje s bodem B. Podobně se nová poloha bodu C_1 musí krýt s bodem C. Tedy se budou krýt všecky tři vrcholy obou trojúhelníků a proto jsou ty trojúhelníky shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze stran b, c a úhlu α jimi sevřeného je velmi jednoduchá. Můžeme napřed úhloměrem sestrojit úhel α a vrchol označiti A. Potom naneseme na jedno rameno délku $\overline{AB} = c$, na druhé délku $\overline{AC} = b$, spojíme BC a jsme hotovi. Můžeme však při konstrukci místo daného úhlu začít také jednou z daných stran. Popište sami konstrukci, při které se začne stranou b!

Dále platí, že

trojúhelník je určen, známe-li délku jedné strany a velikost obou úhlů přilehlých. Druhé znění poučky:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech přilehlých.

O správnosti poučky se zase snadno přesvědčíme. Dejme tomu, že víme (viz obr. 190 a 191), že $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Protože délka $c_1 = \overline{A_1B_1}$ se rovná délce $c = \overline{AB}$, můžeme přemístit trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, že v nové poloze se bod A_1 bude krýt s bodem A a bod B_1 s bodem C. To se dá ještě provésti dvojím způsobem. Volíme takový způsob, aby nová poloha bodu C_1 byla od přímky AB na tu stranu, na které je bod C. Po přemístění se kryje jedno rameno A_1B_1 úhlu α_1 s jedním ramenem AB úhlu α. Protože je $\alpha_1 = \alpha$ a protože jsou oba úhly α a α_1 na stejné straně od přímky AB, musí se krýti také druhá ramena, t. j. polopřímka A_1C_1 se po přemístění kryje s polopřímkou AC. Z toho vychází, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce AC. Všimneme-li si nyní úhlu β, vyjde nám podobně, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce BC. Tedy nová poloha bodu C_1 je v průsečíku přímky AC s přímkou BC, t. j. v bodě C. Tedy po přemístění se kryje nejen vrchol A_1 s vrcholem A a vrchol B_1 s vrcholem B, nýbrž také vrchol C_1 s vrcholem C a proto jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze strany c a z obou přilehlých úhlů α, β je zase snadná, ale aby byla možná, musí býti $\alpha + \beta < 180°$. (Proč?) Sestrojíme si napřed úsečku AB dané délky c. Potom si sestrojíme oba úhly α, β, při čemž úhel α má vrchol A a jedno rameno v polopřímce AB, úhel β má vrchol B a jedno rameno v polopřímce BA, a oba úhly leží na stejné straně od přímky AB. Protože je $\alpha + \beta < 180°$, musí se druhá ramena našich úhlů protnout. (Podle které poučky?) Jejich průsečík C je třetí vrchol trojúhelníka ABC.

Probrali jsme si tři základní poučky o určenosti (nebo o shodnosti) trojúhelníků. Tyto tři poučky jsou velmi důležité, protože většina ostatních pouček se dá odvoditi z nich (a z pouček o dvou přímkách proťatých příčkou). Proto je nutné, abyste ty poučky znali opravdu dokonale. Aby se vám to ulehčilo, zavedeme si pro ně velmi pohodlné značky.

I. Označíme sus (strana, úhel, strana) poučku

trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel jimi sevřený neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.

II. Označíme usu (úhel, strana, úhel) poučku

trojúhelník je určen, známe-li jednu stranu a oba úhly přilehlé neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou přilehlých úhlech.

III. Označíme sss (strana, strana, strana) poučku

trojúhelník je určen, známe-li délky všech tří stran neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách.

Co by znamenalo uuu? To by nebyla správná poučka. Ke trojúhelníku ABC si můžeme opatřit trojúhelník $A_1B_1C_1$ dvakrát (nebo třeba desetkrát) tak veliký; oba trojúhelníky budou míti všecky úhly stejné, ale shodné nebudou. Třemi úhly není trojúhelník určen. To nepřekvapuje, neboť znáti tři úhly trojúhelníka není o nic větší znalost nežli znáti dva úhly, protože ze dvou úhlů umíme vypočítati třetí podle vztahu

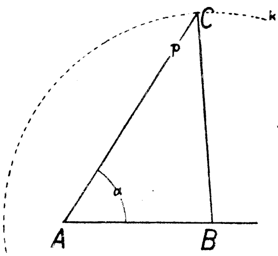
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

který dobře známe.

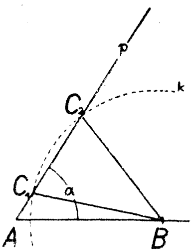
Za to vedle usu také suu nebo uus je správná poučka: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně, v úhlu proti ní a v ještě jednom úhlu. Na př. jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ (viz obr. 190 a 191) shodné, je-li $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha$. Neboť podle poučky o součtu úhlů je potom také $\beta_1 = \beta$, takže je $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, t. j. trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ jsou shodné podle usu.

Máme-li sestrojiti trojúhelník ABC znajíce délku c a úhly α a γ, vypočteme si napřed $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ a potom sestrojujeme podle usu. Aby byla konstrukce možná, musí býti $\alpha + \gamma < 180°$.

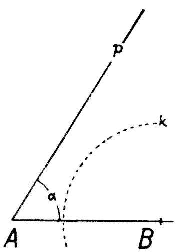
Důležité je, že ssu nebo uss není správná poučka! Trojúhelník nemusí býti určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich. Nechť je na př. $\alpha = 57°$, $c = 25$ mm a mimoto nechť je známa délka a. Jest $a = 35$ mm v obr. 192, $a = 22$ mm v obr. 193, $a = 16$ mm v obr. 194. Sestrojíme si pokaždé napřed úhel $\alpha = 57°$



Obr. 192.



Obr. 193.



Obr. 194.

s vrcholem A, potom naneseme na jedno rameno délku $\overline{AB} = c = 25$ mm; druhé rameno si označíme p. Máme už dva vrcholy A, B žádaného trojúhelníka ABC a zbývá určiti polohu třetího vrcholu C. Protože známe délku $a = \overline{BC}$, musí bod C ležeti na kružnici k o středu B a poloměru a. Mimoto musí C ovšem ležeti na polopřímce p. V každém z našich tří případů dopadne věc jinak: v obr. 192 kružnice k protne polopřímku p v jediném bodě C, v obr. 193 ve dvou bodech C_1 a C_2, v obr. 194 se p a k vůbec neprotnou. Tedy pro $a = 35$ mm máme jediný trojúhelník ABC vyhovující podmínkám, pro $a = 16$ mm není žádný takový trojúhelník, ale pro $a = 22$ mm vyhovují podmínkám dva trojúhelníky ABC_1 a ABC_2, které nejsou shodné. Proto ssu neboli uss není správná poučka.

Značka shodnosti je $\cong$. Dá-li se trojúhelník $A_1B_1C_1$ položiti na trojúhelník ABC tak, že vrchol A_1 se kryje s vrcholem A, vrchol B_1 s vrcholem B, vrchol C_1 s vrcholem C, zapíšeme shodnost takto:

$$ABC \cong A_1B_1C_1.$$

Místo toho můžeme také napsati třeba

$$BAC \cong B_1A_1C_1 \quad \text{nebo} \quad CAB \cong C_1A_1B_1,$$

t. j. vrcholy jednoho z obou trojúhelníků můžeme napsati v libovolném pořádku. Ale jakmile se rozhodneme pro určitý pořádek vrcholů jednoho trojúhelníka, je tím už rozhodnuto o pořádku vrcholů druhého, protože zápis musí býti proveden tak, aby z něho bylo patrné, který vrchol s kterým se bude po přemístění krýt. Na př. u trojúhelníků z obr. 190 a 191 nemůžeme napsati $BCA \cong A_1C_1B_1$, ačkoli jsou ty trojúhelníky shodné; neboť to by znamenalo, že lze přemístiti trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, aby se vrchol A_1 kryl s vrcholem B, vrchol C_1 s vrcholem C, vrchol B_1 s vrcholem A; to jistě nelze, protože strana A_1C_1 je mnohem kratší nežli strana BC.

Ze správného zápisu shodnosti je patrné, které jsou páry stejných stran a při kterých vrcholech jsou páry stejných úhlů.

Když na shodnost trojúhelníků soudíme z některé základní poučky, můžeme si za zápis shodnosti poznamenati značku poučky. Když na př. u trojúhelníků z obr. 190 a 191 zjistíme měřením, že $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1C_1B_1$, můžeme zapsati

$$ABC \cong A_1B_1C_1 \quad (\text{sus}),$$

neboť shodnost je zaručena poučkou sus.

Cvičení k § 32.

474. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte α, β a γ.

a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.
b) $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 54$ mm.
c) $a = 9$ cm, $b = 58$ mm, $c = 46$ mm.
d) $a = 37$ mm, $b = 7$ cm, $c = 54$ mm.

475. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

a) $b = 57$ mm, $c = 48$ mm, $\alpha = 42°$. Změřte a, β, γ.
b) $a = 85$ mm, $c = 52$ mm, $\beta = 113°$. Změřte b, α, γ.
c) $a = 36$ mm, $b = 66$ mm, $\gamma = 147°$. Změřte c, α, β.
d) $a = 73$ mm, $b = 43$ mm, $\gamma = 25°$. Změřte c, α, β.

476. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

a) $c = 72$ mm, $\alpha = 43°$, $\beta = 59°$. Změřte a, b, γ.
b) $a = 35$ mm, $\beta = 126°$, $\gamma = 34°$. Změřte b, c, α.
c) $b = 43$ mm, $\alpha = 27°$, $\gamma = 132°$. Změřte a, c, β.
d) $a = 69$ mm, $\beta = 83°$, $\gamma = 42°$. Změřte b, c, α.

477. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte c a všecky úhly.

a) $a = 58$ mm, $\alpha = 47°$, $\beta = 53°$.
b) $b = 92$ mm, $\alpha = 23°$, $\beta = 138°$.
c) $a = 42$ mm, $\alpha = 16°$, $\gamma = 154°$.

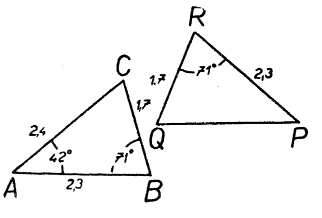
478. Sestrojte, je-li to možno, trojúhelník ABC podle daných údajů. Není-li řešení, napište „nemožné“. Jsou-li dva takové trojúhelníky, sestrojte je oba. Pokaždé změřte všecky strany a úhly.

a) $a = 83$ mm, $b = 57$ mm, $\alpha = 153°$.
b) $b = 64$ mm, $c = 42$ mm, $\beta = 37°$.
c) $b = 7$ cm, $c = 55$ mm, $\gamma = 35°$.
d) $b = 8$ cm, $c = 7$ cm, $\beta = 35°$.

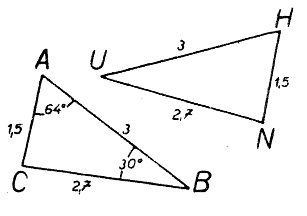
479. Jest $ABC \cong HKG$. Který úhel se rovná $\sphericalangle CAB$? Která strana se rovná straně GH?

V následujících cvičeních 480 až 483 máte pokaždé hledati v obrazci dva shodné trojúhelníky. Shodnost správně zapište a pokaždé udejte také značku poučky, podle které na shodnost usuzujete. Narýsujte si od ruky vlastní obrazce a do nich zapište velikost všech stran a úhlů. V tištěných obrazcích je jednotka 1 cm.

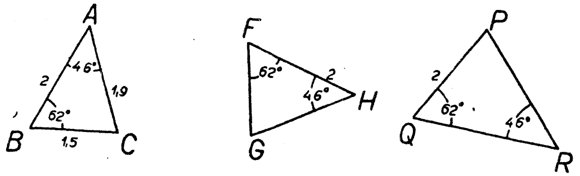
480. Viz obr. 195. **481.** Viz obr. 196.
482. Viz obr. 197. **483.** Viz obr. 198.



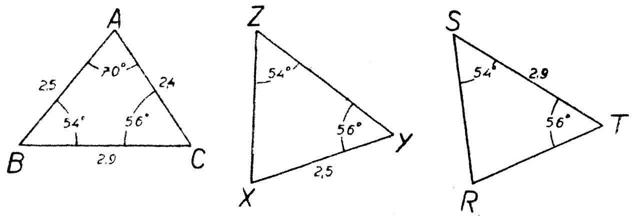
Obr. 195.



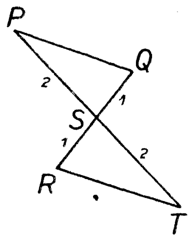
Obr. 196.



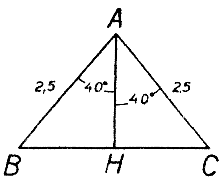
Obr. 197.



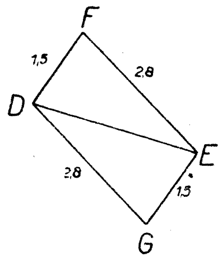
Obr. 198.



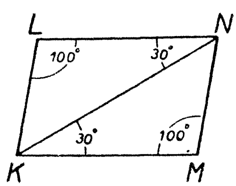
Obr. 199.



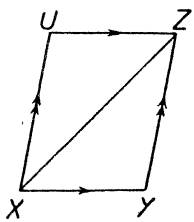
Obr. 200.



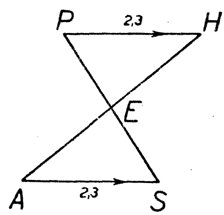
Obr. 201.



Obr. 202.



Obr. 203.



Obr. 204.

Ve cvičeních 484 až 489 máte najíti v obrazci dva shodné trojúhelníky, zapsati správně shodnost a zapsati také důvod. V tištěných obrazcích je jednotka 1 cm.

484. Viz obr. 199. **485.** Viz obr. 200.
486. Viz obr. 201. **487.** Viz obr. 202.
488. Viz obr. 203. **489.** Viz obr. 204.

