Pavla Pavlíková
Život a dílo Miloše Kösslera

Disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2004, 261 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501322

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Pavla Pavlíková

Život a dílo Miloše Kösslera

2004

Vedoucí disertační práce: Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.

Studijní obor: Obecné otázky matematiky a informatiky (m8)

Úvodní slovo

Náplní této práce je stručný přehled života a díla Miloše Kösslera (1884–1961), profesora matematiky působícího na Univerzitě Karlově, jehož jméno bylo do dnešní doby téměř zapomenuto, ačkoli byl jednou z významných postav naší matematiky 20. století. Stejně jako během života, i po své smrti zůstával však ve stínu svých slavnějších kolegů Karla Petra, Vojtěcha Jarníka, Bohumila Bydžovského a dalších.

Práce volně navazuje na publikace věnované významným osobnostem působícím na poli matematiky na českých vysokých školách v novodobé historii - na monografie *František Josef Studnička (1836–1903)*, *Eduard Weyr (1852–1903)*, *Jan Vilém Pexider (1874–1914)* a *Karel Rychlík (1885–1968)*, a na diplomové práce *Život a dílo Karla Petra* a *Život a dílo Jana Sobotky*, jež jsou podrobněji citovány v seznamu literatury uvedeném v závěru první kapitoly.

Následující text je rozdělen celkem do sedmi kapitol a obrazových příloh, přičemž v rámci každé kapitoly je v jejím závěru uveden přehled použitých zdrojů. Citované pasáže jsou uváděné doslovně a včetně původního pravopisu; pro lepší odlišení od ostatního textu jsou tištěné *italikou*. Dále u jmen, která jsou v rámci celé práce zmíněná poprvé, je pro zvýraznění použit odlišný typ písma - kapitálky. Vzhledem ke svému charakteru jsou všechny poznámky rozděleny do dvou skupin - odkazy historické či bibliografické povahy jsou uváděny v závěru příslušných kapitol, oproti poznámkám matematickým, jež jsou plynule začleněny v průběhu textu pod čarou.

První kapitola popisuje životní osudy Miloše Kösslera, jeho rodinné zázemí, dobu studia na gymnáziu a na univerzitě, hledání zaměstnání, působení na univerzitě i v různých spolcích a organizacích (především v Jednotě českých matematiků a fyziků), stručně komentuje jeho postoje v době druhé světové války i po nástupu komunistického režimu, dále obsahuje úryvky ze vzpomínek jeho studentů a kolegů.

Druhá kapitola je zaměřena na stručnou charakteristiku Kösslerova díla – rozdělení jeho vědeckých prací do dvou ústředních skupin zájmu, zhodnocení výjimečných prací vyčnívajících z tohoto dělení, přehled článků věnovaných problematice analytických funkcí s krátkým komentářem, a dále rozdělení jeho statí věnovaných teorii čísel na práce ležící na rozhraní mezi teorií čísel a teorií funkcí a na práce vysloveně číselně-teoretického charakteru.

Třetí kapitola obsahuje podrobný rozbor Kösslerových statí z elementární teorie čísel, s drobnými historickými poznámkami, jejichž cílem bylo zařadit jednotlivé články do kontextu ve vývoji daných problémů. Čtvrtá kapitola analogickým způsobem mapuje práce z rozhraní teorie čísel a analytických funkcí, se zvláštním zřetelem k Riemannově funkci $\zeta(s)$.

Pátá kapitola hodnotí Kösslerovy učební texty – knihu *Úvod do počtu diferenciálního* a rovněž tiskem nevydaný studijní materiál *Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné*, jež Kössler psal pro své studenty na přírodovědecké fakultě. Důraz je kladen na neobvyklý způsob zavedení reálných čísel v prvně jmenované práci.

Rozsáhlá šestá kapitola si klade za cíl zmapovat obsah deníků z pozůstalosti Miloše Kösslera, do nichž si zapisoval své matematické nápady i drobné osobní komentáře a filosofické úvahy. Partie věnované teorii čísel jsou uvedeny v původní podobě tak, jak je sám Miloš Kössler zapsal, a umožňují nám tak nahlédnout přímo do jeho myšlenek, včetně dosud nepublikovaných nápadů.

Poslední, sedmou kapitolu tvoří faktografické přílohy – seznam Kösslerových statí včetně jejich recenzí uveřejněných v referativních časopisech, seznam přednášek, které Kössler vedl na Univerzitě Karlově v letech 1921–1956, a seznam disertací, které posuzoval. Pro lepší rozlišení Kösslerových prací od ostatní citované literatury je v celé práci použito značení [Kx] podle seznamu uvedeného v poslední kapitole.

Závěrem svého úvodního slova bych ráda poděkovala svému školiteli, Doc. RNDr. Mirko Rokytovi, CSc., za pomoc při dokončování této práce; Doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc., za cenné náměty a připomínky; dále -in memoriam- Prof. RNDr. Břetislavu Novákovi, DrSc., za podporu a velké množství rad, jež dávaly mé práci správný směr; panu Miloši Kösslerovi, vnukovi profesora Kösslera za vstřícnost při poskytnutí deníků a fotografií z pozůstalosti; Prof. RNDr. Michalu Křížkovi, DrSc., za poskytnutí materiálu z rodinného archivu použitého v obrazové příloze (Obr. č. 11); pracovníkům knihovny matematicko-fyzikální fakulty, Archivu Univerzity Karlovy, Archivu hl. města Prahy, Archivu Akademie věd České republiky, Státního ústředního archivu v Praze a Státního oblastního archivu v Praze za pomoc při dohledávání archiválií. V neposlední řadě bych ráda poděkovala svým blízkým za pochopení v době, kdy jsem tuto práci psala.

Prohlašuji, že jsem předloženou disertační práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Praze v říjnu 2004 Pavla Pavlíková

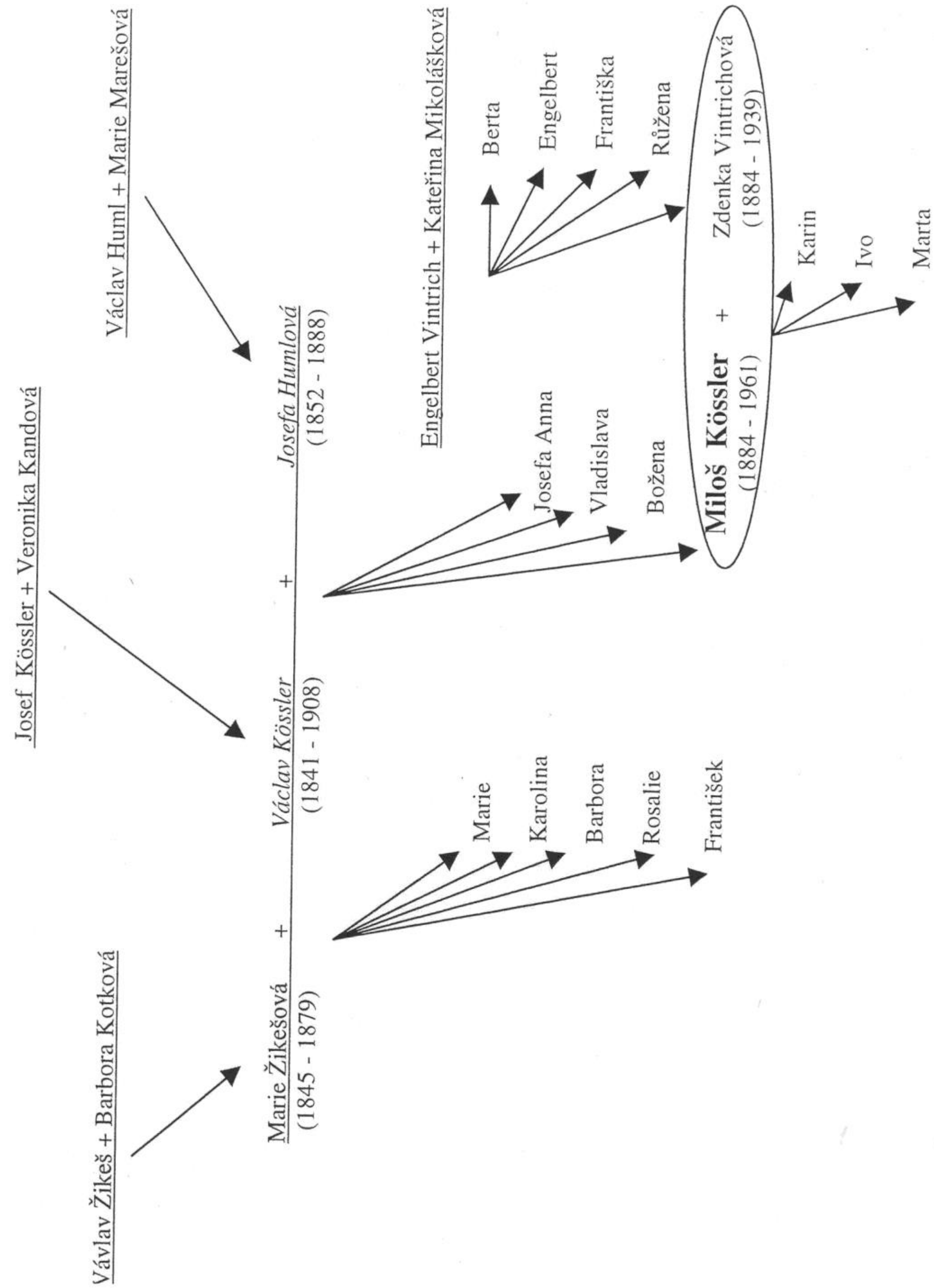
Obsah

Kapitola 1.
Životní osudy Miloše Kösslera

1.1. Stručný běh života

19. 6. 1884	narozen v Praze
1890–1895	obecná škola
1895–1903	studium na Akademickém gymnáziu v Praze
1903–1907	studium na filosofické fakultě Karlovy univerzity
1908	zkoušky učitelské způsobilosti
1908–1909	zkušební rok na Akademickém gymnáziu v Praze
1910–1911	suplentem na gymnáziu v Domažlicích
1911	svatba se Zdeňkou Vintrichovou
1911–1918	suplentem na gymnáziu v Praze na Vinohradech
1918	skutečným profesorem na gymnáziu na Vinohradech
	doktorem filosofických věd
1920	profesorem ad personam na gymnáziu na Vinohradech
	soukromým docentem na přírodovědecké fakultě
1922	mimořádným profesorem na přírodovědecké fakultě
1924	účast na Mezinárodním matematickém kongresu v Torontu
1927	řádným profesorem na přírodovědecké fakultě
1935–1936	děkanem přírodovědecké fakulty
1939–1943	předsedou Jednoty českých matematiků a fyziků
1940	nucený odchod na dovolenou s čekatelným
1944–1949	hlavním tajemníkem Královské české společnosti nauk
1945	návrat na přírodovědeckou fakultu
1953	členem korespondentem ČSAV
1956	doktorem věd fyzikálně-matematických
1957–1958	vědeckým pracovníkem Matematického ústavu UK
8. 2. 1961	zemřel v Praze

Miloš Kössler



Rodinný strom Kösslerovy rodiny

1.2. Životní osudy Miloše Kösslera

„Když už člověk jednou je,
tak má koukat, aby byl.
A když kouká, aby byl,
a je, tak má být to, co je,
a nemá být to, co není,
jak tomu v mnoha případech je.“

Jan Werich

Nahlédneme-li do knihy [Malá československá encyklopedie, str. 553], najdeme pod heslem Kössler Miloš malou podobiznu s následujícím stručným textem:

Kössler Miloš, 19. 6. 1884 – 8. 2. 1961, č. matematik; prof. UK, člen kor. ČSAV (1953). Pracoval zejm. v teorii analytických funkcí a v teorii čísel. Autor učebnice diferenciálního počtu.

Jen pár slov však nemůže vystihnout podstatu lidského života. Podívejme se proto nyní podrobněji na to, jaký Miloš Kössler byl a jak žil ...

Rodina

Miloš Kössler se narodil dne 19. června 1884 v Praze I. Při křtu dne 1. července 1884 v kostele sv. Haštala přijal druhé jméno Václav.[1]) Vyrůstal ve velmi chudých poměrech.

Jeho otec Václav Kössler, syn pražského tiskaře Josefa Kösslera a Veroniky Kösslerové, rozené Kandové, narozen 26. září 1841, byl vyučen řeznickým pomocníkem.[2]) Později pracoval v Branickém pivovaru v Praze I., č. p. 728 zprvu jako vedoucí hostince „U Petráčků“ v Dlouhé třídě v Praze, později pouze jako podsudní a povozník. Poprvé se oženil 12. ledna 1864; v kostele u sv. Haštala[3]) pojal za manželku Marii Žikešovou (11. 1. 1845–23. 7. 1879), dceru hostinského Václava Žikeše a jeho ženy Barbory, rozené Kotkové. Když Marie v létě 1879 náhle zemřela,[4]) zůstaly Kösslerovi na starosti čtyři děti – dcery Marie (16 let), Karolina Barbora Veronika (15 let), Rosalie (3 roky) a syn František (5 let). Další dcera Barbora Veronika Karolina (19. 5. 1865–18. 11. 1866) zemřela již jako dítě.[5])

O tři roky později se Václav Kössler znovu oženil – dne 23. května 1882 byl u sv. Haštala[6]) oddán s Josefou Humlovou (29. 2. 1852–2. 11. 1888) ze Švabína u Zbiroha, dcerou Václava Humla, měšťana a mistra bednářského a Marie, rozené Marešové, z Jíloviště. Se svou druhou manželkou měl čtyři potomky,[7]) avšak dvě dcery zemřely krátce po narození. Josefa Anna zemřela 21. března 1883 ve věku pouhých 7 dnů na psotník, Vladislava zemřela 10. května 1886 dva dny po narození na pneumonii. Dospělosti se dožil pouze syn **Miloš Kössler** a dcera Božena (1888–1945)[8]), provdaná Röttlingová, jejíž narození však stálo Josefu Kösslerovou život – zemřela po pouhých šesti letech manželství na horečku omladnic.[9]) Malý Miloš tak od raného dětství vyrůstal bez matky. Sám Miloš Kössler později ve svém vlastním stručném životopisu[10]) uvedl, že si na matku vůbec nepamatuje a stejně tak se vůbec nezmiňoval o svých nevlastních sourozencích ani o případných matčiných sourozencích. Vzpomínal pouze na otcova bratra Josefa Kösslera, pracujícího jako dozorce při náplavkách hlavního města Prahy, bytem v Praze I. – č.p. 799, U obecního dvora. Není bez zajímavosti, že Miloš ve svých vzpomínkách poznamenal, že strýc zemřel během jeho dětství, ačkoli úmrtní zápis z C.k. všeobecné nemocnice dokazuje datum jeho smrti 1. února 1910 – tedy dobu, kdy bylo Miloši Kösslerovi již 26 let. Josef Kössler po sobě zanechal své ženě Johanně dospělé syny Václava a Josefa, nezletilé Františka a Vítězslava, dcera Marie zemřela již v roce 1884.[11])

Samotný Václav Kössler, Milošův otec, ke konci života užíval chudinské podpory hlavního města Prahy a zemřel v roce 1908 v chudobě.

Studium na gymnáziu

Miloš Kössler vychodil pět let obecné školy. O otcovu živnost nejevil zájem, a tak se již tenkrát vydal dále svou vlastní cestou.

„Byl synem rodičů chudých, ale pražských, takže měl to štěstí, že vystudoval akademické gymnasium v Praze I, které, jak známo, vychovalo velkou řadu vynikajících příslušníků našeho národa.“ [Čech (1954), str. 374]

Měl skutečně štěstí, že mohl studovat na gymnáziu, mezi jehož stěnami v průběhu uplynulých staletí chodily osobnosti jako Bohuslav Balbín, Josef Jungmann, Josef Kajetán Tyl, Bedřich Smetana, Jan Neruda, Karel Čapek, … – na gymnáziu s historickou privilejí zápisu studentů nejvyšších tříd na pražskou univerzitu. Absolventi škol, na kterých se v té době nevyučovalo povinně latině, nemohli pokračovat ve studiu na univerzitě jako řádní studenti, dokud si nedoplnili zkoušku z latiny. Podobnými peripetiemi musel projít např. Vojtěch Jarník[12]). Kössler byl těchto problémů ušetřen.

Kromě tzv. „veřejných žáků“ patřil mezi Kösslerovy spolužáky i jeden privatista – Jan princ Lobkowicz. V té době však nastávala mezi studenty dosti velká fluktuace, takže se složení tříd i celkový počet studentů často měnil. Představu o tom, jak pilným byl Miloš Kössler studentem, si můžeme udělat při nahlédnutí do tabulek uvedených v rámci Obrazových příloh v závěru této práce, ve kterých jsou uvedeny jeho studijní výsledky během celé doby studia. Je patrné, že zatímco jazyky nepatřily mezi jeho nejsilnější předměty, známky z matematiky, filosofické propaedeutiky a fyziky zcela jasně prozrazovaly Kösslerův přírodovědný talent.

Při bližším pohledu na stav učitelského sboru zjistíme, že mezi Kösslerovy vyučující patřily osobnosti zvučných jmen. V primě jej vyučoval zeměpisu a dějepisu Zikmund Winter (1846–1912). Karel Pánek (1849–1904) učil Kösslera během studia střídavě německý jazyk, matematiku i fyziku, ze které jej později zkoušel u maturity. Na výuce matematiky a fyziky se dále kromě Pánka podíleli Antonín Jeřábek (1852–1915) a Jan Vojtěch (1879–1953), pozdější profesor geometrie na české technice v Praze a Brně. O vzory pro svou další dráhu tak Kössler neměl nouzi.

Maturita

Zastavme se nyní podrobněji u průběhu Kösslerovy maturitní zkoušky a pro zajímavost se podívejme na témata písemné části:[13])

a) *Překlad z latiny v jazyk český*
Vergil. Aen. XI., 182–219

b) *Překlad z češtiny do latiny*

Výprava Xerxova. Upraveno dle Starého věku od Kameníčka-Dvořáka, str. 111–113

c) *Překlad z řečtiny do češtiny*

Platon, Protagoras, kap. 6.

d) *Z jazyka českého*

„Ty, hochu, pracuj! Každým novým dílem
jsi vyšší o píď a těch pídí řada
se na obrovskou výši časem skládá,
a k hvězdám tebe sblíží.“ *Vrchlický, Perspektivy*

e) *Z matematiky*

1. $\sin 4x + 2\sin 3x + \sin 2x + \cos x + 1 = 0$
2. Dva kouty přímého trojbokého hranolu jsou určeny funkcemi: $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = 2$, $\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = 3$. Jak velký jest jeho povrch a krychlový obsah, lze-li do něho vepsati kouli o poloměru $\varrho = 10$ cm?
3. Deset členů arithmetické řady 1. stupně, jejíž veškeré členy jsou čísla celá kladná, činí součet 120. Která jest to řada?
4. Jest ustanoviti rovnice dvou kruhů, jež opsány jsouce poloměrem $r = 15$,

α) probíhají bodem $M(5, 15)$ a

β) dotýkají se kruhu $K(x^2 + y^2 = 100)$ vně.

f) *Z jazyka německého*

Welchen natürlichen Verhältnissen verdankt Europa seine herrvorragende Stellung unter den fünf Erdteilen?

Písemné práce byly psány ve dnech 22. 5. a 25. 5.–29. 5. 1903. Ústní část maturitních zkoušek se na Akademickém gymnáziu v období od 1. do 8. července 1903 konala za předsednictví Jana Říhy, ředitele C.k. vyššího gymnázia ve Slaném. Miloš Kössler se podrobil závěrečné části zkoušek 4. července 1903 a v maturitním protokolu u jeho jména najdeme následující vysvědčení:[14])

Mravné chování	chvalitebné
Náboženství	chvalitebný
Jazyk latinský	dobrý
Jazyk řecký	dobrý
Jazyk český	(s prominutím ústní zkoušky) chvalitebný
Zeměpis a dějepis	(průměrem) chvalitebný
Mathematika	výborný
Fysika	(průměrem) výborný
Přírodopis	dobrý
Filosof. propaedeutika	výborný
Jazyk německý	(dle semestrálních vysvědčení) dobrý
Těsnopis	výborný
Kreslení	výborný

Celkově byl Miloš Kössler uznán *dospělým s vyznamenáním.* Stejného prospěchu v řádném termínu dosáhlo z jeho třídy pouze pět veřejných žáků, jednalo se tedy o vynikající výsledek.

♣ **Zastavení první** aneb S fyzikou na štíru?

Ve školním roce 1902/03 během prázdnin na C.k. akademickém gymnáziu v Praze maturovalo rovněž šestnáct studentek soukromého gymnázia dívčího spolku „Minerva“ v Praze. Mezi nimi byla i jistá slečna ZDEŇKA VINTRICHOVÁ*. Na jejím maturitním vysvědčení bychom se dočetli, že chvalitebnou získala z přírodopisu a filosofické propaedeutiky, dobrou z náboženství, řeckého a českého jazyka, zeměpisu a dějepisu, matematiky, dostatečnou z latiny a fyziky. 14. července 1903 tak byla uznána dospělou. Skutečnost, že se po dokončení univerzitních studií po zbytek života věnovala výuce matematiky a fyziky, by se ve světle těchto faktů mohla zdát zarážející. Je však spravedlivé dodat celkový pohled na výsledky všech studentek spolku Minerva – např. z fyziky dvě studentky získaly dobrou, dvě nedostatečnou, a zbývajících dvanáct dostatečnou; v klasifikaci se tedy zjevně odrážela úroveň přípravy na škole, jíž děvčata absolvovala.*

Slečnu Vintrichovou nyní opustíme, abychom se k ní o několik stran dále opět vrátili.

Studium na univerzitě

„Nebylo tenkrát lehké rozhodovat se pro další studium jen na základě vlastních zálib. Kdo šel v té době studovat matematiku, neměl po ukončení studia příliš skvělé existenční vyhlídky. O místa na gymnáziích byla velká nouze, zvláště v oboru matematika a fyzika. Avšak stejně jako v celém svém dalším životě dovedl Miloš Kössler podřídit hmotnou stránku lásce k matematice. Z vlastní zkušenosti pak poznal, že situace absolventů byla opravdu těžká.“ [Kopřiva (1961), str. 226]

Kössler se po maturitě zapsal na filosofickou fakultu Karlovy univerzity ke studiu matematiky, fyziky a astronomie a studoval zde v letech 1903–1907, podobně jako většina posluchačů v té době s cílem získat oprávnění pro vyučování na středních školách.

Konkrétně měl Miloš Kössler zapsány na fakultě následující přednášky:[15])

Zimní běh 1903/1904 (Semestr I.)

Organizace školská předních kulturních států (Drtina, 3h týdně), O počtu differenciálním (Petr, 5h), Experimentální fyzika v přehledu soustavném (Strouhal, 5h), Mechanika (Koláček, 4h), Hydrostatika a kapillarita (Koláček, 1h), Proseminář mathematický (Petr, 1h)

Letní běh 1904 (Semestr II.)

Vývoj theorií pedagogických v 19.století (Drtina, 3h), O počtu differenciálním a integrálním (Petr, 5h), Experimentální fysika, díl II. (Strouhal, 5h), Differenciální geometrie (Sobotka, 5h), Mechanika a akustika (Koláček, 5h), Proseminář mathematický (Petr, 1h)

Zimní běh 1904/1905 (Semestr III.)

Analytická geometrie (Sobotka, 5h), O rovnicích differenciálních (Petr, 5h), Mechanika a teplo (Kučera, 3h), Nauka o světle (Koláček, 5h), Astronomie sférická (Gruss, 2h), Seminář mathem. fysikální (Koláček, 2h), Filosofie dějin malého národa (Masaryk, 3h)

Letní běh 1905 (Semestr IV.)

Optika krystallická (Strouhal, 1h), Nauka o teple (Koláček, 4h), Speciální partie z optiky (Koláček, 1h), Sferická astronomie II. (Gruss, 3h), O rovnicích differenciálních (Petr, 3h), O počtu variačním (Petr, 2h), Reformní směry v oboru didakt. středoškolské (Drtina, 4h), Psychologie I.: Obecná nauka o počitku (Čáda, 3h), Úvod do theorie křivek prostorových (Sobotka, 1h)

Zimní běh 1905/1906 (Semestr V.)

Základové praktické fysiky: Část I.: Úvod do fysikálního praktika (Kučera, 2h), Chemie minerálná elementárná (Raýman, 5h), Základy ethiky (praktická filosofie, Krejčí, 3h), Hygiena školní (Růžička, 2h), Literatura česká od roku 1880 (Máchal, 2h)

Letní běh 1906 (Semestr VI.)

Elektřina a magnetismus (Koláček, 5h), Seminář mathem. fysikální (Koláček, 2h), Základové astrofotometrie (Gruss, 2h), Geometrické a fysikální methody k určení parallaxy slunce(Gruss, 1h), Výklady spojené s cvičením v astronomickém pozorování a měření (Gruss, 2h), O elliptických funkcích (Petr, 3h), O numerickém řešení rovnic (Petr, 2h), O základech geometrie (Sobotka, 2h), Fysikální praktikum pro kandidáty učitelství na školách středních. Kurs I. (Kučera, 8h), Chemická analysa pro posluchače filosofie a mediciny (Brauner, 1h), Praktická cvičení pro posluchače filosofie a mediciny (Brauner, 6h)

Zimní běh 1906/1907 (Semestr VII.)

Elektřina a magnetismus (Koláček, 2h), Seminář mathem. fysikální (Koláček, 2h), Výpočet drah planet (Gruss, 2h), Plochy 2. stupně (Sobotka, 4h), O algebraickém řešení rovnic (Petr, 3h), O theorii forem (Petr, 2h), Seminář mathematický (Petr, 2h), Psychologie řeči a myšlení (Krejčí, 3h), Mluvnice jazyka staroslověnského I. (Pastrnek, 3h), Německá literatura doby přítomné (Krejčí, 1h)

Letní běh 1907 (Semestr VIII.)[16])

Mechanika(Koláček, 5h), Seminář mathem. fysikální (Koláček, 2h), Fysikální praktikum II. (Kučera, 8h), O algebr. řešení rovnic (Petr, 2h), O theorii forem (Petr, 3h), Plochy 2. stupně (Sobotka, 3h), Od husitství k reformaci. Se stručným úvodem o předhusitské literatuře staročeské (Vlček, 3h), Historie německé literatury (Mourek, 3h)

První rok Kösslerových studií, rok 1903, byl při tom do jisté míry zlomovým pro výuku matematiky na pražské univerzitě, neboť záhy po sobě zemřeli profesoři František Josef Studnička[17]) a Eduard Weyr[18]), a tak bylo třeba najít novou osobnost pro katedru matematiky. Z Brna byl povolán Karel Petr[19]). Za jeho působení došlo k rozsáhlým změnám v přístupu k výuce matematiky - bez nadsázky lze říci, že nastala éra modernizace.

„Snahou Karla Petra bylo zvýšit úroveň studia matematiky na universitě a vychovat novou generaci našich matematiků. Těchto úkolů se ujal Karel Petr velmi svědomitě a energicky. Dával přednáškám, proseminárním a seminárním cvičením novou náplň a zvýšil požadavky při zkouškách. Matematika se tak stala jedním z nejtěžších studijních oborů a studovali ji jen ti, kteří o ni měli skutečný zájem. Tím se pozvedla úroveň studia tohoto oboru; při menším počtu studentů se jim mohl Karel Petr věnovat tak, aby se z nich mohli stát výborní matematici, jeho nástupci a spolupracovníci.“ [Crkalová (1992), str. 14]

Z výše uvedeného přehledu je patrné, že Petrovy přednášky a prosemináře navštěvoval Kössler po celou dobu studia. Právě Kössler byl jedním z Petrových nejlepších posluchačů, a později i následovníků, když převzal jeho přednášky z infinitesimálního počtu. EDUARD ČECH[20]) na toto téma napsal ve svém vzpomínkovém článku Sedmdesátiny profesora Kösslera:

„Kössler lépe než kdokoli jiný pochopil některé z nejlepších stránek povahy našeho nezapomenutelného učitele Karla Petra a skutečně krásně se řídil skvělým Petrovým příkladem.“ [Čech (1954), str. 375]

Svůj hold složil Kössler svému vzoru Karlu Petrovi spolu s FRANTIŠKEM NUŠLEM[21]) prostřednictvím článku *Karel Petr*[22]) který byl uveřejněn i v knize *Sborník prací matematických a fysikálních vydaný na počest šedesátého výročí narozenin Dra. Karla Petra, řádného profesora Karlovy university, čestného člena JČMF, Jednotou čsl. matematiků a fysiků*[23]) pod názvem *Karel Petr. Stručný nástin jeho života a stručný přehled jeho prací.*

Po absolvování osmi povinných semestrů složil v zimním běhu 1907/1908 Státní zkoušky z matematiky a fysiky pro učitelství na školách středních. Získal tak potřebnou aprobaci pro výuku těchto předmětů. Dnem 21. února 1908 pak nastoupil na Akademické gymnázium na tzv. *zkušebný rok*. Byl přidělen profesorům Antonínu Jeřábkovi a JAROSLAVU JENIŠTOVI. Praxi ukončil 20. února 1909.[24])

První zaměstnání

Během studia i po jeho ukončení následovalo mnoho pro Kösslera krušných let. Sám o tomto období ve svém již zmiňovaném životopisu napsal:

„Od roku 1904 do roku 1911 živil jsem se nuzně kondicemi a děláním dluhů, které jsem pak dlouho splácel.“

Když totiž v roce 1908 úspěšně dokončil univerzitní studia, po celé následující tři roky nemohl najít uplatnění a zůstával bez místa (vojenskou službu neabsolvoval). Až od 9. září 1910 se stal suplentem a správcem fyzikálního kabinetu na reálném gymnáziu v Domažlicích. V dalším školním roce už nastoupil od 16. září 1911 na českém gymnáziu v Praze na Vinohradech v Hálkově, nynější Londýnské ulici - opět jako suplent. Jeho ustanovení profesorem bylo prodlužováno vždy o půl roku (v té době se nejednalo o výjimečný postup, ale zcela běžný projev zaměstnanecké politiky na školách obvyklý). Na místo profesora čekal dalších sedm dlouhých let. Na podzim 1917 byl jmenován provisorním učitelem. Nadějným se pro Kösslera stal rok 1918 – byla ukončena 1. světová válka, svou pozici na gymnáziu vyměnil od 28. prosince 1918 za místo skutečného profesora. Profesorem ad personum byl jmenován s účinností od 15. června 1920.

„Na tehdejší Kösslerovo působení rád vzpomíná akademik VLADIMÍR KOŘÍNEK[25])*, který byl jeho žákem. Podle jeho vyprávění byl Kössler vskutku znamenitým učitelem. Sám měl ke svému oboru velkou lásku a dovedl vzbudit o něj zájem i u svých žáků. Podporoval jejich snahu o hledání takových řešení úloh, která nebyla obvyklá a uváděná v knihách. Toto ovšem mohl dělat jen učitel, který svému předmětu dokonale rozuměl a měl látku i po stránce didaktické zcela promyšlenou. Dovedl zaujmout žáky i poučováním o poznatcích z jiných věd, např. astronomie.“* [Kopřiva (1961), str. 227]

Manželství

Ještě v době, kdy působil jako suplent na gymnáziu v Domažlicích, se Kössler oženil se slečnou Zdeňkou Júlií Vintrichovou (1884–1940)[26]. Sňatek se konal dne 3. srpna 1911 u Nejsvětější Trojice v Podskalí v Praze II.[27]

Zdenka Vintrichová se narodila 2. 1. 1884 v Nové Pace č. 400 v okrese Jičín. Byla dcerou Engelberta Vintricha, sládka v Královském pivovaře v Nové Pace a Kateřiny Vintrichové, rozené Mikoláškové, ze Záběhlic. Otec byl pro nezhojitelnou chorobu nucen vzdát se svého místa, a tak dožíval na malém statku právě v Záběhlicích. Zdenčin bratr, Engelbert Vintrich, byl skladníkem cukrovaru v Čakovicích. Sestra Františka (provdaná Tračková) zemřela v roce 1946. Sestra Berta (provdaná Ledermannová) se ještě před rokem 1914 provdala do Německa do Boppordu nad Rýnem a s rodinou úředně neudržovala v pozdějších letech styk.[28] Sestra Růžena byla svobodná, invalidní a žila po Zdenčině smrti v Kösslerově domácnosti.

Zdenka byla učitelkou matematiky a fyziky[29] na dívčím lyceu, později reálném gymnáziu ve Slezské ulici na Královských Vinohradech, kde měla pověst velmi přísné profesorky. Do učitelského sboru tohoto ústavu vstoupila v roce 1909 jako suplující síla, přičemž byla jmenována správkyní fyzikálního a měřického kabinetu. Škola samotná byla zřízena od školního roku 1908 – 1909, fyzikální kabinet však vznikl až v roce následujícím, kdy nastoupila právě Zdenka Vintrichová, pod jejímž vedením se sbírka zdárně rozrůstala. Profesorkou ad personum byla jmenována od školního roku 1920–1921.[30]

Manželé Kösslerovi bydleli do roku 1924 v Praze XII., v Perunově ulici č. 14, od roku 1924 pak na Korunní třídě 53, č.p. 1263. Měli tři děti, nejmladší dcera Karen (23. 5. 1916–21. 11. 1922) však zemřela již v šesti letech.

Syn Ivo (nar. 23. 2. 1920) po absolvování reálného gymnázia studoval na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy, kde byl v roce 1948 promován doktorem přírodních věd. Tento slavnostní akt měl pro něj zajímavý nádech, neboť promotorem mu byl vlastní pyšný otec. Od roku 1969/70 byl Ivo Kössler vedoucím katedry makromolekulární chemie (dnes katedra fyzikální a makromolekulární chemie) na přírodovědecké fakultě.

Dcera Marta (nar. 10. 2. 1922) rovněž začala studovat na stejné vysoké škole jako její bratr, avšak studium nedokončila. Později pracovala jako účetní v Ústavu fysikální chemie České Akademie věd.

Začátkem druhé světové války prof. Kössler ovdověl.[31]

Přechod na univerzitu

V roce 1918 předložil Miloš Kössler jako disertaci svou nejrozsáhlejší vědeckou práci *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru, část I. a II.* (celkem 72 str., [K5a], [K5b]). Posudek k ní psali Jan Sobotka[32] a Karel Petr. Dne 10. června 1918 složil s prospěchem výborným dvouhodinové „hlavní“ rigorosum z matematiky a experimentální fyziky před komisí ve složení Sobotka, Petr, Kučera; dne 27. června 1918 pak jednohodinové „vedlejší“ rigorosum z filosofie rovněž s výborným výsledkem před komisí Krejčí, Drtina, Máchal (t.č. děkan přírodovědecké fakulty). Poté byl dne 9. července 1918 promován doktorem filosofických věd (PhDr.).[33]

V roce 1920 se podrobil habilitačnímu řízení a dosáhl venia docendi s účinností od 31. července 1920.[34] Za habilitační práci při tom opět označil práci *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru.* Kromě publikační činnosti byly v souvislosti s jeho vědeckou způsobilostí zmiňovány i přednášky vykonané v letech 1918 a 1919 pro *Jednotu českých matematiků a fyziků* na téma *O iteracích celistvé funkce kvadratické* a *O řešení obecné rovnice algebraické*. Nahlédněme na úryvek ze zprávy komise o habilitační žádosti dr. Miloše Kösslera:[35])

„Výsledky, k nimž dospěl, znamenají vždy podstatné obohacení příslušného oboru. Hlavně práce habilitační, jak obratným formulováním problémů, bezpečným užíváním rozmanitých metod, tak originálním postupem ve směru zevšeobecňovacím, jakož i konečně hojností nových a důležitých výsledků, ukazuje k tomu, že žadatel ve své práci vědecké již daleko vynikl nad pokusy začátečnické a podává práce hodné hotového matematika. Je přímo příznačno pro něho, že skoro vždy v průběhu své práce dospívá k problémům novým, zpravidla obecnějším. To nejen ukazuje na opravdové nadání pro matematické tvoření, nýbrž může býti pokládáno i za záruku, že žadatel bude na dráze, kterou zahájil s nesporným úspěchem, zdárně pokračovati.