Cvičení 490 až 498 se vztahují k obr. 205, který pouze vysvětluje označení, Pokaždé si narýsujte vlastní obrazec od ruky a v něm si vyznačte pomocí párů stejných značek, co je dáno. Je-li na př. dáno, že dvě úsečky jsou stejně dlouhé. přetrhněte si je obě touž barevnou tužkou. Potom rozhodněte, zdali oba trojúhelníky musí býti shodné. Když ano, zapište správně shodnost a zapište také její důvod.

490. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\delta = \psi$.

491. $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \psi$.

492. $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\gamma = \psi$.

493. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\delta = \psi$, $\gamma = \varphi$.

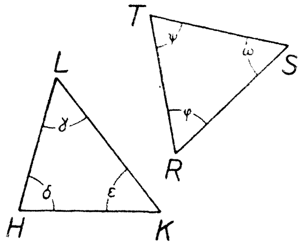
494. $\overline{KL} = \overline{RT}$, $\overline{HL} = \overline{RS}$, $\overline{HK} = \overline{ST}$.

495. $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \omega$, $\gamma = \psi$.

496. $\overline{HL} = \overline{KL}$, $\overline{RT} = \overline{ST}$, $\gamma = \psi$.

497. $\overline{HL} = \overline{ST}$, $\overline{KL} = \overline{RS}$, $\gamma = \omega$.

498. $\overline{HK} = \overline{HL}$, $\overline{RS} = \overline{RT}$, $\delta = \omega$.



Obr. 205.

Cvičení 499 až 511 se řeší tak, že si pokaždé najdete v obrazci dva trojúhelníky, které podle některé základní poučky musí býti shodné. I k těm úlohám, ke kterým je obrazec v učebnici, rýsujte si obrazce vlastní.

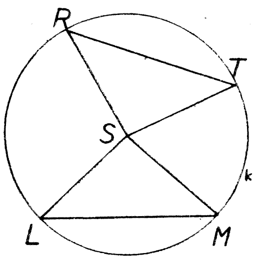
499. Ve středu S úsečky AB vztyčte kolmici k ke přímce AB. Zvolte si bod T na přímce k. Dokažte, že $\overline{AT} = \overline{BT}$.

500. Na ose úhlu $\sphericalangle XYZ$ si zvolte bod K. Spusťte s bodu K kolmice na obě ramena úhlu a jejich paty označte P, Q. Dokažte, že $\overline{KP} = \overline{KQ}$.

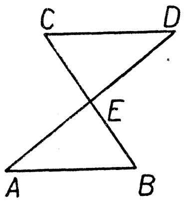
501. V obr. 206 je S střed kružnice k. Dokažte:

a) Je-li $\overline{LM} = \overline{RT}$, je $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$.

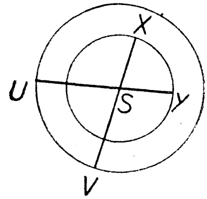
b) Je-li $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$, je $\overline{LM} = \overline{RT}$.



Obr. 206.



Obr. 207.



Obr. 208.

502. V trojúhelníku ABK je $\overline{AK} = \overline{BK}$. H je střed strany AB. Dokažte, že $HK \perp AB$. (Je-li úhel rovný úhlu vedlejšímu, je pravý.)

503. V trojúhelníku XYZ je $\overline{XY} = \overline{XZ}$. Označte S střed strany XY a T střed strany XZ. Dokažte, že $\overline{SZ} = \overline{TY}$.

504. V obr. 207 je E střed obou úseček AD a BC. Dokažte:

a) $\overline{AB} = \overline{CD}$. b) $AB \parallel CD$.

505. V obr. 207 je $\overline{AE} = \overline{ED}$ a $AB \parallel CD$. Dokažte, že $\overline{BE} = \overline{EC}$.

506. V obr. 207 je $\overline{AB} = \overline{CD}$, $AB \parallel CD$. Dokažte:

a) $\overline{AE} = \overline{ED}$. b) $\overline{AC} = \overline{BD}$. c) $AC \parallel BD$.

507. V obr. 208 je S střed obou kružnic. Dokažte, že $\overline{UX} = \overline{VY}$.

508. Všecky strany čtyrúhelníka $HKLM$ jsou si rovny. Dokažte, že úhel při vrcholu H je půlen úhlopříčkou HL.

Cvičení 509 až 511 jsou trochu těžší.

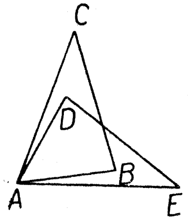
509. ABC je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka jsou čtverce $ABQR$, $ACST$. Dokažte, že $\overline{CR} = \overline{BT}$.

510. FGH je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka FGH jsou rovnostranné trojúhelníky FKG, FLH. Dokažte, že $\overline{GL} = \overline{HK}$.

511. V obr. 209 je $ABC \cong ADE$. Dokažte, že $\overline{CD} = \overline{BE}$.

512. Které geometrické výrazy se vyskytovaly v tomto paragrafu? Zapište si je!

513. Zapište si poučky, které jste poznali v tomto paragrafu. Zapište také jejich značky.



Obr. 209.

§ 33. Grafické určování vzdáleností a výšek.

V minulém paragrafu jsme poznali, že ke konstrukci trojúhelníka ABC stačí, když ze šesti hodnot $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ známe vhodné tři hodnoty. Pak už můžeme trojúhelník ABC sestrojit a ostatní tři hodnoty změřit. To má velký praktický význam. Často se stává, že je třeba určit nějakou délku, která je přímému měření nepřístupná. Tu si pomáháme z nesnáze tím, že provedeme jiná měření, která se dají provádět snáze a z nichž se dá určit ta hodnota, o kterou se vlastně zajímáme. Dejme tomu na příklad, že bychom chtěli určit vzdálenost místa A, které leží u břehu řeky, od místa B, které leží u druhého břehu řeky. Přímému měření vadí řeka. Pomůžeme si takto. Zvolíme si vhodné třetí místo C na témž břehu, na kterém je A, změříme vzdálenost $\overline{AC}$ a změříme si ještě dva úhly, totiž $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle BCA$. Všecka tři měření se dají provést na té straně od řeky, na které je místo A. Trojúhelník ABC je provedenými měřeními úplně určen (podle poučky usu), takže také žádanou vzdálenost AB můžeme na základě provedených měření stanovit. To stanovení by se dalo provésti tím, že bychom si sestrojili na základě naměřených údajů trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC. Ale takový trojúhelník by byl příliš veliký; proto si jej sestrojíme ve zmenšeném měřítku. Obyčejně sestrojujeme obrazce dva; napřed malý obrazec od ruky, potom větší obrazec přesný. V našem případě naměříme třeba $\overline{AC} = 6$ m, $\sphericalangle BAC = 86°$, $\sphericalangle BCA = 68°$. Tyto údaje si poznamenáme do obrazce od ruky, který může býti skutečnému trojúhelníku ABC jen velmi zhruba podobný. Potom rozhodneme, v jakém měřítku budeme rýsovati přesný obrazec. To měřítko musí býti voleno tak, aby se nám celý obrazec vešel. Za druhé je volíme tak, abychom dostali pokud možno veliký obrazec, protože z malého obrazce bychom hledanou vzdálenost dostali velmi nepřesně. Konečně volíme měřítko tak, aby souvislost mezi skutečnými a zmenšenými vzdálenostmi byla co nejjednodušší. Obyčejně volíme měřítko tak, aby 1 cm znamenal 1 m, 10 m, 100 m, ... nebo 2 m, 20 m, 200 m, ... nebo 0,5 m, 5 m, 50 m atd. V našem případě volíme měřítko tak, že 1 cm znamená 2 m. Proto si sestrojíme (co nejpřesněji!) trojúhelník ABC, ve kterém $\overline{AC} = 3$ cm, $\sphericalangle BAC = 86°$, $\sphericalangle BCA = 68°$. Pak si změříme $\overline{AB}$ a najdeme $\overline{AB} = 6{,}3$ cm. Protože 1 cm nákresu znamená 2 m ve skutečnosti, skutečná vzdálenost $\overline{AB}$ měří asi 12,6 m. („Asi" proto, že ani měření v přírodě, ani rýsování na papíře nemohlo býti dokonale přesné.)

Trojúhelníky, kterých jsme užívali v úloze právě řešené, ležely ve vodorovné rovině. Ke stanovení výšek užíváme trojúhelníků ve svislé rovině. Při tom měříme úhly ve svislé rovině, které šikmý směr tvoří se směrem vodorovným. Pozorujeme-li se stanoviska S předmět P položený výše než S, pak svislý úhel polopřímky SP s vodorovnou polopřímkou se jmenuje výškový úhel předmětu P se stanoviska S; leží-li P níže nežli S, mluvíme o hloubkovém úhlu.

Cvičení k § 33.

514. Písmena U, V, W znamenají tři kostelní věže. U je na sever od V ve vzdálenosti 6 km. W je na severovýchod od V ve vzdálenosti 12 km.

a) Jak daleko je W od U?

b) V jakém směru od U je W?

515. Písmena A, B, C znamenají tři města. A leží 30 km severně od B a 50 km západně od C.

a) Určete vzdálenost od B k C.

b) V jakém směru od města B leží město C?

516. Tři cesty tvoří trojúhelník LMN. Jest $\overline{LM} = 600$ m, $\overline{MN} = 450$ m, $\overline{NL} = 350$ m. Jak daleko od cesty LM je křižovatka N?

517. Domek C leží nalevo od silnice mezi dvěma body A, B silnice. Směr AC je od silnice odchýlen o úhel 32°, směr BC o úhel 65°.

a) Určete vzdálenost $\overline{AC}$.

b) Určete nejkratší vzdálenost od domku k silnici.

518. Nalevo od rovné cesty HKX jsou dva kopce A, B. Jest $\overline{HK} = 1$ km, $\sphericalangle XHA = 25°$, $\sphericalangle XHB = 40°$, $\sphericalangle XKA = 63°$, $\sphericalangle XKB = 140°$. Určete,

a) jak daleko od sebe jsou ty kopce;
b) jak daleko od cesty je kopec A;
c) jak daleko od cesty je kopec B.

519. Železniční trať směřuje od západu k východu. A a B jsou dvě místa na trati vzdálená 300 m od sebe. Věž V leží od místa A ve směru 48° od severu k východu, od místa B ve směru 28° od severu k západu. Určete

a) vzdálenost věže od místa A;
b) vzdálenost věže od místa B;
c) vzdálenost věže od trati.

520. Loď pluje k severovýchodu rychlostí 10 uzlů. [To znamená, že urazí za hodinu 10 námořních mil; jedna námořní míle je asi 1850 m.] Maják je v jedné chvíli přesně na sever od lodi a za čtvrt hodiny je ve směru 76° od jihu k západu. Určete nejkratší vzdálenost od lodi k majáku.

521. Na krajích přístavu jsou dva majáky A, B. A je západně od B ve vzdálenosti 500 m. Loď pluje k přístavu směrem J 30° Z (t. j. směrem, který je mezi jihem a západem a tvoří úhel 30° se směrem jižním). Pozorovatel na lodi vidí maják B ve směru J 10° Z, maják A ve směru J 40° Z. Jak daleko bude loď od A a od B, až se dostane mezi oba majáky?

522. Výškový úhel vrcholu věže se stanoviska vzdáleného 40 m od paty věže je 35°. Najděte výšku věže.

523. Dětský drak je na provaze dlouhém 230 m, který tvoří úhel 65° s vodorovným směrem. V jaké výši je drak?

524. Určete výškový úhel slunce v době, kdy svislá tyč dlouhá 4 m vrhá stín délky 5 m!

525. Pod jakým hloubkovým úhlem je viděti s vrcholu věže vysoké 42 m předmět, ležící na zemi ve vzdálenosti 60 m od věže?

526. Žebřík dlouhý 5 m je opřen o svislou stěnu. Pata žebříku je 2,4 m od stěny.

a) O jaký úhel je žebřík odchýlen od vodorovné polohy?
b) Jak vysoko nad zemí je vrchol žebříku?

527. S vrcholu pahorku, který je 75 m nad hladinou vodní, je viděti přesně za sebou dvě loďky. Hloubkový úhel prvé je 64°, hloubkový úhel druhé je 48°. Určete vzdálenost loděk.

528. Výškový úhel vrcholu věže z místa vzdáleného 150 m od paty je 28°. Jaký je výškový úhel z místa vzdáleného 100 m?

529. Pozorovatel z balonu ve výšce 1 km vidí kostel pod hloubkovým úhlem 35°. Po dvaceti minutách stoupání jej vidí pod hloubkovým úhlem $55\frac{1}{2}°$. Určete rychlost stoupání v kilometrech za hodinu.

530. Muž na vrcholu kopce pozoruje rovnou cestu v údolí přímo od něho se vzdalující. Dva sousední kilometrové kameny vidí pod hloubkovými úhly 30° a 13°. Jak vysoko nad údolím je vrchol kopce?

531. Aeroplán letí k východu ve výši 800 m. Pozorovatel vidí plynojem směrem k jihu pod hloubkovým úhlem 29°; o 15 vteřin později vidí týž plynojem směrem k jihozápadu. Určete rychlost aeroplánu v metrech za vteřinu.

532. Trám AB dlouhý 3 m je upevněn dvěma provazy AC, BD. Oba body C, D jsou stejně vysoko nad zemí. Trám je nakloněn o 10° od vodorovné polohy, bod B je níže než A, oba provazy jsou nakloněny o 20° od svislé polohy. Jest $\overline{AC} = 4{,}8$ dm. Určete $\overline{BD}$.

§ 34. Pokračování o trojúhelníku.

Je vám již známo, že u rovnoramenného trojúhelníka oba úhly při základně jsou si rovny. Týž poznatek se dá vysloviti také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným stranám rovné úhly.**

Můžeme si tuto poučku velmi jednoduše odvoditi z jedné poučky o shodnosti trojúhelníků. Když v obr. 210 je $\overline{AC} = \overline{BC}$, máme dokázati, že $\alpha = \beta$. Avšak

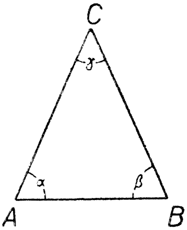
$$ABC \cong BAC \text{ (sss)},$$

takže $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, t. j. $\alpha = \beta$.