Vzhledem k tomu má podepsaná komise za to, že žadatel plnou měrou vyhovuje požadavkům, které jest klásti na docenta matematiky na universitě …“

(podepsáni B. Bydžovský, K. Petr, J. Sobotka)

Je tedy zcela zřejmé, že Kössler neměl v úmyslu setrvat na místě gymnaziálního profesora. Od druhého pololetí školního roku 1920/21 měl snížený učební úkol na polovinu vzhledem k vědeckým účelům a začal přednášet jako *soukromý docent pro mathematickou analysu a algebru* matematiku na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity. Zcela propuštěn byl z Českého státního gymnázia na Královských Vinohradech k 31. prosinci 1922.

♣ **Zastavení druhé** aneb Brněnské intermezzo

Během působení na místě soukromého docenta obdržel Kössler zajímavou nabídku od profesorského sboru České vysoké školy technické v Brně. V roce 1920 po odchodu Matyáše Lercha[36]) *na nově zřízenou přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity se totiž uprázdnila druhá stolice matematiky a nabízelo se místo mimořádného profesora.*

Jako možní kandidáti byli v úvahu bráni všichni mimořádní profesoři a soukromí docenti z oboru působící na českých vysokých školách a dále asistent dr. Karel Čupr[37]). *Na přeběžný dotaz, zda by měli zájem o tuto pozici, odpověděli kladně* Karel Rychlík[38]), František Rádl, Václav Hruška, Karel Dusl, *Miloš Kössler a Karel Čupr. Komise pro nové obsazení II. profesury matematiky z těchto jmen v užším výběru zvolila jako kandidáty na prvním místě Karla Rychlíka a Miloše Kösslera aequo loco, na druhém místě pak Václava Hrušku. Při ústním jednání však Karel Rychlík prohlásil, že na místo nereflektuje, a tak byl osloven Miloš Kössler, neboť (jak je uvedeno ve zprávě komise pro nové obsazení II. profesury matematiky ze dne 14. února 1921):*

‚Kösslerova pojednání z analyse a algebry jeví znaleckého i pronikavého ducha mathematického a podávají pozoruhodné příspěvky k řešení zvolených otázek.‘[39])

Kössler byl však natolik srostlý s Prahou, že se s ní nedokázal rozloučit. Zřejmě navíc v té době již měl slibné vyhlídky na místo mimořádného profesora, a proto raději vyčkal na toto zlepšení své pozice na pražské univerzitě.

Od roku 1922 se Kössler pravidelně zúčastňoval schůzí profesorského sboru fakulty. Z protokolů vedených o těchto schůzích[40]) lze zjistit, že 13. června 1922 byla zvolena komise ve složení Jan Sobotka, Karel Petr, Bohumil Bydžovský[41]) k projednání návrhu na jmenování Dr. Kösslera mimořádným profesorem. Komise ve svém návrhu mj. uvedla:

„Způsobilost Dra M. Kösslera pokládá podepsaná komise za plně prokázanou, odkazujíc v té příčině již také na veskrze příznivý posudek o jeho vědecké a učitelské kvalifikaci, který podala při posuzování jeho žádosti habilitační. Činnost p. Dra Kösslera od jeho habilitace (30. června 1920) jak akademická tak zvláště literárně vědecká tento úsudek komise plně potvrzuje. Způsobilost učitelská byla zvláště uznána tím, že mu byl, od zimního běhu 1921, udělen učebný příkaz na 3-hod. přednášku ‚Úvod do počtu infinitesimálního' s dvouhod. cvičením, kterýžto příkaz vykonává s plným úspěchem. Budiž zvláště vytknuto, že přes to, že nepožíval plné dovolené ze školy střední, konal v letním běhu tohoto roku vedle kolegií právě uvedených ještě jednohod. kolegium speciální (‚O transcendentních řešeních rovnic algebraických')."

(podepsáni B. Bydžovský, K. Petr, J. Sobotka)

Již 4. července téhož roku byl referát o navržení Dr. Kösslera mimořádným profesorem jednohlasně schválen. S účinností ode dne 29. prosince 1922 se Miloš Kössler stal z rozhodnutí prezidenta republiky T. G. Masaryka mimořádným profesorem.[42]) O pět let později jej prezident republiky jmenoval rozhodnutím ze dne 31. prosince 1927 řádným profesorem matematiky na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity s účinností od 20. prosince 1927.[43])

Kromě vedení samotných přednášek a seminářů se Kössler věnoval i jiným činnostem souvisejícím s životem univerzitního profesora. Mimo jiné byl na schůzi profesorského sboru 7. května 1925 zvolen třetím ze čtyř volitelů rektora magnifika (nadpoloviční většinou 25 hlasů z 26 odevzdaných). Když bylo na schůzi sboru 10. června 1926 konstatováno, že časopisy a knihy přírodovědecké jsou zanedbávány, byl zvolen členem stálé biblioteční komise spolu s profesory Danešem, Vilhelmem, Štěrbou-Böhmem, Komárkem, Posejpalem a Slavíkem.

Dále byl od akademického roku 1926/27 podle přípisu Ministerstva školství a národní osvěty[44]) jmenován administrativním ředitelem budovy mathematicko-přírodovědných ústavů (U Karlova 3) poté, co se této funkce vzdal prof. Jindřich Matiegka[45]). V této funkci Kössler setrval řadu let.

♣ **Zastavení třetí** aneb Vyšetřování ztráty psacího stroje

Kromě skromných remuneračních prostředků přinášela funkce administrativního ředitele budovy řadu starostí a potíží. Ukažme si jeden z konkrétních problémů, jenž musel Kössler řešit.

Dne 4. dubna 1936 byl z matematického ústavu v budově U Karlova 3 ukraden přenosný psací stroj Corona č. 3LO 4326. I začal se hledat viník zodpovědný za tuto krádež, což vyvolalo rozsáhlou korespondenci mezi administrativním ředitelem příslušné budovy a hospodářskou správou. V dopise z 6. dubna 1936 adresovaném Hospodářské správě provozu vysokých škol v Praze Miloš Kössler napsal:

„Poněvadž krádeže se zde již dříve několikráte vyskytly, žádal jsem dne 2. března 1936 hospodářskou správu, aby opatřila místnosti čís. 75, 79, 112 a 117 v matematickém ústavě bezpečnostními zámky. Poněvadž se tak nestalo, odmítám za nahoře uvedenou ztrátu odpovědnost a žádám, aby hospodářská správa nám opatřila nový psací stroj. Současně opakuji žádost o bezpečnostní zámky pro místnosti výše uvedené.“[46])

Na uvedené podání správa již o den později reagovala dopisem na děkanství přírodovědecké fakulty:

„Ježto žádost ústavu o zakoupení stroje nového nutno předložiti ministerstvu školství a národní osvěty v Praze s úplným zjištěním a vylíčením stavu věci, žádá hospodářská správa provozu vysokých škol v Praze o laskavé sdělení, kým byl po zkušenostech s dříve již vyskytujícími se ústavními krádežemi, umístěn psací stroj - jakožto předmět nejčastějších krádeží - právě v jedné z místností bezpečnostním zámkem neopatřené.“[47])

Na shora uvedený dotaz Kössler odpovídal dlouhým dopisem, z něhož citujeme úryvky:

„Hospodářská sp. se táže, kým byl po zkušenostech s dříve již se vyskytujícími se krádežemi psací stroj uložen právě v jedné z místností bezpečnostním zámkem neopatřených.

Odpověď zní: Psací stroj byl vždy od počátku trvale uložen v místnosti asistentů, protože byl jimi stále používán.

Dále hosp. sp. soudí, že ukládáním stroje v jedné z místností bezpečně uzamykatelných byla by bývala možnost zcizení podstatně snížena.

Tento soud jest zcela správný. Lze však snadno vyložiti, proč se tak nestalo. V době těsně před krádeží bylo v ústavní budově velmi mnoho místností s obyčejným zámkem, v nichž byly cenné předměty snadno přenosné (n.př. knihy, počítací stroje v kabinetu prof. Schoenbauma, mikroskopy v místnostech zool. ústavu a t.d.) Nebylo možno předvídati ani novou krádež, ani místnost a předmět, o nějž se zloděj pokusí. Vzhledem k tomu bylo by bývalo nutno stěhovati všechny tyto místnosti v každé polední přestávce a každý večer do místností s bezpečným zámkem. To jest zřejmě neproveditelné, jak vzhledem k nedostatku personálu, tak pro nedostatek místností proti krádeži bezpečných. Protože pak z místnosti asistentů ztrácely se zejména knihy a předměty malé ceny, soudili jsme zcela oprávněně, že pachatelem jest některý z posluchačů v nouzi se ocitnuvší. Nikoho – hospod. sp. v to počítaje – ani nenapadlo, že by hrozila krádež větších rozměrů. ...

Nebylo mým úmyslem převaliti odpovědnost za krádež na hosp. sp. Podle skromného mínění podepsaného nelze viniti nikoho z ústavu, tím méně pak hosp. správu ze zanedbání povinné péče. ...

Všem zřízencům zejména pak vrátnému byla nařízena zvýšená pozornost. Opatření toto jest však ceny velmi problematické, neboť nádvorní železná vrata jsou opatřena starým zámkem, který otevře každý kouskem drátu. ...

Vzhledem k těmto okolnostem jest vskutku ku podivu, že ústav nebyl dosud vykraden častěji a důkladněji. ... Pokládám za svou povinnost znovu upozorniti hospodářskou správu na tento stav věcí.“[48])

Nebudeme zde rozvádět další peripetie spojené s tímto případem, dodejme však na závěr, že matematický ústav se nového psacího stroje dočkal a vše dobře dopadlo.

25. října 1928 byl Miloš Kössler dále zvolen členem komise o nedostatcích personálních při vyučování matematiky (spolu s Petrem a Bydžovským).

Vzpomínky studentů

„O jeho velkém rozhledu a prozíravosti svědčí výrok, pronesený k posluchačům 1. ročníku, kteří se na začátku školního roku 1927–28 shromáždili v počtu asi třiceti před jeho přednáškou: ‚Pánové, těžko budete shánět chlebíček.' Tehdejší doba byla dobou velké prosperity a konjunktury. Kössler viděl zřejmě dále. Pozdější léta krize mu dala zcela za pravdu. Jistě si tehdy vzpomněl i na svá první těžká léta po studiích." [Kopřiva (1961), str. 228]

Jako přednášející byl velmi oblíben. Jiří Kopřiva[49]), Vojtěch Jarník a František Nožička[50]) na svého učitele a přítele vzpomínají:

„Na učitelské působení prof. Kösslera na přírodovědecké fakultě, později po druhé světové válce na matematicko – fyzikální fakultě Karlovy university v Praze, s láskou a vděčností vzpomínají stovky jeho posluchačů. Jeho přednášky byly vždy neobyčejně krásné, svěží a živé. V jeho hodinách vládlo mimořádně příjemné ovzduší." [Kopřiva (1961), str. 227]

„Kössler přistupoval také ke svým učitelským úkolům s velkou svědomitostí, spojenou s vřelým zájmem o žáka a s vrozeným pedagogickým nadáním." [Jarník (1955), str. 115]

„Bylo by to málo, kdybychom řekli, že profesor Kössler byl vynikajícím a talentovaným učitelem. Bylo na něm něco, co lidi k němu přitahovalo, něco, proč řada jeho žáků viděla v něm svůj vzor: zanícení pro matematiku, skromnost, taktnost a trpělivost, přátelský postoj. Avšak hlavní důvod je ten, že profesor Kössler měl lidi rád, rozuměl jejich bolestem a slabostem." [Nožička (1962), str. 112]

Poněkud jiný odstín má vzpomínka Prof. Jaroslava Kurzweila[51]), jehož disertační práci psanou pod vedením Vojtěcha Jarníka Miloš Kössler posuzoval. Prof. Kurzweil vzpomínal na prof. Kösslera jako na velmi milého a skromného člověka, jehož přednášky byly vždy dokonale promyšlené. Osobně se spolu mnohokrát nesetkali, ale jedna příhoda z doby po druhé světové válce, kdy byly posluchárny vysokých škol po dlouhém půstu způsobeném uzavřením českého vysokého školství přeplněné, utkvěla prof. Kurzweilovi v paměti. ... Při jedné hojně navštívené přednášce konané na Karlově v posluchárně M1 se při vstupu profesora Kösslera do sálu do naprostého ticha ozval obdivný vzdech jedné ze studentek – „Ten má ale vlasy ...!" (nádherné husté šediny). ...

Na velmi shovívavého pana profesora vzpomíná i paní Jiřina Frolíková. ... Při zkoušce dostala jako otázku Jensenovu formuli, a než se jen stačila nadechnout k odpovědi, milý pan profesor deset minut povídal o tom, co by rád slyšel – nevyřkl odpověď na svou otázku, ale snažil se pomoci, jak jen to bylo možné (aniž to v daný moment bylo nutné) ... Ostatně v kádrových posudcích z 50. let byla Kösslerovi přílišná mírnost při zkoušení vytýkána.

Kursy pro vzdělávání učitelstva

Ani za působení na vysoké škole však Kössler nezanevřel na střední školy. Své zkušenosti bývalého gymnaziálního profesora uplatnil v přípravných kursech pro učitele na školách nižších stupňů. Několik desítek učitelů se o sobotách a nedělích scházelo, aby si rozšířili své matematické vzdělání. Akademik Čech v této souvislosti napsal:

„Na jeho vynikající činnost pedagogickou s láskou vzpomínají nejen jeho bývalí žáci; mnohokrát v životě jsem měl příležitost slyšet z úst učitelů bývalých měšťanských škol nadšená vyprávění o tom, jak právě Kössler to byl, kdo je v kursech pro vzdělání učitelstva naučil úspěšně vyučovat a vychovávat.“ [Čech (1954), str. 374]

Cílem kursů bylo připravit učitele ke zkouškám, které byly pro odborné učitele povinné, avšak Ministerstvem školství a národní osvěty nijak zajištěné co se přípravy týkalo. Jednalo se tedy o svépomocnou akci učitelů, pořádanou za pomoci odborové organizace. Štefan Schwarz[52]) ve svém článku [Schwarz (1985)] poznamenal, že řada účastníků těchto kursů později stála u zrodu nových pedagogických fakult. Miloš Kössler zajisté věděl, co učitelé ke zkouškám potřebovali znát, neboť od roku 1925/26 byl členem České vědecké zkušební komise pro učitelství na středních školách. Ředitelem komise byl v té době Josef Janko, náměstkem ředitele Karel Petr, examinátory pro matematiku byli spolu s Kösslerem i Karel Petr, Jan Sobotka a Bohumil Bydžovský. Od roku 1931 nahradil v komisi Sobotku Vojtěch Jarník, od roku 1932/33 rozšířil řady examinátorů i Václav Hlavatý[53]).

Matematický seminář či ústav?

Od roku 1929/30 byl Kössler jmenován spolu s Bohumilem Bydžovským, Karlem Petrem, Janem Sobotkou a Emilem Schoenbaumem[54]) ředitelem Matematického semináře. Bylo obvyklé, že v seznamech přednášek na univerzitě bývali jako ředitelé tohoto semináře uvedeni všichni řádní profesoři. Již o rok dříve byl přitom podán návrh na zřízení Matematického ústavu, který byl poté mnohokrát urgován. Podívejme se na argumenty, které Kössler uváděl v roce 1936 při opětovné urgenci odůvodňující potřebu zřízení tohoto ústavu:[55])

„Matematický ústav by zahrnoval dnešních pět seminářů, tři prosemináře, v jeho rámci by byly dva semináře (filosofie exakt. věd a metodologický), úvodní cvičení prof. Kořínka, konstruktivní cvičení z deskriptivní geometrie, celý kurs pojistné matematiky a statistiky, velká knihovna, která je přístupná po celý den a svým zařízením slouží nejen účelům seminárním, nýbrž jest studijní knihovnou v širším slova smyslu, nejen pro profesory a ostatní vědecký personál, nýbrž také pro mladé badatele. K ústavu by dále náležely ještě dvě posluchárny, pracovny pěti řádných a dvou mimořádných profesorů a jednoho titulárního. Mimo to působí ještě v rámci ústavu jeden bezplatný profesor a tři docenti. Dále jest ještě sbírka matematických přístrojů a modelů a pracovny asistentů.

Podle dnešního stavu mají všichni ředitelé seminářů právo používati knihovny, čítárny, poslucháren, vědeckého a pomocného personálu a také o nich činiti rozhodnutí. Vznikají neúmyslná nedorozumění a protichůdné disposice, hlavně pokud jde o vědecký a pomocný personál, jakož i užívání místností ústavu. Disponování dotací na nákup knih a časopisů není svěřeno jedné osobě, nýbrž všem ředitelům seminářů, ačkoliv dotace jest společná. Za nynějšího právního stavu bylo by obtížno zjistiti, kdo ručí za stav knihovny a za veškerý inventář ‚ ústavní ‘.

Matematický ústav de facto existuje a jest veden po stránce vědecké prof. Dr. Petrem a po stránce administrativní po prof. Sobotkovi spect. prof. Dr. Kösslerem. Jejich rozhodování nemá dosud právního podkladu a nemuselo by býti kterýmkoliv z ředitelů, vědeckých a jiných sil respektováno.

Za nynějšího stavu právního mohou jednotliví profesoři vystupovati vůči veřejnosti i v cizině jen za svoji osobu. Jest nesporné, že zřízením ústavu by vědecký význam matematiky na přírodovědecké fakultě jak doma tak i v cizině vzrostl, což by mělo i velký význam praktický pokud se týče výměny publikací za publikace cizí. Za dosavadného stavu může se snadno státi, že dva ředitelé semináře objednají tutéž knihu, ačkoliv by pro oba semináře stačila jedna. Že ústav fakticky existuje je zřejmo z toho, že systemisačním výnosem ze dne 31. března 1931, č.j. 50 011/3-30 přiděluje se místo asistenta ústavu matematickému. Při potvrzování a ustanovování asistentů a vědeckých sil jest někdy užíván ústav matematický a někdy seminář matematický.

Proto tento stav může snadno vésti k nedorozumění nebo i záměně. Jest tedy v zájmu vyučování matematiky, aby tyto poměry byly upraveny právně a při tom se podotýká, že zřízení matematického ústavu by tyto poměry nejen značně zjednodušilo, nýbrž že by bylo možno i úspornější využití.

Navrhované zřízení matematického ústavu má své oprávnění. Je to zřejmo i z toho, že v cizině, na příklad v Německu, jsou všade tyto ústavy konstituovány.

Agenda spojená s řízením ústavu jest značně větší než u většiny ústavů na fakultě existujících.“

I přes opakované urgence však ke skutečnému zřízení ústavu došlo až mnohem později.

Pedagogické působení

Značná část našich předních matematiků minulého století patřila ke Kösslerovým žákům. Kromě základních přednášek vedl i kursy, v nichž seznamoval své studenty s poznatky z teorie analytických funkcí (jež byla hlavním oborem Kösslerova vědeckého zájmu), včetně nejnovějších výsledků školy Borelovy a Hadamardovy, nezapomínaje na své vlastní výsledky z tohoto oboru.

Podíváme-li se na přehled přednášek a cvičení, které Miloš Kössler vedl na přírodovědecké, pedagogické a matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity[56]) uvedený v kapitole sedmé, vidíme, že měl pravidelný základní kurs o funkcích jedné komplexní proměnné, přednášky o obyčejných a parciálních diferenciálních rovnicích, po profesoru Petrovi převzal přednášky z úvodu do infinitezimálního počtu, k nimž pro své posluchače napsal i svou jedinou učebnici *Úvod do počtu diferenciálního.*

Díky svému neutuchajícímu zájmu o fyziku se stal velmi oblíbeným i mezi studenty z řad fyziků, neboť měl velký cit pro to odhadnout, které znalosti z matematiky mohou v budoucnosti ve svých oborech upotřebit. Např. Václav Vodička (viz seznam disertací posuzovaných Milošem Kösslerem uvedený v rámci faktografických příloh 7.3) pracoval dlouhá léta v matematickém oddělení Škody Plzeň, podobně bychom mohli jmenovat další řadu Kösslerových žáků pohybujících se v praktických aplikacích matematiky.

„Především mnozí z jeho žáků, kteří se uplatnili jako pracovníci na vysokých technických školách a ve výzkumných ústavech v průmyslu, obraceli se na něho s prosbou o matematickou pomoc ve své práci a tato pomoc byla vždy maximální. Zde šlo velmi často o proble-

matiku dosud neřešenou, vyžadující nové myšlenky a intensivní práci. Profesor Kössler měl velký přehled právě v těch matematických disciplínách, které jsou nejdůležitější pro aplikace (obyčejné a parciální diferenciální rovnice, analytické funkce, konformní zobrazení, variační počet, diferenční počet aj.).“ [Nožička (1962), str. 112]

Eduard Čech ocenil Kösslerovy zásluhy v tomto směru slovy:

„Po řadu let spočívala na Karlově universitě tíha šíření matematických poznatků v oborech daleko nejdůležitějších pro aplikace převážně na bedrech prof. Kösslera; oprávněnou snahou o to, aby jeho vyučovací činnost byla v souladu s jeho osobní činností badatelskou, Kössler vždy, kdykoli toho bylo třeba, bez váhání podřizoval tomu ušlechtilému cíli, aby z bran fakulty do života vycházeli odborníci schopní účinně pomáhat těm, kdo matematiky potřebují, ale nejsou matematiky v užším smyslu. ... Zmínky zasluhuje i to, že té početné mase universitních studentů matematiky, u kterých už první rok studia zřetelně prozrazoval, že samostatní badatelé z nich nebudou, kteří však nicméně, pokud měli dobrou vůli, byli schopni opřít o získané znalosti matematiky úspěšnou práci, právě profesor Kössler nejlépe dovedl dát maximum toho, co jejich mozky stačily strávit.“ [Čech (1954), str. 374]

Akademické funkce

Své schopnosti jednat s lidmi a bojovat za správnou věc uplatnil Kössler při vykonávání funkce děkana přírodovědecké fakulty[57]), do které byl zvolen 16. května 1935 pro akademický rok 1935/36, stejně jako ve funkci proděkana v roce následujícím. Funkci děkana převzal Miloš Kössler po Prof. PhDr. Radimu Kettnerovi, v roce 1936/37 ji pak předal PhDr. Josefu Kratochvílovi. Na schůzi profesorského sboru 24. října 1935 už jako děkan *... nejprve poděkoval panu proděkanovi prof. Dr. Kettnerovi za všechnu práci, kterou fakultě v uplynulém roce věnoval a popřál mu zdraví a veškeren úspěch v další jeho práci. Rovněž poděkoval sboru za důvěru, projevenou mu jednomyslnou volbou a slíbil, že bude pečovati podle svého nejlepšího vědomí a svědomí o další rozkvět fakulty ...* (viz zápis z uvedené schůze prof. sboru). V roce 1935/36 mu byla snížena učební povinnost z pěti na tři hodiny týdně z důvodu výkonu akademického úřadu děkanského, z nějž ovšem plynuly i jisté výsady - např. 22. ledna 1936 byl Kössler spolu s rektorem a děkany ostatních fakult Karlovy univerzity na audienci u prezidenta republiky a zapsal se jménem fakulty do gratulačních archů (po prezidentských volbách) na Hradě.

Během studijních let 1935/36 a 1936/37 byl zároveň členem Disciplinární komise pro profesory a docenty, a náhradníkem Disciplinární komise pro úředníky a zřízence. Na období 1945/46 byl členem personální komise spolu s děkanem Novákem, profesory Trkalem, Tomíčkem, Breindlem, Kodymem, Králem a Matouškem; zároveň se stal členem komise pro reformu rigorósního řádu (spolu s prof. Kettnerem, J. Kořínkem, Matouškem, Králem, Křepelkou a Trkalem). Podobně byl členem řady dalších komisí.

Válečné události

„Den po obsazení Prahy Hitlerovými hordami přišel profesor Kössler do posluchárny, kde měl pokračovat ve své přednášce o funkcích komplexní proměnné. Chvíli postál a díval se na nás očima zalitýma slzami. ‚Je to hrozné‘ opakoval několikrát před plénem studentů. ‚Bude nějakou dobu trvat, než se z toho zase dostanem. Bude třeba velkých obětí, ale věřím, že to dobře dopadne. A vy tomu také věřte!‘ Potom odešel, nemohl přednášet.“ [Nožička (1962), str. 113]

V souvislosti s touto příhodou se na mysl tlačí ne vzdálená podoba s Drdovou povídkou *Vyšší princip*. Štefan Schwarz na toto nelehké období vzpomínal:

„Dni 14. a 15. marca som prežil ešte v Prahe a živo sa na ne pamätám. Dňa 14. marca Praha ležala pod snehom. Sedel som s doc. KNICHALOM *v pracovni prof. Kösslera a ‚lapali' sme najnovšie rozhlasové správy. Kössler poznamenal: ‚Jarníkovi dejme pokoj. Pálí korespondenci. Já to udělal dřív.' Táto udalosť na mňa hlboko zapôsobila. Nikdy na ňu nezabudnem."* [Nemoga, Riečan (1999), str. 171][58])

Za okupace byl Kössler na základě dekretu ministerstva školství ze dne 11. července 1940, č.j. 85549/40-III/3, jako všichni ostatní vysokoškolští profesoři dán od 31. července 1940 na dovolenou s čekatelným. Bylo všeobecně známo, že Kösslerův postoj byl výrazně protifašistický. Válečné období silně prožíval a dokonce se v té době výrazně zhoršil jeho zdravotní stav. Nenechal se ovšem zlomit a pracoval dál v zájmu české vědy. O jeho zásluhách o Jednotu se zmíníme ještě později. Připojil se ke skupině profesorů matematiky a fyziky z Karlovy univerzity a Českého vysokého učení technického, kteří se pravidelně scházeli na různých místech (v kavárnách, v bytě akademika Kořínka, ...) a plánovali co možná nejrychlejší obnovení výuky na českých vysokých školách po ukončení druhé světové války. Rozhodně nezaháleli - již 10. května 1945 ohlásil Kössler spolu s dalšími opětovný nástup do služby a nadále působil jako profesor na přírodovědecké fakultě.[59])

Poválečné období

Dne 8. listopadu 1945 se konala v Collegiu Maximu právnické fakulty Univerzity Karlovy slavnostní schůze u příležitosti dvacetipětiletého trvání přírodovědecké fakulty. Miloš Kössler zde četl proslov, zastupujíc při tom Bohumila Bydžovského, jenž se ve svém projevu zamýšlel nad různými aspekty rozdělení filosofické fakulty v roce 1920 na fakulty filosofickou a přírodovědeckou. S jeho následujícími slovy se Kössler zajisté dokonale ztotožnil:

„...položím důraz na to, co nás spojuje s ostatními universitními fakultami a zvláště s naší sesterskou fakultou filosofickou, totiž na nezištnou a úsilovnou snahu šířit světlo vědy jakožto projev svobodného ducha ve vlastním národu a v celém lidstvu. Nezapomínejme, že jsme dědici fakulty, která pěstovala artes liberales, svobodnou vědu ... " [Novák, Slavík et al. (1946), str. 15]

Po válce se stále častěji ozývalo podlomené zdraví. V listopadu 1947 podal Kössler na radu ošetřujícího lékaře žádost o snížení učebního úvazku z pěti týdenních hodin přednášek na tři týdenní hodiny. Odůvodňoval ji tím, že „trpí značným vyčerpáním, které při námaze, spojené s přednášením, se projevuje závratí a znemožňuje mu koncentraci k vědecké přednášce."

Problémy se dále objevovaly i na akademickém poli. V padesátých letech Kössler nevstoupil do KSČ, což mu spolu s vleklými zdravotními potížemi komplikovalo postavení na fakultě. Jeho vědecká práce byla přesto oceněna, když byl 8. prosince 1953 jmenován členem korespondentem Československé akademie věd, jež byla ustanovena dne 17. listopadu 1952. Akademické pocty se mu dostalo za jeho práce z oboru analytických funkcí. Důvodem, proč se později nestal řádným členem Akademie, mohl být stále se zhoršující zdravotní stav i politický postoj v tomto složitém období.

Dne 29. února 1956 byla Kösslerovi Státní komisí pro vědecké hodnosti udělena akademická hodnost doktora věd fyzikálně – matematických. Díky svým vědeckým a pedagogickým zásluhám dostal možnost i po odchodu do důchodu k 31. srpnu 1957 zůstat pracovat na fakultě. Od 1. září 1957 byl přijat na Matematický ústav při matematicko-fyzikální fakultě, vedený Eduardem Čechem, jako vědecký pracovník I. stupně - kandidát věd. Tento pracovní poměr s ním Univerzita Karlova rozvázala k 31. prosinci 1958 na jeho vlastní žádost, ve které jako důvod uvedl:

„můj věk a zdravotní stav mne nutí omezit se na méně intenzivní práci ...“

I přesto mu byla ponechána k dalšímu užívání jeho pracovna v budově Ke Karlovu č. 3, aby mohl i nadále docházet do svého oblíbeného kabinetu.

Zájmy a politika

V letech 1919–1931 byl Kössler členem Národní demokracie. V roce 1931 však před druhou volbou T. G. Masaryka prezidentem ze strany vystoupil pro nesouhlas s její sociální politikou. Od té doby nebyl členem žádné politické strany. V posudcích z roku 1953, které byly součástí návrhu na přijetí do Akademie věd, se o jeho politickém smýšlení můžeme mj. dočíst:

„Je to masarykovec, který v podstatě své názory nemění. ... nebo *... Veřejného života se straní. K našemu zřízení má kladné stanovisko, i když je pasivní.*[60])“

V osobních dotaznících uváděl v kolonce *jiné odborné znalosti*, resp. *zvláštní vědomosti a dovednosti, důležité pro službu* vlastnictví vůdčího listu (řidičského průkazu), dobrou znalost anglického a německého jazyka, a v neposlední řadě šerm - pozoruhodnou dovednost důležitou pro pedagogického pracovníka; tuto zálibu po něm zdědil i syn Ivo.

Kössler byl vlastníkem vozu typu Zbrojovka, specielní dvoudveřové verze (viz obrazová příloha, obr. č. 17). V univerzitním archivu lze najít doklady o tom, že svůj vůz v nutných případech zapůjčoval děkanátu přírodovědecké fakulty pro služební účely.

Po příchodu na univerzitu ve 20. letech byl členem Stolní společnosti matematiků a fysiků spjatých s Univerzitou Karlovou v Praze. Spolu s přáteli vydávali pod „uměleckými pseudonymy“ (Kössler alias Matěj Kössler, Jarník alias Vojtěška Jarní, apod.) recesistický občasník.[61])

Od mládí se rád zabýval sportem. Byl výborným tenistou a údajně se značnou měrou zasloužil o vybudování tenisových kurtů v Praze na Albertově. V zimě se věnoval lyžování – rád pravidelně navštěvoval Krkonoše, s oblibou hrál šachy. Po dlouhá léta hrával se stejnou společností taroky. Bohužel chatrné zdraví jej donutilo vzdát se mnohých z těchto zálib s přibývajícím věkem.

Mezi záliby „nesportovního“ charakteru bychom mohli zařadit čilý zájem o pokroky vědy a techniky - kromě jiného, v roce 1959 do jeho života „silně zasáhl“ moment, kdy vesmírná sonda Lunik 3 vyslala 4. října k Zemi pomocí aparatury umístěné na palubě první snímky odvrácené strany Měsíce. Doslova prý běhal po fakultě s těmi obrázky a fascinovaně si s mnoha lidmi o tomto objevu povídal.

Po celý život zůstal věrný dalším dvěma koníčkům - astronomii a fotografování. V rodinném archivu jsou uloženy desítky fotografií, na nichž Kössler zachytil momentky z cest, figurky žebráků, přírodní scenérie i řadu uměleckých kompozic (viz obrazová příloha, obr. č. 15–19).

Působení ve spolcích

Kromě práce na univerzitě se Kössler zapojoval i do činnosti řady českých vědeckých spolků – Královské české společnosti nauk, Jednoty československých matematiků a fyziků, Sdružení vědeckých pracovníků atd. Od akademického roku 1926/27 byl členem Čs. národní rady badatelské.

Rovněž občas přednášel i mimo prostředí Karlovy univerzity. Např. 20. října 1932 vystoupil na půdě Jednoty s přednáškou na téma *Několik výsledků z teorie prostých funkcí*, jejíž hlavní částí byl obsah článku Ladislava Špačka [Špaček (1933)]. Tento článek byl výtahem z disertace, kterou Kössler spolu s Jarníkem posuzoval. Přednášku Kössler doplnil zmínkami o výsledcích z prací Marxových, Rogosinskiho a svých vlastních.

V roce 1935 proslovil ve dnech 7. a 8. května na přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně odbornou přednášku na téma *Prosté mocninné řady.*

Poté, co byla po skončení války obnovena přednášková činnost Jednoty, vystoupil 20. listopadu 1946 s přednáškou *Zlomky Fareyovy a jejich význam v elementární theorii číselné.*

Mezinárodní matematický kongres v Torontu

Doklady kontaktu Miloše Kösslera se světovou matematikou najdeme nejen v nepřímé podobě častých odkazů na práce Hadamarda, Borela, Landaua, Čebyševa, či mnoha dalších v jeho díle, ale i v osobní účasti na 7. mezinárodním matematickém kongresu v Torontu, který se uskutečnil ve dnech 11.–16. srpna 1924.

Poválečná situace v Evropě nebyla nijak finančně příznivá pro dalekou cestu matematiků do zámoří. Kanadský organizační výbor proto jménem Prof. Fieldse nabídl Národnímu Výboru čsl. matematiků finanční podporu ve výši 400 dolarů pro dva účastníky z řad československých matematiků. Tato suma přibližně odpovídala nákladům na cestu a skromný pobyt, neboť v té době zpáteční lodní lístek z Cherbourgu do Montrealu stál 270 dolarů, zpáteční cesta vlakem z Montrealu do Toronta 25 dolarů, ubytování denně 3 dolary, denně dvě hlavní jídla bez nápojů 4 dolary.

8. dubna 1924 se proto sešel Národní Výbor čsl. matematiků ve složení Bydžovský, Hostinský, Petr, Sobotka, aby zvolil vhodné kandidáty. Na návrh profesora Petra bylo jednomyslně schváleno, aby se do Kanady vydali prof. Bydžovský a prof. Kössler. Třetím československým zástupcem na sjezdu pak byl prof. Vlad. Novák z Brna jako delegát brněnské České techniky. Bohumil Bydžovský byl jmenován delegátem České Akademie a Karlovy univerzity, Miloš Kössler zastupoval Královskou českou společnost nauk, společně byli delegáty Jednoty.