Také obrácená poučka je správná. Můžeme ji vysloviti takto: **Trojúhelník, který má dva úhly sobě rovné, je rovnoramenný.** Nebo také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným úhlům rovné strany.** Důkaz je zase velice jednoduchý. Když v trojúhelníku ABC (obr. 210) je $\alpha = \beta$, jest

$$ABC \cong BAC \text{ (usu)},$$

takže $\overline{BC} = \overline{AC}$.



Obr. 210.

V obr. 177 je ω vnější úhel trojúhelníka ABC; protější úhly vnitřní jsou α a γ. Víme, že jest $\omega = \alpha + \gamma$. Z toho následuje, že ω je větší než α a také větší než γ. **Vnější úhel trojúhelníka je větší než kterýkoli z protějších úhlů vnitřních.** Tento poznatek je přes svoji jednoduchost užitečný, jak nyní uvidíme.

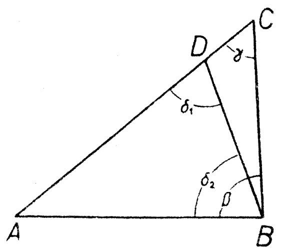
V trojúhelníku leží proti větší straně větší úhel. V trojúhelníku leží proti menší straně menší úhel. To jsou ovšem dvě znění téže poučky. Dokážeme si ji snadno. Nechť v trojúhelníku ABC je $\overline{AC} > \overline{BC}$; máme dokázati, že je $\beta > \gamma$. Protože strana AC je delší nežli strana BC, můžeme (viz obr. 211) určiti bod D na straně AC tak, že $\overline{AD} = \overline{AB}$. V trojúhelníku ABD leží proti stranám AB a AD úhly δ_1 a δ_2; protože $\overline{AB} = \overline{AD}$, je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD je δ_1

úhel vnější a γ je jeden z protějších úhlů vnitřních; tedy je γ menší než δ_1. Mimoto je patrné z obrazce, že β je větší než δ_2. Celkem tedy je $\gamma < \delta_1$, $\beta > \delta_2$, $\delta_1 = \delta_2$; z toho následuje, že $\gamma < \beta$ a to jsme měli dokázati.

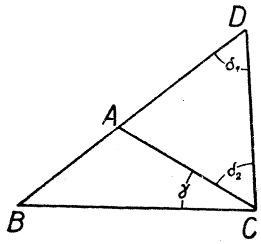
Poučka, kterou jsme si právě odvodili, dá se obrátit: **V trojúhelníku leží proti většímu úhlu větší strana. V trojúhelníku leží proti menšímu úhlu menší strana.** To je zase dvojí znění téže poučky. Dokážeme si ji takto. Dejme tomu, že v trojúhelníku ABC (viz obr. 190) je $\alpha < \gamma$. Máme dokázati, že je $a < c$. Rozhodně nastane jeden z těchto tří případů:

$$[1]\ a = c; \quad [2]\ a > c; \quad [3]\ a < c.$$

Ale podle pouček nám už známých je: v případě [1] $\alpha = \gamma$; v případě [2] $\alpha > \gamma$; v případě [3] $\alpha < \gamma$. Protože v našem trojúhelníku je $\alpha > \gamma$, musí u něho nastati případ [2] a to jsme měli dokázati.



Obr. 211.



Obr. 212.

Následující poučka je vám již známa. **Součet dvou stran trojúhelníka je větší nežli strana třetí.** Můžeme si ji dokázati takto. Dokazujme třeba, že $b + c > a$. Prodlužme stranu AB za vrchol A a na prodloužení si určeme bod D tak, že $\overline{AD} = b$ (viz obr. 212). Protože $\overline{BA} = c$, $\overline{AD} = b$, je $\overline{BD} = b + c$; mimoto je $\overline{BC} = a$. Tedy máme dokázati, že $\overline{BD} > \overline{BC}$. V trojúhelníku ACD je $\overline{AC} = \overline{AD}$ (proč?); v témž trojúhelníku leží úhel δ_1 proti straně AC a úhel δ_2 proti straně AD. Proto je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD leží proti straně BD úhel $\gamma + \delta_2$ a proti straně BC úhel δ_1. Protože $\delta_1 = \delta_2$, je $\gamma + \delta_2 > \delta_1$. Tedy v trojúhelníku BCD leží proti straně BD větší úhel nežli proti straně BC. Proto je $\overline{BD}$ větší než $\overline{BC}$ a to jsme právě chtěli dokázat.

Rozdíl dvou stran trojúhelníka je menší než strana třetí. Také tato poučka je vám již známa. Nepraví vlastně už nic nového. Dejme tomu, že je třeba $a > b$; máme dokázat, že $a - b < c$. Víme, že

$$a < b + c.$$

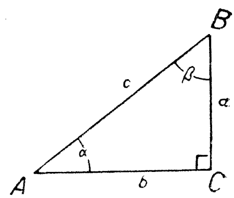
Proto, když od a ubereme b, zbude méně, nežli když od $b + c$ ubereme b; tedy

$$a - b < (b + c) - b.$$

Protože $(b + c) - b$ je totéž jako c, jsme hotovi.

Chceme-li se přesvědčit, zda tři délky a, b, c mohou býti délkami stran trojúhelníka, stačí se přesvědčit, že součet kterýchkoli dvou z nich je větší nežli třetí: neboť jsme právě nahlédli, že potom také rozdíl kterýchkoli dvou z nich bude menší než třetí a víme, že to už potom stačí. Dokonce stačí se přesvědčit, že největší z délek a, b, c je menší než součet ostatních dvou; neboť tím spíše bude kterákoli jiná menší než součet zbývajících dvou.

U pravoúhlého trojúhelníka základní označení je takové, jaké vidíte v obr. 213; a, b jsou odvěsny, c je přepona, C je vrchol pravého úhlu.



Obr. 213.

Nejdelší strana pravoúhlého trojúhelníka je přepona. Neboť přepona leží proti pravému úhlu a odvěsna proti ostrému úhlu, který je menší.

Nejdelší strana tupoúhlého trojúhelníka leží proti tupému úhlu. Neboť ostatní strany leží proti ostrým úhlům, které jsou menší.

Nejkratší vzdálenost od bodu A k přímce c je vzdálenost $\overline{AP}$, kde P znamená patu kolmice spuštěné s bodu A na přímku c. Neboť je-li X kterýkoli jiný bod přímky c, pak APX je pravoúhlý trojúhelník, AP je odvěsna, AX je přepona, tedy $\overline{AX} > \overline{AP}$.

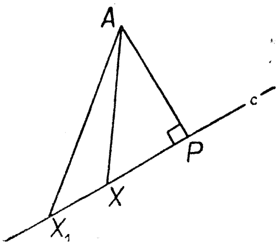
Můžeme si snadno dokázati ještě více! Bod P rozdělí přímku c na dvě polopřímky. Pohybuje-li se bod po jedné z těchto polopřímek, počínajíc polohou P, pak jeho vzdálenost od bodu A stále vzrůstá. Neboť v trojúhelníku AXX_1 (viz obr. 214) leží strana AX_1 proti tupému úhlu, takže je delší nežli strana AX.

V paragrafu 32 jsme si zjistili, že poučka ssu není vždycky správná (viz obr. 192 až 194). Správná je tato poučka:

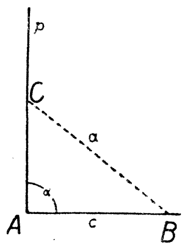
Trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel proti větší z nich.

Druhé znění: **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich.**

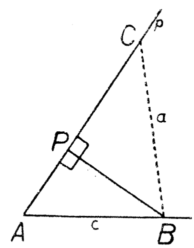
Dejme tomu, že jsou dány délky a, c, při čemž je a větší než c, a mimoto je dán úhel α. Sestrojíme si úhel α s vrcholem A a na jedno rameno naneseme délku $\overline{AB} = c$; druhé rameno si označíme p. [Stejně to bylo v obrazcích 192 až 194.] Běží o to, že na polopřímce p leží pouze jediný bod C takový, že vzdálenost $\overline{BC}$ je rovna dané délce a. Rozeznávejme tři případy podle toho, zda úhel α je pravý, ostrý či tupý.



Obr. 214.



Obr. 215.



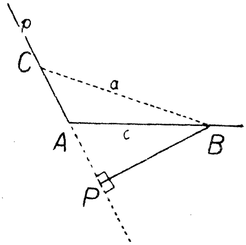
Obr. 216.

Případ prvý: $\alpha = R$ (viz obr. 215). Zde A je pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p. Pohybuje-li se bod X po polopřímce p, počínajíc polohou A, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{BA} = c$; protože $a > c$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C bodu X.

Případ druhý: $\alpha < R$ (viz obr. 216). Je-li P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p, tu v našem případě padne bod P do polopřímky p. Vzdálenost $\overline{AB} = c$ je větší nežli $\overline{BP}$; protože $a > c$, je tím spíše a větší nežli BP. Z bodu P vychází polopřímka p_0 (v obrazci nevyznačená), která je částí polopřímky p. Pohybuje-li se bod X po polopřímce p_0, počínajíc polohou P, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{BP}$; protože $a > \overline{BP}$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C

bodu X na polopřímce p_0. Ovšem polopřímka p_0 je pouze části polopřímky p, která se skládá jednak z polopřímky p_0, jednak ještě z úsečky $\overline{PA}$. Ale pohybuje-li se bod X po úsečce $\overline{PA}$, počínajíc polohou P, tu vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá a končí největší hodnotou $\overline{BA} = c$; protože i tato největší hodnota je menší nežli a, nenabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro žádnou polohu bodu X na úsečce PA.

Případ třetí: $\alpha > R$ (viz obr. 217). Je-li zase P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p, tu v našem případě padne bod P mimo polopřímku p. Polopřímka p je nyní částí polopřímky PA. Pohybuje-li se bod X po polopřímce PA, počínajíc polohou P, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Když bod X přijde do polohy A, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty c; potom přejde bod X na polopřímku p a vzdálenost $\overline{BX}$ vzrůstá dále; dané hodnoty $a > c$ nabude vzdálenost $\overline{BX}$ pro jedinou polohu C bodu X.



Obr. 217.

Cvičení k § 34.

533. Rovnoramenný trojúhelník má při základně úhel

a) $25° 48' 56''$.	b) $36° 54' 12''$.	c) $54° 27' 46''$.
d) $58° 58' 58''$.	e) $64° \quad 57''$.	f) $73° 33' 38''$.

Vypočtěte úhel proti základně.

534. Rovnoramenný trojúhelník má proti základně úhel

a) $12° 15' 42''$.	b) $23° 45' 6''$.	c) $34° 56' 54''$.
d) $82° 16' 36''$.	e) $112° 52' 28''$.	f) $148° 36' 48''$.

Vypočtěte úhel při základně.

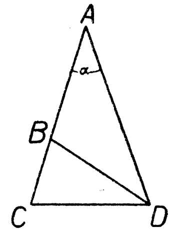
535. Jeden úhel rovnoramenného trojúhelníka měří 74°. Vypočtěte ostatní úhly. (Dvoje řešení!)

536. Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je dvojnásobek úhlu proti základně. Vypočtěte všecky úhly.

537. Úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka je trojnásobek úhlu při základně. Vypočtěte všecky úhly.

538. V obr. 218 je $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\alpha = 34°$. Vypočtěte $\sphericalangle ADB$.

539. V obr. 219 je $\varphi = 42°$, $\psi = 66°$. S je střed kružnice. Vypočtěte úhly trojúhelníka HKL.

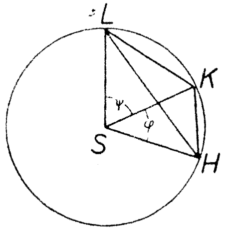


Obr. 218.

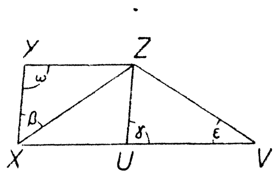
540. V obr. 220 je $\overline{XZ} = \overline{VZ}$, $\beta = 52°$, $\gamma = 84°$, $\varepsilon = 32°$, $\omega = 96°$. Dokažte:
a) $XV \parallel YZ$. (Bod U, úsečka UZ a úhel γ jsou v této části zbytečné.)
b) $XY \parallel UZ$.

541. V obr. 221 je $\overline{PQ} = \overline{PN}$, $\delta_1 = 32°$, $\delta_2 = 80°$. Najděte $\sphericalangle QPR$.

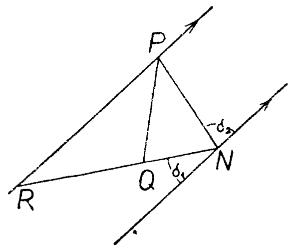
542. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Přímky AD a BE se protnou v bodě F. Určete úhly trojúhelníka ABF.



Obr. 219.



Obr. 220.



Obr. 221.

543. V obr. 222 je $\overline{EF} = \overline{EH}$, $\varphi = 37°$, $\psi = 148°$. Dokažte, že $\overline{FG} = \overline{FH}$.

544. V obr. 223 je $\alpha = 67°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 104°$. Dokažte, že $\overline{RP} = \overline{RS}$.

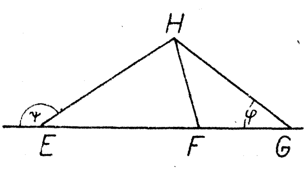
545. Uvnitř čtverce $ABCD$ je rovnostranný trojúhelník ABK. Určete $\sphericalangle CKB$.

546. V obr. 224 je $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$. Dokažte, že $\overline{ZX} = \overline{ZV}$.

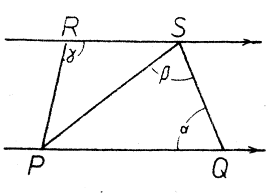
547. Na ose úhlu $\sphericalangle EFG$ leží bod H. Jest $EH \parallel FG$. Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EH}$.

548. V trojúhelníku ABC je $b = c$, $\beta = 62°$. Co je větší, a nebo b?

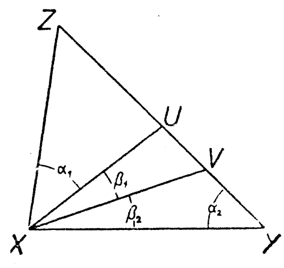
549. V trojúhelníku ABC měří vnější úhel při vrcholu A 126°, při vrcholu B 118°. Osa úhlu β a osa úhlu γ se protnou v bodě S. Co je větší, $\overline{BS}$ nebo $\overline{CS}$?



Obr. 222.



Obr. 223.



Obr. 224.

550. V trojúhelníku ABC je $\beta = 30°$, $\gamma = 56°$. Osa úhlu α protne stranu BC v bodě X. Která ze tří délek $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ je největší? Která je nejmenší?

551. Bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC. Dokažte, že

$$\sphericalangle AUB > \sphericalangle ACB.$$

[Přímka AU protne stranu BC v bodě T. Porovnejte oba úhly s úhlem $\sphericalangle ATB$.]

552. Bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC. Dokažte, že

$$\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$

[Přímka AU protne stranu BC v bodě T. Dokažte napřed, že $\overline{AT} + \overline{TB} < \overline{AC} + \overline{CB}$ a potom, že $\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AT} + \overline{TB}$.]

553. Rozhodněte, existuje-li trojúhelník ABC, ve kterém by platilo toto:

a) $a = 37{,}4$ cm, $b = 25{,}3$ cm, obvod $= 123$ cm;
b) $a = 49{,}8$ cm, $b = 12{,}5$ cm, obvod $= 1$ m;
c) $a = 37{,}3$ cm, $b = 24{,}9$ cm, obvod $= 125$ cm;
d) $a = 50{,}1$ cm, $b = 13{,}6$ cm, obvod $= 1$ m.

554. Zapište si všecky poučky, kterými jsme se zabývali v tomto paragrafu.

§ 35. Rovnoběžník.

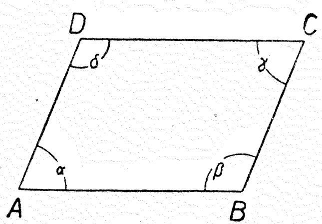
Čtyrúhelník $ABCD$ se nazývá rovnoběžník, když je

$$AB \parallel CD,\ AD \parallel BC.$$

To je nám již známo z paragrafu 31. Také již víme, že u rovnoběžníka v obr. 225 je $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ a že úhly α, β (nebo α, δ nebo β, γ nebo γ, δ) jsou výplňkové.

Obráceně, když o čtyrúhelníku $ABCD$ v obr. 225 víme, že $\alpha = \gamma$ a že $\beta = \delta$, můžeme souditi, že to je rovnoběžník: je-li u čtyrúhelníka každý úhel rovný úhlu protějšímu, je to rovnoběžník. Neboť víme, že $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$, neboli

$$(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) = 4R.$$



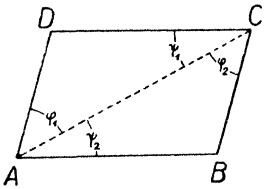
Obr. 225.

V našem případě je $\alpha = \gamma$, tedy α je polovina z $\alpha + \gamma$; dále je $\beta = \delta$, tedy β je polovina z $\beta + \delta$; tedy $\alpha + \beta$ je polovina ze $4R$, t. j. α a β jsou výplňkové úhly. Protože $\beta = \delta$, také α a δ jsou výplňkové úhly. Nyní α a β jsou přilehlé úhly (příčka AB, proťaté přímky AD, BC); protože $\alpha + \beta = 2R$, je $AD \parallel BC$. Také α a δ jsou přilehlé úhly (příčka AD, proťaté přímky AB, CD); protože $\alpha + \delta = 2R$, je $AB \parallel CD$. Tedy $ABCD$ je skutečně rovnoběžník.

Nyní si všimneme stran rovnoběžníka. **Dvě protější strany rovnoběžníka jsou si rovny.** V obr. 226 je $ABCD$ rovnoběžník. Chceme dokázati, že

$$\overline{AB} = \overline{CD},\ \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Provedeme pomocnou konstrukci jako v obrazci. Vzniknou nám trojúhelníky ACD a ABC, které mají společnou stranu AC; mimoto je $\varphi_1 = \varphi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\psi_1 = \psi_2$ (z téhož důvodu).



Obr. 226.

Proto je

$$ACD \cong CAB \quad \text{(usu)}$$

a z toho vychází $\overline{AD} = \overline{CB}$, $\overline{CD} = \overline{AB}$, což jsme měli dokázat.

Proveďte týž důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD!

Jsou-li u čtyrúhelníka *ABCD* protější strany *AB* a *CD* rovnoběžné a sobě rovné, je *ABCD* rovnoběžník. Nyní víme o obr. 226, že

$$AB \parallel CD, \qquad \overline{AB} = \overline{CD}$$

a máme dokázat, že je $AD \parallel BC$. Zase provedeme stejnou pomocnou konstrukci a opět si všimneme trojúhelníků ACD a ABC se společnou stranou AC. Nyní víme, že $\overline{CD} = \overline{AB}$; mimoto je $\psi_1 = \psi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Proto je

$$ACD \cong CAB \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$ a to jsme měli dokázati.

Zase proveďte důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD!

Je-li u čtyrúhelníka každá strana rovná straně protější, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 226, že

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \qquad \overline{AD} = \overline{BC};$$

máme dokázat, že $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Provedeme-li obvyklou pomocnou konstrukci, vyjde ihned

$$ACD \cong CAB \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$. Také ψ_1 a ψ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AB, CD); protože $\psi_1 = \psi_2$, je $AB \parallel CD$.

Opakujte důkaz s obvyklou změnou!

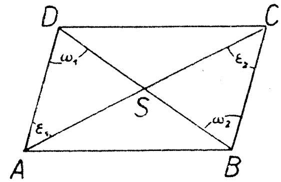
Nyní si všimneme úhlopříček rovnoběžníka. **Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí.** V obr. 227 je S průsečík úhlopříček rovnoběžníka $ABCD$. Chceme dokázati, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \quad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Všimneme si trojúhelníků SAD, SBC. Víme, že $\overline{AD} = \overline{BC}$ (protější strany rovnoběžníka); mimoto je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\omega_1 = \omega_2$ (z téhož důvodu. Proto je

$$SAD \cong SCB \quad \text{(usu)}$$

a z toho vychází $\overline{SA} = \overline{SC}$, $\overline{SD} = \overline{SB}$, což jsme měli dokázati.



Obr. 227.

Proveďte důkaz znovu s tou změnou, že místo trojúhelníků SAD, SCB si všimnete trojúhelníků SAB, SCD!

Jestliže se u čtyrúhelníka úhlopříčky navzájem půlí, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 227, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \quad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Zase si všimneme trojúhelníků SAD, SBC. Jest $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC$ (vrcholové úhly). Proto je

$$SAD \cong SCB \quad \text{(sus)}$$

a z toho soudíme, že $\overline{AD} = \overline{CB}$. Dále si všimněme trojúhelníků SAB, SCD. Jest $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$. Proto je

$$SAB \cong SCD \quad \text{(sus)}$$

a z toho soudíme, že $\overline{AB} = \overline{CD}$. Nyní už víme o čtyrúhelníku $ABCD$, že se každá strana rovná straně protější. Proto $ABCD$ je rovnoběžník.

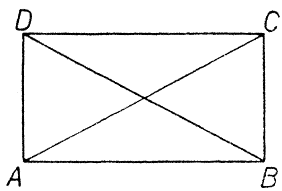
Obdélník je takový čtyrúhelník, jehož všecky úhly jsou pravé. Obdélník je rovnoběžník, neboť každý jeho úhel se rovná (každému jinému, tedy zejména) jeho úhlu protějšímu, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky.

O obdélníku platí zajisté všecko, co platí o rovnoběžnících. Zejména dvě protější strany obdélníka jsou stejně dlouhé a úhlopříčky obdélníka se navzájem půlí.

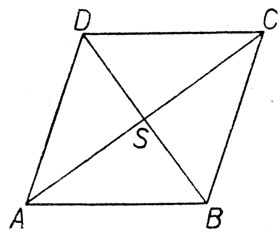
Obě úhlopříčky obdélníka jsou si rovny. V obr. 228 je $ABCD$ obdélník; chceme dokázati, že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Všimneme si trojúhelníků ABC, BAD. Mají společnou stranu AB; dále je $\overline{BC} = \overline{AD}$ a mimoto $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$. Tedy

$$ABC \cong BAD \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\overline{AC} = \overline{BD}$.



Obr. 228.



Obr. 229.

Opakujte důkaz s tou změnou, že užijete trojúhelníků se společnou stranou AD!

Rovnoběžník, jehož obě úhlopříčky jsou si rovny, je obdélník. Nyní víme o obr. 228, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Máme dokázati, že na př. úhel $\sphericalangle BAD$ je pravý. Protože $ABCD$ je rovnoběžník, musí býti $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Jelikož je také $\overline{AC} = \overline{BD}$, je

$$ABC \cong BAD \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (sousední úhly rovnoběžníka); protože jsou si rovné, musí býti pravé.

Kosočtverec je takový čtyrúhelník, jehož všecky strany jsou si rovny. Kosočtverec je rovnoběžník, neboť každá jeho strana se rovná (každé jiné, tedy zejména) protější straně, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky. Jako u každého rovnoběžníka, úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí.

Úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo. V obr. 229 je $ABCD$ kosočtverec. Chceme dokázati, že

$$BD \perp AC.$$

Trojúhelníky ABS, ADS mají společnou stranu AS; dále je $\overline{AB} = \overline{AD}$ (strany kosočtverce) a mimoto $\overline{BS} = \overline{SD}$ (úhlopříčky se půlí). Proto je

$$ABS \cong ADS \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (neboť jsou vedlejší); protože jsou si rovné, musí býti pravé.

Každý úhel kosočtverce je půlen úhlopříčkou vycházející z toho vrcholu. Jako při předešlém důkaze je

$$ABS \cong ADS$$

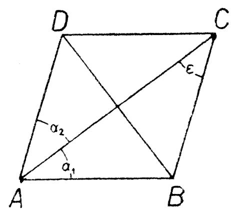
a proto $\sphericalangle BAS = \sphericalangle DAS$, t. j. úhlopříčka AC půlí úhel při vrcholu A.

Rovnoběžník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, je kosočtverec. Nyní víme o obr. 229, že $ABCD$ je rovnoběžník a že úhly při vrcholu S jsou pravé. Chceme dokázati, že všecky délky $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ jsou stejné. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{BC} = \overline{AD}$. Proto potřebujeme pouze ukázati, že $\overline{AB} = \overline{AD}$. Všimneme si zase trojúhelníků ABS, ADS se společnou stranou AS. Jest $\overline{BS} = \overline{DS}$ (úhlopříčky se půlí) a mimoto $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Proto je

$$ABS \cong ADS \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\overline{AB} = \overline{AD}$, což jsme měli dokázati.

Je-li úhel při vrcholu *A* rovnoběžníka *ABCD* půlen úhlopříčkou *AC*, je *ABCD* kosočtverec. O obr. 230 víme, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\alpha_1 = \alpha_2$. Máme dokázati, že všecky strany jsou si rovny. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{AD} = \overline{BC}$. Proto potřebujeme pouze dokázati, že $\overline{AB} = \overline{BC}$. Jest $\alpha_2 = \varepsilon$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami); protože $\alpha_1 = \alpha_2$, jest $\alpha_1 = \varepsilon$. Avšak α_1 a ε jsou úhly trojúhelníka ABC proti stranám BC a AB. Protože ty úhly jsou si rovny, jsou si rovny také protější strany, t. j. $\overline{AB} = \overline{BC}$.



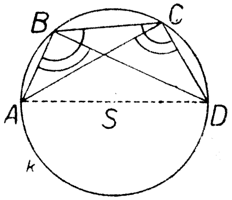
Obr. 230.

Čtverec je takový čtyrúhelník, který má i všecky strany stejné i všecky úhly pravé neboli čtverec je současně obdélníkem i kosočtvercem. Všecky vlastnosti obdélníka a všecky vlastnosti kosočtverce musí platit pro čtverec. Vyslovte pro čtverec ty vlastnosti, které zde byly dokázány pro obdélník nebo pro kosočtverec!

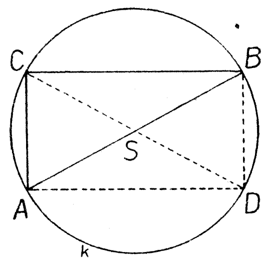
Leží-li body A, B, C na kružnici k, pak úhel $\sphericalangle ABC$ se nazývá obvodový úhel, určitěji: obvodový úhel nad tětivou AC. Viz obr. 231, ve kterém je vyznačen m. j. obvodový úhel $\sphericalangle ABC$ nad tětivou AC a obvodový úhel $\sphericalangle BCD$ nad tětivou BD. Důležitý případ nastane, když tětiva prochází středem kružnice neboli je průměrem kružnice. Pak máme obvodový úhel nad průměrem; v obr. 231 jsou vyznačeny dva takové úhly: $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle ACD$.

Obvodový úhel nad průměrem je pravý. To je proslulá Thaletova věta. (Řecký filosof Thales milétský žil v 6. století př. Kr.) V obr. 232 je AB průměr kružnice k a bod C leží na kružnici k; máme dokázati, že

$$\sphericalangle ACB = R.$$



Obr. 231.



Obr. 232.

Veďme průměr CSD kružnice k a všimněme si čtyrúhelníka $ACBD$. Úsečky AB, CD jsou úhlopříčky čtyrúhelníka. Jsou to průměry kružnice k a protínají se ve středu S kružnice k. Z toho vychází především, že obě úhlopříčky čtyrúhelníka $ACBD$ se navzájem půlí, takže $ACBD$ je rovnoběžník. Dále však vychází, že obě úhlopříčky rovnoběžníka $ACBD$ jsou si rovny. Proto $ACBD$ je obdélník a $\sphericalangle ACB$ je pravý, jak jsme měli dokázati.