Během sjezdu diskutovali s ostatními účastníky nejen o vědeckých a životních poměrech u nás, ale zúčastnili se i různých exkurzí, promítání filmů a výstav. Aktivně se zapojili do programu sekcí věnovaných algebře, teorii čísel a analýze (sekce I) a geometrii (sekce II) svými sděleními. Kössler přednesl referát na téma *On a generalization of Fabry and Szász's theorems concerning the singularities of power series.*

Do programu sjezdu byl zařazen i výlet k Niagarským vodopádům a prohlídka hydrocentrály v Chippewě. Kössler však po návratu ze zámoří domů velmi rád vzpomínal i na cestu napříč Kanadou až k Tichému oceánu do Vancouveru a zpět, kterou organizátoři uspořádali pro evropské účastníky sjezdu po jeho skončení. Jednalo se o osmnáctidenní putování, jehož součástí byla návštěva řady univerzit, kolejí a observatoří mj. ve Winnipegu, Edmontonu a Viktorii, ale i prohlídka průmyslových závodů či přírodních zajímavostí.

Druhý sjezd matematiků zemí slovanských

Ve dnech 23.–28. září 1934 se v Praze konal II. sjezd matematiků zemí slovanských. Miloš Kössler byl spolu s Karlem Rychlíkem delegátem Jednoty československých matematiků a fyziků, členem organizačního výboru, a zároveň spolu s Vojtěchem Jarníkem vedl třetí sekci, věnovanou analýze. Kössler vystoupil s referátem na téma *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile* , jehož stručný abstrakt byl otištěn ve sborníku Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských (viz [K24']). Nutno však poznamenat, že konference nebyly v době první republiky příliš v módě, ani z celosvětového hlediska. Jedním z důvodů byl bezesporu nedostatek peněz na podobné akce.

V prosinci roku 1934 navrhli profesoři matematiky na schůzi profesorského sboru přírodovědecké fakulty, aby byl pozván profesor Félix Edouard Justin Emile Borel (1871–1956) z Paříže. Poté, co Ministerstvo školství a národní osvěty vyhovělo návrhu na jeho pozvání k přednáškám na přírodovědecké fakultě, byl Kössler zmocněn, aby s prof. Borelem přímo jednal a zařídil vše potřebné. V souvislosti s touto událostí Štefan Schwarz v článku [Katriňák, Znám (1979)] vzpomínal:

„Jednota mala na vtedajšie pomery rozsiahlu edičnú činnosť. Okrem toho boli skoro týždenne v Prahe prednášky. Aj keď návštevy neboli príliš veľké, vždy sa zišlo 20–30 účastnikov ... Pamätám si na prednášku E. Borela asi z roku 1936, ktorý bol v tom čase aj významným francúzskym verejným činiteľom. Prítomných bolo asi 200 ľudí. Prednášal niečo o počtu pravděpodobnosti, ale až príliš elementárne. Pamätám si, ako v mojej prítomnosti zúfalo nariekal prof. Kössler ‚Co si ten člověk o nás myslí?' a prof. Kořínek mu pritom temperamentne sekundoval." [Nemoga, Riean(1999), str.92]

Čtvrtý sjezd československých matematiků

Ve dnech 1. až 8. září 1955 v Praze proběhl 4. sjezd československých matematiků. Miloš Kössler se aktivně zapojil do programu II. sekce věnované matematické analýze. Dne 5. září zde přednesl příspěvek nazvaný *O jisté domněnce z theorie prostých řad mocninných.* Vzhledem ke skutečnosti, že toto sdělení nebylo uvedeno v původním seznamu Kösslerova díla [Jarník (1955)], bude mu věnována zvláštní pozornost v odstavci 7.1.

Jednota československých matematiků a fyziků

Mluvíme-li o prof. Kösslerovi v souvislosti s jeho činností ve vědeckých spolcích, nesmíme zapomínat na jeho přínos Jednotě československých matematiků a fyziků. Jejím členem se stal údajně už během studentských let; nejstarší záznamy o Kösslerově činnosti pro Jednotu najdeme v [Posejpal (1912)]. Ve správním roce 1910/11, kdy Kössler působil jako profesor c.k. vyššího reálného gymnázia v Domažlicích, pracoval coby jednatel Jednoty tamtéž; v seznamu členů Jednoty v den valné hromady 8. 12. 1911 byl uváděn jako činný člen s ročním příspěvkem 4K.

V červnu 1912 vypsala Jednota konkurs za udělení ceny ze Studničkova fondu v hodnotě 400 korun pro členy Jednoty, za českou publikaci z matematiky, fyziky nebo deskriptivní geometrie uveřejněnou v letech 1912–1915. Kössler se do soutěže přihlásil se svou prací *Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou.* Až do 27. června 1915, výročního dne narození zakladatele fondu, kdy měla být cena udělena, byla přihlášena jediná další práce, a to práce Josefa Krkošky *Základy pohybového příčinosloví ve světle svého vývoje*[62]). Na základě odborných posudků komise ve složení Fr. Nušl, K. Petr, V. Posejpal a V. Strouhal každá z obou přihlášených prací získala cenu ze Studničkova fondu v hodnotě 100 korun.

Dne 11. listopadu 1917 byl Kössler zvolen do výboru Jednoty. V roce 1919 se stal zakládajícím členem. (Manželka Zdenka patřila mezi „řadové“ – skutečné členy Jednoty.) V letech 1917–1926 zastával funkci knihovníka. Vezme-li se v úvahu, že sám s jediným pomocným knihovníkem museli zvládat katalogizaci i půjčování knih a časopisů v době, kdy knihovna Jednoty procházela významným obdobím rozvoje, neboť po 1. světové válce se značně rozrůstal její knihovní fond i počet odebíraných časopisů, jednalo se jistě o velmi náročnou práci. Přestože Kössler zůstával aktivním členem Jednoty (jako člen výboru působil do roku 1947), funkce knihovníka se v roce 1926 musel vzdát, neboť by nezvládal všechnu práci v knihovně a současně přednášky na fakultě.

S působením ve výboru Jednoty souviselo i členství v různých komisích zřizovaných Jednotou k rozličným účelům. Stručně zmíníme některé z těchto případů.

V roce 1916 se Jednota rozhodla spolu s Českou Maticí Technickou a jinými odbornými spolky zúčastnit se sběru materiálu pro Slovník jazyka českého, který připravovala Česká Akademie. Komise ve složení Hostinský, Kadeřávek, Kaván, Kössler, Mašek, Posejpal, Vorovka měla za úkol sestavit seznam matematických, fyzikálních a astronomických knih pro tvorbu materiálu pro odbornou terminologii a případně i odborný slovník.

V roce 1931/32 byl Kössler spolu s Ladislavem Červenkou[63]), B. Maškem a A. Žáčkem určen ke spolupráci na normalizaci Přírodovědeckého klubu.

V roce 1936/37 byl Kössler spolu s L. Červenkou, V. Hruškou a M. Valouchem zvolen členem stavební komise JČMF s cílem pracovat na přípravách k novostavbě nádvorního domu Jednoty v Praze II., Žitné ulici 25. Nová budova se měla stát i sídlem firmy *FYSMA, výroba vědeckých a učebních přístrojů, spol. s r.o.*, jež byla založena Jednotou na podzim roku 1935. Miloš Kössler spolu s řadou kolegů, mezi nimiž byli F. Boček, L. Červenka, J. Hrdlička, V. Ryšavý, B. Slavík, M. Šmok, S. Teplý, M.A. Valouch, F. Veselý, Fr. Vyčichlo, A. Wangler, A. Žáček a další, se stal podílníkem této společnosti.

Po dlouhá léta byl Miloš Kössler členem redakční rady *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky* pro část matematickou, řadu svých vědeckých statí publikoval právě v tomto časopise.

V roce 1938/39 zastával ve výboru Jednoty funkci jednatele a dále byl zvolen členem tzv. *reformní komise pro reálné předměty na středních školách*, spolu s ním byli členy této komise vysokoškolští profesoři Vladimír Kořínek, František Nachtikal, vrchní školní rada Václav Ingriš a středoškolští profesoři Stanislav Teplý, František Vyčichlo a Alois Wangler. Na ustavující schůzi komise 5. prosince 1938 byl Kössler zvolen referentem pro otázky všeobecné. Komise měla sledovat všechny snahy o reformu a připravovat návrhy na reformu, především reálných předmětů.

„Těžko lze slovy zhodnotit práci, kterou vykonal pro Jednotu v době okupace. V letech 1939 až 1943 byl předsedou Jednoty. Po uzavření vysokých škol stala se Jednota jediným střediskem našeho vědeckého života v matematice a fyzice. Bylo tehdy potřeba obratně jednat tak, aby byla zachována alespoň částečně publikační možnost pro matematiku a fyziku navzdory restrikčním předpisům nacistů a aby se zachovala knihovna Jednoty. To je jen stručný a neúplný popis těžkostí, které bylo třeba překonávat. Jen velké prozíravosti a klid-

nému a moudrému vedení Jednoty tehdejším jejím předsedou prof. Kösslerem a ředitelem M. Valouchem[64]) *vděčíme za to, že Jednota československých matematiků a fyziků prošla bez velké úhony a čestně touto těžkou dobou.* " [Kopřiva (1961), str. 230]

Spravedlivým oceněním Kösslerových zásluh o Jednotu bylo v dubnu 1959 na I. sjezdu JČMF jeho zvolení čestným členem.

Královská česká společnost nauk

Kromě působení v Jednotě byl Miloš Kössler členem i jiných vědeckých společností. Po schválení návrhu prof. Petra a Sobotky ze dne 13. prosince 1922 byl od roku 1923 přijat jako mimořádný člen Královské české učené společnosti, předchůdkyně dnešní Akademie věd. Řádným členem se stal od 10. ledna 1934.

I v této společnosti, podobně jako v Jednotě, pracoval na vyšších postech – nejprve od roku 1940 jako tajemník II. třídy – matematicko-přírodovědecké, později od roku 1944 zastupoval profesora Františka Závišku[65]), zatčeného v té době gestapem, ve funkci hlavního tajemníka. Po Záviškově smrti byl Kössler v letech 1945–1949 sám hlavním tajemníkem. Této pozice se vzdal ze zdravotních důvodů.

V letech 1958–1961 byl předsedou tzv. *Bolzanovské komise*, která byla původně založena 5. března 1924 při Královské české učené společnosti s cílem představit veřejnosti dílo filosofa a matematika Bernarda Bolzana. V průběhu své činnosti komise narážela na obrovské finanční potíže, v roce 1952 byla dokonce rozpuštěna v souvislosti se zánikem Královské české společnosti nauk. Když se po šesti letech Československá akademie věd rozhodla tuto komisi oživit, stal se právě Kössler jejím novým předsedou. Ostatními členy byli Otakar Borůvka[66]), J. Holubář, V. Kořínek, K. Rychlík a I. Seidlerová. Za tři roky své existence se však ani této sestavě nepodařilo splnit původní záměr celé komise. „Dluh" vůči Bolzanovi přetrval i nadále.

Matematická obec pražská

V říjnu 1950 byla založena *Matematická obec pražská*, jež sdružovala pracovníky a přátele matematiky z Prahy. V jejích řadách byli členové Jednoty, zaměstnanci Ústředního ústavu matematického, členové kateder matematiky přírodovědecké fakulty Karlovy univerzity a Českého vysokého učení technického, aspiranti matematiky, studenti a jiní. Tato společnost se scházela obvykle jednou za čtrnáct dnů k přednáškám a referátům, tyto schůzky navštěvovalo v průměru kolem čtyřiceti osob. 12. března 1951 zde Miloš Kössler přednesl přednášku na téma *O prostých polynomech a prostých funkcích.*

Odchod ze scény

Miloš Kössler zemřel tragicky dne 8. února 1961, když při procházce Riegrovými sady spadl do hlubokého výmolu, kde zůstal ležet bez pomoci a podchlazení organismu se mu stalo osudným.[67]) Pohřeb se konal 14. února v krematoriu ve Strašnicích. Univerzita Karlova tak ztratila nejen vynikajícího profesora, ale především jedinečnou osobnost. Připomeňme si na tomto místě slova akademika Eduarda Čecha:

„Mnohé bylo u Miloše Kösslera, co mne vždy mocně přitahovalo a v čem jsem viděl pro sebe vzor. Byl to především živelný zájem o matematickou vědu, na hony vzdálený jakémusi karierismu a pozůstávající jen a jen v zanícenosti pro její studium, bez něhož si život nedovedl představit. Byla to za druhé nesmírná poctivost a dobrota srdce, nemožnost komukoli

sebe méně ublížit a touha nezištně pomáhat všude, kde toho bylo třeba. Byla to za třetí bezvýhradná svědomitost, se kterou Kössler vykonával každý úkol, který mu byl svěřen; Kösslerovi bylo vždy naprosto cizí to, s čím se často setkáváme u vědeckých pracovníků mnohem méně významných: pro něho bylo nemožné nazírat na nějakou práci jako na nedosti důstojnou vědce a v důsledku toho ji odbývat, stejně tak pro něho bylo nemožné přezírat pomocný personál a chovat se k němu povýšeně. Byla to za čtvrté až upřílišněná skromnost, spojená také s malou průbojností, která snad spoluzavinila to, že právě Kössler, jehož pozornost byla v matematice vždy zaměřena právě k partiím nejvýznamnějším pro theorii i praxi, měl mezi svými četnými žáky poměrně jen málo opravdu vynikajících.“ [68])

K působení Miloše Kösslera v JČMF se vrací i stručný nekrolog uveřejněný v Časopise pro pěstování matematiky: [69])

ZEMŘEL PROFESOR MILOŠ KÖSSLER

„Dne 8. února 1961 zemřel v Praze ve věku 77 let prof. dr. Miloš Kössler, profesor matematiky na Karlově universitě, člen - korespondent ČSAV. Profesor Kössler byl vynikajícím pracovníkem v matematické analyse. Svému učitelskému povolání se věnoval s nesmírnou láskou a jeho obětavosti vděčně vzpomínají všichni jeho žáci. Profesor Kössler se mnohostranně zasloužil o rozvoj naší matematiky. V r. 1935-36 byl děkanem přírodovědecké fakulty Karlovy university a řadu let působil jako předseda JČMF. Článek o jeho životě a díle přineseme v některém z příštích čísel časopisu.“

Redakce

Tolik strohé informace, které jen těžko mohou vyjádřit lidskou stránku ztráty spojené s úmrtím Miloše Kösslera. Oč lidštější rozměr mají vzpomínky Františka Nožičky:

„Datum 8. února 1961 mi připomíná smuteční zástavu na budově naší fakulty a nečekanou její souvislost s profesorem Kösslerem, připomíná mi strohé ‚Víš to už?‘ z řídkých rozhovorů toho dne na našem pracovišti. Každý, ať mladý či starý učitel, sám pro sebe se zamyslel nad smutnou událostí toho dne, nad člověkem, který byl nejen vynikajícím vědcem a učitelem, ale též člověkem s nesmírnou dobrotou srdce, který neznal jakkoli ublížit. Vždyť pomáhal každému a všude, kde toho bylo třeba; přitom jeho ochota nepramenila z vědomí povinností nebo z životní filosofie. Byl prostě ušlechtilý v pravém slova smyslu. Vzpomínka na profesora Kösslera je milá tak, jak byl milý on sám, vzpomínka na něho vede a pomáhá.“ [Nožička (1962), str. 111]

Poznámky

[1]) Viz Matrika narozených ve farnosti sv. Haštala, mikrofilm HS N19, karton M7, Archiv hl. města Prahy.

[2]) Viz Matrika narozených ve farnosti sv. Ducha, mikrofilm DUCH N6, karton M1, Archiv hl. města Prahy.

[3]) Viz Matrika oddaných farnosti sv. Haštala, mikrofilm HS 010, karton M8, Archiv hl. města Prahy.

[4]) Vzhledem k faktu, že zemřela náhle na Žofíně, je úmrtní akt zapsán nejen v matrice u sv. Haštala, ale i v Matrice zemřelých farnosti sv. Vojtěcha, mikrofilm VO Z10, karton M47, Archiv hl. města Prahy.

[5]) Pokud by snad hloubavý čtenář zaváhal při srovnávání věku sirotků s datem sňatku rodičů,

je pravdou, že druhorozená dcera Karolina se narodila už pět měsíců po svatbě. Kösslerův otec byl v tomto směru na svou dobu velmi pokrokový.

[6]) Viz Matrika oddaných farnosti sv. Haštala 1873 – 1885, mikrofilm HS 011, karton M8, Archiv hl. města Prahy.

[7]) Viz Matrika narozených ve farnosti sv. Haštala, mikrofilmy HS N16 – N20, karton M7, Archiv hl. města Prahy a Matrika zemřelých farnosti sv. Haštala, mikrofilm HS Z9, karton M70, Archiv hl. města Prahy.

[8]) Celým jménem Božena Josefa Rosalie, narozena 26. října 1888, křtěna u sv. Haštala dne 4. listopadu 1888. Viz Matrika narozených ve farnosti sv. Haštala, mikrofilm HS N20, karton M7, Archiv hl. města Prahy.

[9]) Viz Matrika zemřelých farnosti sv. Haštala, mikrofilm HS Z9, karton M70, Archiv hl. města Prahy.

[10]) Jedná se o životopis psaný pro účely zaměstnavatele, uložený v osobní složce Miloše Kösslera v Archivu Univerzity Karlovy.

[11]) Viz Zápis úmrtní, AX 36/1910, fond Okresní městský delegovaný soud civilní pro Staré město Josefov, Archiv hl. města Prahy.

[12]) Vojtěch Jarník (1897–1970), český matematik světového formátu, vynikající pedagog, profesor přírodovědecké, později matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Řádným profesorem byl jmenován od roku 1935, v roce 1947/48 byl děkanem přírodovědecké fakulty, v letech 1950–1953 byl prorektorem Univerzity Karlovy. Specializoval se na teorii čísel (mj. problematiku mřížových bodů a diofantických aproximací) a teorii funkcí reálné proměnné. Byl autorem čtyřsvazkového díla *Diferenciální počet I, II* a *Integrální počet I, II.*

[13]) Viz Hlavní školní katalogy C. a k. akademického gymnázia v Praze z let 1895–1903, uložené v Archivu hlavního města Prahy.

[14]) Viz Hlavní protokol o maturitní zkoušce ve školním roce 1902/03 C. a K. akademického gymnázia v Praze, uložený v Archivu hlavního města Prahy.

[15]) Seznam byl vytvořen na základě údajů v Katalozích posluchačů filosofické fakulty, fond Filosofové řádní od A do L, Zimní běh 1903 až Zimní běh 1907, uložených v Archivu UK. V seznamu je vždy uveden předmět, vyučující a předepsaný týdenní hodinový rozsah.

[16]) V tomto běhu požíval Kössler pražského městského stipendia v sumě 400K uděleného od rady král. hl. města Prahy dne 14. 3. 1907 N. 5423 - XVII.

[17]) František Josef Studnička (1836–1903), významná osobnost českého vědeckého i kulturního života druhé poloviny 19. století, profesor matematiky na pražské technice, pražské i české univerzitě. Zabýval se matematikou, fyzikou, astronomií, meteorologií, historií a popularizací vědy. Byl autorem prvních českých vysokoškolských učebnic pro posluchače techniky.

[18]) Eduard Weyr (1852–1903), český matematik, profesor matematiky na české technice v Praze, autor mnoha prací z geometrie (především projektivní), algebry a diferenciálního počtu.

[19]) Karel Petr (1868–1950), jeden z největších českých matematiků, profesor Karlovy univerzity. Po absolutoriu filosofické fakulty na pražské univerzitě několik let působil jako gymnaziální profesor, habilitoval se na Vysoké škole technické v Brně, poté požádal o přenesení habilitace na Karlovu univerzitu, kde setrval celých 35 let až do odchodu na odpočinek. Po zřízení přírodovědecké fakulty v roce 1920 byl jejím prvním děkanem. Jeho nejmilejšími obory byla teorie čísel a algebra. Celkem napsal 108 vědeckých prací, za svou činnost v matematice se dočkal mnoha poct a ocenění (např. čestného doktorátu přírodních věd Masarykovy univerzity v Brně (1938), ceny země české v oboru přírodovědy (1947), atd.).

[20]) Eduard Čech (1893–1960), český matematik. Od roku 1923 působil na Masarykově univerzitě v Brně, po 2. světové válce byl profesorem Univerzity Karlovy v Praze, zasloužil se o vybudování Matematického ústavu ČSAV v Praze. Zabýval se především topologií a diferenciální geometrií, byl autorem série středoškolských učebnic.

[21]) František Nušl (1867–1951), český fyzik, čestný člen Jednoty, profesor Karlovy univerzity. Věnoval se praktické a geodetické astronomii. Ve spolupráci s Josefem Janem Fričem popsal a zkonstruoval nové typy astronomických přístrojů, podílel se na výstavbě hvězdárny v Ondřejově. Byl ředitelem státní hvězdárny v pražském Klementinu.

[22]) Článek vydaný v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky 57 (1928), str. 169–182. Volným pokračováním této práce byly články [Kořínek (1938)], [Kořínek (1948)].

[23]) Sborník byl vydán JČMF redakcí B. Bydžovského, Fr. Závišky a A. Žáčka v Praze 1928.

[24]) Viz 44. roční zpráva C. a k. akademického gymnázia v Praze 1907–1908, Archiv hlavního města Prahy.

[25]) Vladimír Kořínek (1899–1981), český matematik, profesor matematiky na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy od roku 1940, v letech 1953 – 1955 byl děkanem matematicko-fyzikální fakulty UK. Oborem jeho zájmu byla teorie grup, svazů a algeber, aritmetická teorie kvadratických forem. Byl autorem známé knihy *Základy algebry.*

[26]) V archivních materiálech se rovněž objevuje podoba jména Wintrichová (viz např. ve výročních zprávách ústavu, kde učila).

[27]) Viz zápis v Knize oddaných kostela Nejsv. Trojice v Podskalí - Praze II., uložené ve Státním oblastním archivu v Praze. Oba snoubenci vstoupili do svazku manželského ve věku 27 let, ohlášky proběhly 16., 23. a 30. července 1911 v Domažlicích a rovněž v Praze v Podskalí. Svědky byli František Tůma, úředník, a František Kössler, úředník zemského výboru na Smíchově. Oddávajícím knězem byl Josef Jiřičný.

[28]) Vzhledem k válečným událostem a pozdější politické situaci v 50. letech se nelze divit, že se rodina ke styku se svou příbuznou žijící v Německu „úředně nehlásila“.

[29]) Pro zajímavost nahlédněme do učebních osnov předmětů, jež Zdenka Vintrichová na tomto lyceu vyučovala.

Matematika – *Úkol učebný arithmetický*

. . . Obratně a jistě užívati čtyř základních způsobů počítání prostými a užitými čísly celými a zlomky. Počítání z paměti. Užití nabytých vědomostí na poměry občanského života, a to se zřením k hospodářství, spořitelnám, pojišťovnám a peněžním ústavům. . . .

. . . Volba látky dějž se stále se zřením k potřebám života praktického, zvláště pak občanské domácnosti. Vymýceny buďtež úkoly s nepravděpodobnými čísly a zlomky. . . .

Fyzika – *Úkol učebný*

Poznání nejpatrnějších zjevů přírodních dle pozorování a pokusů se stálým zřením k příslušným úkazům života denního.

Uvedené informace byly čerpány z První výroční zprávy dívčího lycea na Král. Vinohradech za školní rok 1908/1909, uložené v Archivu hlavního města Prahy.

[30]) Viz Výroční zprávy Dívčího reformního reálného gymnázia ve Slezské ul. v Praze 1908–1938, Archiv hlavního města Prahy.

[31]) Informace o rodinném zázemí vycházejí z údajů uvedených v osobní složce Miloše Kösslera uložené v Archivu Univerzity Karlovy; osobním spise Miloše Kösslera, fondu Ministerstva školství, karton č. 89, uloženém ve Státním ústředním archivu; osobní složce Miloše Kösslera,

fondu Čs. akademie věd, karton č. 39 a fondu KČSN, karton 19, uložených v archivu Akademie věd ČR, a dále z výše jmenovaných matrik.

[32]) Jan Sobotka (1862–1931), český matematik, od roku 1904 profesor matematiky na Karlově univerzitě. Oborem jeho zájmu byla deskriptivní geometrie, především axonometrie, diferenciální a projektivní geometrie.

[33]) Viz Protokol o přísných zkouškách k dosažení hodnosti doktorské na filosofické fakultě C.k. české university v Praze, zápis č. 915, uloženo v Archivu UK Praha.

[34]) Návrh na Kösslerovo jmenování docentem profesorský sbor schválil na schůzi 19. února 1920, kollokvium (22. dubna 1920) i přednáška (27. května 1920) bylo vykonáno uspokojivě. Jednalo se o čestný titul - možnost přednášet na univerzitě byla pro nositele velkým oceněním. Místo docenta neobnášelo žádný stálý plat, pouze občasné skromné jednorázové finanční odměny.

[35]) K. čísl. 968 z 11. 11. 1919, uloženo v Archivu UK.

[36]) Matyáš Lerch (1860–1922), první profesor matematiky na Masarykově univerzitě v Brně od roku 1920, od roku 1921 řádný člen České Akademie věd, již v roce 1922 však zemřel na zápal plic. Byl autorem více než dvou set vědeckých prací, zabýval se teorií nekonečných řad, teorií gamma funkce, teorií eliptických funkcí, integrálním počtem, teorií čísel a geometrií.

[37]) Karel Čupr (1883–1956), český matematik. Po absolvování filosofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze působil jako středoškolský profesor v Brně, kde od roku 1914 zastával místo asistenta při II. ústavu matematiky na ČVUT. Už jako soukromý docent nahradil v roce 1921/1922 odcházejícího Lercha. Od roku 1928 byl jmenován řádným profesorem. Zabýval se aplikacemi matematiky v elektrotechnice, geodézii a statistice, dále pak historií matematiky, především dějinami matematiky na Moravě.

[38]) Karel Rychlík (1885–1968), český matematik, profesor Českého vysokého učení technického v Praze. V širokém spektru jeho zájmů vynikaly oblasti moderní abstraktní algebry, teorie čísel a historie matematiky; řada jeho prací byla věnována osobnosti Bernarda Bolzana. S Milošem Kösslerem se s vysokou pravděpodobností setkal již během studia - Rychlík studoval na Akademickém gymnáziu v Praze o ročník níže než Kössler.

[39]) Viz Zpráva komise pro nové obsazení II. profesury mathematiky, k.č. 18084/21, fond Ministerstvo školství, osobní spis Miloše Kösslera, karton č. 89, Státní ústřední archiv Praha.

[40]) Viz Protokoly schůzí profesorského sboru, 1921–1938, fond Filosofická fakulta, Archiv UK.

[41]) Bohumil Bydžovský (1880–1969), český matematik, profesor Karlovy univerzity. Ve studijním roce 1930/31 byl děkanem přírodovědecké fakulty, v roce 1946/47 zastával funkci rektora Karlovy univerzity. Za jeho rektorského působení byly zřízeny při univerzitách nové pedagogické fakulty, které realizovaly dávnou touhu učitelstva po vysokoškolském vzdělání. Vědecká činnost prof. Bydžovského se soustředila na oblast geometrie. Dále byl autorem řady vysokoškolských i středoškolských učebnic, zasadil se zásadním způsobem o reformu českého školství, řadu let působil ve funkci předsedy Jednoty. Jeho práce byla všeobecně uznávána u nás i v zahraničí.

[42]) Viz jmenovací dekret č. 12762 uložený ve Státním ústředním archivu v Praze, fond Ministerstvo školství, osobní spis Miloše Kösslera, karton č. 89.

[43]) Viz jmenovací dekret kat. č. 82/28 uložený ve Státním ústředním archivu v Praze, fond Ministerstvo školství, osobní spis Miloše Kösslera, karton č. 89.

[44]) Přípis MŠANO č.j. 138647/26-IV., fond Ministerstvo školství, osobní spis Miloše Kösslera, karton č. 89, Státní ústřední archiv Praha.

[45]) Jindřich Matiegka (1862–1941), zakladatel české antropologie, působil jako zemský zdravotní rada, byl profesorem přírodovědecké fakulty UK. Během života dosáhl uznání doma i ve světě, sepsal téměř tři sta odborných studií, stál u založení bohnické psychiatrické léčebny.

[46]) Dopis Miloše Kösslera adresovaný Hospodářské správě provozu vysokých škol v Praze, spis č. 809/37, fond Ministerstvo školství, Státní ústřední archiv Praha.

[47]) Dopis od Hospodářské správy provozu vysokých škol v Praze adresovaný děkanství přírodovědecké fakulty, spis č. 809/37, č.j. 2877/36, fond Ministerstvo školství, Státní ústřední archiv Praha.

[48]) Dopis Miloše Kösslera adresovaný Hospodářské správě provozu vysokých škol v Praze, spis č. 809/37, kat. č. 2877/36, fond Ministerstvo školství, Státní ústřední archiv Praha.

[49]) Jiří Kopřiva (1925), český matematik. Na přírodovědecké fakultě v Praze vystudoval matematiku a deskriptivní geometrii, od roku 1962 působil na Vysokém učení technickém v Brně v Oblastním výpočetním centru. Mezi oblasti jeho vědeckého zájmu patří teorie čísel, obecná topologie a informatika.

[50]) František Nožička (1918–2004), český matematik. V roce 1953 se habilitoval na Univerzitě Karlově. Kromě univerzity působil i na fakultě technické a jaderné fyziky v Praze a na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci. Jeho práce spadají především do oblasti tenzorové diferenciální geometrie, analytické mechaniky a speciální teorie relativity, dále lineárního a dynamického programování a teorie optimalizačních procesů. Řadu let byl předsedou pražské pobočky JČMF.

[51]) Jaroslav Kurzweil (1926), český matematik, od roku 1966 univerzitní profesor, nositel řady cen a vyznamenání. Svou vědeckou dráhu zahájil jako žák Vojtěcha Jarníka pracemi z teorie diofantických aproximací. Je autorem více než osmdesáti původních vědeckých publikací, řady knih věnovaných diferenciálním rovnicím. Vytvořil novou teorii integrace, na jeho počest je dnes daný typ integrálu nazýván Kurzweil-Henstockův.

[52]) Štefan Schwarz (1914–1996), slovenský matematik. Poslední doktorand Karla Petra, do 1. 3. 1939 působil na Univerzitě Karlově jako Petrův asistent, poté se vrátil na Slovensko. Od roku 1943 byl docentem matematiky a teoretické fyziky, roku 1950 se stal profesorem matematiky. Jeden z průkopníků moderní algebry na Slovensku, zabýval se teorií konečných polí, pologrup, matic a teorií čísel.

[53]) Václav Hlavatý (1894–1969), český matematik. Roku 1925 se habilitoval na Univerzitě Karlově, roku 1931 byl jmenován mimořádným, roku 1936 řádným profesorem geometrie. Od roku 1948 žil v exilu v USA, až do své smrti působil na matematickém institutu v Bloomingtonu. Napsal více než 150 vědeckých statí, především z diferenciální a algebraické geometrie a obecné teorie relativity.

[54]) Emil Schoenbaum (1882–1967), český matematik, profesor pojistné matematiky, pracoval rovněž ve Všeobecném penzijním ústavu. Od roku 1948 působil v Mexickém ústavu sociálního pojištění. Soustředil se na matematickou teorii důchodového a nemocenského pojištění, dále na užití integrálních a diferenciálních rovnic v pojistné matematice.

[55]) Úryvek z dopisu, který psal Kössler coby děkan Ministerstvu školství a národní osvěty ze dne 22. února 1936, č. 28 584, karton č. 1073, fond Ministerstvo školství, Státní ústřední archiv Praha.

[56]) Soupis pedagogické činnosti Miloše Kösslera je sestaven podle vytištěných seznamů přednášek na univerzitě v letech 1920–1961.

[57]) V té době bylo při volbě děkana fakulty (a podobně i rektora univerzity) dodržováno zpravidla „zvyklostní právo“ - děkan byl volen vždy na jednoleté období, přičemž pořadí kandidátů se

řídilo datem udělení hodnosti řádného profesora (s výjimkou osob starších 70 let a osob, které se svého pořadí vzdaly). O rok později zastával odstupující děkan funkci proděkana. Ve funkci rektora se pak střídali bývalí děkani filosofické, lékařské, právnické a přírodovědecké fakulty.

[58]) Volný překlad do angličtiny lze najít v příspěvku Recalling Academian Vojtěch Jarník ve sborníku Life and Work of Vojtěch Jarník.

[59]) Vzhledem ke svým postojům za války neměl Kössler, na rozdíl od řady jiných, po jejím skočení potíže s tzv. *očistnou komisí* zřízenou na fakultě z důvodu prošetření chování některých pedagogů v době německé okupace.

[60]) Viz osobní složka Miloše Kösslera, fond Čs. akademie věd, karton č. 39, uloženo v archivu Akademie věd ČR.

[61]) Jednalo se o ... cit. *radikální dvojperiodický nočník Č.s. Chlastatel.* K nahlédnutí v Archivu Akademie věd ČR, fond Fr. Záviška, inv. č. 133, karton 7.

[62]) Práce byla vydána vlastním nákladem v Pelhřimově v roce 1914, v rozsahu 176 stran.

[63]) Ladislav Červenka (1874–1947), zemský školní inspektor pro střední školy, vynikající pedagog, v letech 1934 – 1936 předseda Jednoty, její dlouholetý aktivní člen.

[64]) Miloslav Valouch (1878–1952), český matematik. Působil jako středoškolský profesor, ředitel Jednoty a ředitel Přírodovědeckého vydavatelství v Praze. Byl autorem známých pětimístných logaritmických tabulek, jež se dočkaly jen za autorova života patnácti vydání. Přeložil Archimédova pojednání Měření kruhu a Počítání písku.

[65]) František Záviška (1879–1945), český fyzik, profesor Karlovy univerzity. V roce 1903 obhájil disertační práci na téma *Verifikace Fresnelových zákonů dvojlomu u dvouosých krystalů*, v roce 1906 se habilitoval z teoretické fyziky. Od roku 1919 byl řádným profesorem teoretické fyziky, v akademickém roce 1926/27 byl děkanem přírodovědecké fakulty české univerzity v Praze. 21. ledna 1944 byl zatčen gestapem pro podezření z účasti v odboji, vězněn v Praze a Brně, zemřel při návratu z koncentračního tábora Osterode dne 17. dubna 1945. Mezi jeho významné práce patří *Mechanika, Termodynamika, Kinetická theorie plynů.*

[66]) Otakar Borůvka (1899–1995), český matematik. Studoval nejprve stavební inženýrství na Českém vysokém učení technickém v Brně, pod vlivem Matyáše Lercha však přešel na přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity, kde v roce 1923 získal doktorát. Řádným profesorem matematiky byl jmenován v roce 1946. Věnoval se především algebře, diferenciálním rovnicím, nejčastěji však bývá citován v souvislosti se svým článkem *O jistém problému minimálním* jakožto průkopnické práci z teorie grafů.

[67]) Informace vycházejí z osobních vzpomínek pana Miloše Kösslera, vnuka.

[68]) Úryvek z posudku o Miloši Kösslerovi psaného Eduardem Čechem pro Akademii věd ze dne 29. března 1953, uloženého v archivu Akademie věd, osobní složce Miloše Kösslera, fondu Čs. akademie věd, karton 39.

[69]) Viz Časopis pro pěst. mat. **86** (1961), str. 253, rubrika Zprávy.

Použité zdroje

BEČVÁŘ, J. a kol. *Eduard Weyr (1852–1903).* Praha: Prometheus, 1995. Edice Dějiny matematiky, sv. 2.

BEČVÁŘ, J. (ed.) *Jan Vilém Pexider (1874–1914).* Praha: Prometheus, 1997. Edice Dějiny matematiky, sv. 5.