Mysleme si nyní místo úhlu $\sphericalangle ACB$ úhel $\sphericalangle ACX$, kde X je nějaký jiný bod kružnice k. Protože přímka CB má s kružnicí společné pouze body C a B a protože bod X naší kružnice není ani v poloze C ani v poloze B, nemůže přímka CX se krýt s přímkou CB. A protože CB stojí kolmo na CA (podle Thaletovy věty), nemůže CX státi kolmo na CA. **Obvodový úhel nad tětivou, která není průměrem, není úhel pravý.**

Cvičení k § 35.

555. V obr. 233 je $EFGH$ rovnoběžník. H je střed kružnice m. Dokažte, že

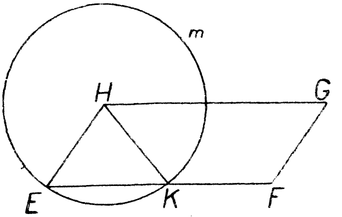
$$\sphericalangle\, GHK = \sphericalangle\, FGH.$$

[U každého z obou úhlů si najděte v obrazci jiný úhel, o kterém víte, že mu je rovný.]

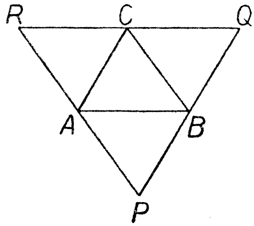
556. Obr. 234 vznikl tak, že každým vrcholem trojúhelníka ABC byla vedena rovnoběžka s protější stranou. Dokažte, že body A, B, C jsou středy stran trojúhelníka PQR.

557. STX je přímka. $STUV$ je rovnoběžník. Osa úhlu $\sphericalangle\, XTU$ protne přímku VS v bodě Y a přímku VU v bodě Z. Dokažte, že

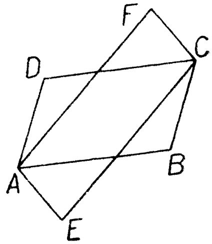
$$\overline{VY} = \overline{VZ} = \overline{ST} + \overline{TU}.$$



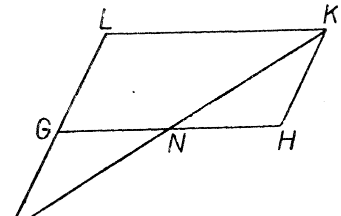
Obr. 233.



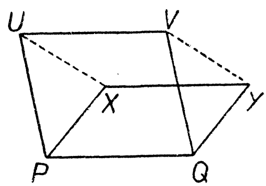
Obr. 234.



Obr. 235.



Obr. 236.



Obr. 237.

558. V obr. 235 jsou $ABCD$ a $AECF$ rovnoběžníky. Dokažte, že všecky tři přímky AC, BD, EF se protnou v jediném bodě. Potom dokažte, že $BE \parallel FD$.

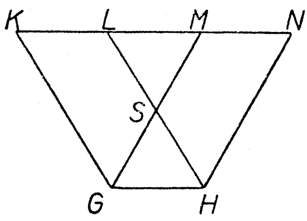
559. V obr. 236 je $GHKL$ rovnoběžník a $\overline{GN} = \overline{NH}$. Dokažte, že $\overline{LG} = \overline{GM}$.

560. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB, T je střed protější strany. Dokažte, že $BSDT$ je rovnoběžník.

561. V obr. 237 jsou $PQYX, PQVU$ dva rovnoběžníky. Dokažte, že také $XYUV$ je rovnoběžník. Je to pravda také tehdy, když rovnoběžníky $PQYX$, $PQVU$ leží každý v jiné rovině?

562. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB, T střed strany CD, E střed strany BC, F střed strany DA. Sestrojte přímky AE, BT, CF, DS a dokažte, že těmi přímkami je určen nový rovnoběžník.

563. V obr. 238 jsou $GHLK$ a $GHNM$ dva rovnoběžníky. S je střed úsečky HL. Dokažte, že body L a M dělí úsečku KN na tři stejné díly.



Obr. 238.

564. Zvolte si libovolný čtyrúhelník $ABCD$. Určete body E a F tak, aby $ADCE$, $BADF$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že přímka EF prochází středem úsečky BC.

565. Veďte bodem O tři přímky. Na první zvolte bod H, na druhé bod K, na třetí bod L. Určete body X, Y a Z tak, aby $OKXL$, $OLYH$, $OHZK$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že úsečky HX, KY, LZ se navzájem půlí.

566. Zvolte si trojúhelník ABC. Zvolte si bod D na straně AB a bod E na straně AC. Dokažte, že úsečky CD a BE se nemohou navzájem půlit.

567. Víme-li o jednom úhlu rovnoběžníka, že je pravý, je to jistě obdélník. (Dokažte!)

568. Má-li čtyrúhelník všecky úhly stejné, je to obdélník. (Dokažte!)

569. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB, T střed strany CD, E střed strany BC, F střed strany DA. Dokažte:

a) $ESFT$ je rovnoběžník.
b) Když $ABCD$ je obdélník, $ESFT$ je kosočtverec.
c) Když $ABCD$ je kosočtverec, $ESFT$ je obdélník.
d) Když $ABCD$ je čtverec, $ESFT$ je čtverec.
e) Když $ESFT$ je kosočtverec, $ABCD$ je obdélník.
f) Když $ESFT$ je obdélník, $ABCD$ je kosočtverec.
g) Když $ESFT$ je čtverec, $ABCD$ je čtverec.

570. Které nové geometrické výrazy se vyskytly v tomto paragrafu? Zapište si je!

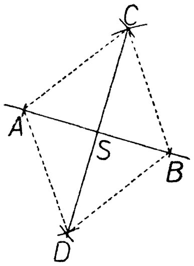
571. Zapište si poučky, které jsme dokázali v tomto paragrafu.

§ 36. Konstrukce.

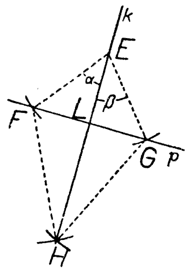
Víte, že říkáme *euklidovská konstrukce* takové konstrukci, při které se užívá pouze dvou základních výkonů: [1] narýsovati přímku, která spojuje dva dané body; [2] narýsovati kružnici, která má daný střed a daný poloměr.

Řada základních euklidovských konstrukcí je vám známa. Správnost každé z nich si můžeme potvrditi pomocí pouček, které jsme letos probírali.

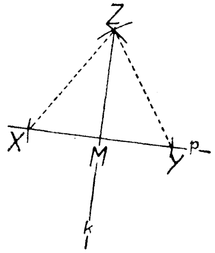
V obr. 239 je znázorněno, jak se euklidovsky sestrojí střed S úsečky AB a osa CD úsečky AB. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili o její správnosti, máme dokázati, že $\overline{AS} = \overline{BS}$ a že $CD \perp AB$. Podle konstrukce je $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$, takže $ACBD$ je kosočtverec. Víme, že úhlopříčky kosočtverce (jako každého jiného rovnoběžníka) se navzájem půlí: proto je $\overline{AS} = \overline{BS}$. Víme, že úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo: proto je $CD \perp AB$.



Obr. 239.



Obr. 240.



Obr. 241.

V obr. 240 je znázorněno, jak se euklidovsky spustí kolmice k s bodu E na přímku p. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu je $EH \perp p$, že tedy $\sphericalangle ELF$ je pravý úhel, všimneme si napřed trojúhelníků EFH a EGH. Podle konstrukce je

$$EFH \cong EGH \quad \text{(sss)}$$

a z toho plyne $\sphericalangle FEH = \sphericalangle GEH$ neboli $\alpha = \beta$. Teď si všimneme trojúhelníků FEL a GEL. Jest $\overline{FE} = \overline{GE}$, $\alpha = \beta$ a strana EL je oběma trojúhelníkům společná. Proto je

$$FEL \cong GEL \quad \text{(sus)}$$

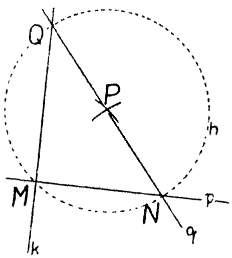
a z toho následuje $\sphericalangle ELF = \sphericalangle ELG$. Tedy úhel $\sphericalangle ELF$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle ELF = R$.

V obr. 241 je znázorněno, jak se euklidovsky vztyčí kolmice k k přímce p v jejím bodě M. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu $\sphericalangle XMZ = R$, všimneme si trojúhelníků XMZ a YMZ. Podle konstrukce je

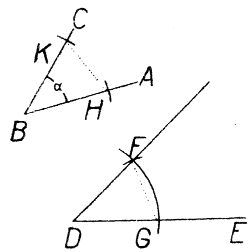
$$XMZ \cong YMZ \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle XMZ = \sphericalangle YMZ$. Tedy úhel $\sphericalangle XMZ$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle XMZ = R$.

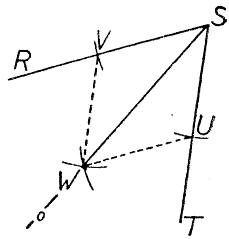
V obr. 242 je znázorněn jiný zajímavý způsob euklidovské konstrukce, vztyčiti kolmici k k přímce p v jejím bodě M. Popis: Na přímce p si zvolíme ještě jeden bod N. Kružítkem si stanovíme bod P tak, aby bylo $\overline{MP} = \overline{NP}$, dále sestrojíme spojnici $q = NP$ a na ní si stanovíme kružítkem bod Q tak, aby bylo $\overline{QP} = \overline{NP}$. Spojnice QM je žádaná kolmice k. Odůvodnění: Jest $\overline{MP} = \overline{NP} = \overline{QP}$, takže body M, N a Q leží na kružnici h se středem P. Tedy $\sphericalangle QMN$ je



Obr. 242.



Obr. 243.



Obr. 244.

obvodový úhel a protože QN je průměr kružnice h, je $\sphericalangle QMN = R$ podle Thaletovy věty.

Také úloha, spustit na přímku p kolmici s bodu Q, dá se euklidovsky řešit pomocí Thaletovy věty, ale je to konstrukce složitější než ta, která je znázorněna v obr. 240. Bodem Q si vedeme libovolnou přímku q (viz zase obr. 242). Je-li N průsečík přímek p a q, najdeme si střed P úsečky QN, což umíme provésti euklidovsky. Potom si opíšeme se středu P kružnici h tak, aby procházela bodem Q. Kružnice h má s přímkou p vedle bodu N společný ještě jeden bod M. Přímka QM je žádaná kolmice k. Proč?

V obr. 243 je znázorněno, jak se euklidovsky sestrojí úhel, který se rovná danému úhlu α a má jedno rameno v dané polopřímce DE (tedy vrchol v bodě D). Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že je správná, máme dokázati, že $\sphericalangle GDF = \alpha$. Podle konstrukce je

$$BHK \cong DGF \quad \text{(sss)},$$

takže $\alpha = \sphericalangle HBK = \sphericalangle GDF$.

V obr. 244 je znázorněno, jak se euklidovsky najde osa o úhlu $\sphericalangle RST$. Vyložte ústně průběh konstrukce! Podle ní je $\overline{SU} = \overline{SV} =$

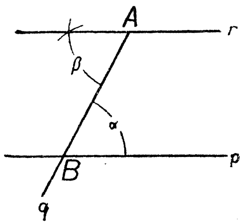
$= \overline{UW} = \overline{VW}$, takže $SUWV$ je kosočtverec. Víme, že úhlopříčka SW půlí úhel $\sphericalangle VSU = \sphericalangle RST$. Proto $o = SW$ je osa úhlu $\sphericalangle RST$.

Euklidovská konstrukce úhlu 60° je založena na poučce, že každý úhel rovnostranného trojúhelníka se rovná 60°. Tato poučka nebyla v této části učebnice ještě výslovně uvedena, ale znáte poučku, že proti stejným stranám leží stejné úhly, a poučku o součtu úhlů. Z těchto dvou plyne snadno.

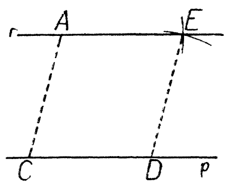
Protože umíme euklidovsky sestrojit úhly 60° a 90° a protože umíme euklidovsky rozpůlit daný úhel, dovedeme euklidovsky sestrojit rozmanité úhly (viz cvič. 572).

Když velikost úhlu je vyjádřena celým počtem stupňů, dá se úhel euklidovsky sestrojit, kdykoli počet stupňů je násobek tří (ale nebudeme se to učit); dá se také dokázat, že když počet stupňů není násobek tří, je euklidovská konstrukce nemožná. Na př. úhel 10° nelze euklidovsky sestrojit.

V obrazcích 245 a 246 jsou znázorněny euklidovské konstrukce úlohy, vésti bodem A rovnoběžku r k přímce p.



Obr. 245.

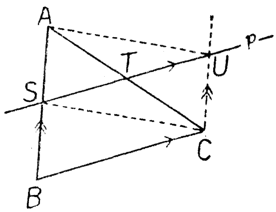


Obr. 246.

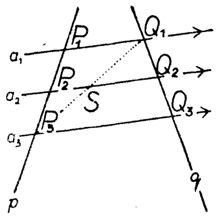
Popis konstrukce z obr. 245: Bodem A si vedeme libovolnou přímku q a označíme B její průsečík s přímkou p. Přímky p a q určí úhel α. Sestrojíme si euklidovsky úhel β rovný úhlu α s jedním ramenem v polopřímce AB, ale na druhé straně od přímky q než je úhel α. Druhé rameno úhlu β je v žádané rovnoběžce r. Odůvodnění: Úhly α a β jsou střídavé (příčka q, proťaté přímky p a r); protože $\alpha = \beta$, jest $r \parallel p$.

Popis konstrukce z obr. 246: Na přímce p si zvolíme dva body C a D. Kružítkem si opatříme takový bod E, aby bylo $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$. Přímka AE je žádaná rovnoběžka r. Odůvodnění: Protože $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$, je $ACDE$ rovnoběžník, takže $AE \parallel CD$.