BOUŠKOVÁ, H. *Život a dílo Jana Sobotky.* Praha: Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta. Matematický ústav Univerzity Karlovy, 1995. Vedoucí diplomové práce Jindřich Bečvář.

BRDIČKA, M. Vzpomínka na prof. PhDr. Františka Závišku. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **20**, str. 248–252, 1975.

CRKALOVÁ, Z. *Život a dílo Karla Petra.* Praha: Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta. Matematický ústav Univerzity Karlovy, 1992. Vedoucí diplomové práce Jindřich Bečvář.

ČECH, E. Sedmdesátiny profesora Kösslera. *Čas. pro pěst. mat.* **79**, str. 374–375, 1954.

ČIŽMÁR, J. Začiatky modernej algebry na Slovensku (Š. Schwarz, M. Kolibiar, J. Jakubík). In *Matematika v proměnnách věků II.* Praha: Prometheus, 2001. Edice Dějiny matematiky, sv. 16.

HAVRÁNEK, J. et al. *Dějiny Univerzity Karlovy*, díl IV., 1918–1990. Praha: Univerzita Karlova, Karolinum, 1998.

HOŘEJŠ, J. Doc. Jiří Kopřiva šedesátiletý. *Čas. pro pěst. mat.* **110**, str. 333–336, 1985.

HYKŠOVÁ, M. *Karel Rychlík (1885–1968).* Praha: Prometheus, 2003. Edice Dějiny matematiky, sv. 22.

JARNÍK, J. et al. Jaroslav Kurzweil šedesátníkem. *Čas. pro pěst. mat.* **111**, str. 91–111, 1986.

JARNÍK, V. Vědecké práce M. Kösslera. *Čas. pro pěst. mat.* **80**, str. 106–117, 1955.

KATRIŇÁK, T., ZNÁM, Š. Pätnásť otázok akademikovi Štefanovi Schwarzovi. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **24**, str. 245–253, 1979.

KOPŘIVA, J. Prof. PhDr. Miloš Kössler zemřel. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **6**, str. 226–230, 1961.

KOŘÍNEK, V. Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desetiletí 1928–1938. *Čas. pro pěst. mat. a fyz.* **67**, str. D245–253, 1938.

KOŘÍNEK, V. Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desetiletí 1938–1948. *Čas. pro pěst. mat. a fyz.* **73**, str. D9–18, 1948.

Life and Work of Vojtěch Jarník. Ed. Novák Břetislav. Praha: Society of Czech Mathematicians and physicists, Prometheus, 1999.

Malá československá encyklopedie, III. díl. Praha: Academia, 1986.

Matematika v b mol: Štefan Schwarz – matematik a pedagóg. Ed. Nemoga, Karol - Riečan, B. Bratislava: Veda, vydavatelstvo Slovenskej akadémie vied, 1999.

NĚMCOVÁ, M. *František Josef Studnička (1836–1903).* Praha: Prometheus, 1998. Edice Dějiny matematiky, sv. 10.

NETUKA, I. Vzpomínka na profesora Vojtěcha Jarníka. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **43**, str. 171–173, 1998.

NOVÁK, F. A., SLAVÍK, F. a další. *25 let přírodovědecké fakulty University Karlovy.* Praha: Prometheus, 1946.

NOŽIČKA, F. Vzpomínka na profesora Miloše Kösslera. *Čas. pro pěst. mat.* **87**, str. 111–113, 1962.

POSEJPAL, V. *Dějepis Jednoty českých mathematiků.* Praha: nákladem Jednoty českých mathematiků, 1912.

Seznam osob a ústavů university Karlovy v Praze, jakož i státních zkušebních komisí ve studijních letech 1920–1931.

SCHWARZ, Š. Matematika na Univerzite Karlovej v 30. rokoch a dnešok. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **30**, str. 57–68, 1985.

SCHWARZ, Š. Niekoľko spomienok na akademika Vojtěcha Jarníka. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **35**, str. 340–345, 1990.

ŠPAČEK, L. Příspěvek k teorii funkcí prostých *Čas. pro pěst. mat. a fyz.* **62**, str. 12–19, 1933.

VESELÝ, F. *Sto let Jednoty českých matematiků a fysiků.* Praha: SPN, 1962.

Významní matematici v českých zemích - Miloš Kössler. Ed. Šišma, P. Dostupné na www adrese `http://www.math.muni.cz/math/biografie/milos_koessler.html`.

Kapitola 2.
Charakteristika Kösslerova díla

2.1. Základní informace

„*Hledej pravdu v myšlence*
a nikoli v knihách tlejících.
Chceš-li vidět měsíc,
dívej se na oblohu a nikoli do louže.“

Perské přísloví

Vskutku precizně sestavený přehled díla profesora Kösslera sepsal v roce 1955 akademik Vojtěch Jarník. Seznam byl uveřejněn v Časopise pro pěstování matematiky jako součást článku [Jarník (1955)] vydaného u příležitosti Kösslerových narozenin, obsahuje více než třicet původních vědeckých pojednání (včetně jedné učebnice) publikovaných česky, německy, rusky, anglicky a francouzsky, a to především v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky, Rozpravách České akademie a Věstníku Královské české společnosti nauk. Citovaný seznam, opravený a doplněný o citace jednotlivých prací v referativních časopisech, je součástí odstavce 7.1.

Původní vědecké práce z dílny profesora Kösslera můžeme rozdělit v zásadě do dvou skupin. Výraznou převahu mají články vztahující se k problematice **teorie analytických funkcí**. V další části si uvedeme jejich stručný přehled včetně základních myšlenek v nich obsažených, avšak jejich podrobným rozborem se zabývat nebudeme. Zaměříme se především na druhou, méně početnou skupinu článků týkajících se **teorie čísel**.

Pohlédneme-li na Kösslerovo dílo z pohledu časového, pak objevíme řadu samostatných pojednání mezi několika skupinami více článků na určité téma odpovídajících témuž období.

Pojednání [K1] a [K2] spadají do počátků Kösslerova suplentského údělu na gymnáziu v Praze před první světovou válkou. Jedná se o drobné příspěvky, k jejichž tematice se autor později nevracel.

V rozpětí let 1915–1917 jsou v Kösslerově díle patrné dvě velmi výrazné linie. První z nich se zabývá problematikou prvočísel ([K3], [K6], [K7]) a počtu dělitelů celých čísel ([K4]), a tak bychom mohli toto období nazývat *1. číselně-teoretickým obdobím* v Kösslerově díle. Zároveň však v této době Kössler publikoval své nejrozsáhlejší původní vědecké články týkající se rozvojů analytických funkcí v řady ([K5a], [K5b]), na jejichž základě se po 1. světové válce habilitoval na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity.

Následovala čtyřletá publikační odmlka, pravděpodobně související s přípravou na rigorózní zkoušky, přednáškovou činností v Jednotě a pozvolným přechodem z gymnázia na univerzitu, a tedy značným časovým zatížením.

Zatímco článek [K8] z roku 1922 je drobnou statí reagující na články prof. Lásky a Petra z roku 1913, práce [K9]–[K11] z let 1921 až 1923 se nesou v jednotném duchu - nosnou otázkou je studium analytického pokračování funkcí inspirované dílem Emila Borela z roku 1917. Články [K9], [K11] se přitom zabývají přímo teorií Borelova pokračování, pojednání [K10] je jakýmsi drobným odbočením, jehož cílem bylo podrobně popsat tematiku souměřitelnosti úhlů - pojem, s nímž Kössler v článku [K11] operoval.

První cizojazyčné pojednání [K12] z roku 1922 se zabývá možnostmi zobecnění Lagrangeova postupu při řešení algebraických rovnic. Z období 1922–1924 pochází i pět dalších pojednání [K13]–[K17], společně diskutujících o singularitách mocninných řad, ležících na konvergenční kružnici. Poslední práce na toto téma [K17] přitom shrnuje Kösslerův příspěvek přednesený na matematickém kongresu v Torontu, jenž byl završením Kösslerova výzkumu v této oblasti.

V nadcházejících letech vydal Kössler tři zcela rozdílné práce úzce související s jeho působením na univerzitě. První z nich ([K18]) čerpala z přednášek z teorie pravděpodobnosti, které vedl od roku 1922/23, jedná se však o nepříliš hluboké pojednání, spíše o nápad na zjednodušení jednoho často používaného vzorce, s nímž se ve výuce setkával. Svým rozsahem a významem je mnohem důležitější práce [K33] z roku 1926, jediná tiskem vydaná Kösslerova učebnice *Úvod do počtu diferenciálního*, určená posluchačům přírodovědecké fakulty. Je tedy naprosto zřejmé, že období 1924–1929 bylo v Kösslerově díle jednoznačně ovlivněno jeho pedagogickou činností. Do tohoto časového intervalu zapadá i práce [K34] věnovaná Karlu Petrovi, tedy rovněž nevykazující výrazné vlastní výsledky, neboť se jedná o článek vzpomínkový a kompilační.

V roce 1929 byl vydán článek [K19], coby osamocený příspěvek k teorii čísel, pozoruhodný tou skutečností, že se jedná o jediné Kösslerovo dílo z této oblasti matematiky vydané v době míru – všechny ostatní práce věnované „královně matematiky“ teorii čísel Kössler publikoval v období 1. nebo 2. světové války.

Pro roky 1930–1935, z nichž pochází práce [K20]–[K24], je příznačné téma ohraničených mocninných řad ([K20] a [K24]) a prostých funkcí v souvislosti s Bieberbachovou domněnkou ([K21]–[K23]). Ačkoli Kössler v této oblasti dosáhl dobrých a zpřesňujících výsledků, obdobných úspěchů v téže době dosáhl G. M. Golusin. Samotná Bieberbachova domněnka čekala na důkaz ještě dalších padesát let.

Na dlouhých sedm let se Kössler odmlčel, aby v průběhu 2. světové války ve svém *2. číselně-teoretickém období* v rozpětí let 1941–1943 vydal hned tři rozsáhlé práce věnované rozvojům Riemannovy funkce $\zeta(s)$ a obecným identitám v teorii čísel, jimž věnoval i značnou část poznámek ve svých denících z tohoto období.

Zdravotní problémy a válečné události pak opět způsobily odmlku v Kösslerově původní vědecké tvorbě. V 50. letech bylo patrné, že churavé zdraví nedovolovalo autorovi dlouhé soustředění na jediný problém, a tak práce [K28]–[K35] mají rozdílnou tematiku, od algebraických polynomů přes mocninné řady až k prostým funkcím a reálným charakteristikám. Lze konstatovat, že v tomto posledním období se Kössler často vracel k otázkám, jimiž se zabýval již dříve, a publikoval drobnější příspěvky zaměřené na jednotlivé užší otázky. Od svého odchodu do důchodu v roce 1956 již Miloš Kössler nevydal žádné vědecké pojednání, v tomto roce končí i zápisky do deníků, což zdůvodňoval autor sám přílišným fyzickým vyčerpáním.

Zaměříme-li se na ohlas a citace Kösslerových článků v odborné literatuře, pak v zahraničních publikacích najdeme především odkazy na práce z období první poloviny 20. let 20. století (např. [Lösch (1929)], [Grunsky (1933)], [Levi (1936)]) a dále na Kösslerovy práce z teorie čísel (např. [Dickson (1918)], [Walfish (1957)], [Narkiewicz (2000)]).

V naší literatuře je často citován Kösslerův *Úvod do počtu diferenciálního* – viz např. [Dusl (1941)], [Jarník (1941)], [Jarník (1946)], [Výborný (1966)], [Crkalová (1992)].

Vzhledem ke své povaze průkopnické práce v daném oboru se velkým počtem citací může pyšnit práce [K32] (mj. [Nešetřil (1979)], [Šišma (1996)], [Šišma (1997)], [Šišma (1998)], [Korte, Nešetřil (2001)], [Ivanov, Tuzhilin (2001)], [Ivanov, Tuzhilin (2002)]).

2.2. Práce z oblasti teorie analytických funkcí

> *„Matematikovy výtvory, stejně jako malířovy či básníkovy, musí zaujmout svojí krásou … Krása je základním měřítkem a nepěkná matematika nikde ve světě dlouho neobstojí.* “
>
> G. H. Hardy

O zonální funkci harmonické [K1]

V práci [K1] se Kössler zabýval důkazem tvrzení, že v případě, kdy funkce $\varphi(r, z)$ označuje řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0\,,$$

pak funkce

$$\Phi(r, z) = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(r \sin\vartheta, z)\, \sin\vartheta\, d\vartheta \tag{2.2.1}$$

vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0\,.$$

Dokazoval, že *ke každé harmonické funkci zonální přísluší jistá funkce harmonická v rovině určená rovnicí* (2.2.1) a obráceně, *ke každé dvojrozměrné funkci harmonické přísluší jistá funkce zonální určená předpisem*

$$\varphi(r, z) = \int_0^{2\pi} \Phi_1(r \sin\vartheta, z)\, d\vartheta\,,$$

kde funkce Φ_1 je vázána jistými podmínkami. Článek je pěknou ukázkou užití diferenciálního počtu více proměnných, využívá základní poznatky matematické analýzy, vlastnosti harmonické, resp. zonální funkce a Laplaceovy rovnice

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = 0\,,$$

transformované do válcových souřadnic. Rozsahem i náplní se jedná o krátké pojednání menšího významu, jež odpovídá skutečnosti, že jde o autorovu publikovanou prvotinu.

Řešení algebraické rovnice výrazy meznými [K2]

V tomto pojednání si Kössler kladl otázku, za jakých okolností je možno vyjádřit všechny kořeny normované algebraické rovnice $n-$tého stupně

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2.2.2}$$

jako funkce obecných koeficientů rovnice a_i, $i = 1, \ldots, n$. Předvedl možnost rozšíření metody, kterou vytvořil Daniel Bernoulli (1700–1782). Myšlenka takového způsobu rozšíření pochází od Carla Gustava Jacoba Jacobiho (1804–1851).

Bernoulliho metoda přitom udává způsob, jak určit *v absolutní hodnotě největší kořen* rovnice (2.2.2) coby limitu posloupnosti čísel s_1/s_0, s_2/s_1, $\ldots$, s_{k+1}/s_k, $\ldots$, kde $s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k$ (α_i jsou kořeny dané rovnice).

Za výše uvedeného značení a dodatečného předpokladu $|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots$ (kořeny rovnice jsou řazené sestupně podle absolutní velikosti) dospěl Kössler k limitnímu vyjádření pro $k-$tý kořen rovnice (2.2.2)

$$\alpha_k = \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta^{(k)}(m+1)\cdot\Delta^{(k-1)}(m)}{\Delta^{(k)}(m)\cdot\Delta^{(k-1)}(m+1)}\,, \tag{2.2.3}$$

kde determinant

$$\Delta^{(k)}(m) = \begin{vmatrix} s_{m+k-1} & s_{m+k-2} & \cdots & s_m \\ s_{m+k} & s_{m+k-1} & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m+2k-2} & s_{m+2k-3} & \cdots & s_{m+k-1} \end{vmatrix}.$$

Vzhledem ke skutečnosti, že čísla s_k lze pomocí rekurentních vzorců

$$\begin{gathered} s_0 = n\,,\ s_1 + a_1 = 0\,,\ \ldots\,, s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + n a_n = 0 \\ \ldots \qquad s_{n+k} + a_1 s_{n+k-1} + a_2 s_{n+k-2} + \cdots + a_n s_k = 0\,, \qquad \ldots \end{gathered}$$

vyjádřit jako funkce obecných koeficientů rovnice (2.2.2), je vztah (2.2.3) hledaným zobecněním. Jeho význam je však spíše teoretický, neboť je pro hledání kořenů algebraické rovnice (2.2.2) v konkrétních případech díky své složitosti nevhodný.

O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru I., II. [K5a,b]

Soubor pojednání *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru I., II.* je nejrozsáhlejší původní Kösslerovou vědeckou prací, kterou v roce 1920 obhájil zároveň jako svou práci habilitační (viz kapitola 1, str. 17).

V článku [K5a] je podán důkaz dvou obecných vět – Kössler je označil jako věty $\mathcal{H}$ a $\mathcal{J}$.

Věta $\mathcal{H}$: *Budiž $\mathcal{K}$ jednoduše souvislá oblast, omezená v komplexní rovině uzavřenou racionální algebraickou křivkou $\mathcal{C}$. Funkci $F(z)$ analytickou v oblasti $\mathcal{K}$ i na křivce $\mathcal{C}$ lze rozvinout v řadu*

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cdot b_k(z)\,, \tag{2.2.4}$$

kde $b_k(z)$ jsou v oblasti $\mathcal{K}$ jednoznačné algebraické funkce nezávislé na funkci $F(z)$, plynoucí pouze z parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$; koeficienty A_k jsou určeny funkcí $F(z)$.

Kössler nejprve uvedl obecný důkaz tohoto tvrzení pro jednoduše souvislou oblast omezenou racionální algebraickou křivkou, přičemž se opíral o větu Cauchyovu[2.1] a poukázal na skutečnost, že pro danou funkci $F(z)$ a křivku $\mathcal{C}$ existuje neomezené množství takových rozvojů.

Pro lepší pochopení celé problematiky poté odvodil příslušné rozvoje pro funkci analytickou uvnitř elipsy (zároveň porovnal výsledek získaný pro kartézský a polární způsob parametrizace této křivky, včetně limitního případu, kdy elipsa přechází v kružnici a daný rozvoj přechází tedy v řadu Taylorovu), *racionální hypocykloidy* (tj. křivky, která vznikne valením kružnice o poloměru a/n bez smýkání po vnitřním obvodu kružnice o poloměru a se středem v počátku) a také *epicykloidy* (křivky, která vznikne, když se valí kružnice o poloměru a po vnějším obvodu kružnice o stejném poloměru se středem v počátku.)

Větu $\mathcal{H}$ dále Kössler dokázal i pro tzv. „problém vnější", tj. funkci $H(z)$ analytickou vně křivky $\mathcal{C}$, za předpokladu, že funkce $H(z)$ má v nekonečnu nulový bod prvního řádu. Pro případ, kdy je křivkou $\mathcal{C}$ elipsa a racionální epicykloida, dokázal v limitních případech, kdy obě křivky přechází v kružnici, že hledaným rozvojem je vlastně Laurentova řada.

Skutečnost, že pro každou funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodu křivky $\mathcal{C}$ existuje nekonečně mnoho rozvojů (2.2.4), plyne z neomezeného množství možných parametrizací dané křivky. Kössler diskutoval podrobně tuto problematiku pro jednotkovou kružnici.

V dalších úvahách pak vycházel z věty:

Věta (Osgood): *Ať jest hranice konečného jednoduše souvislého oboru $\mathcal{K}$ jakkoli utvářená, lze vždy sestrojit regulární, uzavřenou analytickou křivku $\mathcal{C}$, která se k hranicím $\mathcal{K}$ z vnějšku (nebo z vnitřku) libovolně těsně přimyká.*

a zobecnil s její pomocí za použití věty o konformním zobrazení problém pro obecný jednoduše souvislý obor, ne nutně omezený jen omezenou racionální křivkou – viz Věta $\mathcal{J}$:

Věta $\mathcal{J}$: *Budiž $\mathcal{K}$ konečná jednoduše souvislá oblast. Funkce $F(z)$ analytická v oblasti $\mathcal{K}$ i na její hranici se dá rozvinout v řadu*

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cdot b_k(z)\,,$$

kde $b_k(z)$ jsou v oblasti $\mathcal{K}$ jednoznačné funkce analytické, jejichž podoba nezávisí na funkci $F(z)$ samotné, ale pouze na tvaru oblasti $\mathcal{K}$.

Rozdílnost formálně stejných vzorců, ke kterým autor dospěl v případě funkce analytické uvnitř/vně oboru $\mathcal{K}$, opět demonstroval na jednotkové kružnici, kde „problém vnitřní" vede k rozvoji ve tvaru Taylorovy řady, kdežto „problém vnější" k rozvoji v Laurentovu řadu.

V případě věty $\mathcal{J}$ obdržíme obecně jako nejjednodušší možný rozvoj polynomický rozvoj Faberův pro funkci analytickou uvnitř oboru $\mathcal{K}$, resp. rozvoj podle jistých racionálních funkcí proměnné z majících jeden společný pól v oboru $\mathcal{K}$ pro funkci analytickou vně oboru $\mathcal{K}$.

[2.1] Věta (Cauchy): Funkce $F(z)$ komplexní proměnné $z = x + iy$, analytická v oboru $\mathcal{K}$ i na křivce $\mathcal{C}$, se dá psáti ve tvaru Cauchyova integrálu podle křivky $\mathcal{C}$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{F(t)\,dt}{t - z}\,.$$

V posledním oddílu svého pojednání Kössler zobecnil celé předchozí úvahy dokonce na obory mnohonásobně souvislé omezené několika Osgoodovými křivkami, vzájemně se neprotínajícími.

Poznamenejme na závěr, že v práci [K5a] Kössler na několika místech pracoval s Newtonovými rekurentními formulemi pro součet kořenů $k-$tých mocnin kořenů rovnice algebraické – navazoval tedy okrajově na téma, jímž se zabýval v práci [K2]. Vzhledem k rozsáhlosti [K5a] lze soudit, že v průběhu tvorby tohoto pojednání narazil na danou problematiku, o níž sepsal a publikoval drobnější pojednání [K2], přičemž samotný článek [K5a] dokončil a publikoval až o rok později.

Základním rysem práce [K5b] je oproti práci [K5a] její větší obecnost, ačkoli se zabývá pouze obory jednoduše souvislými. Kössler navázal na pojednání Georga Fabera *Über polynomische Entwickelungen* ([Faber(1903)], [Faber(1907)]), v nichž se však autor omezil jen na problém vnitřní. Kössler na rozdíl od Fabera studoval souvislosti mezi vnitřním a vnějším problémem a na základě obecného zobrazení okolí křivky na okolí jednotkové kružnice a vlastností Cauchyova integrálu sestavil a dokázal *obecnou rozvojovou větu*:

Věta: *Nechť značí γ jednotkovou kružnici v rovině τ a $h(\tau)$ libovolnou funkci, která jest od nully různou a analytickou v okolí každého bodu na kružnici γ.*

Integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(\tau)\cdot g\prime(\tau)\cdot\tau^{-(k+1)}}{g(\tau)-z}\,d\tau = b_k(z)$$

definuje funkci $b_k(z)$ analytickou pro všechna z ležící v oboru K_1 hranice vyjímaje. [2.2]

Týž integrál definuje jinou funkci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(\tau)\cdot g\prime(\tau)\cdot\tau^{-(k+1)}}{g(\tau)-z}\,d\tau = c_k(z)$$

analytickou pro všechna z v oboru K_2 hranice vyjímaje.

1. Každá funkce $F_1(z)$ analytická v celém oboru K_1 i v okolí každého bodu na křivce $\mathcal{C}$ dává vznik dvěma rozvojům

$$\begin{aligned} I.\quad F_1(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\cdot b_k(z)\,, \\ II.\quad 0 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\cdot c_k(z)\,, \qquad (2.2.5) \\ A_k &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{F_1(g(\tau))\tau^k d\tau}{h(\tau)}\,. \end{aligned}$$

Rozvoj I. jest absolutně a stejnoměrně konvergentní v každém oboru k_1; rozvoj II. jest absolutně a stejnoměrně konvergentní v každém oboru k_2.

[2.2] Poznámka k použitému označení – $z = g(\tau)$ značí funkci analytickou v mezikruží $r \leq |\tau| \leq R$, $r < 1$, $R > 1$, jistých speciálních vlastností (podrobněji viz [K5b], str. 2–3), jež popisuje křivku $\mathcal{C}$. Křivka $\mathcal{C}$ rozděluje rovinu na dva jednoduše souvislé obory K_1, K_2, symbolem k_r je označen každý konečný uzavřený obor, který leží celý v oboru K_r a jehož hranice se nikde nedotýkají hranic K_r.

2. Každá funkce $F_2(z)$ analytická v celém oboru K_2 i v okolí každého bodu na křivce $\mathcal{C}$ dává vznik rozvojům

$$
\begin{aligned}
III. \quad F_2(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \cdot c_k(z)\,, \\
IV. \quad\quad 0 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \cdot b_k(z)\,, \qquad\qquad (2.2.6)\\
B_k &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{F_2(g(\tau))\tau^k d\,\tau}{h(\tau)}\,.
\end{aligned}
$$

Rozvoj III. jest absolutně a stejnoměrně konvergentním v každém oboru k_2, rozvoj IV. v každém oboru k_1.

Funkce $b_k(z)$ a $c_k(z)$, podle nichž jsou rozvoje provedeny, nezávisí na tvaru funkce $F_1(z)$ po případě $F_2(z)$; na těchto funkcích jsou závislé jedině koeficienty A_k a B_k.

([K5b], str. 3–4)

Při hledání odpovědi na otázku „*Za jakých okolností konverguje řada (2.2.5) i mimo obor K_1, resp. alespoň na jeho hranici?*“ se Kössler omezil již jen na případ vzájemně jednoznačného a konformního zobrazení. Dospěl tak k dalším větám udávajícím postačující podmínky konvergence. Ve svých úvahách dále zobecnil Faberovy výsledky vycházející z konformního zobrazení vnějšku křivky $\mathcal{C}$ na vnitřek jednotkové kružnice. Při studiu problému jednoznačnosti uvedených rozvojů (2.2.5), (2.2.6) se podrobně zabýval tzv. *nulovými rozvoji*, tj. rozvoji typu *II.*, *IV.*, které nemají všechny členy identicky rovné nule a rovněž nastínil možnost dalšího studia rozšíření konvergence odvozených řad pro teorii analytického pokračování.

Integrál Cauchyův a Dirichletův problém v rovině [K8]

V roce 1913 vyšly v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky články prof. Lásky a Petra *Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova* (viz [Láska (1913)], [Petr (1913)]) podávající řešení Dirichletova problému pro kruh pomocí Cauchyova integrálu. Kössler v práci [K8] rozšířil o devět let později tento problém pro každou jednoduše souvislou oblast omezenou analytickými oblouky. Vycházejíc z věty o konformním zobrazení dospěl k Fredholmově integrální rovnici prvního druhu, z níž po úpravě získal rovnici druhého druhu, tj. rovnici řešitelnou. Výsledky, které tak obdržel, využil při řešení jedné úlohy z teorie konformního zobrazení, a sice hledání konformního zobrazení vnitřku křivky $\mathcal{C}$ na jednotkovou kružnici, jestliže vnějšek a obvod křivky $\mathcal{C}$ zobrazuje konformně funkce $s = f(\tau)$ na jednotkovou kružnici $|\tau| \leq 1$ ($\tau = e^{i\varphi}$). Rozsahem i náplní lze tuto práci zařadit mezi drobná Kösslerova pojednání menšího významu.

Analytické pokračování funkcí ve smyslu Borelově [K9], [K11]

Uvažujme holomorfní funkce $f_1(z)$, $f_2(z)$ definované v oblastech $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$. Nechť oblast $\mathcal{O}$ je průnikem $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$, přičemž nechť platí $f_1(z) = f_2(z)$ v $\mathcal{O}$. Potom funkce $f_1(z)$ v $\mathcal{O}_1$ určuje plně funkci $f_2(z)$ v $\mathcal{O}_2$. Je-li dána funkce $f_1(z)$ v oblasti $\mathcal{O}_1$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f_2(z)$ holomorfní v $\mathcal{O}_2$, která se shoduje s $f_1(z)$ v oblasti $\mathcal{O}$. Říkáme, že funkce $f_1(z)$

má *analytické pokračování* ve funkci $f_2(z)$. Velice často uskutečňujeme toto pokračování prostřednictvím mocninných řad. Uvažujeme-li řadu s poloměrem $R < \infty$, pak mohou nastat celkem dva případy:

(1) všechny body na obvodu kruhu konvergence jsou singulární; pak nelze funkci v žádném směru analyticky prodloužit[2.3] – obvod kruhu v takovém případě nazýváme *přirozenou hranicí*.

(2) kromě obyčejných bodů existuje na obvodu kruhu o poloměru R alespoň jeden singulární bod, přičemž v některých směrech je analytické prodloužení možné. [2.4]

Případ, kdy by na obvodu kruhu konvergence neležel žádný singulární bod, by byl ve sporu s definicí poloměru konvergence.

Výše uvedený myšlenkově jednoduchý postup analytického prodlužování funkcí poprvé uvedl Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), přičemž se omezoval na funkce analytické v jisté oblasti (tj. souvislé otevřené množině). V roce 1917 Emil Borel ukázal nový přístup k možnosti analytického prodloužení funkce, jenž byl obecnější než přístup Weierstrassův. Borel totiž za definiční obor připouštěl oblasti, z nichž bylo možno odebrat množiny nulové míry hustě pokrývající jistou část roviny tak, aby zůstala v platnosti základní věta o jednoznačnosti funkce určené svými funkčními hodnotami na okolí jediného vnitřního bodu. Uvažoval při tom řady typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - e^{2\pi i \beta_n}}\,, \tag{2.2.7}$$

reprezentující funkce analytické uvnitř i vně jednotkové kružnice, přičemž body β_n pokrývají hustě interval $(0,1)$, řada $\sum |A_n|$ konverguje ($A_n \neq 0$).

Dne 16. června 1922 přednesl Miloš Kössler na schůzi třídy matematicko-přírodovědecké Královské české společnosti nauk přednášku na téma *O funkci theta se zřetelem k Borelově pokračování*, jejíž rozšířené znění publikoval v pojednání *Příspěvek k theorii Borelova pokračování funkcí* [K9].

Vycházel z práce [Borel (1917)], v níž Borel dokázal o jisté skupině funkcí $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ s přirozenou hranicí tvořenou kružnicí $|z| = 1$ ve smyslu Weierstrassově, že jsou *monogenní*[2.5] v množině $\mathcal{C}$, jež obsahuje nespočetné množství bodů kružnice $|z| = 1$. Odpověď na otázku, zda každá funkce $f(z)$ je v uvedeném smyslu monogenní, jíž se Borel ve své práci nezabýval, dalo Kösslerovo vyšetřování funkce theta

$$\theta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}\,.$$

[2.3] Konkrétním příkladem je funkce ve tvaru řady $f(z) = z + z^2 + z^6 + \cdots + z^{n!} + \cdots$ s poloměrem konvergence $R = 1$, jíž nelze v žádném bodě kružnice $|z| = 1$ analyticky prodloužit.

[2.4] Např. funkci $f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$ $(R = 1)$ lze analyticky rozšířit do celé roviny vyjma jediného bodu $z = -1$, v němž nelze provést analytické prodloužení.

[2.5] Na tomto místě je třeba si uvědomit jistý posun v terminologii. Obsah pojmu funkce *monogenní* dle Borela je vysvětlen v práci [Borel (1917)]. V dnešní době definuje např. [Rektorys (1995)] funkci *monogenní v bodě* z_0 za předpokladu existence derivace funkce v bodě z_0, oproti funkci *holomorfní* (resp. regulární) v bodě z_0, kde se předpokládá existence derivace na nějakém okolí bodu z_0, viz např. [Veselý (2000)].

Kössler dokázal, že theta funkce není monogenní v žádném oboru $\mathcal{C}$, jenž by přesahoval jednotkovou kružnici $|z| = 1$, a tudíž obor, v němž je monogenní dle Borelovy definice není větší než obor, v němž je analytická dle Weierstrasse. Toto poznání vedlo autora k tomu, aby se zamýšlel nad analogií Weierstrassova analytického pokračování a jinými zobecněnými definicemi analytického pokračování, přičemž dospěl k závěru:

„Ať rozšíříme pojem spojitého pokračování jakýmkoliv způsobem, budou vždy existovati funkce, které se způsobem tím pokračovati nedají v žádném bodě své kružnice konvergenční pokud ovšem se přidržíme požadavků existence, konečnosti a spojité změny $f(z)$ i $f'(z)$.“ ([K9], str. 2)

Platnost tohoto tvrzení konkrétně ukázal na příkladu funkce

$$F(z) = \theta(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{z - \alpha_n}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ představují čísla tvaru $e^{i\pi \frac{p}{q}}$ (p, q jsou libovolná lichá nesoudělná čísla), $\sum_1^{\infty} c_n$ je konvergentní řada kladných čísel. Je-li φ libovolně zvolené, $z = re^{i\varphi}$, pak pro $r \to 1$ neexistují konečné limity pro $F(z)$ a $F'(z)$ zároveň.

Ve své práci *Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově* [K11] Kössler opět vycházel z Borelova postupu, přičemž si za cíl kladl nalezení mocninných řad, které by bylo možno transformovat do podoby (2.2.7). Pro dvojici analytických funkcí komplexní proměnné x

$$f(x) = \sum a_n x^n \quad |x| < R_1, \quad g(x) = \sum b_n x^n \quad |x| < R_2,$$

a dvojici komplexních konstant α, y ($|\alpha| \leq 1$, $|y| < R_1$) odvodil transformační vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(y\alpha^n) b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(x\alpha^n) a_n y^n \,, \tag{2.2.8}$$

jehož výhodou je skutečnost, že za jistých okolností konverguje pravá strana v širším oboru než strana levá. V dalších úvahách se autor omezil pouze na funkce $g(x)$ racionální nebo meromorfní, jejichž póly seřazené dle svých absolutních hodnot x_0, x_1, x_2, … byly známé, nenulové. O analytické funkci

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(y\alpha^n) b_n x^n$$

pak dokázal následující tvrzení:
Věta:

(1) *Řada pro $F(x)$ má poloměr konvergence rovný poloměru konvergence řady pro $g(x)$.*

(2) *Jestliže $|\alpha| < 1$ (nebo $\alpha = e^{i\beta}$, β je číslo souměřitelné s π)[2.6] představuje pravá strana rovnice (2.2.8) analytické pokračování funkce $F(x)$ platné v celé rovině s výjimkou spočetné množiny izolovaných bodů $x_k\alpha^{-l}$ (k, $l \in \mathbb{N}_0$), tj. pólů funkce $F(x)$.*

[2.6] Souměřitelnost úhlů Kössler definoval v článku [K10], jenž je podrobně diskutován v odstavci 2.3.

(3) *Jestliže $\alpha = e^{i\beta}$, kde β je číslo nesouměřitelné s π, představuje konvergenční kružnice řady $F(x)$ její přirozenou hranici ve smyslu Weierstrassově. Ve smyslu Borelově však funkce připouští pokračování v celé rovině odpovídající pravé straně (2.2.8), přičemž singularity leží na kružnicích se středem v počátku procházejících body x_0, x_1, ...*

Největší význam z dokazovaných vět má část (3), styl jejího důkazu odpovídá postupu Borelovu ([Borel (1917), str. 57–70]). Kössler se přitom v části svého důkazu omezil pouze na konkrétní případ $\beta = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$, a pro jiné případy postup úvah pouze nastínil.

V rámci konkrétních příkladů řad připouštějících analytické pokračování v Borelově smyslu autor mj. uvedl pro funkce

$$f(x) = (1 - \varrho x)^{-1}\ , \quad g(x) = \frac{1}{1-x}\,, \quad \varrho = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

rozvoj

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 - \varrho e^{in\beta} y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n y^n}{1 - e^{in\beta} x}\,,$$

jehož levá strana konverguje v kruhu $|x| < 1$ a má jej za přirozenou hranici, pravá strana je výraz typu (2.2.7), jehož póly se hromadí na jednotkové kružnici.

On a generalization of the Lagrange series [K12]

V roce 1770 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) použil poprvé pro nalezení řešení rovnice

$$x - a - u \cdot f(x) = 0 \tag{2.2.9}$$

formuli

$$x = a + \sum_{m=1}^{\infty} a_m u^m\,, \quad a_m = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^{m-1}}{d\,x^{m-1}}(f(x))^m\right]_{x=a}\,,$$

kde $f(x)$ značí funkci analytickou v bodě $x = a$ splňující podmínku $f(a) \neq 0$. Tento rozvoj nám umožňuje najít jedno řešení rovnice (2.2.9). Kössler ve své práci [K12] diskutoval možné způsoby zobecnění Lagrangeova výsledku. Nejprve uvažoval namísto rovnice (2.2.9) rovnici

$$(x - a)^n - u \cdot f(x) = 0\,,$$

pro kterou snadno získal n řešení x_0, x_1, ..., x_{n-1}, pro něž platí

$$x_k - a = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_k^m\,, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,,$$

kde

$$u_k = |u^{1/n}| \cdot e^{i\phi} \cdot e^{2k\pi i/n}\,, \quad (0 < \phi < 2\pi/n)\,.$$

Toto zobecnění dále využil pro řešení rovnice $\Phi(x) - u \cdot f(x) = 0$ pro dvě analytické funkce $\Phi(x)$, $f(x)$, známe-li všechny kořeny rovnice $\Phi(x) = 0$. Aplikace Mittag-Lefflerovy transformace[2.7] v tomto případě vede od Lagrangeových řad k řešení algebraických rovnic. Prof. Kössler se podrobněji zabýval rovnicí

$$x^n - u(ax + 1) = 0\,, \quad (n \in \mathbb{N})\,, \tag{2.2.10}$$

[2.7] Viz např. [Mittag-Leffler (1899)].

pro níž formuloval vyjádření *všech* jejích kořenů v závislosti na vztahu u a výrazu

$$-\frac{(-n)^n}{a^n(n-1)^{n-1}}\,.$$

Volíme-li konkrétně $n = 5$, $u = -1$, dostáváme tak vyjádření kořenů algebraické rovnice pátého stupně redukované do podoby (2.2.10). Takovou redukci lze provést např. metodou Bring-Jerrardovou.[2.8] Postup uvedený prof. Kösslerem se přitom jeví jednodušší než obecná metoda Hermitova.[2.9] Kössler dále aplikoval celý postup na rovnici

$$x^n - u(c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n) = 0\,,$$

pro jejíž kořeny získal vyjádření pomocí nekonečných součtů lineárních koeficientů a_m (výše uvedených). Přestože je jeho způsob v porovnání s metodou, kterou použil Lindemann ve svém pojednání [Lindemann (1884)], kratší, jeho nevýhodou je nemožnost použití pro numerické aplikace.

V závěru práce jsou diskutovány dva speciální případy – a sice rovnice

$$\sin \pi x - u(\sin \pi x - f(x)) = 0\,,$$

kde funkce $f(x)$ má pouze jednoduché kořeny, z nichž žádný nenabývá celočíselné hodnoty, a dále rovnice

$$P(x) - u \cdot e^{Q(x)} = 0\,,$$

kde značí $P(x)$, $Q(x)$ polynomy v proměnné x. Zajímavostí práce [K12] je skutečnost, že při tvorbě tohoto pojednání Kössler úzce spolupracoval s Godfreyem Haroldem Hardym (1877–1947). S problematikou Lagrangeových řad se můžeme dále setkat např. v knize [Petr(1923), str. 251–258].

O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční [K13]–[K17]

Mocninnou řadou rozumíme obecně řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\,, \tag{2.2.11}$$

kde z, $z_0 \in \mathbb{C}$; čísla $a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) nazýváme *koeficienty řady* (2.2.11), číslo z_0 jejím *středem*.[2.10] Číslo R, $0 \le R \le \infty$

$$R = \sup_{z\in\mathbb{C}}\{\,|z-z_0|\,;\sum a_n(z-z_0)^n \text{ konverguje v bodě } z\,\}$$

nazýváme *poloměrem konvergence* řady (2.2.11). Pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která $|z - z_0| < R$, řada (2.2.11) konverguje; pro $z \in \mathbb{C}$, pro která $|z - z_0| > R$ řada (2.2.11) diverguje. Jestliže

[2.8] Tuto metodu použil v roce 1786 poprvé Erland Samuel Bring (1736–1798), v roce 1834 ji „znovuobjevil“ a zobecnil Georg Birch Jerrard (1804–1863).

[2.9] Charles Hermite (1822–1901) popsal v roce 1858 řešení obecné algebraické rovnice pátého stupně pomocí Jacobiho theta funkcí (viz [Hermite (1858)]).

[2.10] Vzhledem ke skutečnosti, že mocninnou řadu se středem v bodě z_0 lze snadno převést trasnformací $z \mapsto (z + z_0)$ na mocninnou řadu se středem v bodě 0, bývá často pojednáváno pro jednoduchost pouze s řadami se středem v bodě $z_0 = 0$, tj. řadami ve tvaru $\sum a_k z^k$ - stejně tak je tomu v případě článků prof. Kösslera.

číslo R leží v intervalu $(0;\infty)$, bývá množina $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = R\}$ nazývána *konvergenční kružnice*. Nelze však podléhat zdání, že by řada v bodech ležících na této kružnici (podle jejího jména) vždy konvergovala. O konvergenci, resp. divergenci mocninné řady na její konvergenční kružnici nelze obecně nic říci.

O problematice singularit ležících na konvergenční kružnici společně pojednávají Kösslerovy práce [K13]–[K16] z roku 1923 a práce [K17] z roku 1924, publikovaná v roce 1928. Z pohledu chronologického práce [K13] navazuje na články [K14]–[K16] otištěné ve stejném roce ve francouzštině. V nich autor formuloval ve dvou zněních nutnou a postačující podmínku pro koeficienty mocninné řady v případě, kdy bod ležící na konvergenční kružnici je singulární (resp. obyčejný). Důkaz těchto podmínek však byl v úplné podobě podán až v práci [K13], stejně tak jako zobecnění řady vět týkajících se vztahu mezi koeficienty řady a polohou singularit na její kružnici konvergenční. Prof. Kössler uvažoval mocninnou řadu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.2.12}$$

s poloměrem konvergence rovným jedné. Transformací této řady pro $z = x + 3/4x^2$ obdržel formálně řadu[2.11]

$$f(z) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n\,, \quad \text{kde } A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k a_{n-k}\,.$$

Jednoduchou úvahou založenou na vlastnostech konformního zobrazení získal kritérium (A):

Věta (A): *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod $z = 1$ byl singulárním (resp. obyčejným) bodem funkce* (2.2.12), *je dána vztahem*

$$\limsup |A_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \quad \left(\textit{resp.} < \frac{3}{2}\right).$$

Řada vět plynoucích z tohoto kritéria byla uveřejněna v článcích [K14], [K15]. Zjednodušení kritéria (A) autor dále provedl pomocí využití vlastností limes superior a podrobnějšího studia koeficientů A_n. Obdržený výsledek označil jako kritérium (B):

Věta (B): *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod $z = 1$ byl singulárním (resp. obyčejným) bodem funkce* (2.2.12), *je určena vztahem*

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=\lfloor n(\frac{1}{4}-\mu)\rfloor}^{k=\lfloor n(\frac{1}{4}+\mu)\rfloor} \binom{n-k}{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k a_{n-k} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \quad \left(\textit{resp.} < \frac{3}{2}\right),$$

kde $0 < \mu \leq \frac{1}{4}$ značí libovolnou kladnou konstantu. Kritérium pro libovolný obvodový bod $z = e^{i\varphi}$ liší se od předešlého jen tím, že v něm klademe místo čísel a_{n-k} čísla $a_{n-k} \cdot e^{-ik\varphi}$.

V dalších úvahách Kössler zúžil obecné kritérium (B) a formuloval jej v podobě, jejímž speciálním případem je mj. věta Vivanti-Dinesova:

[2.11] Symbolem $\lfloor x \rfloor$ je dále označována funkce celá část x.

Věta: *Jestliže všechny koeficienty řady* (2.2.12) *mají tvar* $r \cdot e^{i\psi}$, $r \geq 0$, $\cos\psi > \delta > 0$, *pak* $z = 1$ *je singulárním bodem funkce* (2.2.12).

Z možnosti provést změny argumentů některých koeficientů řady (2.2.12) tak, aby předem zvolený bod $z = e^{i\varphi}$ na konvergenční kružnici byl bodem singulárním, vyplynula ve zvláštním případě věta Fatou-Pólyova:

Věta: *Ke každé řadě* (2.2.12) *lze zvolit posloupnost celých čísel* ε_i ($|\varepsilon_i| = 1$) *tak, že řada* $\sum a_n \varepsilon_n z^n$ *má jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.*

Kösslerovi se podařilo najít obecnější podobu i pro známou Hadamardovu mezerovou větu:

Věta: *Budiž dána mocninná řada*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} z^{m_k} \quad (0 \leq m_1 < m_2 < \cdots).$$

Jestliže existuje $\varepsilon > 0$ *takové, že* $m_{k+1} > (1+\varepsilon)m_k$, *má řada jednotkovou kružnici za svou přirozenou hranici.*

Zatímco výše jmenované věty byly do té doby odvozovány navzájem odlišnými metodami, kritérium (B) je pro ně za předpokladu využití posloupností a_{n_q} vybraných z posloupností a_n tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n_q}|^{\frac{1}{n_q}} = 1,$$

společným zdrojem.[2.12] Lehkost, s jakou uvedené již dříve známé věty, např. Hadamardova, Fatou-Pólyova, Vivanti-Dinesova, plynou z kritéria (B), se může zdát zarážející, avšak je nutno přihlédnout ke skutečnosti, že základním předpokladem celé Kösslerovy úvahy je poloměr konvergence mocninné řady rovný jedné.

Ve svém příspěvku *On a generalization of Fabry and Szász's theorems concerning the singularities of power series* [K17] na mezinárodním matematickém kongresu v Torontu v roce 1924 Kössler navázal na své práce [K13]–[K16] a ukázal další možnosti zobecnění svých kritérií – tentokrát pro Fabryho větu o mocninných řadách (2.2.12) o poloměru konvergence $R = 1$, pro něž jsou všechny body $|z| = 1$ singulární, a tedy funkci $f(z)$ nelze v žádném směru analyticky rozšířit (viz [Fabry (1896)]), a podobně pro Szászovu větu zabývající se Dirichletovými řadami typu

$$F(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

resp. hledáním podmínek pro a_ν, λ_ν tak, aby řadu nebylo možno analyticky prodloužit vně konvergenční kružnice [Szász (1922)].

Celkově lze konstatovat, že práce [K13]–[K17] dosáhly významného světového ohlasu, a to nejen z pohledu toho, že byly publikovány v zahraničí. Řada matematiků na Kösslerovy výsledky navázala, potvrdila je či dokonce rozšířila (viz např. [Petržílka (1927)], [Lösch (1929)], [Levi(1936)]).

[2.12] Kössler je označoval jako *L-posloupnosti*.

Součtový vzorec $S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}$ **[K18]**

Od akademického roku 1922/1923 přednášel prof. Kössler na přírodovědecké fakultě počet pravděpodobnosti, což jej zřejmě inspirovalo k sepsání pojednání [K18], neboť v rámci řešení úloh pravděpodobnostního počtu často narážel na problém hledání součtu řady

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tfrac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2k^2}(1+\varepsilon_k)\,, \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon\,. \tag{2.2.13}$$

Nejčastěji používaná metoda pro sečtení řady (2.2.13), metoda Euler-Maclaurinova, vede k dosti obtížnému odhadu chyby. Kössler ve svém krátkém pojednání ukázal zcela elementární postup vedoucí k jednoduchému odhadu chyby. Soustředil se konkrétně na odvození částečného součtu řady

$$S(n) = \tfrac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}\,. \tag{2.2.14}$$

Zcela elementárně, pouze pomocí integrace per partes, získal přesný vzorec

$$S(n) = \tfrac{2h}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^n e^{-h^2x^2}\,dx + \tfrac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2n^2} + \tfrac{4h^3}{\sqrt{2}} \int\limits_0^n x e^{-h^2x^2} \left\{ \lfloor x \rfloor - x + \tfrac{1}{2} \right\} dx\,. \tag{2.2.15}$$

Pro odhad chyby, které se dopustíme vynecháním posledního členu na pravé straně (2.2.15), pak využil geometrického významu Riemannova integrálu, integrování pomocí substituce a vět o střední hodnotě integrálního počtu. Obdržel vztah

$$\begin{aligned} S(n) &= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{nh} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \tfrac{h}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-h^2n^2} + R_n, \qquad (2.2.16) \\ R_n &= \begin{cases} -\tfrac{nh^3}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-h^2n^2} \vartheta & \text{pro} \quad n \le \tfrac{1}{h\sqrt{2}}\,, 0 \le \vartheta < 1, \\ \tfrac{h^2}{\sqrt{2\pi \mathrm{e}}} \vartheta_1 & \text{pro} \quad n > \tfrac{1}{h\sqrt{2}}\,, -1 \le \vartheta_1 \le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pro $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ dává tento vzorec lepší výsledek pro součet (2.2.13) než vzorec Wirtingerův (viz [Wirtinger (1902)]). Z pohledu náročnosti na znalosti čtenáře jde o práci nepříliš složitou. Daný problém by mohl být i zpestřením cvičení vysokoškolského kursu matematické analýzy zaměřeného na opakování integrace funkce jedné reálné proměnné a vlastností Riemannova integrálu.

Ohraničené mocninné řady [K20], [K24]

V práci [K20] Kössler vycházel z výsledků Issai Schura (1875–1941) z let 1917/18 (viz [Schur (1917/18)]) týkajících se ohraničených mocninných řad, konkrétně hledání podmínek pro koeficienty $a_0 \neq 0$, a_1, …, aby funkce $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ byla holomorfní funkcí s omezenými funkčními hodnotami $|f(z)| \le 1$ v jednotkovém kruhu $|z| < 1$.

Z Jensenovy formule ([Jensen (1899)]) plyne, že pro v absolutní hodnotě nejmenší nulový bod funkce $f(z)$ platí podmínka $|z| < |a_0|$. Kössler se zaměřil na obecnější otázku – hledal závislost rozmístění nulových bodů funkce $f(z)$ (resp. bodů, pro něž $f(z) = \alpha$) na prvních n koeficientech $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Odvodil větu:

Věta: *Budiž funkce $f(z)$ holomorfní a omezená $|f(z)| \leq 1$ pro $|z| < 1$. Parametry $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$*[2.13] *funkce $f(z)$ nechť jsou menší než 1 a $\gamma_0 \neq 0$. V oblasti K_n, ohraničené algebraickou křivkou, jednoznačně určené pomocí prvních n z těchto parametrů, nezávislé na dalších koeficientech $a_n, a_{n+1}, \ldots$, neleží žádný nulový bod $f(z)$. Zvolíme-li však vhodně další koeficienty $a_n, a_{n+1}, \ldots$, může mít $f(z)$ nulový bod v kterémkoli bodě hranice oblasti K_n.*

Dále nechť ϱ_n značí poloměr největšího možného kruhu se středem $z = 0$ vepsaného do oblasti K_n. Dle výše zmíněné Kösslerovy věty platí $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_n$, přičemž v absolutní hodnotě nejmenší kořen z_1 rovnice $f(z) = 0$ vyhovuje podmínkám $|z_1| > \varrho_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ a $|z_1| \geq \varrho_n$. Pro jisté třídy funkcí pak autor dokázal následující:

Věta: *Při předchozím označení platí $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = \varrho \leq 1$. Je-li $\varrho < 1$, pak $|z_1| = \varrho$. Je-li $\varrho = 1$, pak rovnici $f(z) = 0$ nevyhovuje žádný bod z kruhu $|z| < 1$.*

V závěru celého článku *Über die α-Stellen von beschränkten Potenzreihen* [K20] Kössler uvedl pomocí jednoduché transformace možnost aplikace odvozených vět pro body, v nichž funkce $f(z)$ nabývá libovolné hodnoty α.

V pojednání *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile* [K24], s nímž Miloš Kössler vystoupil na druhém sjezdu matematiků zemí slovanských v Praze v roce 1934, se zabýval otázkou, kdy funkce

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \tag{2.2.17}$$

bude holomorfní pro $|z| < 1$, přičemž bude mít ohraničenou imaginární část, specielně

$$-b \leq \operatorname{Im} f(z) \leq \pi - b \quad (0 < b < \pi)\,. \tag{2.2.18}$$

Těžištěm celého pojednání je odvození a důkaz dvou ekvivalentních vět shrnujících podmínky pro koeficienty A_n nutné pro splnění (2.2.18):

Věta: *Funkce* (2.2.17) *je holomorfní pro $|z| < 1$ a splňuje podmínku* (2.2.18) *tehdy a jen tehdy, když* [pro každé $n \in \mathbb{N}$ je možné najít vyjádření prvních koeficientů $A_1, \ldots, A_n$ funkce $f(z)$ ve tvaru:]

$$A_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) e^{-ni\varphi}\, d\varphi\,,$$

kde $\psi(\varphi)$ značí reálnou funkci první Bairovy třídy, definovanou pro $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (až na množinu nulové míry), vyhovující podmínkám

$$0 \leq \psi(\varphi) \leq \pi \quad \text{a} \quad \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\, d\varphi = 2\pi b\,.$$[2.14]

[2.13] Vycházíme-li z označení dle Schura, pak

$$\gamma_0 = a_0\,, \quad \gamma_1 = \frac{a_1}{1 - a_0\overline{a_0}}\,, \quad \gamma_2 = \frac{a_2(1 - a_0\overline{a_0}) + \overline{a_0}a_1^2}{(1 - a_0\overline{a_0})^2 - a_1\overline{a_1}}\,, \ldots$$

[2.14] Integrál je uvažován jako Lebesgueův.

Ekvivalentně lze této větě dát aritmetickou podobu:

Věta: *Funkce* (2.2.17) *je holomorfní pro* $|z| < 1$ *a splňuje podmínku* (2.2.18) *tehdy a jen tehdy, když*

$$A_k = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vartheta_n}}{k} \sum_{j=0}^{y} (\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}\varphi_{2j}^{(n)}} - \mathrm{e}^{-k\mathrm{i}\varphi_{2j+1}^{(n)}}), \quad 1 \le k \le n\,, 0 \le y \le n,$$

$$0 = \varphi_0^{(n)} < \varphi_1^{(n)} < \cdots < \varphi_{2y+1}^{(n)} < 2\pi\,,$$

$$(\varphi_1^{(n)} - \varphi_0^{(n)}) + (\varphi_3^{(n)} - \varphi_2^{(n)}) + \cdots + (\varphi_{2y+1}^{(n)} - \varphi_{2y}^{(n)}) = 2b\,,$$

kde ϑ_n, $\varphi_j^{(n)}$, y *značí reálná čísla pro* $k \le n$ *na* k *nezávislá.*

Při vyšetřování výše formulovaných tvrzení Kössler vycházel z pojednání [Carathéodory (1907)], Fatouovy věty, prací I. Schura a vlastností Lebesqueova integrálu.

Prosté funkce a Bieberbachova domněnka [K21]–[K23], [K30]

Prostou funkcí v otevřeném kruhu $|z| < r$ rozumíme holomorfní funkci $f(z)$, jestliže pro všechna $|z_1| < r$, $|z_2| < r$, $z_1 \neq z_2$ je $f(z_1) \neq f(z_2)$. Uvažujeme-li konkrétně funkci prostou pro $|z| < 1$, pak f zobrazuje jednotkový kruh na jednoduše souvislou oblast, přičemž $f'(z) \neq 0$ pro $|z| < 1$. Lze tedy s dodatečným předpokladem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ psát

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\,, \quad |z| < 1\,. \tag{2.2.19}$$

Prof. Kössler se zabýval problematikou změny $f'(z)$ při posunutí z bodu z do bodu $z+\Delta\, z$ v závislosti na koeficientech a_i a dále hledal podmínky, které musí koeficienty a_i splňovat, aby funkce (2.2.19) byla prostá.

Vzhledem k faktu, že se v případě $f(z)$ obecně jedná o komplexní funkci komplexní proměnné, mění se při daném posunutí jak absolutní velikost $|f'(z)|$, tak argument $\arg(f'(z))$ funkčních hodnot, přičemž pro malá Δz platí $\Delta f(z) = f(z+\Delta\, z) - f(z) \doteq f'(z) \cdot \Delta\, z$, a tedy

$$|\Delta\, f(z)| \doteq |f'(z)| \cdot |\Delta\, z|\,, \quad \arg \Delta\, f(z) \doteq \arg f'(z) + \arg \Delta\, z\,.$$

V případě funkcí (2.2.19) prostých uvnitř jednotkového kruhu formulovali Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1886–1982) a Paul Koebe (1882–1945) [Bieberbach(1917)], [Koebe(1920)] následující odhady:

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \quad \le \quad \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{2.2.20}$$

$$|\arg f'(z)| \quad \le \quad 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}\,. \tag{2.2.21}$$

Zatímco odhad (2.2.20) označovaný jako *Verzerrungsatz* je přesný v tom smyslu, že pro jisté prosté funkce v něm lze nahradit nerovnost rovností, odhad (2.2.21) zvaný *Drehungsatz* v Bieberbachově podání umožňoval další možná zlepšení. Kössler v článku *Eine Verschärfung* *des Drehungssatzes von L. Bieberbach* [K22], který v tisku vyšel dříve než [K21], odhad pro (2.2.21) skutečně zlepšil, a sice do podoby

$$|\arg f'(z)|_{|z|\le r} \le \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx\,. \tag{2.2.22}$$

Nebyl však sám schopen rozhodnout, zda tato nová majoranta je či není minimální možnou. Odpověď na tuto otázku najdeme v pojednání [Grunsky (1932)], v němž autor velmi rychle zareagoval na práci [K22] a dokázal, že (2.2.22) ještě připouští další zpřesnění. O toto vylepšení se Kössler pokusil zanedlouho znovu – v práci *Ein Beitrag zur Theorie der schlichten Potenzreihen* [K21], kde odvodil odhad

$$|\arg f'(z)| \le 2|a_2|r + \frac{3}{2}r\ln\frac{1+r}{1-r}\,.$$

Kösslerovy výsledky v této oblasti byly velmi vysoce ceněny. Mimo jiné v návrhu na přijetí M. Kösslera za řádného člena Královské české společnosti nauk z roku 1933 komise ve složení Petr, Bydžovský, Záviška hodnotila jeho odhad …*jako nejpřesnější odhad, který je dosud znám.*[2.15] Bohužel na tomto místě musíme podotknout, že o prvenství při zpřesňování odhadu (2.2.21) Kösslera připravil Gennadij Michajlovič Golusin (1906–1952), jenž stejný odhad uveřejnil o dva roky dříve v článku [Golusin (1929)]. Z Kösslerova komentáře je však zřejmé, že o Golusinově práci nevěděl a dokázal tak (2.2.22) na něm nezávisle. Jako analogii k nerovnosti (2.2.20) dále dokázal

$$1+\mathrm{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f(z)}\right) \ge \frac{1-|a_2|r-6r^2-|a_2|r^3+r^4}{(1-r^2)(1+|a_2|r+r^2)}\,,$$

což představuje odhad nepřipouštějící zpřesnění, neboť např. pro funkci $z/(1+|a_2|z+z^2)$ v něm platí rovnost. Uvedená nerovnost má zajímavou geometrickou interpretaci: množina $f(re^{i\varphi})$ ($\varphi\in\mathbb{R}$) je konvexní právě tehdy, když

$$1+\mathrm{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f(z)}\right) \ge 0 \quad \text{pro všechna } |z|=r\,.$$

Konečný přesný odhad pro (2.2.20) uveřejnil Golusin v roce 1936.

V pojednání *Über besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen* [K23] Kössler vyjádřil svou lítost nad tím, že se dosud nepodařilo zcela rozřešit problém koeficientů prostých funkcí, tj. najít jednoduché podmínky pro a_n tak, aby funkce (2.2.19) byla pro $|z|<r$ prostá. Rozhodl se tento problém studovat alespoň pro jisté speciální množiny funkcí. Formuloval a dokázal větu

Věta: *Buď funkce $\varrho(z)$ holomorfní a omezená ($|\varrho(z)|\le 1$) uvnitř kruhu $|z|<1$, φ reálné číslo, $0\le\varphi\le 2\pi$. Funkce*

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}+\int\limits_0^z \varrho(t)dt\,,\ \varphi_1(z)=\frac{1}{z}+\int\limits_{e^{i\varphi}}^z \varrho(t)dt-\frac{1}{e^{i\varphi}}\,,\ \varphi_2(z)=\frac{1}{z}\{1+z\int\limits_0^1 \varrho(zt^2)dt\}^2$$

[2.15] Viz návrh na řádné členství Miloše Kösslera v KČSN, fond KČSN, karton č. 19, uloženo v Archivu Akademie věd ČR.

jsou v kruhu $|z| < 1$ prosté a nenulové. Podobně funkce

$$f(z) = \tfrac{1}{\varphi(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \,, f_1(z) = \tfrac{1}{\varphi_1(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \,, f_2(z) = \tfrac{1}{\varphi_2(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

jsou v kruhu $|z| < 1$ holomorfní a prosté; koeficienty funkcí $f(z)$ a $f_2(z)$ vyhovují odhadům

$$|a_n| \leq 1 \tag{2.2.23}$$

a

$$|c_n| \leq n\,. \tag{2.2.24}$$

Domněnka, že (2.2.23) platí obecně pro všechny prosté funkce „postrádající sudé koeficienty“ ($a_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$), byla v roce 1943 vyvrácena. Platnost podmínky (2.2.24) pro libovolnou prostou funkci uvnitř jednotkového kruhu dlouho zůstávala rovněž pouze domněnkou, nazývanou jménem svého objevitele, a sice Bieberbacha.

Kösslerovi se tedy podařilo dokázat *Bieberbachovu domněnku* ve speciálním případě pro funkce typu $f_2(z)$. Pro $n = 2$ přitom obecnou platnost odhadu (2.2.24) dokázal v roce 1916 na základě Koebeho výsledků sám Bieberbach. O sedm let později Löwner dokázal pravdivost pro $n = 3$. V roce 1955 ji Garabedian a Schiffer ověřili pro $n = 4$, a podobně další autoři postupně pro další konkrétní n. Konečně v roce 1985 dokázal Louis de Branges de Bourcia (1932) pravdivost Bieberbachovy domněnky v plném znění pro $n \in \mathbb{N}$ (viz [de Branges (1985)]).

Pro jisté skupiny funkcí Kössler díky svým pojednáním [K21] – [K23] přispěl k pokroku ve studiu Bieberbachových hypotéz a rovněž k prohloubení našich znalostí o prostých funkcích. Na jeho výsledky navázal článek [Špaček (1932)], v němž Kösslerův student odvodil některé podmínky postačující k tomu, aby funkce byla prostá a konkrétně u příkladu dokazujícího, že nejde o podmínky nutné, poznamenal, že na danou úlohu byl písemně upozorněn právě prof. Kösslerem. Přednáška, kterou o této problematice Kössler pronesl v Jednotě v říjnu 1932, byla zmíněna již v první kapitole této práce.

K prostým funkcím se Kössler vrátil znovu na začátku 50. let – v pojednání *Simple polynomials* [K30] se zaměřil konkrétně na polynomy

$$P(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \,, \quad |a_n| > 0$$

a hledal podmínky pro koeficienty $a_2, \ldots, a_n$, které by byly nutné a postačující pro to, aby polynom P byl prostý pro $|z| \leq 1$.

Dvacet let před Kösslerem odvodil Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906–1992) takové podmínky následovně: všechny kořeny x rovnice associované

$$1 + a_2 x \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} + a_3 x^2 \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} + \cdots + a_n x^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = 0$$

musí pro všechna reálná φ splňovat vztah $|x| < 1$. Podstatným nedostatkem tohoto poznatku je však fakt, že vlastně generuje nekonečně mnoho podmínek pro koeficienty a_k. Kössler ve své práci dokázal toto:

Věta: *Polynom $P(z)$ je prostý pro $|z| \leq 1$, právě když systém dvou associovaných rovnic*

$$1+\sum_2^n a_k\left(z_1^{k-1}+z_1^{k-2}\cdot z_2+\cdots+z_2^{k-1}\right)=0\,,$$
$$1+\sum_2^n \overline{a_k}\left(\frac{1}{z_1^{k-1}}+\frac{1}{z_1^{k-2}\cdot z_2}+\cdots+\frac{1}{z_2^{k-1}}\right)=0 \tag{2.2.25}$$

není splněn pro žádné dvě hodnoty z_1, z_2 takové, že $|z_1| = |z_2| = 1$.

Vzhledem k symetrii rovnic (2.2.25) je patrné, že s každou dvojicí řešení (z_1, z_2) je systém splněn i pro dvojice (z_2, z_1), $(\frac{1}{\overline{z_1}}, \frac{1}{\overline{z_2}})$, $(\frac{1}{\overline{z_2}}, \frac{1}{\overline{z_1}})$. Využijeme-li této skutečnosti, pak zjistíme, že pro prostý polynom $P(z)$ musí všechny dvojice řešení (z_1, z_2) systému (2.2.25) vyhovovat relacím $(|z_1| < 1 \wedge |z_2| > 1) \vee (|z_1| > 1 \wedge |z_2| < 1)$. Pomocí jednoduchých substitucí autor převedl (2.2.25) na jednodušší tvar

$$\begin{aligned} 1 \quad &+ \quad \sum_2^n a_k x^{k-1} P_{k-1}(u) = 0; \\ x^{n-1} \quad &+ \quad \sum_2^n \overline{a_k} x^{n-k} P_{k-1}(u) = 0\,, \end{aligned} \tag{2.2.26}$$
$$\text{kde} \quad P_{k-1}(u) = \sum_{r=0}^{r \leq \frac{1}{2}(k-1)} (-1)^r \binom{k-r-1}{r} u^{k-2r-1}$$

a pomocí tohoto dokázal větu:

Věta: *Polynom $P(z)$ je prostý pro $|z| \leq 1$, právě když associovaná resultanta* (2.2.26) *není identicky rovna nule a zároveň nemá žádný kořen v intervalu $-2 \leq u \leq 2$.*

V dalším textu se Kössler zvláště zabýval polynomy druhého, resp. třetího stupně, a dále nastínil možnost využití odvozených výsledků i pro obecnější skupiny funkcí, mj. racionální lomené funkce a nekonečné mocninné řady. Jakkoli je však Kösslerem odvozená podmínka jednoduchá, praktické ověřování jejího splnění je značně náročné, což dokládá vyšetřování pro polynom $z + a_2z^2 + a_3z^3$. Tuto práci cituje např. článek [Gluchoff, Hartman (1998)]. Studiu prostých polynomů je věnována i rozsáhlá část Kösslerových deníků, jak je ukázáno v kapitole šesté.

Some properties of trigonometric and algebraic polynomials [K28]

V práci [K28] Kössler provedl rozklad trigonometrického polynomu

$$P(\varphi) = a_0 + \sum_1^{n-1}(a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) + a_n \cos n\varphi\,, \quad a_n > 0 \tag{2.2.27}$$

v součin reprezentující polynom algebraický, což mu umožnilo studovat parametrizace koeficientů pro jisté typy polynomů, konkrétně polynomy (2.2.27) nenabývající pro žádné φ záporné hodnoty nebo algebraické polynomy s kladnou reálnou částí.

Odvodil řadu nutných a postačujících podmínek pro koeficienty a_k daných typů polynomů. Pozoruhodný je fakt, že z jeho úvah vyplynul konečný počet těchto podmínek, kdežto z obecné teorie mocninných řad (dle Carathéodoryho, Toeplitze, Schura) dosud plynul nekonečný počet podmínek pro koeficienty a_k. Tím rozřešil algebraicky problém do té doby řešený jen transcendentně.

O významu čísla $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ v teorii mocninných řad [K29]

V pojednání [K29] Kössler shrnul význam hodnoty $g = \sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ pro vybrané vlastnosti mocninných řad. Zatímco $\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}}$ totiž hraje významnou roli např. při stanovování poloměru konvergence mocninné řady, číslo $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ bývá i přes svůj význam opomíjeno.

Všechny mocninné řady $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, které mají totéž $g = \sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$, tvoří třídu té vlastnosti, že nulový bod ζ kterékoliv z nich má vlastnost

$$|\zeta| \geq \frac{1}{2g}\,.$$

Tento odhad je do té míry přesný, že nedovoluje žádné další zpřesnění. Uvažujeme-li dále řadu

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

o poloměru konvergence $\varrho > 0$, přičemž $a_1 > 0$, $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}} = g$ pro $n \geq 2$, pak podle Kösslera pro poloměr konvergence ϱ_1 řady inverzní

$$z = \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots$$

platí přesný odhad

$$\varrho_1 \geq \left(\sqrt{1 + \frac{a_1}{g}} - 1\right)^2 .$$

Pro mocninné řady dvou proměnných

$$f(z_1, z_2) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n,0} z_1^n + a_{n-1,1} z_1^{n-1} z_2 + \cdots + a_{0,n} z_2^n\right)$$

kde $a > 0$, $g_n = \sup\left(|a_{n,0}|^{\frac{1}{n}}, |a_{n-1,1}|^{\frac{1}{n}}, \ldots, |a_{0,n}|^{\frac{1}{n}}\right)$, $\sup g_n = g > 0$ platí, že $f(z_1, z_2) \neq 0$ v oboru $|z_1| < r$ a zároveň $|z_2| < r$, kde

$$r = \frac{1}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right) .$$

Tato Kösslerova věta v podstatě obsahuje konkrétnější podobu věty o vlastnostech spojité funkce na okolí bodu.

Poslední aplikací, jíž se Kössler zabýval, byla souvislost s poloměrem prostého zobrazení daného mocninnou řadou. Uvažujeme-li řadu

$$f(z) = az + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\,, \quad a > 0\,,$$

pak zobrazení $f(z)$ je prosté uvnitř kruhu o poloměru max. ϱ se středem v bodě $z = 0$, kde $\varrho = \sup r$, přičemž r značí čísla, pro něž platí

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) - f(z_2) \neq 0 \text{ pro všechna } |z_1|, |z_2| \leq r.$$

Pro číslo ϱ platí následující odhad

$$\varrho \geq \frac{1}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right),$$

kde $g = \sup |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 1$. V závěru celého pojednání Kössler poznamenal, že jím uvedená metoda by se dala aplikovat mj. při důkazu existence implicitní funkce či při důkazu existence řešení diferenciálních rovnic, neboť jejím největším pozitivem je skutečnost, že pracuje s přesnými odhady poloměrů konvergence nepřipouštějícími další zpřesnění. Na tuto Kösslerovu práci navázal v roce 1954 Zdeněk Koutský článkem *Některá užití čísla* $\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ [Koutský (1954)], v němž podal právě zmíněný důkaz existenční věty pro řešení diferenciálních rovnic a zároveň ukázal systém mocninných řad, jehož inverzní systém má v určité třídě nejmenší poloměr konvergence. Pojednání bylo výtahem z autorovy disertace, kterou Kössler posuzoval spolu s V. Jarníkem.

Über reele Charakteristiken von Potenzreihen [K31]

Uvažujeme-li mocninnou řadu $\quad f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty}(a_k + ib_k)z^k\,, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}\,,$

pak *reálnými charakteristikami* této řady rozumíme mj. funkce

$$A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z), \quad B(r) = \min_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z),$$
$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|\,.$$

Otázka hledání těchto charakteristik pro konkrétní funkce $f(z)$ není zpravidla příliš obtížná. Kössler se zaměřil na problém opačný – je-li dána některá z těchto charakteristik pro vhodně malé r ve tvaru $r + C_2r^2 + C_3r^3 + \cdots$, $C_k \in \mathbb{R}$, jaké skupině funkcí $f(z)$ odpovídá?