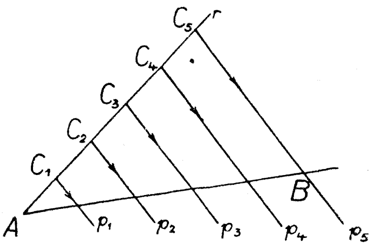
V tomto paragrafu se naučíme, jak se může daná úsečka euklidovsky rozdělit na předepsaný počet stejných dílů. Ale napřed si uvedeme dvě poučky. **Jestliže přímka p rovnoběžná se stranou BC trojúhelníka ABC prochází středem strany AB, pak prochází také středem strany AC.** V obr. 247 je tedy $p \parallel BC$ a S je střed strany AB. Máme dokázati, že T je střed strany AC. Za tím účelem si vedeme bodem C rovnoběžku se stranou AB a označíme si U její průsečík s přímkou p. Protože $SU \parallel BC$, $SB \parallel UC$, je $BSUC$ rovnoběžník a z toho následuje $\overline{CU} = \overline{BS}$. Protože také $\overline{SA} = \overline{BS}$, je $\overline{CU} = \overline{SA}$. Tedy $CU \parallel SA$, $\overline{CU} = \overline{SA}$ a proto $CUAS$ je rovnoběžník.



Obr. 247.



Obr. 248.



Obr. 249.

Úhlopříčky AC a SU rovnoběžníka $CUAS$ se protnou v bodě T. Protože úhlopříčky rovnoběžníka se půlí, je T střed úsečky AC, což jsme měli dokázati.

Nyní druhou poučku (viz obr. 248)! **Nechť rovnoběžky a_1, a_2, a_3 protnou přímku p v bodech P_1, P_2, P_3, a přímku q v bodech Q_1, Q_2, Q_3; jestliže $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$, pak také $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$.** Tu poučku dokážeme, když vedeme pomocnou čáru P_3Q_1 a užijeme dvakrát za sebou předešlé poučky. Poprvé jí užijeme na trojúhelník $P_3P_1Q_1$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_1Q_1 a prochází středem P_2 strany P_3P_1; proto přímka a_2 prochází středem S strany P_3Q_1. Podruhé užijeme téže poučky na trojúhelník $Q_1P_3Q_3$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_3Q_3 a prochází středem S strany Q_1P_3; proto přímka a_2 prochází středem strany Q_1Q_3. Ale to právě znamená, že $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$, což jsme měli dokázati.

V obr. 249 je znázorněno euklidovské řešení úlohy, rozděliti úsečku AB na pět stejných dílů. Popis: Bodem A si vedeme libovolnou přímku r a zvolíme si na ní libovolný bod C_1. Kružítkem si určíme postupně další body C_2, C_3, C_4, C_5 na přímce r tak, aby bylo $\overline{AC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = \overline{C_3C_4} = \overline{C_4C_5}$. Spojíme C_5B a vedeme rovnoběžky p_4, p_3, p_2, p_1 s přímkou C_5B tak, že p_1 prochází bodem C_1, p_2 bodem C_2 atd. Přímky p_1, p_2, p_3, p_4 protnou přímku AB v bodech, které rozdělí úsečku AB na pět stejných dílů.

Základní konstrukce trojúhelníka jsme již probírali. Pro opakování zde máte ještě cvič. 575.

Známe-li jeden ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníka, známe všecky tři úhly. Proto z poučky usu následuje, že **pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li**

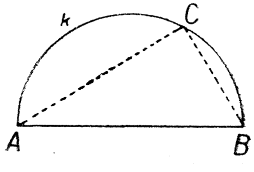
a) délku jedné odvěsny a jeden ostrý úhel;

b) délku přepony a jeden ostrý úhel.

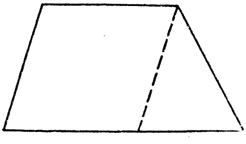
Ale pravoúhlý trojúhelník je také určen, známe-li

c) délku přepony a délku jedné odvěsny.

Neboť přepona je delší než odvěsna a proti přeponě je pravý úhel; tedy známe dvě strany a úhel proti větší z nich. Při sestrojování v případě c) začneme obyčejně tak, že si zvolíme určitou polohu dané odvěsny; vyložte sami, jaký je potom průběh konstrukce! Ale je zajímavé, že si při této úloze můžeme také zvoliti určitou polohu přepony AB (viz obr. 250): Opíšeme nad průměrem AB polokruž-



Obr. 250.

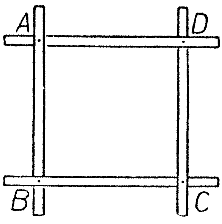


Obr. 251.

nici k; je-li dána na př. délka $\overline{AC} = b$, najdeme si kružítkem na polokružnici k ten bod C, jehož vzdálenost od bodu A se rovná dané délce b. Že trojúhelník ABC je pravoúhlý, to plyne z Thaletovy věty.

Při konstrukcích lichoběžníka často pomůže pomocná čára (vyčárkovaná v obr. 251), která lichoběžník rozdělí na rovnoběžník a na trojúhelník.

Kdežto trojúhelník je určen, známe-li délky všech stran, u čtyrúhelníka už tomu tak není. V obr. 252 jsou znázorněny čtyři dřevěné laťky, spojené v bodech A, B, C a D tak, že se každá laťka může otáčeti. V dané poloze je $ABCD$ čtverec, můžeme však body A, C přiblížit k sobě nebo oddálit od sebe, takže nám vzniknou kosočtverce rozmanitých tvarů, které všecky mají strany tak dlouhé jako původní čtverec. K určení čtyrúhelníka nestačí čtyři číselné údaje; je jich potřeba pět (viz cvič. 584).



Obr. 252.

Cvičení k § 36.

572. Jak byste sestrojili euklidovsky úhly

$15°$, $30°$, $45°$, $60°$, $75°$, $90°$, $105°$, $120°$, $135°$, $150°$, $165°$?

Jak úhly $22\frac{1}{2}°$, $52\frac{1}{2}°$, $67\frac{1}{2}°$?

573. Jak byste sestrojili euklidovsky k dané přímce p rovnoběžku, jejíž vzdálenost od přímky p je rovná délce dané úsečky?

574. Narýsujte si úsečku AB dlouhou přesně 7 cm a rozdělte ji euklidovsky na sedm stejných dílů. Změřte ty díly!

Ve cvič. 575 neužívejte při konstrukci úhloměru, nýbrž sestrojujte úhly euklidovsky. Ale při kontrolních měřeních užijete úhloměru.

575. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů:

a) $a = 53$ mm, $b = 81$ mm, $c = 42$ mm. Změřte úhly.
b) $a = 8{,}5$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10{,}7$ cm. Změřte úhly.
c) $a = 7{,}5$ cm, $\beta = 75°$, $\gamma = 45°$. Změřte b, c.
d) $b = 75$ mm, $\beta = 60°$, $\gamma = 97\frac{1}{2}°$. Změřte a, c.
e) $c = 3.2$ cm, $\alpha = 82\frac{1}{2}°$, $\gamma = 30°$. Změřte a, b.
f) $b = 39$ mm, $c = 55$ mm, $\alpha = 112\frac{1}{2}°$. Změřte a, β, γ.
g) $a = 12{,}5$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 75°$. Změřte b, α, γ.

576. Pomocí základních pouček o určení trojúhelníka dokažte, že rovnoramenný trojúhelník je určen, známe-li

a) délku základny a délku ramene;
b) délku základny a úhel při základně;
c) délku základny a úhel proti základně;
d) délku ramene a úhel při základně;
e) délku ramene a úhel proti základně.

Také ve cvič. 577 sestrojujte dané úhly euklidovsky.

577. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC podle daných údajů. Základna je AB.

a) $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 67\frac{1}{2}°$; změřte a.
b) $c = 72$ mm, $\gamma = 97\frac{1}{2}°$; změřte a.
c) $b = 5$ cm, $\beta = 75°$; změřte c.

578. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC podle daných údajů. (Jest $\sphericalangle ACB = R$.)

a) $a = 67$ mm, $\beta = 30°$; změřte b, c.
b) $a = 5\frac{1}{2}$ cm, $\alpha = 52\frac{1}{2}°$; změřte b, c.
c) $b = 5$ cm, $\alpha = 75°$; změřte a, c.
d) $b = 6$ cm, $\beta = 67\frac{1}{2}°$; změřte a, c.
e) $c = 7$ cm, $\alpha = 22\frac{1}{2}°$; změřte a, b.
f) $a = 37$ mm, $b = 51$ mm; změřte c, α.
g) $a = 4$ cm, $c = 8{,}5$ cm; změřte b, α.

V následujících cvičeních 579 až 584 si pokaždé napřed udělejte malý obrazec od ruky, který vám pomůže při přemýšlení o postupu práce.

579. Sestrojte euklidovsky čtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{AB} = 7$ cm; změřte $\overline{AC}$.
b) $\overline{AC} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

580. Sestrojte euklidovsky obdélník $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\overline{AD}$.
b) $\overline{BD} = 8$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\sphericalangle ASB = 37\frac{1}{2}°$; změřte strany.

581. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno:

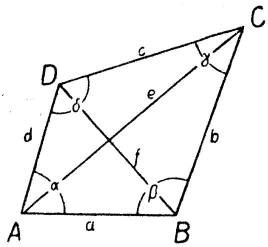
a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
b) $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 8$ cm; změřte $\overline{BC}$.
c) $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BD} = 12$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\sphericalangle ASB = 60°$; změřte strany.

582. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{BD} = 7$ cm, $\sphericalangle ABC = 40°$; změřte $\overline{AC}$.
b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
c) $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BD} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

583. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ podle daných údajů. AB a CD jsou základny.

a) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm, $\overline{DA} = 3\frac{1}{2}$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm, $\overline{DA} = 4$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
c) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 5$ cm, $\sphericalangle BAD = 72°$, $\sphericalangle ABC = 40°$; změřte $\overline{BC}$.
d) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{CD} = 7$ cm, $\sphericalangle BAD = 130°$, $\sphericalangle ABC = 70°$; změřte $\overline{AD}$.



Obr. 253.

584. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$ podle daných údajů. Označení stran, úhlů a úhlopříček jako v obr. 253.

a) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm, $d = 10$ cm, $\beta = 105°$; změřte e a f;

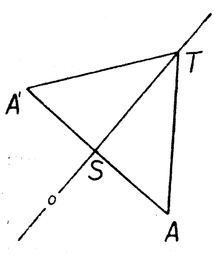
b) $a = 82$ mm, $b = 56$ mm, $c = 42$ mm, $f = 93$ mm, $\alpha = 70°$; změřte d a e.

c) $c = 9$ cm, $d = 3{,}2$ cm, $f = 10{,}6$ cm, $\gamma = 85°$, $\delta = 124°$; změřte a a b.

§ 37. Souměrnost osová a souměrnost středová.

O souměrnosti osové jsme již mluvili ve druhé části této učebnice (viz § 26). Tato souměrnost je určena přímkou o, která se jmenuje **osa souměrnosti.** K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdružený,** překlopíme-li původní útvar kolem osy o. Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému.

Je-li A libovolný bod, nazveme pro krátkost **obrazem** bodu A a označíme A' (což čteme A s čárkou) bod souměrně sdružený s bodem A. Leží-li bod A na ose o, splyne s bodem A'; proto říkáme, že každý bod na ose o je **bod samodružný.** Je-li A libovolný bod, pak obraz A'' jeho obrazu A' splyne s původním bodem A.



Obr. 254.

Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho obraz, tu je nám známo z § 26, že střed S úsečky AA' leží na ose o a že je $o \perp AA'$. Víme-li, že při osové souměrnosti se nemění ani délky úseček ani velikosti úhlů, můžeme si tuto základní vlastnost osové souměrnosti odvoditi takto (viz obr. 254): Zvolme si na ose o libovolný bod T. Vznikne nám trojúhelník $AA'T$. Protože přímka o je souměrně sdružena sama s sebou, protože mimoto se stranou AT našeho trojúhelníka je sdružena strana $A'T$ a protože při souměrnosti se velikosti úhlů nemění, je úhel osy o se stranou AT rovný úhlu osy o se stranou $A'T$ neboli o půlí $\sphericalangle ATA'$. Z toho následuje, že přímka o vedená vrcholem trojúhelníka $AA'T$ vnikne dovnitř tohoto trojúhelníka a proto musí protnouti protější stranu, t. j. úsečku AA'. Označme si S průsečík úsečky AA' s osou o. S trojúhelníkem AST je souměrně sdružený trojúhelník $A'ST$, takže

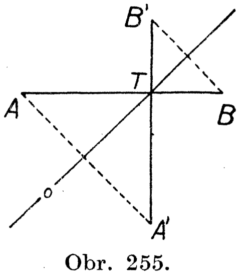
$$AST \cong A'ST;$$

z této shodnosti plyne předně, že $\overline{AS} = \overline{A'S}$, což je prvá z věcí, které jsme měli dokázati; za druhé plyne z téže shodnosti, že úhly $\sphericalangle AST$ a $\sphericalangle A'ST$ jsou si rovny; protože to jsou úhly vedlejší, jsou tedy pravé a to je druhá z věcí, které jsme měli dokázati.

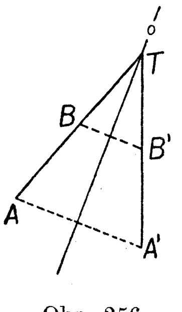
Vycházejíce z výše vyslovené základní vlastnosti osové souměrnosti, můžeme snadno dokázati, že při osové souměrnosti se délky úseček nemění. Všimněme si nejprve takové úsečky AT, jejíž jeden krajní bod T leží na ose o. Máme zase obr. 254, ve kterém nyní víme, že úhly při vrcholu S jsou pravé a že $\overline{AS} = \overline{A'S}$; dokázati máme, že $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Protože $\overline{ST} = \overline{ST}$, $\overline{AS} = \overline{A'S}$, $\sphericalangle AST = \sphericalangle A'ST$, jest

$$AST \cong A'ST$$

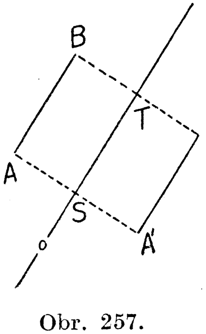
a z toho plyne $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Všimneme-li si nyní libovolné úsečky AB, rozeznáváme tři případy. Předně může úsečka AB protnouti osu o v bodě, který si označíme T (viz obr. 255); za druhé může prodloužení úsečky AB — třeba za bod B — protnouti osu o v bodě, který zase si označíme T (viz obr. 256); za třetí může býti $AB \parallel o$ (viz obr. 257). V případě obr. 255 víme, že



Obr. 255.



Obr. 256.



Obr. 257.

$$\overline{AT} = \overline{A'T}$$

a podobně také

$$\overline{TB} = \overline{TB'};$$

mimoto je

$$\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB},$$

$$\overline{A'B'} = \overline{A'T} + \overline{TB'},$$

takže musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

V případě obr. 256 zase je

$$\overline{AT} = \overline{A'T}, \quad \overline{BT} = \overline{B'T};$$

mimoto je v tomto případě

$$\overline{AB} = \overline{AT} - \overline{BT}; \quad \overline{A'B'} = \overline{A'T} - \overline{B'T},$$

takže zase musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Konečně v případě obr. 257 si označme S střed úsečky AA' a T střed úsečky BB'. Víme, že obě přímky ASA', BTB' jsou kolmé na o, takže jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy je $AS \parallel BT$; mimoto však víme, že je také $AB \parallel ST$. Tedy čtyrúhelník $ABTS$ je rovnoběžník. (Je to dokonce obdélník, ale na tom nám už nezáleží.) Víme, že u rovnoběžníka protější strany jsou si rovny. Tedy je $\overline{AS} = \overline{BT}$. Avšak $\overline{A'S} = \overline{AS}$, $\overline{B'T} = \overline{BT}$, takže musí býti také $\overline{A'S} = \overline{B'T}$. Tedy čtyrúhelník $A'B'TS$ má dvě protější strany $A'S$ a $B'T$ sobě rovné; protože také víme, že ty strany jsou rovnoběžné, je $A'B'TS$ rovnoběžník stejně jako $ABTS$. Z rovnoběžníka $ABTS$ soudíme, že $\overline{AB} = \overline{TS}$; z rovnoběžníka $A'B'TS$ soudíme, že $\overline{TS} = \overline{A'B'}$; proto je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Jako jsme dokázali pomocí shodných trojúhelníků, že při souměrnosti osové se nemění délky úseček, podobně také bychom mohli dokázati, že při souměrnosti osové se nemění ani velikosti úhlů. Zase bychom musili rozeznávati různé případy. Ale je jednodušší usuzovati takto. Budiž dán libovolný úhel $\sphericalangle ABC$. (Zvolili jsme si libovolně bod A na jednom rameni a bod C na druhém.) Sestrojíme si trojúhelník ABC i trojúhelník souměrně sdružený $A'B'C'$. Víme, že

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Proto je

$$ABC \cong A'B'C' \quad \text{(sss)}$$

a z toho plyne $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, což jsme měli dokázati.

Od osové souměrnosti se liší **souměrnost středová.**. Tato souměrnost je určena bodem S, který se jmenuje **střed souměrnosti.** K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdru-**

žený, otočíme-li původní útvar kolem bodu S o 180°. Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne zase, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému. Při středové souměrnosti máme zřejmě jen jediný **samodružný bod**, který?

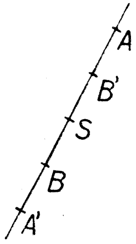
Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho **obraz** (t. j. zase bod souměrně sdružený), jest $\sphericalangle ASA' = 180^\circ$ a z toho následuje, že bod S leží na úsečce AA'. Protože $\overline{AS} = \overline{A'S}$, máme základní vlastnost středové souměrnosti: Obraz A' libovolného bodu A dostaneme, prodloužíme-li úsečku AS za bod S a naneseme-li $\overline{SA'} = \overline{AS}$.

Vycházejíce zase ze základní vlastnosti středové souměrnosti, dokážeme si pomocí pouček nám známých, že dvě úsečky souměrně sdružené jsou stejně dlouhé. Pro úsečku AS, jejíž jeden krajní bod je S, je zřejmé, že $\overline{AS} = \overline{A'S}$. Všimněme si za druhé takové úsečky AB, uvnitř které je bod S (viz obr. 258). Víme, že

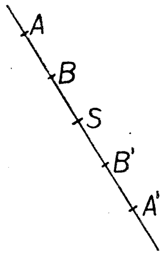
$$\overline{AS} = \overline{A'S}, \quad \overline{BS} = \overline{B'S}.$$

Protože však je

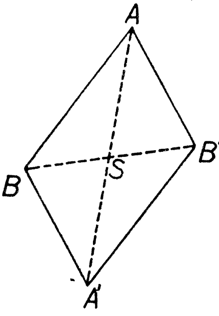
$$\overline{AB} = \overline{AS} + \overline{BS},$$
$$\overline{A'B'} = \overline{A'S} + \overline{B'S},$$



Obr. 258.



Obr. 259.



Obr. 260.

musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Podobně usuzujeme v tom případě, když bod S leží na prodloužení úsečky AB (viz obr. 259). Proveďte úsudek sami! Zbývá případ, kdy bod S neleží na přímce AB (viz obr. 260). V tomto případě si všimněme čtyrúhelníka $ABA'B'$. Bod S je průsečík jeho úhlopříček. Protože

$$\overline{AS} = \overline{A'S}, \quad \overline{BS} = \overline{B'S},$$

úhlopříčky se navzájem půlí, takže $ABA'B'$ je rovnoběžník. Protože protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, jest $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, jak jsme měli dokázati.

Jakmile máme dokázáno, že při středové souměrnosti se nemění délky úseček, soudíme stejně jako při souměrnosti osové, že se nemění ani velikosti úhlů.

Z obr. 258 až 260 plyne také jiná důležitá vlastnost středové souměrnosti: Je-li AB libovolná přímka, pak přímka $A'B'$ souměrně sdružená buďto s ní splyne **(samodružná přímka)** nebo je s ní rovnoběžná.

Cvičení k § 37.

585. Zvolte si (nepravidelný) pětiúhelník $ABCDE$ a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvolené osy. Proveďte to třikrát. Osu souměrnosti volte poprvé tak, aby ležela celá vně pětiúhelníka, podruhé tak, aby obsahovala jednu stranu, potřetí tak, aby protínala strany AB a CD.

586. Zvolte si zase (nepravidelný) pětiúhelník a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvoleného středu. Proveďte to zase třikrát. Střed souměrnosti volte poprvé vně pětiúhelníka, podruhé na obvodě (asi ve třetině jedné strany), potřetí uvnitř.

587. Jaký tvar musí míti trojúhelník, aby byl osově souměrný? Kolik os souměrnosti má rovnostranný trojúhelník? Může býti trojúhelník středově souměrný?

588. Jaký tvar musí míti čtyrúhelník, aby byl osově souměrný? Středově souměrný? (Jsou dva druhy osově souměrných čtyrúhelníků!)

589. Má-li nějaký geometrický útvar dvě k sobě kolmé osy souměrnosti, musí míti také střed souměrnosti. Dokažte!

590. Dokažte, že pravidelný n-úhelník má n os souměrnosti. Kudy procházejí? Zkoumejte napřed případy $n = 3, 4, 5, 6$, potom se pokuste usuzovati obecně. Musíte rozeznávati dva případy podle toho, zda číslo n je liché či sudé.

§ 38. Geometrická místa.

Pozorujeme-li hrot vteřinové ručičky u hodinek, vidíme, že jeho poloha se stále mění; všecky tyto polohy dohromady tvoří kružnici, kterou hrot proběhne celou za každou minutu. Říkáme, že ta kružnice je geometrické místo hrotu vteřinové ručičky. Když řekneme, že nějaká čára je geometrickým místem bodu, jehož poloha je podrobena předepsaným podmínkám, rozumíme tím, že dvě věci jsou splněny zároveň:

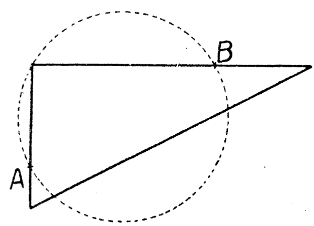
[1] Každý bod na té čáře vyhovuje daným podmínkám.

[2] Každý bod, který daným podmínkám vyhovuje, musí ležeti na té čáře.

V předcházejícím příkladě geometrickým místem byla celá kružnice, v následujícím příkladě geometrickým místem je jen část kružnice. Dejme tomu, že okno se dá otevřít do úhlu 110°, ale ne více. Jaké je geometrické místo určitého bodu na okně? Je to zřejmě oblouk kružnice a poloměry v krajních bodech toho oblouku svírají úhel 110°.

Tvar geometrického místa se někdy nejsnáze určí, když si napřed vyznačíme několik možných poloh proměnného bodu a potom se snažíme uhodnouti tvar celého geometrického místa. Na konec se musí dokázat, že jsme uhodli správně; ale někdy je těžší objevit, jak geometrické místo vypadá, než dokázat správnost výsledku, který jsme uhodli z názoru.

Příklad na pokusné určení geometrického místa (viz obr. 261). A a B jsou dva dané body. Jaké je geometrické místo vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno prochází bodem A a druhé bodem B? Umístěte různými způsoby trojúhelníkové pravítko tak, aby jedno rameno pravého úhlu na pravítku procházelo bodem A a druhé bodem B a pokaždé píchněte špendlíkem do papíru na místě, kde je vrchol pravého úhlu. Dostanete řadu bodů, z nichž je jasně vidět, že geometrické místo je kružnice nad průměrem AB. To platí ovšem jen tehdy, když všecky polohy pravého úhlu leží v pevné rovině. Geometrickým místem bez tohoto omezení je kulová plocha.



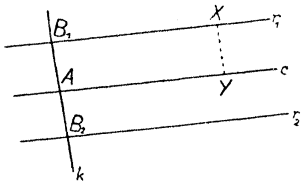
Obr. 261.

Některá geometrická místa jsou velmi důležitá. Omezíme se na geometrická místa v rovině. Geometrické místo bodu X, jehož vzdálenost od daného bodu A se rovná dané délce r, je kružnice o středu A a poloměru r. To je ovšem samozřejmé.

Geometrické místo bodu X, jehož vzdálenost od dané přímky c se rovná dané délce v, se skládá ze dvou rovnoběžek r_1 a r_2 k přímce c. (Viz obr. 262.) Zvolme si určitý bod A na přímce c

a vztyčme v bodě A kolmici k k přímce c. Na přímce k si určeme body B_1, B_2 (každý na jedné straně od přímky c), pro které platí

$$\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = v.$$

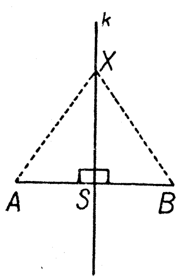


Obr. 262.

Veďme bodem B_1 rovnoběžku r_1 a bodem B_2 rovnoběžku r_2 k přímce c. Máme dokázati, že hledané geometrické místo se skládá z obou přímek r_1 a r_2. Takový důkaz se musí skládati ze dvou částí: předně se musí ukázati, že když bod X leží na některé z přímek r_1 a r_2, jeho vzdálenost od přímky c je rovná v; za druhé se musí dokázati, že když obráceně bod X má od přímky c vzdálenost rovnou v, musí X ležeti buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2.

Prvá část důkazu: Budiž X bod, který leží třeba na přímce r_1. Spusťme s bodu X kolmici na přímku c a označme Y patu této kolmice; máme dokázati, že $\overline{XY} = v$. Všimneme si čtyrúhelníka AB_1XY. Protože přímky AB_1 a YX jsou obě kolmé na přímku c, jsou mezi sebou rovnoběžné; také přímky AY a B_1X jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy AB_1XY je rovnoběžník a AB_1, XY jsou jeho protější strany. Proto je $\overline{XY} = \overline{AB_1}$ neboli $\overline{XY} = v$.

Druhá část důkazu. Budiž X bod takový, že $\overline{XY} = v$, kde Y znamená patu kolmice spuštěné s bodu X na přímku c. Máme dokázati, že X leží buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2. Na té straně od přímky c, na které leží bod X, leží jeden z bodů B_1 a B_2; budiž to na př. bod B_1. Dokážeme, že $B_1X \parallel c$; to právě znamená, že X leží na přímce r_1. Všimneme si zase čtyrúhelníka AB_1XY. Protože $AB_1 \perp c$, $YX \perp c$, jest $AB_1 \parallel YX$; protože $\overline{AB_1} = v$, $\overline{YX} = v$, jest $\overline{AB_1} = \overline{YX}$. Proto AB_1XY je rovnoběžník a z toho následuje $B_1X \parallel AY$ neboli $B_1X \parallel c$.



Obr. 263.

Geometrické místo bodu X stejně vzdáleného od daného bodu A jako od daného bodu B je kolmice k vztyčená k přímce AB ve středu S úsečky AB (neboli osa úsečky AB). (Viz obr. 263.) Důkaz se skládá zase ze dvou částí.

Prvá část. Budiž X bod na přímce k. Máme dokázati, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Všimneme si trojúhelníků ASX

a BSX se společnou stranou SX. Protože S je střed úsečky AB, je $\overline{AS} = \overline{BS}$; mimoto je $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$ (úhly pravé). Proto je

$$ASX \cong BSX \quad \text{(sus)}$$

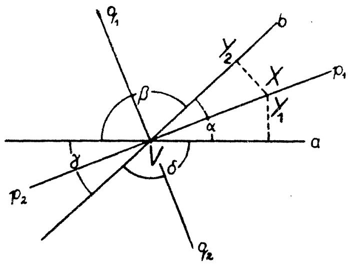
a z toho následuje $\overline{AX} = \overline{BX}$.

Druhá část. Budiž X bod takový, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Máme dokázati, že bod X leží na přímce k neboli, že $\sphericalangle ASX = R$. Zase si všimneme trojúhelníků ASX a BSX. Nyní víme, že

$$ASX \cong BSX \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$. Tedy úhel $\sphericalangle ASX$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle ASX = R$.