Kösslerem použitá metoda je založena na faktu, že pro libovolnou funkci $\phi(r)$ takovou, že $f(re^{i\phi(r)}) = A(r)$, musí platit $re^{i\phi(r)}f'(re^{i\phi(r)}) = rA'(r)$. Zde triviální volba $\phi(r) \equiv 0$ vede k funkci $f(z) = A(z)$. Z volby $z = re^{i\phi(r)}$ pak pro

$$\sin\phi(r) = \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \cdots, \quad \gamma_n \in \mathbb{R}$$

dostaneme funkci inverzní k z ve tvaru $r = v(z) = z + \delta_2 z^2 + \delta_3 z^3 + \cdots$, odkud dosazením plyne

$$zf'(z) = v(z)\{1 + 2C_2v(z) + 3C_3v^2(z) + \cdots\}\,.$$

Touto podmínkou je funkce $f(z)$ určena pro dosti malé hodnoty $r > 0$. Postup konstrukce $f(z)$ je použit v konkrétním případě, kdy $A(r) \equiv r$, $\sin\phi(r) = \frac{1}{2}\varepsilon r$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $r < \frac{2}{|\varepsilon|}$, jenž vede k funkcím $f_\varepsilon(z) = 2/(i\varepsilon)\left\{\sqrt{1 + i\varepsilon z} - 1\right\}$, které skutečně vyhovují vztahu $\max \operatorname{Re} f_\varepsilon(z) = A(r) = r$. Podstatná je ve všech případech *lokálnost* odvozených tvrzení v závislosti na velikosti r. V posledních odstavcích svého pojednání Kössler nastínil možnost aplikace teorie pro $A(r)$ i na ostatní charakteristiky $B(r)$, $M(r)$ a $m(r)$. Reálným charakteristikám je dále věnována rozsáhlá pasáž poznámek v autorově deníku č. 17 a 18 – viz kapitola šestá.

2.3. Práce výjimečné

„*Matematika je umění dávat stejná jména různým věcem.*“

Jules Henri Poincaré

V zájmu úplnosti musíme poznamenat, že z uvedeného jednoduchého rozdělení Kösslerových prací vyčnívá několik výjimek. Z pohledu časového je nejstarší z nich kratičký článek *O úhlech nesouměřitelných* ([K10]) z roku 1923. Výjimečnost tohoto pojednání tkví nejen ve skutečnosti, že jde o problematiku, kterou se Kössler v dalších pojednáních (s výjimkou drobných zmínek v [K11]) více nezabýval, ale zároveň jde o dílo přístupné i pokročilejším studentům středních škol, na rozdíl od ostatních Kösslerových článků vyžadujících od čtenáře netriviální matematické znalosti.

O úhlech nesouměřitelných [K10]

Inspirací pro tento článek byla Kösslerovi bezesporu pythagorejská teorie souměřitelnosti úseček, která ve své době vedla k tzv. *první krizi matematiky* způsobené objevem iracionálních čísel reprezentujících nesouměřitelné úsečky (např. stranu a úhlopříčku čtverce).

Úsečky a, b byly považovány za souměřitelné, jestliže bylo možno nalézt společnou míru c tak, že bylo možné psát $a = m \cdot c$, $b = n \cdot c$ (m, n představují přirozená čísla), resp. $a : b = m : n = \frac{m}{n}$. Důkaz existence nesouměřitelných úseček bychom mohli z algebraického hlediska opřít o jednoduchou rovnici, např. $u^2 = 2a^2$ pro délku úhlopříčky čtverce u vyjádřenou pomocí délky strany čtverce a.

Zatímco o souměřitelných úsečkách, plochách či objemech bylo v minulosti napsáno mnoho, Kösslera zaujala skutečnost, že v literatuře se úvahy na toto téma nezmiňovaly o problematice úhlů. Sám se pokusil zároveň odpovědět na otázku, proč tomu tak bylo – v případě souměřitelnosti úhlů je totiž nutné pracovat s výrazně komplikovanějšími algebraickými rovnicemi všech stupňů a jejich soustavami.

Uvažujeme-li o úhlech α, β jako o úhlech měřených v obloukové míře, lze Kösslerovy úvahy rozdělit na hledání odpovědí na dvě otázky:

(1) Kdy je úhel α souměřitelný s úhlem π?

(2) Kdy jsou úhly α, β vzájemně souměřitelné?

Definice: Řekneme, že úhly α a β jsou *souměřitelné*, jestliže lze psát

$$\alpha : \beta = \frac{n}{m},$$

kde m, n jsou nesoudělná celá čísla. V ostatních případech říkáme, že úhly α a β jsou *nesouměřitelné*.

Tato definice je jednoduchou analogií definice souměřitelnosti úseček starých Řeků. Jestliže tedy máme úhel α daný přímo, odpověď na první otázku se redukuje na rozhodnutí, zda poměr $\alpha : \pi$ představuje racionální nebo iracionální číslo. Mnohem zajímavější je proto situace, není-li úhel α daný přímo, ale prostřednictvím některé z goniometrických funkcí (např.

$\operatorname{cotg}\alpha = 2$, $\sin\alpha = 1/2$, apod.). Vzhledem ke známým vztahům mezi goniometrickými funkcemi, např.

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha\,, \quad \alpha \neq k\pi\,,$$

stačí vyšetřovat problém pouze pro jednu z goniometrických funkcí a výsledky pak případně jednoduše upravit. Kössler si pro tento účel vybral funkci $\cos x$ a dokázal větu, kterou lze formulovat následujícím způsobem:

Věta A: *Úhel α definovaný vztahem $\cos\alpha = \varrho$ je souměřitelný s úhlem π právě tehdy, když*

$$(\varrho + i\sqrt{1-\varrho^2})^{2m} = 1\,, \tag{2.3.1}$$

kde m představuje jisté celé číslo (předem neznámé).

[Důkaz této věty je jednoduchý: ze vztahu $\alpha : \pi = n : m$ vyjadřujícího souměřitelnost úhlů α, π lze odvodit rovnost

$$e^{2im\alpha} = e^{2in\pi} = 1\,. \tag{2.3.2}$$

Využijeme-li Eulerův vzorec $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ a tvrzení Moivreovy věty $(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$, dostaneme ze vztahu (2.3.2)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2m} = 1\,,$$

a dále už stačí si uvědomit, že při označení $\cos\alpha = \varrho$ platí $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\varrho^2}$, odkud plyne vztah (2.3.1). Podobně snadno se dokáže obrácená část tvrzení věty A.]

Na tomto místě Kössler sám uznal, že z hlediska praktického využití je vzorec (2.3.1) naprosto nevhodný, a proto se pokusil odvodit podmínku vhodnější pro numerické výpočty. Vycházel z Eulerova vztahu [2.16]

$$\sin 2m\alpha = \sin\alpha \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \binom{2m-r-1}{r} (2\cos\alpha)^{2m-2r-1}\,.$$

Označíme-li $(2\cos\alpha)^2 = 4\varrho^2 = \eta$ a uvážíme-li, že za předpokladu souměřitelnosti úhlů α, π platí rovnost $\sin 2m\alpha = \sin 2n\pi = 0$, dostaneme po drobné úpravě podmínku ekvivalentní s podmínkou (2.3.1)

$$\eta^{m-1} - \binom{2m-2}{1}\eta^{m-2} + \binom{2m-3}{2}\eta^{m-3} - \cdots + (-1)^{m-1}\cdot m = 0\,. \tag{2.3.3}$$

Z tohoto vyjádření nutné a postačující podmínky pro souměřitelnost úhlů α, π plynou zajímavé důsledky, např.

(1) *Jestliže $\varrho = \cos\alpha$ je transcendentní číslo (např. $1/e$, $1/\pi$, ...), pak úhel α nemůže být souměřitelný s π, neboť i $\eta = 4\varrho^2$ jakožto transcendentní číslo nemůže splňovat vztah (2.3.3) pro žádné $m \in \mathbb{Z}$.*

[2.16] Zde je v článku [K10] tisková chyba - v exponentu výrazu $(2\cos\alpha)$ na pravé straně rovnosti chybí koeficient 2 před r.

(2) **Věta (B):** *Úhel α určený vztahem $\cos\alpha = \sqrt{r}$ (kde $r \in \mathbb{Q}^+$, $r \le 1$) je souměřitelný s π jen tehdy, když*

$$r = 0, 1/4, 2/4, 3/4\,,\ \textit{nebo}\, 4/4\,.$$

[Důkaz věty B v podstatě hledá odpověď na otázku, kdy je racionální číslo $\eta = p/q$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$) řešením rovnice (2.3.3). Dosazením $\eta = p/q$ do (2.3.3) a vynásobením celé rovnice číslem q^{m-2} dostaneme

$$\frac{p^{m-1}}{q} = \binom{2m-2}{1} p^{2m-2} - \binom{2m-3}{2} p^{2m-3} q + \cdots + (-1)^m \cdot m q^{m-2}\,,$$

kde pravá strana je evidentně rovna nějakému celému číslu. Z podmínky nesoudělnosti čísel p, q potom ovšem plyne jediná možnost pro číslo q, a sice $q = 1$, a tedy $\eta = p \in \mathbb{Z}$. Vztah $\eta = (2\cos\alpha)^2 = p \in \mathbb{Z}$ však skýtá reálné řešení pouze v případech $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Dále už stačí si uvědomit, že $r = p/(4q)$, čímž je tvrzení věty B dokázáno.]

Jakkoli se může výše uvedený druhý důsledek zdát nezajímavý, plynou z něj zajímavá tvrzení pro pravoúhlé a kosoúhlé trojúhelníky:

(2a) Jestliže délky dvou stran pravoúhlého trojúhelníka jsou čísly souměřitelnými, jsou velikosti úhlů tohoto trojúhelníku čísly navzájem nesouměřitelnými. Výjimku tvoří trojúhelníky pravoúhlé s úhlem $\pi/3$ nebo $\pi/4$.

(2b) V kosoúhlém trojúhelníku nemohou být současně délky všech stran souměřitelné a zároveň všechny úhly souměřitelné. Jedinou výjimkou je trojúhelník rovnostranný.

Vrátíme-li se ještě na chvíli zpět ke vztahu (2.3.3), všimněme si, že v případě, kdy jsou úhly α, π souměřitelné, je číslo η celé algebraické. Z takové úvahy Kössler vyvodil tvrzení opačného charakteru – podmínku nesouměřitelnosti úhlů α, π, kterou označil jako větu C.

Věta C: *Buď $\eta = 4\cos^2\alpha$. Jestliže platí algebraická rovnice s celočíselnými koeficienty*

$$a_0\eta^n + a_1\eta^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,,$$

kde $a_0 > 1$, $a_n \neq 0$ a celá rovnice se nedá krátit číslem a_0, pak je úhel α nesouměřitelný s úhlem π.

[Důkaz využívá sporu s rovnicí (2.3.3).]

Zaměříme-li se na druhou otázku kladenou v úvodu, můžeme postupovat zcela analogicky jako v případě první otázky - pouze roli úhlu π převezme obecný úhel β. Z podmínky $\sin 2m\alpha = \sin 2n\beta$, kterou splňují souměřitelné úhly α, β, dostaneme při označení $(2\cos\alpha)^2 = \eta$, $(2\cos\beta)^2 = \vartheta$ rovnici

$$\sqrt{\eta(4-\eta)} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \binom{2m-r-1}{r} \eta^{m-r-1} = \tag{2.3.4}$$
$$= \sqrt{\vartheta(4-\vartheta)} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{2n-r-1}{r} \vartheta^{n-r-1}\,.$$

V tomto případě však takto dostáváme podmínku *nutnou*, nikoliv *postačující* pro souměřitelnost úhlů α, β. Postupujeme-li totiž opačným směrem, nemůžeme z podmínky

$\sin 2m\alpha = \sin 2n\beta$ přímo tvrdit, že $2m\alpha = 2n\beta$, a tudíž úhly α, β prohlásit za souměřitelné. Ze vztahu $\sin 2m\alpha = \sin 2n\beta$ můžeme pouze vyvodit $2m\alpha = 2n\beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. K tomu, abychom obdrželi i postačující podmínku souměřitelnosti, museli bychom k podmínce (2.3.4) přidat ještě další plynoucí ze vztahu

$$\sin \frac{2m\alpha - 2n\beta}{k} = \sin 2\pi = 0\,,$$

jenž v případě α, β souměřitelných platí pro každé k celé (nenulové). Poněkud složitý vztah (2.3.4) můžeme využít např. pro řešení následující úlohy.

Příklad: *Uvažujme dva pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran* ($p_{1,2}$, $q_{1,2}$, $r_{1,2}$, *kde* $p_i^2 + q_i^2 = r_i^2$) *představují celá nesoudělná čísla. Lze dokázat, že ostré úhly obou trojúhelníků jsou mezi sebou i s úhlem* π *nesouměřitelné.*

Důkaz tvrzení v této úloze při označení $\eta = 4p_1^2/r_1^2$, $\vartheta = 4p_2^2/r_2^2$ a za předpokladu souměřitelnosti některé dvojice úhlů v obou trojúhelnících (s výjimkou dvojice úhlů pravých), vede s využitím rovnice (2.3.4) a vlastností pythagorejských trojic ke zjištění, že takové pravoúhlé trojúhelníky neexistují.

V závěrečné části této práce se Kössler velmi stručně zmínil o aplikaci výše odvozených poznatků ve svém připravovaném článku [K11], jenž byl nakonec shodou okolností vydán ještě dříve než [K10], konkrétně v problematice studia analytického pokračování jistých tříd funkcí ve smyslu Borelově. Podrobnější komentář k této aplikaci je obsažen v odstavci 2.2.

Další výjimku v Kösslerově díle představuje učebnice *Úvod do počtu diferenciálního* ([K33]), jejímuž rozboru v rámci této práce věnujeme pátou kapitolu. Zbývající dvě výjimky tvoří články, pod nimiž je Kössler podepsán jako spoluautor.

O práci ([K34]) věnované Karlu Petrovi, v níž František Nušl sepsal stručný životopis svého přítele ze studií a Miloš Kössler doplnil stručný přehled díla (včetně návazností dané problematiky na její výskyt v ostatní literatuře a u jiných autorů) svého oblíbeného učitele a pozdějšího kolegy, jsme se zmínili již v úvodní kapitole. Z pohledu Kösslerova příspěvku jde o práci přehledovou, nikoli původní vědecké pojednání, a proto se jí dále nebudeme podrobněji věnovat.

Spolu s Vojtěchem Jarníkem je Kössler podepsán pod článkem *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů* ([K32]), který lze považovat za jedno z průkopnických děl v disciplíně dnes nazývané teorie grafů. Tato práce byla inspirována článkem Otakara Borůvky *O jistém problému minimálním* z roku 1926, zabývajícím se hledáním minimální kostry grafu. Vzhledem k faktu, že uvedený článek [K32] byl podrobně rozebrán v příspěvku Jaroslava Nešetřila a Bernharda Korteho *Vojtěch Jarník's Work in Combinatorial Optimization* (viz [Life and Work of Vojtěch Jarník, str. 37–53] a [Korte, Nešetřil (2001)]), nebudeme zde rozbor této práce uvádět.

2.4. Práce věnované teorii čísel – přehled

„Matematika je královnou věd a teorie čísel je královnou matematiky.“

C. F. Gauss

Do uvedené kategorie lze zařadit celkem osm Kösslerových prací. Při bližším pohledu na jejich obsah mezi nimi najdeme čtyři práce zabývající se problematikou ležící na rozhraní teorie čísel a teorie funkcí. Jedná se o články:

[K3] Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou

[K4] Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla

[K6] Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou

[K25] Asymptotické rozvoje pro funkce $\zeta(s)$, $\zeta(a, s)$.

Zvláštní pozornost je těmto pojednáním věnována v kapitole čtvrté. Zbývající čtyři práce, podrobně popsané v následující kapitole, jsou vysloveně číselně-teoretického charakteru:

[K7] O rekurentním vzorci pro prvočísla

[K19] Dvě poznámky k theorii číselné

[K26] Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie

[K27] Über ein Teilerproblem.

Ještě před tím, než přistoupíme k rozboru jednotlivých děl, považujeme za vhodné zmínit, že profesor Kössler vždy zastával názor, že analytické metody jsou v teorii čísel cizím prvkem. Ideálem podle něj bylo, aby teorie čísel pracovala bez této pomoci, čistě elementárními číselně teoretickými metodami. Nenechme se touto formulací zmást a připomeňme si na tomto místě citát z pera akademika Jarníka:

„Matematik ovšem ví, že „elementární“ v matematice neznamená „snadný“ – často spíše naopak.“ [Jarník (1955), str. 113]

Použité zdroje

BIEBERBACH, L. Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen. *Math. Zeitschr.* **4**, str. 295–305, 1917.

BIEBERBACH, L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, str. 940–955, 1916.

BOREL, E. *Leçons sur les fonctions monogénes uniformes d' une variable complexe.* Paris: Gauthier-Villars, 1917.

CARATHÉODORY, C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Math. Ann.* **64**, str. 95–115, 1907.

de BRANGES, L. A Proof of the Bieberbach Conjecture. *Acta Math.* **154**, str. 137–152, 1985.

DIEUDONNÉ, J. Recherches sur quelques problémes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe. *Ann. de lÉc. Norm.* **48** (3), str. 247–358, 1931.

DUSL, K. *Přehled teorie funkcí jedné komplexní proměnné*, Praha: nákladem České matice technické, 1941.

FABER, G. Über polynomische Entwicklungen I. *Math. Ann.* **57**, str. 389–408, 1903.

FABER, G. Über polynomische Entwicklungen II. *Math. Ann.* **64**, str. 116–135, 1907.

FABRY, E. Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas trčs généraux. *Ann. de lÉc. Norm.* **13** (3), roč. 13 (3), str. 367–399, 1896.

GARABEDIAN, R.; SCHIFFER, M. A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fourth Coefficient. *J. Rational Mech. Anal.* **4**, str. 427–465, 1955.

GLUCHOFF, A.; HARTMANN, F. Univalent polynomials and non-negative trigonometric sums *Amer. Math. Monthly* **105**, str. 502–522, 1998.

GOLUSIN, G. Über einige Abschätzungen von Funktionen, welche den Kreis konform und schlicht abbilden. *Recueil math. Moscou* **36**, str. 152–172, 1929.

GRUNSKY, H. Anmerkung zur Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach durch M. Kössler. *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* **42**, str. 71–73, 1932.

HADAMARD, J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *Journ. de Math.* **4**, str. 101–186, 1892.

HERMITE, Ch. Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado. *Annali di math. pura ed appl.* **1**, str. 256–259, 1858.

HURWITZ, A., PÓLYA, G. Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. *Acta Math.* **40**, str. 179–183, 1915.

IVANOV, A. O.; TUZHILIN, A. A. Differential calculus in the space of Steiner minimal trees in Riemannian manifolds. *Sb. Math.* **192**, str. 823–841, 2001.

IVANOV, A. O.; TUZHILIN, A. A. Branching geodesics in normed spaces. *Izv. Math.* **66**, str. 905–948, 2002.

JARNÍK, V. Vědecké práce M. Kösslera. *Čas. pro pěst. mat.* **80**, str. 106–117, 1955.

JENSEN, J. L. Sur un nouvel et important théoreme de la théorie des fonctions. *Acta Math.* **22**, str. 359–364, 1899.

KOEBE, P. Zum Verzerrungssatze der konformen Abbildung. *Math. Zeitschr.* **6**, str. 311–313, 1920.

KORTE, B.; NEŠETŘIL, J. Vojtěch Jarník's Work in Combinatorial Optimization. *Discrete Math.* **235**, str. 1–17, 2001.

KOUTSKÝ, Z. Některá užití čísla $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$. *Čas. pro pěst. mat.* **79**, str. 273–277, 1954.

LÁSKA, V. Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova *Čas. pro pěst. mat. a fys.* **42**, str. 398–401, 1913.

LEVI, B. Osservazioni riguardo alla precedente nota di C. Biggeri. *Boll Un. mat. Ital.* **15**, str. 214–215, 1936.

Life and Work of Vojtěch Jarník. Ed. Novák Břetislav. Praha: Prometheus, 1999.

LINDEMANN, F. Über die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch transcendente Functionen *Nachrichten der k. Ges. der Wiss. Göttingen*, str. 245–248, 1884.

LÖSCH, F. Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation. *Math. Z.* **30**, str. 725–753, 1929.

LÖWNER, K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. *Math. Ann.* **89**, str. 103–121, 1923.

MathWorld–A Wolfram Web Resource [online]. Dostupné na WWW: `http://mathworld.wolfram.com/`.

MITTAG-LEFFLER, G. Sur la représentation analytique d' une branche uniforme d' une function monogene. *Acta Math.* **23**, str. 43–62, 1899.

NEŠETŘIL, J. *Teorie grafů.* Praha: SNTL, 1979.

OSGOOD, W. *Lehrbuch der Funktionentheorie.Bd.I.* Leipzig: B.G.Teubner, 1906-1907.

PETR, K. Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova *Čas. pro pěst. mat. a fys.* **42**, str. 556–558, 1913.

PETRŽÍLKA, V. Über die Singularitäten einer Potenzreihe auf der Peripherie des Konvergenzkreises *Čas. pro pěst. mat. a fys.* **56**, str. 154–171, 1927.

POMMERENKE, Ch. The Bieberbach Conjecture *Math. Intelligencer* **7**, s. 23–25, 32, 1985.

REKTORYS, K. a kol. *Přehled užité matematiky I, II.* Praha: Prometheus, 1995.

SCHUR, I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. I, II. *Journ. für Math.* **147**, **148**, str. 205–232, 122–145, 1917–1918.

SZÁSZ, O. Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches *Math. Ann.* **85**, str. 99–110, 1922.

ŠIŠMA, P. *Teorie grafů 1736–1963.* Praha: Prometheus, 1997. Edice Dějiny matematiky, sv. 7.

ŠIŠMA, P. Vznik a vývoj teorie grafů. In *Člověk – Umění – Matematika.* Praha: Prometheus, str. 155–165, 1996. Edice Dějiny matematiky, sv. 4.

ŠIŠMA, P. Vznik a vývoj teorie grafů. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **43**, str. 89–99, 1998.

ŠPAČEK, L. Příspěvek k teorii funkcí prostých *Čas. pro pěst. mat. a fyz.* **62**, str. 12–19, 1933.

VESELÝ, J. *Komplexní analýza pro učitele.* Praha: Univerzita Karlova – Nakladatelství Karolinum, 2000.

VIVANTI, G. Sulle serie di potenze. *Rivista di Mat.* **3**, str. 111–114, 1893.

WALFISZ, A. *Gitterpunkte in Mehrdimensionalen Kugeln*, Warszava: Panstwowe wydawnictwo naukove, 1957.

WIRTINGER, W. Einige Anwendungen der *Euler-Maclaurin*schen Summenformel, insbesondere auf eine Aufgabe von *Abel. Acta Math.* **26**, str. 255–272.

Kapitola 3.
Práce z elementární teorie čísel

3.1. O rekurentním vzorci pro prvočísla [K7]

„*Problém, který stojí za řešení, dokazuje svou cenu tím, že vzdoruje.*“

P. Hein

Historie problému

Od 3. st. př. Kr., kdy Euklides ve svých *Základech* elegantně dokázal, že „*kmenných čísel jest více než jakékoliv dané množství*“, je známo, že prvočísel existuje nekonečně mnoho. Celá řada matematiků se již od dob starořeckých filosofů snažila a snaží vyhledávat stále větší a větší prvočísla, či dokonce najít funkci f popsatelnou konečnou aritmeticko-analytickou formulí takovou, aby všechny hodnoty $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, byly prvočíselné.

Metoda známá pod názvem *Eratosthenovo síto* se v dnešní době objevuje už v učebnicích pro základní školy. Nedává nám však možnost dopředu efektivně zjistit následující prvočíslo v posloupnosti 2, 3, 5, 7, 11, ..., 41, ..., 83, ..., známe-li všechna předchozí prvočísla. V dalších úvahách budeme značit $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ posloupnost prvočísel seřazených podle velikosti. Vyjdeme-li po stopách Euklidova důkazu tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho, získáme pro následující prvočíslo v posloupnosti $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ odhad ve tvaru

$$p_{k+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_k + 1 \,. \tag{3.1.1}$$

Tento odhad je však velmi „neostrý“. Během vývoje matematiky bylo od dob Euklidových formulováno mnoho podobných, avšak přesnějších odhadů (viz např. [Šimša (1994)]). Uveďme si pro zajímavost odhad Mąkowského

$$p_{k+1} + p_{k+2} < p_1 p_2 \cdots p_k \,, \tag{3.1.2}$$

a odhad Dehnův

$$p_{k+1} < \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_k} \,. \tag{3.1.3}$$

V roce 1845 vyslovil Joseph Louis François Bertrand (1822–1900) domněnku: „*Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ leží v intervalu $(n, 2n)$ alespoň jedno prvočíslo.*“, jíž se podařilo dokázat v roce 1850 Pafnutiji Lvoviči Čebyševovi (1821–1894). Odhad ve tvaru

$$p_{k+1} < 2p_k \tag{3.1.4}$$

tak bývá připisován právě jemu.

Analytické snahy nahradit v podobných odhadech znaménko nerovnosti znaménkem rovnosti a sestavit tak rekurentní formuli pro k-té prvočíslo, když všechna předcházející pokládáme za známá, vedly a vedou ke značně komplikovaným vzorcům, včetně vzorce, který odvodil Miloš Kössler. Pro zajímavost uvedeme některé z nich. Polský matematik zabývající se teorií čísel Waclaw Sierpiński (1882–1969) v roce 1952 sestavil rekurentní formuli pro $n-$té prvočíslo

$$p_n = \left\lfloor 10^{2^n}\alpha \right\rfloor - 10^{2^{n-1}} \left\lfloor 10^{2^{n-1}}\alpha \right\rfloor , \quad \text{kde } \alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{10^{2^m}} , \tag{3.1.5}$$

která je však v praxi pro generování prvočísel nepoužitelná, neboť předpokládá znalost nejen $p_1, \ldots, p_{n-1}$, ale i $p_n, p_{n+1}, \ldots$ Ze stejného důvodu selhává vzorec, který uvedli G. H. Hardy a E. M. Wright ve své knize *The Introduction to the Theory of Numbers*:

$$p_n = \left\lfloor r^{n^2} B \right\rfloor - r^{2n-1} \left\lfloor r^{(n-1)^2} B \right\rfloor , \quad \text{kde } B = \sum_{n=1}^{\infty} p_n r^{-n^2} , r \in \mathbb{N} , r > 1 .$$

Jinou možnost, jak odvodit formuli pro $n-$té prvočíslo, dává Wilsonova věta (viz odstavec 4.1.1). V roce 1964 C. P. Willans sestavil s její pomocí vzorec

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{j=2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1+\pi(m)} \right\rfloor^{1/n} \right\rfloor , \quad \text{kde } \pi(m) = \sum_{j=2}^{m} \frac{\sin^2 \pi \frac{(j-1)!}{j}}{\sin^2 \frac{\pi}{j}} . \tag{3.1.6}$$

Mezi nejznámější z rekurentních formulí pro prvočíslo p_n patří Gandhiho formule z roku 1971

$$p_n = \left\lfloor 1 - \ln_2 \left(-\frac{1}{2} + \sum_{d|P_{n-1}} \frac{\mu(d)}{2^d - 1} \right) \right\rfloor , \tag{3.1.7}$$

kde μ značí Möbiovu funkci,[3.1] součin $P_{n-1} = p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$, symbol $d|P_{n-1}$ značí „d je dělitelem P_{n-1}“.

Náhled na Kösslerovo odvození

Miloš Kössler ve svém článku používal odhad Čebyševův (3.1.4) a vycházel z Eulerova vztahu mezi prvočísly a dzeta funkcí

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}} , \quad s > 1 .$$

Podle svých slov tak odvodil *„poměrně jednoduché vyjádření jedinou formulí rekurentní beze všech iterací“*. Celý jeho postup lze rozdělit do dvou kroků - v první fázi odvodil limitní podmínku pro p_n^2, ve druhé fázi pak odstranil získanou limitu pomocí celé řady na sebe navazujících nerovností. Označíme-li podle Kösslera

$$\Phi(s) = \zeta(s)(1 - p_1^{-s})(1 - p_2^{-s}) \cdots (1 - p_{k-1}^{-s}) - 1 ,$$

[3.1] Möbiova funkce je definována pro $n \in \mathbb{N}$ jako $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ pro n ve tvaru součinu k různých prvočísel, který není dělitelný druhou mocninou žádného z nich, $\mu(n) = 0$ v ostatních případech.

můžeme s pomocí rozvoje činitelů pravé strany této rovnice v geometrickou řadu psát

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} &= p_k^2 \frac{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \cdots}{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+2} + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^{s+2} + \cdots} \\
&= \frac{\zeta(s)(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s})\cdots(1-p_{k-1}^{-s}) - 1}{\zeta(s+2)(1-p_1^{-s-2})(1-p_2^{-s-2})\cdots(1-p_{k-1}^{-s-2}) - 1}\,, \qquad (3.1.8)
\end{aligned}
$$

odkud s využitím zřejmě platné nerovnosti $p_{k+1} \geq p_k + 2$ a odhadu pro dostatečně velká s lze odvodit vzorec

$$
p_k^2 = \lim_{s\to\infty} \frac{\zeta(s)(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s})\cdots(1-p_{k-1}^{-s}) - 1}{\zeta(s+2)(1-p_1^{-s-2})(1-p_2^{-s-2})\cdots(1-p_{k-1}^{-s-2}) - 1}\,. \qquad (3.1.9)
$$

Omezíme-li se dále na $s \geq \sigma$ (kde σ je přesněji odhadnuto později), dostaneme podmínku

$$
p_k^2 = \lfloor \Phi(s)/\Phi(s+2) \rfloor \,.
$$

Ke zjištění, jak velké musí číslo σ být, Kössler využil právě odhad (3.1.4) a vlastnosti funkce $\ln x$. Zkusmo dosadil

$$
\sigma = 7p_{k-1} \ln p_{k-1}\,,
$$

a dále ověřil, že pro $p_{k-1} \geq 11$ takto volené σ splňuje všechny nerovnosti vyskytující se v průběhu výpočtu. Vzhledem ke skutečnosti, že o hodnotách $\zeta(2m+1)$ nemáme příliš přesné informace (viz odstavec 4.3), volil v posledním kroku číslo $s = 2m \geq \sigma$, tedy číslo sudé, aby mohl vyjádřit hodnotu $\zeta-$funkce ve vzorci (3.1.8) pomocí známého Eulerova vztahu

$$
\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}|B_m|\pi^{2m}}{(2m)!}\,,
$$

kde B_m značí Bernoulliho číslo.[3.2] Celkem tedy pro $p_{k-1} \geq 11$ a $m > \frac{7}{2} p_{k-1} \ln p_{k-1}$ Kössler získal rekurentní formuli

$$
\begin{aligned}
p_k^2 = \Bigg\lfloor &(2m+1)(2m+2)\frac{2^{2m-1}|B_m|\pi^{2m}}{2^{2m+1}|B_{m+1}|\pi^{2m+2}} \cdot \qquad (3.1.10) \\
&\cdot \frac{(1-p_1^{-2m})(1-p_2^{-2m})\cdots(1-p_{k-1}^{-2m}) - (2m)!}{(1-p_1^{-2m-2})(1-p_2^{-2m-2})\cdots(1-p_{k-1}^{-2m-2}) - (2m+2)!} \Bigg\rfloor \,.
\end{aligned}
$$

Nejmenší prvočíslo, které by bylo možno pomocí (3.1.10) hledat za splnění podmínky $p_{k-1} \geq 11$, je tedy číslo 13. Pokusíme-li se vzorec prověřit pro tento nejjednodušší případ, zjistíme, že musíme volit $m > 92$, což vede v případě čísel B_m, $(2m)!$ k obrovským číslům, jejichž další použití ve výpočtu prakticky zabraňuje efektivnímu vyčíslení dané formule. Citace práce [K7] se objevuje i v zahraniční literatuře, např. v knize [Narkiewicz (2000)].

[3.2] Prof. Kössler používal ve svých výpočtech Bernoulliho čísla s touto indexací: $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... (tj. bez nulových členů, všechna čísla s kladným znamením), takže uvedený vztah zapisoval bez absolutní hodnoty.

3.2. Dvě poznámky k theorii číselné [K19]

„*Prvočísla jsou proto, aby se násobila. Tak proč je sčítat???*“

Lev Landau

Rozklady přirozených čísel

Rozkladem přirozeného čísla se rozumí v dnešní středoškolské matematice nejčastěji rozklad kanonický, s nímž se žáci setkávají už na základní škole, resp. v nižších ročnících víceletých gymnázií. Nedostatkem času tísněná teorie čísel se v našem středoškolském systému v tomto směru omezuje pouze na formulaci věty o existenci a jednoznačnosti kanonického rozkladu:

Věta: *Libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ je možné vyjádřit jako součin prvočísel, přičemž toto vyjádření je jediné, nebereme-li v úvahu pořadí činitelů. Např.*

$$1605240 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13\,.$$

S důkazem tohoto tvrzení se někteří studenti setkají v základním kursu algebry na vysoké škole, většina populace se však dále nevěnuje studiu teorie čísel, a tak si pod pojmem rozkladu představuje právě tento multiplikativní rozklad kanonický, jako by se držela úvodního citátu, jehož autorem je sovětský fyzik Lev Davidovič Landau.[3.3] Z historického hlediska je však hledání analogií mezi aditivními a multiplikativními vlastnostmi přirozených čísel, jímž se prof. Kössler ve svém díle často zabýval, dosti starou a velmi zajímavou oblastí matematiky.

Na problematiku různých speciálních rozkladů přirozených čísel v součet můžeme narazit v rozmanitých podobách i se studenty na střední škole, např. v matematických seminářích či při řešení úloh matematické olympiády. Vždyť např. rekurentní vztah mezi po sobě následujícími Fibonacciho čísly ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) vlastně hledá konkrétní rozklad Fibonacciho čísla na součet dvou faktorů; definice dokonalého čísla v sobě rovněž zahrnuje myšlenku rozkladu přirozeného čísla v součet svých vlastních dělitelů (např. $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$), vztah mezi kanonickým rozkladem čísla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ a jeho logaritmem

$$\ln n = \ln p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \ln p_i$$

nám ukazuje možnost převodu násobení na součet využívající vlastností logaritmů, atd.

Jistá analogie Eulerovy věty

Inspiraci pro Kösslerovu práci [K19] můžeme najít v samých počátcích rozvoje aditivní teorie čísel. V dopise z roku 1674 se Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) ptal J. Bernoulliho, kolika způsoby lze dané přirozené číslo rozložit na součet přirozených čísel, nezáleží-li na pořadí sčítanců. Zjistil, že pro číslo 3 existují tři rozklady ($3,\ 2+1,\ 1+1+1$), pro číslo 4 pět rozkladů ($4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$), pro číslo 5 sedm rozkladů,

[3.3] Lev Davidovič Landau (1908–1968), nositel Nobelovy ceny za fyziku z roku 1962 *za průkopnické teorie o kondenzované hmotě, zvláště o kapalném héliu.* Uvedenou otázku vyřkl na zasedání ruské Akademie věd.

číslo 6 jedenáct rozkladů; podezření na prvočíselný počet rozkladů padlo pro číslo 7 s 15 existujícími rozklady.

Leonhard Euler (1707–1783) na základě porovnání koeficientů u totožných mocnin x v identitě

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{2n+1})^{-1} \quad ,|x|<1$$

vyslovil v roce 1748 větu:

Věta (L.Euler) : *Každé přirozené číslo lze rozečísti právě tolikrát na sčítance od sebe různé, kolikrát jest možno ho rozečísti na stejné nebo různé sčítance liché.*

Připustíme-li i rozklad na jednoho sčítance, pak například existují tři způsoby, jak číslo 5 zapsat jako součet sčítanců od sebe různých ($5 = 1+4 = 2+3$), a rovněž tři způsoby, jak jej rozložit na sčítance pouze liché ($5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+3$). Podobně, číslo 4 lze zapsat dvěma způsoby jako součet sčítanců od sebe různých ($4 = 1+3$) a dvěma způsoby jako součet sčítanců pouze lichých ($1+3 = 1+1+1+1$). M. Kösslera zaujal nápad, zda snad existuje podobný vztah pro rozklad přirozeného čísla „v činitele“? Pro tento účel si zavedl pojem *akvadrát* - akvadrátem nazýval přirozené číslo, které není úplným čtvercem (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, ...). Symbolicky pišme

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1\,, & \text{je-li } n \text{ akvadrát;} \\ 0\,, & \text{je-li } n \text{ kvadrát.} \end{cases}$$

Zavedeme-li si funkce $P(s)$, $Q(s)$ předpisy

$$P(s) = \prod_{n=2}^{\infty}(1-n^{-s}) \qquad \text{a} \qquad Q(s) = \prod_{n=2}^{\infty}(1+n^{-s})\,,$$

dostaneme jejich násobením (pro $|\,\mathrm{Re}(s)| > 1$ součiny absolutně konvergují)

$$P(s)Q(s) = \prod_{n=2}^{\infty}(1-n^{-2s}) = P(2s)\,,$$

tj.

$$Q(s) = \frac{P(2s)}{P(s)} = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon(n)}{n^s}\right)^{-1} = \prod_{n=2}^{\infty}(1+n^{-s})\,. \tag{3.2.1}$$

Podívejme se nyní podrobněji na poslední řádek. Označíme-li $\alpha(n)$ počet rozkladů čísla n na různé činitele, dostaneme

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+n^{-s}) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\left(\frac{1}{8^s}+\frac{1}{2^s}\cdot\frac{1}{4^s}\right)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)}{n^s}\,.$$

Analogicky označením $\beta(n)$ pro počet rozkladů čísla n na akvadratické činitele různé nebo stejné máme

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon(n)}{n^s}\right)^{-1} = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon(n)}{n^s}+\frac{\varepsilon^2(n)}{n^{2s}}+\cdots\right) = \sum_{1}^{\infty}\frac{\beta(n)}{n^s}\,.$$

Z (3.2.1) tedy plyne analogie výše uvedené Eulerovy věty:

Věta (M. Kössler) : *Každé přirozené číslo lze rozložit právě tolikrát na činitele od sebe různé, kolikrát je možné ho rozložit na stejné nebo různé činitele akvadratické.*

Prověřme si pro ilustraci tvrzení této věty pro číslo $n = 24$: rozkladů na činitele od sebe různé existuje pět: 1.24, 2.12, 3.8, 4.6, 2.3.4, rozkladů na činitele akvadratické najdeme rovněž pět: 1.24, 2.12, 3.8, 2.2.6, 2.2.2.3.

V závěru své „první poznámky“ se Kössler pozastavoval nad faktem, že tato elementární věta dosud nebyla obsažena ani v rozsáhlé knize [Dickson (1919–1923)].

Jistá analogie prvočíselné věty

Ve své druhé poznámce k teorii čísel Kössler formuloval jednu analogii prvočíselné věty (podrobněji je tato věta o počtu prvočísel menších než zvolené x popisována v odstavci 4.3 jako Prime Number Theorem), přičemž vycházel z pojmu *apotenční číslo.*

Definice: Číslem *apotenčním* nazveme přirozené číslo q, $q > 1$, které není úplnou mocninou jiného přirozeného čísla ($q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$, $q_4 = 6$, $q_5 = 7$, $q_6 = 10$, $\ldots$).

Uvažujme kanonický rozklad čísla $n \in \mathbb{N}$ ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$ a označme největší společný dělitel čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ symbolicky $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = d$. Jestliže $d = 1$, je číslo n číslem apotenčním. V ostatních případech $d > 1$ je $n = q^d$, kde q je číslo apotenční určené číslem n. Množinu $\mathbb{N}$ si pak můžeme představit jako množinu prvků posloupností čísel q_ν, q_ν^2, q_ν^3, $\ldots$ jednoznačně přiřazených k jednotlivým apotenčním číslům q_ν. Pomocí Riemannovy dzeta funkce $\zeta(s)$ lze s využitím vlastností Möbiovy funkce $\mu(n)$ psát

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^s} = \mu(1)\{\zeta(s) - 1\} + \mu(2)\{\zeta(2s) - 1\} + \cdots$$

Označíme-li $p(x)$ počet čísel apotenčních menších než kladné číslo x, dostáváme v prvním přiblížení vztah

$$p(x) = \sum_{n=1}^{k} \mu(n) \left\{ \left\lfloor x^{\frac{1}{n}} \right\rfloor - 1 \right\}, \quad \text{kde} \quad k = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor . \tag{3.2.2}$$

Kössler dále studoval asymptotické chování funkce $p(x)$ pro velká x. Nahradíme-li ve vztahu (3.2.2) celou část čísla $\lfloor x^i \rfloor$ číslem x^i, pak po několika odhadech (pracujících s Taylorovou řadou, vlastnostmi dzeta funkce a vztahem $\sum_1^\infty \mu(n)/n = 0$) dostaneme asymptotické vyjádření počtu čísel apotenčních menších než kladné číslo x ve tvaru

$$p(x) = \sum_{n=1}^{k} \mu(n) \left\{ \left\lfloor x^{\frac{1}{n}} \right\rfloor - 1 \right\}, \quad \text{kde} \quad k = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor . \tag{3.2.3}$$

kde ν je libovolné přirozené číslo nezávislé na x, avšak menší než $\left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

3.3. Identity v teorii čísel [K26], [K27]

> *„Why are numbers beautiful? It's like asking why is Beethoven's Ninth Symphony beautiful. If you don't see why, someone can't tell you. I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is.“*
>
> Paul Erdös

Kösslerovy nejrozsáhlejší práce, jež se týkají elementární teorie čísel, spadají do období druhé světové války; byly tedy jako jediné dvě výjimky mezi jeho pojednáními z oblasti teorie čísel otištěny německy.

Základem pojednání *Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie* ([K26]) je odvození dvou jednoduchých identit týkajících se vztahu mezi celými čísly a jejich děliteli, z nichž je vyvozena celá řada zajímavých důsledků. Na zřetel jsou brány pouze určité třídy dělitelů (např. $d \equiv 3 \pmod 4$ [3.4] přičemž v případě prvočísel a jejich mocnin jsou odvozeny výsledky nepřipouštějící další zpřesnění.

Identita první

Uvažujme posloupnost přirozených čísel $q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$, dále pevně zvolené přirozené číslo N a dvě funkce $f(n)$, $v(n)$ definované pro $1 \le n \le N$. Označíme-li symbolem

$$d(n, q_k) = \left\lfloor \frac{n}{q_k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{q_k} \right\rfloor ,$$

je patrné, že $d = 1$ (resp. 0), je-li n dělitelné číslem q_k (resp. není). Sestrojíme-li dále součty

$$V(k) = v(k) + v(2k) + \cdots + v(\lfloor N/k \rfloor\, k) , \quad F(n) = \sum_{q_k | n} f(q_k) ,$$

Kösslerova první identita říká, že platí

$$\sum_{q_k \le N} f(q_k) \cdot V(q_k) = \sum_{n=1}^{N} F(n) v(n) . \tag{3.3.1}$$

Kromě faktu, že tato identita ukazuje přímo jisté zajímavé vlastnosti při vhodné volbě funkcí $f(n)$, $v(n)$, umožňuje dokázat řadu asymptotických vzorců pro součty v ní obsažené, vedoucí k mnoha pěkným výsledkům.

Zvolíme-li konkrétně za q_k mocniny všech prvočísel a funkci f definujeme předpisem $f(p^k) = \ln p$, přejde identita (3.3.1) do podoby *prvočíselné identity* **(P)**:

$$\sum_{p \le N} \left(\ln p \cdot \sum_{p^k \le N} V(p^k) \right) = \sum_{n=1}^{N} v(n) \ln n . \tag{3.3.2}$$

[3.4] Symbolem $\equiv$ je označována relace kongruence. Říkáme, že celé číslo a je kongruentní s celým číslem b podle modulu m ($m \in \mathbb{N}$), jestliže m dělí rozdíl $(a - b)$. Symbolicky tuto skutečnost zapisujeme $a \equiv b \pmod m$.

Speciální volbou $v(n)$ lze získat z (3.3.2) různé identity dovolující počítat součty obsahující prvočísla, protože na pravé straně **(P)** se v těchto případech prvočísla neobjevují explicitně! Uvedená formule představuje při volbě $v(n) = 1$ jedno z možných zobecnění známého vztahu

$$\sum_{n=1}^{N} \ln n = \sum_{p \le N} \ln p \left\{ \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right\}.$$

Dosazením $q_k = k$, $f(n) = 1$ (resp. $q_k = k$, $f(n) = \ln n$) dostaneme následující identity (T_1) a (T_2) o dělitelích:

$$\sum_{n=1}^{N} v(n)\Theta(n) = \sum_{n=1}^{N} V(n), \tag{3.3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{N} v(n)\Theta(n)\ln n = 2\sum_{n=1}^{N} V(n)\ln n\,, \tag{3.3.4}$$

kde $\Theta(n)$ značí počet dělitelů čísla n. Formule (3.3.1), (3.3.3) a (3.3.4) lze snadno pomocí Möbiových inverzních formulí transformovat.

Identita druhá

Obecný tvar druhé Kösslerovy identity už je na první pohled složitější:

$$\sum_{k=1}^{N} g(k) f\left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor\right) = \sum_{k=1}^{N} f(k)\left(G\left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor\right) - G\left(\left\lfloor \frac{N}{k+1} \right\rfloor\right)\right) =$$
$$= f(1)G(N) + \sum_{k=2}^{N} (f(k) - f(k-1)) G\left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor\right). \tag{3.3.5}$$

Kössler si vzal za vzor Dirichletovu práci, v níž byla funkce $f(n)$ volena ve tvaru $f(n) = n$ a pomocí parciální sumace obdržel jinou podobu (3.3.5):

$$\sum_{k=1}^{N} g(k) f\left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor\right) = \sum_{k=1}^{r} g(k) f\left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor\right) + \tag{3.3.6}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\varrho} (f(k) - f(k-1)) G\left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor\right) - f(\varrho)G(r)\,, \quad G(k) = \sum_{n=1}^{k} g(n)\,,$$

kde ϱ, N jsou přirozená čísla ($\varrho < N$), číslo $r = \lfloor N/(\varrho+1) \rfloor$, $f(0) = 0$.

Uvažujme např. $f(k) = k$, $g(k) = 1$ pro k prvočíslo, $g(k) = 0$ v ostatních případech. Identita (3.3.6) pak dává vztah

$$\sum_{k=1}^{N} \pi\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{p \le N} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor.$$

Využitelnost (3.3.5) Kössler demonstroval v případě volby $f(\lfloor N/k \rfloor) = \sin\left(\pi \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor /2\right)$, jež vede k identitě

$$\sum_{n=1}^{N} (\Theta_{0,1}(n) - \Theta_{2,3}(n)) = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2)N + O(\sqrt{N})\,, \tag{3.3.7}$$

kde $\Theta_{i,j}(n)$ značí počet dělitelů čísla n kongruentních s i nebo j podle modulu 4. Analogií (3.3.7) je známý asymptotický vzorec pro počet dělitelů čísla n

$$\sum_{n=1}^{N} \Theta(n) = \sum_{n=1}^{N} (\Theta_{0,1}(n) + \Theta_{2,3}(n)) = N \ln N + (2C-1)N + O(\sqrt{N})\,,$$

v němž C označuje Eulerovu konstantu.

Jestliže se dále ve funkci $v(n)$ objeví periodický výraz, rozpadá se množina prvočísel v různé třídy, např. $v(n) = \varphi(n) \cdot \cos \pi n$ ostře oddělí sudé prvočíslo 2 od ostatních prvočísel, volba $v(n) = \varphi(n) \sin(\pi n/2)$ vede ke vzniku zbytkových tříd $p \equiv 1 \pmod 4$, $p \equiv 3 \pmod 4$, atd. Konkrétní volbou $v(n)$ tak lze z (3.3.2) odvodit řadu vztahů, např. pro $s = 2k+1$

$$\sum_{s \le N} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1}}{s} \psi_3\left(\frac{N}{s}, -1\right) - \sum_{s \le N} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1}}{s} \psi_1\left(\frac{N}{s}, -1\right) = \sum_{s \le N} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1}}{s} \ln s\,,$$

kde

$$\psi_i(x, -1) = \sum_{i \equiv p \le x} \frac{\ln p}{p-1} \left(1 - p^{-\left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor}\right)\,, \quad i = 1, 3\,.$$

V další části práce se Kössler zabýval osvědčenou metodou teorie čísel, a sice studiem středních hodnot. Nevyužíval však prostý aritmetický průměr hodnot $f(1), \ldots, f(n)$, ale jako argument $f(x)$ volil pouze (ne vždy navzájem různé) hodnoty $\lfloor N/1 \rfloor$, $\lfloor N/2 \rfloor, \ldots$, které dále násobil určitými jednoduchými váhami. Střední hodnotu $f(x)$ pak počítal dle vztahu

$$M(f(k); g(k)) = \sum_{k=1}^{N} g(k) f(k) : \sum_{1}^{N} g(k)\,, \tag{3.3.8}$$

kde $f(k)$, $g(k)$ jsou libovolné funkce s jediným omezením, že $\sum_1^N g(k)$ nesmí být 0 pro žádné $N \ge 1$. Funkce $g(k)$ tedy hraje roli vah (zde se poněkud neobvykle připouští i záporné váhy). Dále byla odvozena celá řada asymptotických vzorců a odhadů pro střední hodnoty s různými váhami, například

$$\begin{aligned} M\left(\psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) + \ln k, \frac{1}{k}\right) &= 2 \sum_{1}^{N} \frac{\ln n}{n} : \sum_{1}^{N} \frac{1}{n} = \\ &= \ln N - C + \frac{2C_1 + C^2}{\ln N + C} + O\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned}$$

kde

$$C_1 = \lim_{N \to \infty} \left\{ \sum_{1}^{N} \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln^2 N \right\}.$$

Zvláštní pozornost byla v [K26] věnována Möbiově funkci, mj. byla dokazována ekvivalence identity (3.3.2) se známým vztahem

$$\sum_{d|n} \mu(d) \ln d = \begin{cases} 0, & \text{je-li } n \neq p^k, \\ -\ln p, & \text{je-li } n = p^k. \end{cases}$$

Pomocí inverzních identit k (3.3.3) a (3.3.4) autor hledal[3.5]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= \sum_{n \le x} \mu(n) = xO(\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{\ln x}}), \\ f(x) &= -\sum_{n \le x} \frac{\mu(n) \ln n}{n} = 1 + O(\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{\ln x}}), \\ g(x) &= \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} = O(\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{\ln x}}), \end{aligned}$$

přičemž jako váhy využil postupně funkce $\Theta(n)/n$, $\Theta(n)\ln(n)/n$, $\Theta(n)/n\ln(N/n)$. Vzhledem k častému výskytu Möbiovy funkce v teorii čísel tak lze analogicky dospět k mnoha známým i novým identitám. Na své výsledky z článku [K26] Kössler navázal v pojednání [K27]. Vycházel z identity (3.3.6) při studiu funkce

$$S_t(N, s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sigma_t(k)}{k^s},$$

kde $\sigma_t(n)$ označuje součet t-tých mocnin všech dělitelů čísla n. Speciálně pro $t = 0$ se tedy vyšetřovaný problém redukuje na hledání $\sum d(k)/k^s$, kde $d(k)$ značí počet dělitelů čísla k.

Autor odvodil velmi přesnou asymptotickou formuli pro $S_t(N, s)$ při označení $r_k = \{N/k\} = N/k - \lfloor N/k \rfloor$, a dále pro ν celé kladné číslo splňující nerovnici $\nu(\nu+1) \le N < (\nu+1)(\nu+2)$, tj. $\nu \simeq \sqrt{N}$ pro velká N, symbol

$$\theta(N, t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{r_k}{k^t} : \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^t}.$$

[3.5] Tato funkce bývá v literatuře pojmenována jako Mertensova. Franz Mertens (1840–1927) byl mimochodem první, kdo použil označení $\mu(n)$ pro Möbiovu funkci (viz [Mertens (1874)]).

Za těchto předpokladů pak Kössler obdržel vztah

$$\begin{aligned}
N^s S_t(N,s) &= N^s\zeta(s)\zeta(s-t) + N\frac{\zeta(1-t)}{1-s} + N^{1+t}\frac{\zeta(1+t)}{1+t-s} + \\
&+ \zeta(t)(\tfrac{1}{2}-\theta(N,t))N^t + \zeta(-t)(\tfrac{1}{2}-\theta(N,-t)) + \\
&+ N^{\frac{1+t}{2}}\left\{\frac{1}{t-1}\left(\theta(N,t)-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{t+1}\left(\frac{1}{2}-\theta(N,-t)\right)\right\} + \\
&+ R(N,t,s)\,, \\
R(N,t,s) &= O(N^{t/2}) + O\left(N^{-1}\left(\zeta(-t-1)+\frac{N^{1+\frac{t}{2}}}{t+2}\right)\right) + \\
&+ O\left(N^{t-1}\left(\zeta(t-1)-\frac{N^{1-\frac{t}{2}}}{t-2}\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

Zatímco zbytek $R(N,t,s)$ závisí na s, oscilující část součtu (tj. čtvrtý až šestý sčítanec) na s nezávisí. Ačkoli je tento Kösslerův obecný vzorec dosti složitý, v jistých konkrétních případech vede k zajímavým výsledkům. Kössler zvláště vyšetřil případ $t = 0$, $s = 0$ vedoucí na tzv. *Dirichletův problém* týkající se odhadu rozdílu

$$\sum_{n=1}^{N} d(n) - N(\ln N + 2C - 1) = \Delta(N)\,,$$

v němž $\Delta(N)$ dosud nebylo přesně popsáno. Nejlepší byl dlouho výsledek van der Corputův: $\Delta(N) = O(N^\alpha)$, $\alpha < \frac{27}{82}$ z roku 1928, později zlepšený na $\alpha \approx 7/22$.

Dále se autor zabýval při studiu odhadu členu $(\frac{1}{2} - \Theta(N,t))$ zvláště případy $|t| > 1$, $|t| \leq 1$. Na mnoha místech narazil při spec. volbě s, t na známé vztahy. Např. pro $s = 0$, $t \to 1$ získal formuli známou jako Wigertovu:

$$\sum_{1}^{N} \sigma_1(k) = \frac{\pi^2}{12}N^2 + N\ln N(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\Theta(N,1)) + O(N)\,.$$

Závěrem si uveďme úryvek z Jarníkova komentáře k pojednání [K27]:

„*Charakter funkce $S_t(N,s)$ je tím popsán s úplností, která není častá v analytické theorii čísel.*“ [Jarník (1955), str. 115]

Práci [K27] mj. cituje i [Walfisz (1957)].

Použité zdroje

Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Volume 1. Ed. Grattan-Guinnes, I. Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press, 1994.

DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*, 3 vols. New York: Carnegie Institution of Washington, 1919–1923.

EULER, L. *Introduction to Analysis of the Infinite.* Book I. Springer-Verlag, 1988.

FUCHS, E. Co ještě nevíme o prvočíslech. *Učitel matematiky* **7**, str. 1–8, 65–74, 193–200, 129–136, 1998/1999.

GANDHI, J. M. Formulae for the nth Prime. *Proc. Washington State University Conferences on Number Theory.*, str. 96–107, 1971.

HARDY, G.H.; WRIGHT, E.M. *The Introduction to the Theory of Numbers.* 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 1954.

HECKE, E. *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1954.

KLAZAR, M. *Kaleidoskop teorie čísel (1.–5., 7. kapitola).* Praha: Univerzita Karlova. KAM - DIMATIA Series preprint no. *454, 468, 469, 483, 487, 588*, 2000–2002.

MERTENS, F. Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. *Borchardt J.* **77**, str. 289–339, 1874.

NARKIEWICZ, W. *The Development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood.* Springer Verlag, 2000.

RIBENBOIM, P. *My Numbers, My Friends. Popular Lectures on Number Theory.* New York: Springer Verlag, Inc., 2000.

RIBENBOIM, P. *The New Book of Prime Number Records*, 3rd ed. New York: Springer Verlag, Inc., 1995.

ŠIMŠA, J. Eukleidův důkaz nekonečnosti množiny všech prvočísel. In *Historie matematiky I.*. Ed. Bečvář Jindřich, Fuchs Eduard. Praha: Prometheus, str. 162 – 169, 1994. Edice Dějiny matematiky, sv. 1.

The MacTutor History of Mathematics archive [online]. Dostupné na WWW: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/`.

VAN DER CORPUT, J.G. Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem. *Math. Ann.* **87**, str. 39–65, 1923.

VINOGRADOV, I.M. *Základy teorie čísel.* Praha: Nakladatelství ČSAV, 1953.

WALFISZ, A. *Gitterpunkte in Mehrdimensionalen Kugeln*, Warszava: Panstwowe wydawnictwo naukove, 1957.

WIGERT, S. Sur quelques fonctions arithmétiques. *Acta Math.* **37**, str. 113–140.

WILLANS, C.P. On formulae for the nth prime number. *Math. Gaz.* **48**, str. 413–415, 1964.

ZÍTEK, F. *Vytvořující funkce.* Praha: ÚV MO, 1972. Edice Škola mladých matematiků

Kapitola 4.
Práce na rozhraní teorie čísel a analytických funkcí

Tematika analytických funkcí se prolíná téměř celým Kösslerovým dílem. Nelze se proto divit, že se objevuje i v řadě jeho článků věnovaných teorii čísel. V rámci této kapitoly se zaměříme na čtyři práce, které nelze zařadit mezi práce čistě číselně-teoretické, ani mezi práce čistě analytické, a proto jim věnujeme zvláštní místo v členění Kösslerova díla – na rozhraní obou oblastí.

4.1. Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou [K3]

„Any fool can ask questions about numbers, which even a thousand wise men cannot solve.“

C. F. Gauss

Kösslerova prvotina věnovaná problematice teorie prvočísel byla vydána v roce 1915, tj. ještě v době jeho učitelského působení na gymnáziu. Autor se pokusil najít vzorec, který by určoval počet prvočísel ležících mezi dvěma celými kladnými čísly A, B, tzn. například pro $A = 5$ a $B = 32$ by dával hodnotu 9.

Historie problému

Od dob Euklidových (3. st. př. Kr.) je známo, že prvočísel je nekonečně mnoho. Na konci 19. století se pak podařilo dokázat tzv. „prvočíselnou větu“ popisující asymptotické chování funkce $\pi(x)$ označující počet prvočísel ne větších než x (viz odstavec 4.3).

Tyto poznatky však ještě nepřinášely mnoho informací o počtu prvočísel v daných mezích. Stačí si uvědomit, že ačkoli existuje nekonečně mnoho prvočísel, dokážeme v posloupnosti celých kladných čísel najít libovolně dlouhý úsek (pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ je to např. úsek $n! + 2$, $n! + 3$, $n! + 4$, $\ldots$, $n! + n$) neobsahující jediné prvočíslo - hustota výskytu prvočísel není konstantní.

Existuje velké množství dílčích hypotéz, z nichž se však dosud nepodařilo složit celkový obraz o zákonitostech rozložení prvočísel v množině $\mathbb{N}$. Jednou z cest by mohlo být studium „mezer“ mezi prvočísly. Označíme-li $g(n)$ mezeru mezi dvěma po sobě jdoucími prvočísly, konkrétně počet čísel mezi n-tým prvočíslem p_n a prvočíslem po něm bezprostředně následujícím p_{n+1}, dostáváme vztah

$$p_{n+1} = p_n + g(n) + 1\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

O takto definované funkci g nemáme dosud příliš mnoho informací.[4.1] Víme, že pro prvočíselná dvojčata p_n, $p_{n+1} = p_n + 2$ je $g(n) = 1$. Pokud by tedy platila hypotéza o dvojčatech, nabývala by funkce g této hodnoty v nekonečně mnoha bodech (tj. $\liminf g(n) = 1$).

[4.1] Dosud nejdelší efektivně vyčíslená mezera obsahuje 1131 čísel. Tento výsledek obdržel Nyman v roce 1999.

Podle výše zapsané poznámky může funkce $g(n)$ nabývat libovolně velkých hodnot, tj. $\limsup g(n) = \infty$. V roce 1931 dokonce Westzynthius dokázal, že

$$\limsup \frac{g(n)}{p_n} = \infty\,.$$

Tyto výsledky však dávají pouze odhady funkce g, nedávají možnost ji analyticky vyjádřit. Snahy najít vzorec pro počet prvočísel v daných mezích naráží na obdobné potíže.

Zajímavá a rovněž ne zcela dořešená je přitom otázka rozložení prvočísel v aritmetických posloupnostech, o níž se Kössler zmínil v závěrečné části svého článku [K3]. V roce 1837 dokázal Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) hypotézu, kterou nezávisle na sobě vyslovili L. Euler a Adrian-Marie Legendre (1752–1833):

Věta: *Jsou-li a, b přirozená nesoudělná čísla, je v aritmetické posloupnosti a, $a+b$, $a+2b$, $\ldots$, $a+kb$, $\ldots$, kde $k \in \mathbb{N}$, obsaženo nekonečně mnoho prvočísel.*

Kössler se v podstatě ve svých úvahách omezil na studium konečného počtu členů takové posloupnosti, aniž by navíc předpokládal nesoudělnost čísel a, b (v jeho označení A, d). K závěru použitelnému v praxi však nedospěl.

Kösslerův přístup k problému

Kössler v úvodu svého kratičkého článku konstatoval, že většina vzorců do té doby známých, jež hledaly počet prvočísel v daných mezích, vycházela z vlastností Riemannovy dzeta funkce (o níž pojednáme podrobněji v odstavci 4.3). Poukazoval na fakt, že danou úlohu lze chápat jako speciální případ Polignacovy úlohy hledající analytický výraz pro součet tvaru

$$\sum_{A}^{B} f(p) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_k)\,,$$

kde p_1, p_2, $\ldots$, p_k jsou všechna prvočísla ležící mezi čísly A a B, kterou Alphonse de Polignac (1817 – 1890) řešil formulí

$$\sum_{A}^{B} f(p) = \int_A^B \frac{f(x)}{\ln x}\,dx\,.$$

Zvolíme-li $f(x) = 1$, $A = 2$, $B \to \infty$, dostáváme v tomto případě podle Riemannovy teorie analogii prvočíselné věty.

Kössler ve svých úvahách vycházel z tvrzení jedné ze základních vět elementární teorie čísel, a sice *věty Wilsonovy*, dávající nutnou a postačující podmínku pro to, aby číslo p bylo prvočíslo. Pro prvočíslo p musí platit kongruence

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p\,.$$

Pro složené číslo r bychom dle Kösslera mohli podobně psát

$$„(r-1)! + 1 \equiv 1 \pmod r\text{“}\,.$$

Zde je ale v Kösslerově postupu drobná chyba – uvedená kongruence neplatí pro nejmenší složené číslo $r = 4$. Tato skutečnost je v práci [K3] opomenuta. Pro $r = 4$ totiž platí

$(r-1)! = 6 \not\equiv 0 \pmod 4$, pro další složená čísla $r > 5$ už je vztah v pořádku. S využitím skutečnosti, že funkce sinus nabývá v celočíselných násobcích π hodnoty 0, platí pak na základě těchto kongruencí vztahy

$$\begin{aligned} \sin \pi \tfrac{(p-1)!}{p} &= \sin \frac{\pi}{p}, \qquad \text{kde } p \text{ je prvočíslo} \\ \sin \pi \tfrac{(r-1)!}{r} &= 0, \qquad \text{kde } r > 5 \text{ je číslo složené}. \end{aligned}$$

Výraz $(p-1)!$ je definován pouze pro přirozené hodnoty p. Faktoriál $(p-1)!$ však lze rozšířit pro $p \in \mathbb{C} \setminus \{-n; n \in \mathbb{N}_0\}$ meromorfní funkcí $\Gamma(z)$. Gamma funkci je tedy možno chápat jako zobecnění faktoriálu pro komplexní, resp. reálné hodnoty argumentu s výjimkou záporných celých čísel. Platí vztah $\Gamma(n) = (n-1)!\,, n \in \mathbb{N}$. Kössler si pro další výpočet definoval novou funkci určenou předpisem

$$\varrho(z) = \frac{\sin(\frac{\pi\Gamma(z)}{z})}{\sin\frac{\pi}{z}}\,,$$

která je analytická pro všechna z splňující podmínku $\operatorname{Re} z > 1$. Zachováme-li výše zavedené označení pro p, r, má funkce $\varrho(z)$ pro $z \in \mathbb{Z}^+$, $z \neq 4$ vlastnost *charakteristické funkce pro rozlišení prvočísel a čísel složených*, neboť

$$\varrho(p) = 1 \quad \text{a} \quad \varrho(r) = 0\,.$$

Polignacovu rovnost pak lze psát ve tvaru

$$\sum_A^B f(p) = \varrho(A)f(A) + \varrho(A+1)f(A+1) + \cdots + \varrho(B)f(B)\,.$$

Pro sečtení pravé strany je dále možno použít některé sčítací metody - získané výsledky však postrádají význam pro praktické výpočty.

V další části svého pojednání Kössler uvažoval křivku C, která by byla uzavřená, konečná, ležící v polorovině $\operatorname{Re} z > 1$ a která by „objímala“ pouze body A, $A+1$, $A+2$, $\ldots$, $B-1$, B a kromě nich žádné další celočíselné body. Omezíme-li se pouze na funkce $f(z)$ uvnitř i na křivce C analytické, potom bude funkce

$$\pi \cdot \operatorname{cotg} \pi z \cdot \varrho(z) \cdot f(z)$$

mít v bodech $z_0 \in \mathbb{Z}$ residua $\varrho(z_0)f(z_0)$. V tomto případě pak při speciální volbě $f(z) = 1$ dostáváme s pomocí residuové věty formuli pro počet prvočísel v daných mezích od A do B:

$$\sum_A^B 1 = \sum_{n=A}^B \varrho(n) \cdot 1 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \pi \cdot \operatorname{cotg} \pi z \cdot \varrho(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{4.1.1}$$

V závěru své práce se Kössler zamýšlel nad obecnějším problémem, a sice hledáním součtů typu $\sum_A^B f(p)$, kde p probíhá pouze přes prvočísla p_1, p_2, $\ldots$, p_k obsažená mezi členy aritmetické posloupnosti A, $A+d$, $A+2d$, $\ldots$, $B-d$, B ($d \in \mathbb{Z}^+$). Analogicky jako v předchozích úvahách lze psát

$$\begin{aligned}\sum_{A}^{B}{}_{d}\, f(p) &= f(p_1)+f(p_2)+\cdots+f(p_k) = \\ &= \varrho(A)f(A)+\varrho(A+d)f(A+d)+\cdots+\varrho(B)f(B)\,,\end{aligned}$$

přičemž pravou stranu lze nahradit křivkovým integrálem

$$\sum_{A}^{B}{}_{d}\, f(p) = \frac{1}{2\pi d i}\oint_{C} \pi\cdot\varrho(z)\cdot\operatorname{cotg}\pi\frac{z-A}{d}\cdot f(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{4.1.2}$$

Pro zjištění počtu prvočísel v aritmetické posloupnosti $A,\ A+d,\ \ldots,\ B$ stačí v tomto posledním vzorci volit $f(z)=1$. Pro zajímavost na tomto místě poznamenejme, že dosud nejdelší známá aritmetická posloupnost tvořená výhradně prvočísly by v Kösslerově označení odpovídala číslům

$$\begin{aligned}A &= 100\,996\,972\,469\,714\,247\,637\,786\,655\,587\,969\,840\,329\,509\,324\,689 \\ &\ 190\,041\,803\,603\,417\,758\,904\,341\,703\,348\,882\,159\,067\,729\,719 \\ B &= A+9\cdot d,\quad d=210\,.\end{aligned}$$

S funkcí $\varrho(z)$, o níž se Kössler ve svém článku opíral, se v poněkud pozměněné podobě setkáváme i u jiných autorů. Např. Willans pomocí analogické funkce sestavil formuli pro $n-$té prvočíslo p_n (viz odstavec 3.1).

Máme-li zhodnotit výše uvedené výsledky, lze konstatovat, že oba odvozené vzorce (4.1.1), (4.1.2) je nutno uvažovat pouze pro $z\geq 5$, na což Kössler ve své práci neupozornil, neboť pro $z=4$ bychom místo očekávané hodnoty 0 (jde o číslo složené) přičítali do celkového součtu $-\sqrt{2}$. Jde celkem o drobnou opravu Kösslerova výsledku – pro případ $A<5$ bychom počet předcházejících prvočísel snadno přičetli i bez použití jakéhokoliv vzorce. Mnohem zásadnějším problémem odvozených vztahů (4.1.1), (4.1.2) je fakt, že jsou sice elegantní, leč nevhodné k praktickým výpočtům, a to z velmi prostého důvodu – není známo vyjádření funkce $\varrho(z)$ vhodné pro efektivní provedení dané integrace pro velká z. Téměř totožnou formuli uvádí např. pozdější práce [Langmann (1974)], v níž je správně uvedena podmínka $5\leq A<B$.

I přes uvedené nedostatky se významného ocenění za toto pojednání Kösslerovi dostalo zařazením do Dicksonovy knihy *History of the Theory of Numbers* ([Dickson (1918), str. 435]).

4.2. Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla [K4]

„*With the exception of the geometric series, there does not exist in all of mathematics a single infinite series whose sum has been determined rigorously.* “

Niels Abel

Lambertovou řadou nazýváme obecně řadu

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}\,, \qquad |x| < 1\,.$$

Speciální volbou koeficientů a_n získáváme zajímavé identity; např. pro $a_n = \mu(n)$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)x^n}{1-x^n} = x\,;$$

pro $a_n = \varphi(n)$ (Eulerova funkce)[4.2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}\,;$$

pro $a_n = \lambda(n)$ (Liouvilleova funkce)[4.3]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}\,.$$

Kössler se ve svém pojednání zabýval případem $a_n = 1$, kdy rozvojem jednotlivých sčítanců v geometrickou řadu obdržíme identitu

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(n)\, z^n\,, \qquad |z| < 1\,, \tag{4.2.1}$$

kde $\Theta(n)$ značí počet dělitelů celého čísla n. Dosud nebyla odvozena konečná analytická formule pro $\Theta(n)$; Kössler se snažil potvrdit domněnku, že za pomoci součtového vzorce pro $L(z)$ by bylo možno takovou formuli pro $\Theta(n)$ najít.

[4.2] Eulerova funkce je definována pro $n \in \mathbb{N}$ jako počet čísel $\leq n$ s číslem n nesoudělných. Tj. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4$, $\ldots$, $\varphi(p) = p - 1$ pro p prvočíselné atd.

[4.3] Liouvilleova funkce je definována pro $n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$\lambda(n) = (-1)^{r(n)}\,,$$

kde $r(n)$ je počet všech prvočíselných faktorů rozkladu čísla n (navíc $r(1) = 0$). Např. $\lambda(1) = 1$, $\lambda(2) = -1$, $\lambda(3) = -1$, $\lambda(4) = 1$, $\lambda(5) = -1$, $\lambda(6) = 1$, $\lambda(7) = -1$, $\lambda(8) = -1$, $\lambda(9) = 1$, $\ldots$.