V obr. 264 máme dvě různoběžky a, b, které se protínají v bodě V. Každá z těchto dvou přímek je bodem V rozdělena na dvě polopřímky



Obr. 264.

a proto vznikají čtyři úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s vrcholem V. V obr. 264 máme ještě čtyři polopřímky p_1, q_1, p_2, q_2, z nichž každá je osou jednoho z úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Úhly α a β jsou vedlejší, takže $\alpha + \beta = 2R$. Proto je

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = R;$$

ale $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ je právě úhel s rameny p_1 a q_1; proto je tento úhel pravý. Ježto také $\beta + \gamma = 2R$, dojdeme stejně k výsledku, že úhel s rameny q_1 a p_2 je pravý. Proto úhel s rameny p_1 a p_2 je přímý, takže polopřímky p_1 a p_2 dohromady vyplní přímku p. Podobně se dokáže, že polopřímky q_1 a q_2 dohromady vyplní přímku q. Jest

$$p \perp q,$$

neboť už jsme si všimli, že úhel s rameny p_1 a q_1 je pravý. Obě přímky p a q nazveme osami různoběžek a a b; tyto dvě osy tedy stojí na sobě kolmo a půlí úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Geometrické místo bodu X, stejně vzdáleného ode dvou různoběžek a, b, se skládá ze dvou přímek, totiž z obou os různoběžek a, b. Důkaz má zase dvě části.

První část. Budiž X bod na jedné z přímek p, q, třeba na polopřímce p_1. Máme dokázati, že $\overline{XY_1} = \overline{XY_2}$, kde Y_1 je pata kolmice spuštěné s bodu X na přímku a a Y_2 je pata kolmice spuštěné s bodu X na polopřímku b. Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX. Protože polopřímka VX je osou úhlu α, je $\sphericalangle Y_1VX = \sphericalangle Y_2VX$; mimoto je $\sphericalangle VY_1X = \sphericalangle VY_2X$. Proto je

$$VXY_1 \cong VXY_2 \quad \text{(suu)}$$

a z toho následuje $\overline{XY_1} = \overline{XY_2}$.

Druhá část. Budiž X bod stejně vzdálený od přímky a jako od přímky b; máme dokázati, že X leží buďto na přímce p nebo na přímce q. Bod X leží uvnitř některého ze čtyř úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; třeba uvnitř úhlu α. S bodu X spustíme kolmice na přímky a, b a označíme Y_1, Y_2 jejich paty. Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX. Protože X je stejně vzdálen od přímky a jako od přímky b, je $\overline{XY_1} = \overline{XY_2}$. Mimoto $\sphericalangle VY_1X = R$, $\sphericalangle VY_2X = R$. Tedy VXY_1 a VXY_2 jsou pravoúhlé trojúhelníky, které se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, tedy ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich. Proto je

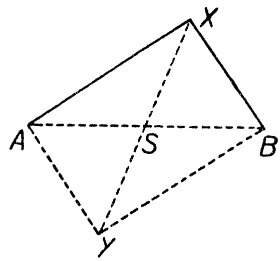
$$VXY_1 \cong VXY_2$$

a z toho následuje $\sphericalangle Y_1VX = \sphericalangle Y_2VX$, takže X leží na ose p_1 úhlu α.

Buďtež A, B dva dané body. Geometrické místo bodu X, pro který $\sphericalangle AXB$ je úhel pravý, je kružnice k nad průměrem AB.

První část. Leží-li X na kružnici k, je $\sphericalangle AXB = R$ podle Thaletovy věty.

Druhá část. Budiž $\sphericalangle AXB = R$. Máme dokázati (viz obr. 265), že $\overline{SX} = \overline{SA}$, kde S je střed úsečky AB. V bodě A vztyčme kolmici k přímce AX a v bodě B vztyčme kolmici k přímce BX; ty dvě kolmice se protnou v bodě Y. Čtyrúhelník $AXBY$ má při vrcholu A, při vrcholu X a při vrcholu B pravý úhel; protože součet úhlů čtyrúhelníka je $4R$, je také zbývající úhel čtyrúhelníka $AXBY$ pravý; tedy je to obdélník. Protože úhlopříčky obdélníka jsou si rovny, je $\overline{XY} = \overline{AB}$.



Obr. 265.

Protože úhlopříčky obdélníka (jako každého rovnoběžníka) se půlí, prochází přímka XY středem S úhlopříčky AB. Mimoto $\overline{SX}$ je polovina z $\overline{XY}$, $\overline{SA}$ je polovina z $\overline{AB}$; protože $\overline{XY} = \overline{AB}$, je $\overline{SX} = \overline{SA}$.

Cvičení k § 38.

Ve cvič. 591 až 596 máte popsati ústně geometrické místo, jehož tvar je patrný z názoru.

591. Malý předmět, který pustíte z ruky na zem.

592. Špička nosu dítěte na houpačce.

593. Střed kola vozu, který jede po rovné silnici.

594. Vrchol pravého úhlu trojúhelníkového pravítka, které otáčíte kolem přepony.

595. Nejnižší bod kyvadla u hodin.

596. Člověk, který kráčí od určitého místa k severozápadu.

597. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od daného bodu A. Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

598. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od dané přímky a. Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

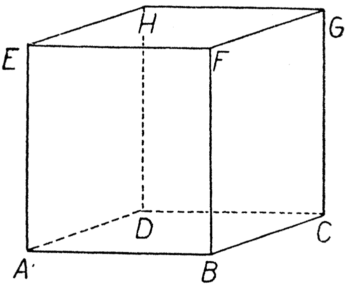
599. Kružnice s pevným poloměrem r a s proměnným středem S se pohybuje tak, že stále prochází daným bodem A. Jaké je geometrické místo bodu S

a) v rovině? b) v prostoru?

600. Kus drátu ABC je ohnut do pravého úhlu v bodě B. Poloha bodu A je pevná. Jaké je geometrické místo bodu C?

601. Čtyři spojené tyčky mají tvar rovnoběžníka $HKLM$. Poloha tyčky HK je pevná; tyčka HM se může otáčeti kolem bodu H; tyčka KL se může otáčeti kolem bodu K. Na tyčce LM je vyznačen určitý bod X. Jaké je geometrické místo bodu X? [Všimněte si toho bodu P na straně HK, pro který je $PX \parallel HM$.]

602. ABC je daný trojúhelník; k je daná kružnice se středem A. $BAFG$, $CBGH$ jsou proměnné rovnoběžníky. Bod F leží stále na kružnici k. Jaké je geometrické místo bodu H?

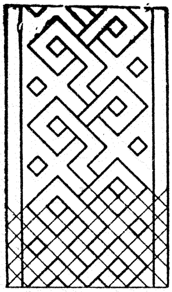


Obr. 266.

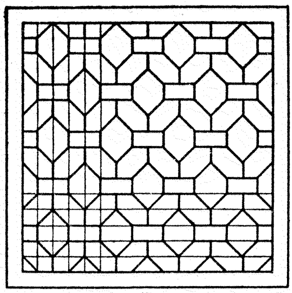
603. Obr. 266 znázorňuje dřevěnou bednu spočívající na vodorovné půdě. Z původní polohy znázorněné obrazcem, ve které dolní podstavou je $ABCD$, se bedna překlopí podél hrany BC do druhé polohy, ve které dolní podstavou je $BCGF$. Potom se bedna překlopí znovu, tentokráte podél hrany FG, do třetí polohy, ve které je dolní podstavou $FGHE$. Potom se bedna překlopí ještě jednou podél hrany EH do konečné polohy, ve které dolní podstavou je $EHDA$. Narýsujte geometrické místo bodu A.

604. KL je pevná úsečka délky 3 cm. Určete geometrické místo bodu X, jehož nejkratší vzdálenost od úsečky KL je 1 cm:

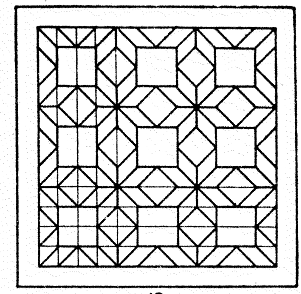
a) v rovině, b) v prostoru.



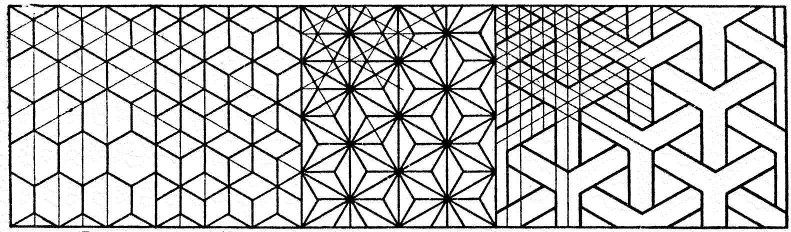
14



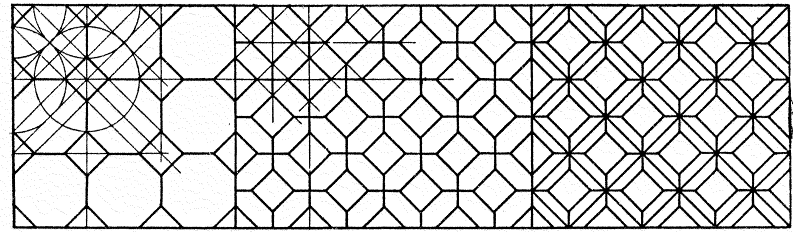
15



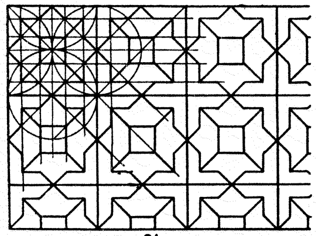
16



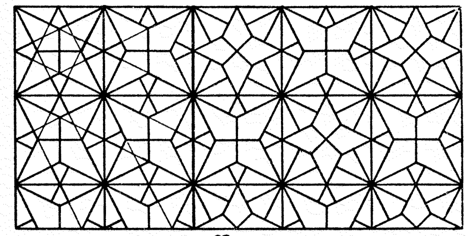
17 18 19 20



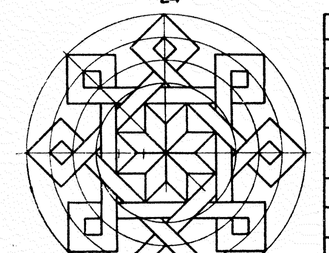
21 22 23



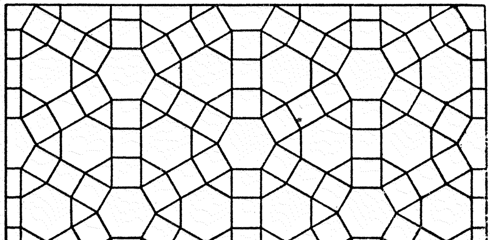
24



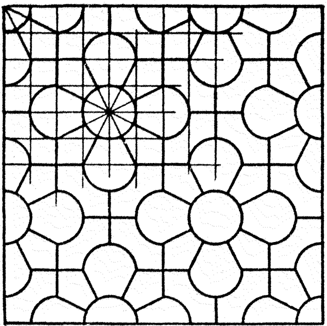
25



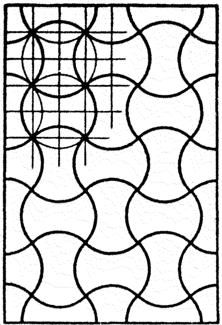
26



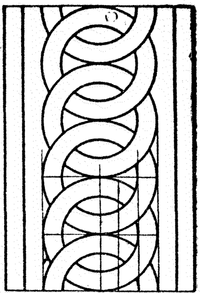
27



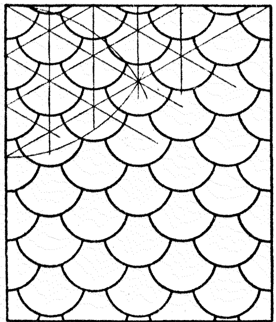
28



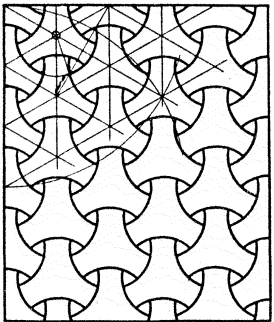
29



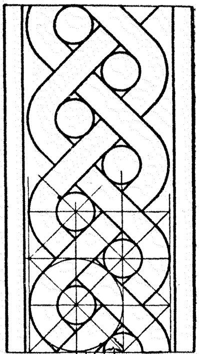
30



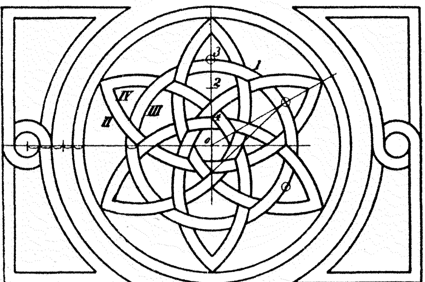
31



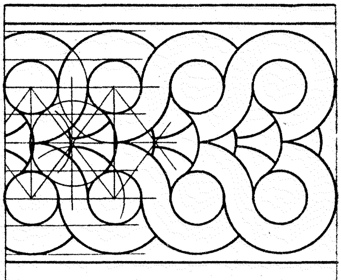
32



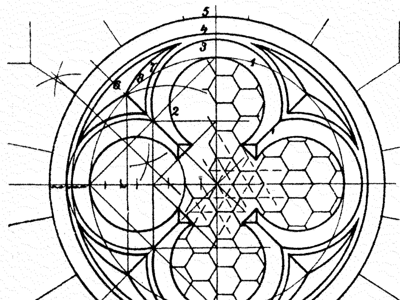
33



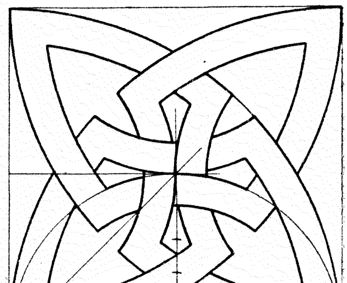
34



35



36



37

OBSAH