Nejprve vyjádřil jednotlivé sčítance na pravé straně rovnice (4.2.1) pomocí omezených integrálů, jejichž následným sloučením v integrál jediný obdržel vzorec

$$L(z) = \frac{z}{2(1-z)} + \frac{\ln(1-z)}{\ln z} - \tag{4.2.2}$$
$$-2z \int_0^\infty \frac{\sin(t \ln z)\,\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{2\pi t} - 1)(1 - 2z\cos(t\ln z) + z^2)}\,, \quad 0 < z < 1\,,$$

k němuž je rovněž možno se dopracovat i použitím Plana-Abelovy sumace. Uvedený vzorec je v limitním případě $z \to 1_-$ ekvivalentní vzorci, který pro $L(z)$ uvedl poprvé Oskar Schlömilch (1823 – 1901). Přestože z rovnice (4.2.1) plyne možnost psát

$$\Theta(n) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n\, L(z)}{dz^n} \right|_{z=0}$$

není vzorec (4.2.2) pro toto vyjádření vhodný, neboť neumožňuje jednoduchý zápis $n-$té derivace $L(z)$. Kössler proto hledal jinou cestu. Pomocí integrálsinu vyjádřil celou část čísla ξ ve tvaru integrálu

$$\lfloor \xi \rfloor = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_0^\infty \frac{2\cos kx \sin \xi x}{x}\, dx\,, \qquad (\xi \notin \mathbb{Z}\,, N \in \mathbb{Z}, N > \xi)\,,$$

odkud po několika krocích získal vzorec

$$\Theta(n) = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right) - \{1\} +$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2n+1} - \operatorname{cotg}\frac{x}{2n-1} - \frac{2}{x}\right)\left(\sin\frac{x}{1} + \sin\frac{x}{2} + \cdots + \sin\frac{x}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right)\frac{\sin 2x}{x}\, dx\,,$$

v němž se $\{1\}$ odečítá pouze v případech, kdy číslo n je úplným čtvercem.

Dosazením do rovnice[4.4]

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = 2\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)^2$$

pak analogickým způsobem odvodil formuli

$$\Theta(1) + \Theta(2) + \cdots + \Theta(n) = (2n+1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right) - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1\right) +$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2n+1} - \frac{2n+1}{x}\right)\left(\sin\frac{x}{1} + \sin\frac{x}{2} + \cdots + \sin\frac{x}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right)\frac{\sin 2x}{x}\, dx\,.$$

[4.4] Tuto rovnici snadno dokážeme, uvážíme-li, že $\sum_{k=1}^{n} \Theta(k)$ vyjadřuje počet mřížových bodů s kladnými celočíselnými souřadnicemi v oblasti ohraničené hyperbolou $y = n/x$ a souřadnými osami.

Oba zmíněné vzorce pro $\Theta(n)$ (odvozené už nezávisle na řadě Lambertově) však rovněž nevedou k sestrojení konečné formule pro $\Theta(n)$. Nadějí v tomto směru by bylo vyčíslení integrálů ve formulích vystupujících, o které se však Kössler pokoušel marně.

4.3. Prof. Kössler a Riemannova funkce $\zeta(s)$ [K6], [K25]

„Dobrý křesťan se má stříci matematiků a všech těch, kteří dělávají prázdné předpovědi, zvláště však tehdy, když se tyto předpovědi splní. Je totiž nebezpečí, že matematici ve spolku s ďáblem matou rozum a zaplétají lidstvo do spárů pekelných. “

Sv. Augustin

Kouzlo „královny matematiky“ teorie čísel tkví mj. ve skutečnosti, že zahrnuje celou řadu poměrně snadno formulovatelných problémů, jejichž rozřešení odolává úporné snaze mnoha generací matematiků. Poté, co Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939) dokázal v roce 1882 transcendenci čísla π a tím v podstatě rozřešil problém kvadratury kruhu, po dlouhou dobu vévodily této disciplíně dva velké otazníky: Platí tvrzení Velké Fermatovy věty? Je Riemannova hypotéza správná?

Fermatova věta lákala po staletí svým snadno pochopitelným zněním zástupy laiků, aby v 90. letech 20. století podlehla anglickému matematikovi Andrew Wilesovi (nar. 1953) a složité teorii eliptických křivek a modulárních forem. Osud Riemannovy domněnky byl od samého začátku složitější v tom směru, že již pouhé pochopení její formulace vyžaduje jisté netriviální matematické znalosti. Mezi zástupem odborníků na teorii čísel, kteří se do boje s tímto tvrzením pustili, byl i Miloš Kössler. Pro přiblížení celé problematiky si nejprve stručně připomeneme milníky ve studiu funkce $\zeta(s)$.

Historie funkce $\zeta(s)$ aneb od Eulera po Kösslera[4.5]

Funkce $\zeta(s)$ bývá definována dvěma ekvivalentními způsoby. Za prvé ji lze zavést jako Dirichletovu vytvořující funkci posloupnosti $\{1\}_{n=1}^{\infty}$, tj. ve tvaru řady

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\,;$$

druhým možným způsobem definice je Eulerův součin uvažovaný přes všechna prvočísla p

$$\zeta(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}\,.$$

[4.5] V dalším textu označuje $s = \sigma + it$ komplexní číslo, $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$.

Ekvivalenci obou definic znal již Leonhard Euler, který funkci $\zeta(s)$ podrobně studoval uvažuje ji jako funkci reálné proměnné $s > 1$; využil ji mj. k důkazu existence nekonečně mnoha prvočísel, neboť pro limitní případ $s \to 1_+$ obdržel známou harmonickou řadu, která je divergentní. Euler byl první, komu se podařilo najít součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. O svém postupu se zmínil v dopise Daniellu Bernoullimu z roku 1734. Dále explicitně vypočítal $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\dots$, $\zeta(26)$, v roce 1740 dokonce odvodil obecnou formuli pro hodnoty $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}$. V případě sčítání řady pro $\zeta(3)$ však ani velký počtář Euler neuspěl.

Převratný zlom ve studiu ζ- funkce znamenalo drobné devítistránkové pojednání *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse*, jež v roce 1859 uveřejnil Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Jeho revoluční přístup spočíval v popisu funkce $\zeta(s)$ jako funkce komplexní proměnné. O takto nově definované funkci vyslovil celou řadu hypotéz, z nichž se většinu podařilo dříve či později dokázat: analytickým pokračováním funkce $\zeta(s)$ z poloroviny $\mathrm{Re}(s) > 1$ do celé komplexní roviny získáme funkci *meromorfní* s jednoduchým pólem v bodě $s = 1$ s residuem 1 vyhovující pro $s \neq 0, 1$ funkcionální rovnici

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s)\,.$$

Funkce $\zeta(s)$ má tzv. *triviální nulové body* pro $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$; její zbývající kořeny jsou komplexní, leží v tzv. *kritickém pásu* $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ a jsou symetricky rozloženy podél přímek $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, $\mathrm{Im}(s) = 0$. Ve své práci Riemann vyslovil onu slavnou domněnku, že je vysoce pravděpodobné, že dokonce všechny netriviální nulové body funkce $\zeta(s)$ leží na tzv. *kritické přímce* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Sám tuto svou hypotézu nedokázal, stejně jako nespočetná řada matematiků v letech následujících. Mnohokrát už se objevily zaručené zprávy, že Riemannova hypotéza byla dokázána, vždy však byla v postupu odhalena chyba. V roce 1900 zařadil David Hilbert (1862–1943) tuto domněnku jako součást osmého problému pod společným názvem „problém prvočísel" v rámci hybných otázek pro matematiku 20. století. Na otázku, co by udělal jako první, pokud by znovu ožil za 500 let, odpověděl, že by se zeptal: „*Dokázal už někdo Riemannovu hypotézu?*".

Mezi nejurputnější vědce pokoušející se o důkaz patřili N. I. Gavrilov, J. S. Hwang, v posledních letech (naposledy v červnu 2004) pak rovněž přemožitel proslulé Bieberbachovy domněnky L. de Branges. Silnou motivací při hledání potvrzení správnosti Riemannova předpokladu se navíc od roku 2001 stala odměna ve výši jednoho miliónu dolarů tomu, kdo ji dokáže. Je zajímavé, že tuto prémii od Clay Mathematics Institute získá pouze ten, kdo ověří její *pravdivost*. Pokud by někdo dokázal její *neplatnost*, odměnou by mu byla pouze sláva na poli matematiky.

Proč vůbec tolik energie matematický svět vkládá do poznání jediné funkce? Riemannova dzeta funkce má úzký vztah k testům prvočíselnosti a tím k teorii kódování, teorii informace, radiotechnice, teoretické fyzice, ale především je nejdůležitější funkcí ve studiu rozložení prvočísel. Právě s její pomocí byl podán důkaz problému nazývaného *The Prime Number Theorem*.

Označme $\pi(x)$ funkci označující počet všech prvočísel nepřesahujících dané kladné číslo x. Vzhledem k tomu, že prvočísel je nekonečně mnoho, je $\pi(x)$ neklesající a neomezená funkce. Najít jednoduchou funkci rostoucí stejně rychle jako $\pi(x)$ se snažil už Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Výsledky svého výzkumu z této oblasti však nepublikoval. Zmínka o nich byla objevena až v dopise z roku 1849 adresovaném astronomovi Johannu Franzovi Enckemu (1791–1865). První známá hypotéza týkající se odhadu funkce $\pi(x)$ byla vyslovena francouzským matematikem Adrian-Marie Legendrem; můžeme ji zapsat např. v podobě

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1\,.$$

Tento odhad dlouho nebylo možno dokázat. Ve své době byl označován ve stylu amerických westernů jako „the most wanted theorem“ a tradovalo se, že autor jeho důkazu se stane nesmrtelným. Určitý pokrok zaznamenal P. L. Čebyšev, který s pomocí integrállogaritmu[4.6] odvodil, že za předpokladu, že daná limita existuje, je skutečně rovna jedné. K důkazu její existence pak inspiroval další vědce právě použitím vlastností funkce $\zeta(s)$, na jejichž základě[4.7] v roce 1896 nezávisle na sobě podali Jacques Hadamard (1865–1963) a Charles Jean de la Vallée Poussin (1866–1962) úplný důkaz Legendreovy hypotézy. Nestali se sice nesmrtelnými ve smyslu starořeckých legend, ale Hadamard se dožil požehnaného věku 98 let a de la Vallée Poussin 96 let. Pro podrobnější informace o historii tohoto problému lze doporučit např. knihu [Narkiewicz (2000)].

Riemannova dzeta funkce v Kösslerově díle

Výše popsaný historický úvod nám přiblížil Kösslerovu motivaci ke studiu funkce $\zeta(s)$ a jejích vlastností, jímž se Kössler zabýval podrobně ve svých statích [K6], [K25] a ve svých denících, okrajově se dzeta funkce dotknul i v pojednáních [K26], [K27].

- *Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou* [K6]

Funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(x^{1/n})/n$ bývá nazývána Riemannovou prvočíselnou funkcí. Pomocí Möbiových inverzních formulí lze s její pomocí vyjádřit funkci $\pi(x)$

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n})\,.$$

Kössler v práci [K6] z roku 1916 poukazoval na jistou neekonomičnost Riemannova postupu při nalezení rozvoje prvočíselné funkce, neboť Riemann ve svých úvahách vycházel z rozvoje $\ln\zeta(s)$ platného v celé komplexní rovině, přičemž získal rozvoj

$$f(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\varrho} \mathrm{li}(x^{\varrho}) - \ln 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}\,,$$

kde ϱ jsou komplexní čísla představující nulové body dzeta funkce pro $\mathrm{Re}(s) > 0$ (jichž existuje nekonečně mnoho). Uvedený rozvoj je tedy vázán na dosud nedořešený problém nalezení všech komplexních kořenů dzeta funkce – Riemann jej také vyjádřil určitým integrálem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s \ln\zeta(s)}{s}\, ds\,, \quad b > 1\,.$$

[4.6] Integrállogaritmus je definován vztahem

$$\mathrm{li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u}\,.$$

[4.7] Konkrétně byl důkaz postaven na podmínce $\zeta(1+it) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Kössler poukázal na skutečnost, že funkce $\ln \zeta(s)$ je v polorovině $\mathrm{Re}(s) > 1$ analytická a pro vyčíslení daného integrálu stačí znát rozvoj platný v okolí integrační cesty, kterou si zvolil v polorovině $\mathrm{Re}(s) > 1$, kde $\zeta(s)$ nemá nulové body ani póly, a vzhledem k tomuto faktu hledal nový rozvoj pro funkci $f(x)$. Z velkého množství do úvahy přicházejících rozvojů se mu nejvýhodněji jevila Lagrangeova řada

$$f(x) = \frac{27}{\ln^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \overline{J}_k(x)$$

$$\alpha_k = \frac{a}{k!} \cdot \frac{d^k}{d\,s^k} \left\{ s^{k-3} \ln \zeta(s) \right\}_{s=a} \tag{4.3.1}$$

$$\overline{J}_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{d^{k+1}}{d\,s^{k+1}} \left\{ (s-a)^k \left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)^s} - \sqrt[3]{x^s} \right)^3 \right\}_{s=0} ,$$

kde a je konstanta, pro kterou platí $\mathrm{Re}(s) > \frac{a}{2}$, ε je pravý zlomek splňující nerovnici $x + \varepsilon < \lfloor x \rfloor + 1$.

Kössler přitom odvodil potřebnou teorii obecně pro řadu Dirichletovu, a teprve ve druhém sledu ji aplikoval konkrétně na řadu pro $\ln \zeta(s)$, přičemž odvodil (4.3.1) – vzorec pozoruhodný tím, že umožňuje teoretický výpočet Riemannovy funkce prvočíselné pomocí absolutně konvergentní řady bez znalosti nulových bodů $\zeta(s)$, neboť k výpočtu stačí znát hodnotu $\zeta(s)$ a všech jejích derivací v bodě $s = a$ (což ovšem není nijak triviální předpoklad) a vědět, že $\ln \zeta(s)$ se dá rozvinout v absolutně konvergentní řadu pro každé s, $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Dále uvedl ještě jeden možný rozvoj pro prvočíselnou funkci $f(x)$, o jehož konvergenci však nedokázal rozhodnout. S jeho pomocí odvodil za použití Möbiových inverzních formulí vzorec pro $\pi(x)$ neobsahující Möbiovy faktory $\mu(n)$. Zvláštností této Kösslerovy práce demonstrující autorovu preciznost je skutečnost, že důkazy většiny používaných tvrzení jsou uvedeny až v závěrečném třetím oddílu tak, aby nerušily hlavní myšlenku odvození (4.3.1). Tento postup členění celého pojednání byl pro Kösslera dosti neobvyklý.

- *Asymptotické rozvoje pro funkce $\zeta(s)$, $\zeta(a, s)$* [K25]

Riemannova dzeta funkce nemá jen zásadní význam ve vztahu k rozložení prvočísel, ale je pozoruhodná i díky svým vlastnostem. Jednou z nich je kontrast v našich znalostech o hodnotách $\zeta(s)$ pro sudá a lichá přirozená čísla $s > 1$. Jak bylo zmíněno výše, vzorec pro součty $\zeta(2v)$ znal už Euler, pro žádné liché číslo však $\zeta(2v + 1)$ nenašel. Dosud nebylo nalezeno žádné vyjádření podobné rozvojům

$$\zeta(2) = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \binom{2k}{k}} \qquad \zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}} \qquad \zeta(4) = \frac{36}{17} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 \binom{2k}{k}}$$

pro liché $n \geq 5$. Problematika sčítání řad $\zeta(2v + 1)$ inspirovala Kösslera v pojednání [K25], v němž se zabýval konstrukcí asymptotických rozvojů pro funkce $\zeta(s)$ a $\zeta(a, s)$. Poznamenejme, že pro reálné $0 < a \leq 1$ a komplexní s, $\mathrm{Re}(s) > 1$ je funkce $\zeta(a, s)$ definována jako

$$\zeta(a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s} ,$$

tedy ve speciálním případě $a = 1$ je totožná s Riemannovou funkcí $\zeta(s)$. V literatuře bývá nazývána *Hurwitzovou dzeta funkcí*, přestože ADOLF HURWITZ (1859–1919) sám připouštěl pouze případ $a \in \mathbb{Q}$. Pomocí této zobecněné dzeta funkce lze vyjádřit *Dirichletovu beta funkci* $S(x)$ předpisem

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x} = \frac{1}{4^x}\left(\zeta(\frac{1}{4}, x) - \zeta(\frac{3}{4}, x)\right).$$

Kössler hledal ke známým rozvojům platným pro všechna $v \in \mathbb{N}$ [4.8]

$$\begin{aligned} \zeta(2v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2v}} = \frac{1}{(2v)!} B_v 2^{2v-1} \pi^{2v}, \\ S(2v+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2v+1}} = \frac{E_v \cdot \pi^{2v+1}}{2^{2v+2}(2v)!} \end{aligned}$$

limitní vyjádření hodnot $\zeta(2v+1)$ a $S(2v)$, přičemž dospěl k formulím zobecňujícím známou formuli Stirlingovu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

a rovněž formuli Wallisovu

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

K získaným výrazům pro součty $\zeta(2v+1)$, $S(2v)$ sám poznamenal:

„*Zároveň ukazují, že nebude asi možno vyjádřiti tyto součty jako nějaké jednoduché výrazy obsahující známá čísla jako např. e, π apod. Nezbývá tedy nic jiného, nežli pokládati čísla ta za samostatná individua právě tak jako čísla e, π, C.*“ ([K25], str. 2)

Transformací funkční rovnice pro dzeta funkci za předpokladu $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{z^{s-1}\, dz}{e^z + 1}$$

obdržel rovnici

$$\begin{aligned} \frac{2(1-2^s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\zeta(s) &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} k^{s-1} + \\ &+ \frac{(-1)^N}{2} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{E_k}{2^{2k}} \binom{s-1}{2k} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{s-1-2k} + R(N,k), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

kde

$$R(N,k) = \frac{(-1)^{N+k+1} E_{k+1}}{2\Gamma(1-s)(2k+2)! 2^{2k+2}} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(N+\frac{1}{2})z} \cdot z^{2k+2-s} \theta(z)\, \mathrm{d}z$$

[4.8] Prof. Kössler používal ve svých výpočtech Eulerova čísla E_v s indexací $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, atd. Viz např. [Petr (1923)].

Funkce $\theta(z)$ zde zastupuje neznámou klesající funkci, pro níž $\theta(0) = 1$, $\lim \theta(z) = 0$ pro $z \to \infty$, dále číslo N je celé kladné, $k \in \mathbb{N}_0$ vyhovuje podmínce $2k > \operatorname{Re} s - 3$ pro pevně dané s.

Metodu, kterou Kössler použil pro transformaci funkční rovnice pro $\zeta(s)$ lze použít i na další Dirichletovy řady (viz např. [K4]), jejichž funkční rovnice jsou známé, konkrétně tedy i na řadu $\zeta(a, s)$.[4.9] Ve spec. případě $a = 1$ tak Kössler získal analogickou rovnici (pro $2k > \operatorname{Re}(s) - 2$)

$$\begin{aligned}\frac{2\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\zeta(s) &= \sum_{k=1}^{N} k^{s-1} - \frac{1}{2}N^{s-1} - \frac{N^s}{s} + \\ &+ \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k B_k \binom{s}{2k} N^{s-2k} + (-1)^k R(N,k)\,,\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

kde

$$\begin{aligned}R(N,k) &= \frac{B_{k+1}}{(2k+2)!\Gamma(1-s)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-Nz} z^{2k+1-s}\theta(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= -\frac{B_{k+1}}{s}\binom{s}{2k+2}\frac{\vartheta}{N^{2k+2-s}}\,,\ 0 < \vartheta < 1\,.\end{aligned}$$

Pro $s \in \mathbb{Z}^+$ je přitom vzorec (4.3.3) známým vyjádřením součtu $\sum_{k=1}^N k^{s-1}$ pomocí Bernoulliho polynomů. Přímým dosazením čísel $s = 2v+1$ bychom získali na levých stranách rovnic (4.3.2) a (4.3.3) nuly, neboť všechny členy $\cos\frac{\pi}{2}(2v+1)$ by se anulovaly. Pro numerický výpočet $\zeta(2v+1)$ proto Kössler navrhoval využít derivovaných rovnic (4.3.2), resp. (4.3.3) podle s. Vzhledem k rozsáhlosti takto získaných rovnic je zde však neuvádíme. Např. pro $\zeta(3)$ získáme při zanedbání zbytku R_4 shodu s tabelovanou hodnotou na sedmi desetinných místech.[4.10] Zvolíme-li v derivaci rovnice (4.3.2) specielně $s = 1$, $k = 0$, $N = 2n$, obdržíme Wallisovu formuli pro π včetně zbytku. Obecně pro $s = 2v+1$ získal Kössler pro $N \to \infty$ limitní vzorec pro výpočet $\zeta(2v+1)$. Vzhledem k jeho komplikovanosti si uvedeme na tomto místě pouze jeho podobu pro $v = 1$:

$$\frac{1}{4\pi^2}\zeta(3) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1^{1^2}\cdot 2^{2^2}\cdot 3^{3^2}\cdots(n-1)^{(n-1)^2}}{n^{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)}e^{\frac{1}{12}n}}\,.$$

Obdobně pro $s = 2v$ při $N \to \infty$ dostaneme limitní vzorec pro $S(2v)$, opět ve spec. případě pro $v = 1$

$$\frac{2}{\pi}S(2) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{3^3\cdot 7^7\cdot 11^{11}\cdots(4n-5)^{4n-5}(4n+1)^{\frac{1}{8}(4n+1)(4n-3)}}{5^5\cdot 9^9\cdot 13^{13}\cdots(4n-3)^{4n-3}(4n-1)^{\frac{1}{8}(4n-1)(4n-5)}e^n}\,.$$

[4.9] Hurwitzova dzeta funkce vyhovuje funkcionální rovnici, jež je limitním případem funkcionální rovnice pro Lerchovu dzeta fukci

$$\mathcal{K}_{u,x}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi kxi}}{(u+k)^s}\,,\quad x > 0\,, 0 < u < 1\,.$$

[4.10] Viz např. Petersenovy logaritmické tabulky [Peters (1940)].

Dalšími konkrétními volbami a, s, k, ... lze odvodit celou řadu různých numerických výsledků, např. volba $s = 2v$ v derivovaných rovnicích (4.3.2) a (4.3.3) vede ke vzorci pro výpočet $\zeta'(2)$ atd. Těmito aplikacemi se však již Kössler v práci [K25] nezabýval a poznamenal, že se k nim hodlá vrátit v některé pozdější publikaci. Žádné z Kösslerových pojednání uveřejněných v letech 1941–1961 se však dané problematice nevěnovalo, na rozdíl od Riemannovy hypotézy, k níž se Kössler několikrát vrátil v úvahách ve svých denících (viz kapitola 6.). Snažil se prokázat její platnost na základě studia funkce

$$\zeta_1(s) = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s}) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

a její funkcionální rovnice. Náročnost problematiky a vážné zdravotní problémy mu však nedovolily pokročit v úvahách příliš daleko.

- *Identity v teorii čísel* [K26], [K27]

Rolí dzeta funkce coby vytvořující funkce v teorii čísel se zabýval už Euler. Podívejme se na některé z mnoha zajímavých identit, ve kterých $\zeta(s)$, $\operatorname{Re} s > 1$, figuruje: [4.11]

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \qquad \zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta(n)}{n^s}$$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \qquad \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}$$

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta(n^2)}{n^s} \qquad \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Theta(n))^2}{n^s} .$$

Jak již bylo zmíněno v kapitole 3., Kössler se v pojednáních [K26], [K27] zabýval právě konstrukcí podobných identit v obecnější rovině. Dosadíme-li např. do jeho prvočíselné identity $v(n) = 1/n^s$, $\operatorname{Re} s > 1$, a uvažujeme-li limitu $N \to \infty$, obdržíme identitu

$$\zeta(s) \cdot \sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1} = -\zeta'(s)$$

a podobně. Výsledky teorie funkce $\zeta(s)$ dále Kössler aplikoval ve výpočtech středních hodnot např. Mertensovy funkce a dalších, s použitím různých vahových funkcí.

Další vývoj

Naše znalosti o hodnotách $\zeta-$funkce pro lichá čísla se od dob Eulerových příliš nezměnily. Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920) popsal rychle konvergující řady popisující chování $\zeta(2v+1)$, např. pro $n \equiv 3 \pmod 4$

$$\zeta(n) = \frac{2^{n-1}\pi^n}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{k-1} \binom{n+1}{2k} B_{n+1-2k} B_{2k} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n (e^{2\pi k} - 1)} .$$

[4.11] Pozn. $\tau(n)$ zde značí počet dělitelů čísla n, $\nu(n)$ počet různých prvočíselných dělitelů čísla n.

V roce 1973 uveřejnil I. M. APOSTOL limitní formuli (jednodušší než Kössler) pro $\zeta(2v+1)$, $v \geq 1$:

$$\zeta(2v+1) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(2x+1)^{2v+1}} \sum_{k=1}^{x} \left[\operatorname{cotg}\left(\frac{k}{2x+1}\right)\right]^{2v+1}.$$

Do roku 1979 jsme dokonce ani neměli jistotu, zda hodnota $\zeta(3)$ je číslo racionální či iracionální. Teprve na konci 70. let 20. století našel ROGER APÉRY (1916–1994) důkaz, že číslo $\zeta(3) = 1{,}20205\ldots$ je iracionální – důkaz naprosto překvapivý, neboť využívá pouze myšlenky reálné analýzy a tvrzení prvočíselné věty (Legendreovy hypotézy). Síla Apéryho důkazu je patrná i z toho, že o žádné další hodnotě $\zeta(2v+1)$ dodnes nevíme, zda je číslem racionálním nebo iracionálním.

V letech 2000–2001 zveřejnili TANGUY RIVOAL a KEITH BALL[4.12] důkaz, že mezi čísly $\zeta(2v+1)$ existuje nekonečně mnoho čísel iracionálních. Zda jsou iracionální všechna, to se dosud nepodařilo dokázat. V roce 2001 Rivoal dále ukázal, že alespoň jedno z čísel $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, …, $\zeta(21)$ je iracionální. Tento výsledek ještě zpřesnil W. ZUDILIN, když dokázal, že jedno z čísel $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ je iracionální. Zdá se, že výzkumy z posledních let tedy ukazují cestu, jak získávat další zpřesňující informace o $\zeta(2v+1)$.

V případě Riemannovy hypotézy došlo za posledních 40 let k posunu, nikoli však průlomovému. V roce 1974 NORMAN LEVINSON (1912–1975) dokázal, že minimálně $1/3$ netriviálních kořenů dzeta funkce leží na kritické přímce. V roce 1986 po více než tisíci hodinách práce na superpočítačích dokázali VAN DER LUNE, TERIELE a WINTER, že pro $n \leq 1500000001$ leží všechny netriviální kořeny $\sigma_n + it_n$ ($t_n \leq t_{n+1}$) na kritické přímce. Poslední zlepšení z roku 1989 podané CONREYEM místo Levinsonovy $1/3$ obsahuje $2/5$.

POUŽITÉ ZDROJE

APOSTOL, T. M. Another Elementary Proof of Euler's Formula for $\zeta(2n)$. *Amer. Math. Monthly* **80**, str. 425–431, 1973.

BALL, K.; RIVOAL, T. Irrationalité d'une infinité valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs. *Invent. Math.* **146**, str. 193–207, 2001.

CÉSARO, E. *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von G. Kowalewski.* Leipzig: B. G. Teubner, 1904.

DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*, 3 vols. New York: Carnegie Institution of Washington, 1919–1923.

EULER, L. *Introduction to Analysis of the Infinite.* Book I. Springer-Verlag, 1988.

KARATSUBA, A.A.; VORONIN, S.M. *The Riemann Zeta Function.* Berlin, New York: De Gruyter, 1992.

KLAZAR, M. *Kaleidoskop teorie čísel (1.–5., 7. kapitola).* Praha: Univerzita Karlova. KAM – DIMATIA Series preprint no. *454, 468, 469, 483, 487, 588*, 2000–2002.

LANGMANN,K. Eine Formel für die Anzahl der Primzahlen. *Archiv Math.* **25**, str. 40, 1974.

[4.12] Prof. Ball přednesl přednášku na téma existence nekonečně mnoha iracionalit mezi čísly $\zeta(2v+1)$ mj. 18. prosince 2003 na půdě Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze.

MERTENS, F. Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. *Borchardt J.* **77**, str. 289–339, 1874.

NARKIEWICZ, W. *The Development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood.* Springer Verlag, 2000.

NOVÁK, B. O osmém Hilbertově problému. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **18**, str. 9–17, 1973.

NOVÁK, B. O elementárním důkazu prvočíselné věty. *Časopis pro pěst. mat.* **100**, str. 71–84, 1975.

NOVÁK, B. Opět o Riemannově dzeta funkci. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **38**, str. 7–13, 1993.

PETERS, J. *Siebenstellige Logarithmentafel.* Berlin: Reichsamt für Landesaufnahme, 1940.

PETR, K. *Počet differenciální (Část analytická).* Praha: nákladem Jednoty československých mathematiků a fysiků, 1923.

RIBENBOIM, P. *My Numbers, My Friends. Popular Lectures on Number Theory.* New York: Springer Verlag, Inc., 2000.

RIBENBOIM, P. *The New Book of Prime Number Records*, 3rd ed. New York: Springer Verlag, Inc., 1995.

RIEMANN, B. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse. *Monatsber. Akad. Berlin*, str. 671–680, 1859.

RIVOAL, T. *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ..., $\zeta(21)$.
25 Apr 2001. Dostupné na WWW: `http://arXiv.org/abs/math.NT/0104221`.

SCHLÖMILCH, O. Notiz über die Lambert'sche Reihe. *Schlömilch Z.* **29**, str. 384, 1884.

SINGH, S. *Velká Fermatova věta.* Praha: Academia, 2000.

STANLEY, R.P. Profesor Eubanks v říši Dzéta. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **35**, str. 90–93, 1990.

TENENBAUM, G.; MENDÉS FRANCE, M. *The Prime Numbers and Their Distribution.* AMS: Student mathematical library **6**, 2000.

ZUDILIN, W. One of the Numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ Is Irrational. *Uspekhi Mat. Nauk* **56**, str. 149–150, 2001.

Kapitola 5.
Učební texty

„Nové školní učebnice vznikají převážně ze starých školních učebnic, které vznikly z ještě starších školních učebnic.“

Erich Kästner

5.1. Úvod do počtu diferenciálního

Miloš Kössler kromě celé řady původních vědeckých pojednání během svého působení na univerzitě sepsal i jednu učebnici. Jeho *Úvod do počtu diferenciálního* byl vydán v roce 1926 Jednotou československých matematiků a fysiků jako čtvrtý svazek edice Kruh – sbírky spisů za redakce B. Bydžovského, V. Posejpala a M. Valoucha.

Kniha vznikla na základě přednášek, které prof. Kössler vedl pro posluchače matematiky na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy od roku 1921. Vzhledem k faktu, že se jednalo o přednášky, jež byly úvodem pro další studium, nenajdeme v této učebnici partie z pokročilejší analýzy, ale „pouze“ podrobný výklad základních pojmů a jejich vlastností (posloupnosti, limita a derivace funkce, diferenciál, Taylorův rozvoj, atd.).

Pro pokročilejšího čtenáře tak může být tato kniha nezáživná, neboť se z ní nedozví téměř žádné nové poznatky. Fakt, že kniha byla vhodným pomocníkem nejen pro vysokoškolské, ale i středoškolské studenty, dokumentuje mj. skutečnost, že byla vypsána jako cena za řešení úloh z matematiky z příloh Časopisu (Rozhledů matematicko - přírodovědeckých), např. ve studijním roce 1939/40 spolu s Jarníkovým *Úvodem do počtu integrálního*, o němž bude ještě zmínka později. Uveďme si na tomto místě hodnocení Štefana Schwarze z článku [Schwarz (1990)]:

„Vstupoval som na fakultu s akýmsi ‚predstihom‘. Náš profesor matematiky na gymnáziu mi požičal známu dvojdielnu učebnicu V. Vojtěcha, určenú poslucháčom techniky. Propočítal som z nej mnoho desiatok príkladov. Vôbec mi nenapadlo skúmať, čo je ‚presné‘ a čo je ‚menej presné‘... V približne rovnakom čase ako úspešný riešiteľ úloh z Rozhledov som dostal ako cenu okrem 2-3 iných (starších) kníh aj Kösslerovu knižku Úvod do diferenciálního počtu. *Tá mi akosi nebola po chuti. Boli tam aj také ‚samozrejmé‘ veci a dosť sa mi zdala ‚rozvláčna‘. A hlavne málo príkladov. A ako 17ročný nemal som dosť trpezlivosti to celé čítať a pochopiť o čo vlastne ide.“*

Sám autor v předmluvě knihy konstatoval, že *„knížka tato zcela splní svůj úkol, jestliže podnítí čtenáře ke studiu dalšímu“*. Přesto byla kniha ve své době pro studenty velmi potřebnou, neboť českých učebnic kalkulu rozhodně nebyl nadbytek. Akademik Vojtěch Jarník ji popisoval jako knihu, ve které

„... látka jeho úvodních universitních přednášek je vyložena způsobem dokonale promyšleným, pedagogicky vytříbeným a při velké otřepanosti tématu překvapivě netradičním a původním.“ [Jarník (1955), str. 115]

Podíváme-li se na postavení Kösslerovy učebnice mezi českými knihami věnovanými diferenciálnímu počtu, pak její pozice není nijak výrazná, přestože byla velmi kladně hodnocena především pro svou pedagogickou stránku. Zařaďme si nyní tuto knihu do kontextu jí předcházejících a následujících učebnic.

Jediným větším česky psaným textem z matematické analýzy byla až do začátku 20. století Studničkova kniha *Základové vyšší mathematiky*, jejíž první část *O počtu differenciálním* byla vydána již v roce 1868. Kniha nevynikala ani původností, ani exaktností výkladu, což souviselo snad i se skutečností, že nebyla psána pro posluchače univerzity, ale posluchače techniky.

V roce 1902 byla v Praze vydána učebnice o rozsahu 416 stran *Počet differenciálný* od Eduarda Weyra, dílo méně obsáhlé než Studničkovo, avšak obecnější a exaktnější. Základním pojmem byl pro Weyra pojem limity, z nějž odvozoval další teorii.

Když byla Weyrova učebnice rozebrána, oslovila Jednota Karla Petra, aby sepsal nový učební text. V roce 1923 tak byl vydán Petrův *Počet differenciální* (*Část analytická*) určený především pro posluchače univerzity. V porovnání s Kösslerovým *Úvodem do počtu diferenciálního* je Petrova kniha mnohem rozsáhlejší - jen její první část, věnovaná pojmu iracionálních a reálných čísel, limitám, součtům nekonečných řad, spojitým funkcím a přehledu funkcí elementárních, má 134 strany, což je jen o 13 stran méně než obsah celé Kösslerovy učebnice. V druhé části své práce na 166 stranách Petr popisoval derivaci funkce a její vlastnosti a dále se zabýval mocninnými řadami. Třetí část v rozsahu 184 strany se věnovala funkcím více proměnných. Petrova kniha zaznamenala velký ohlas díky své originalitě a přesnosti, a i s odstupem doby tak zastínila drobnější Kösslerovu učebnici, přestože ve prospěch Kösslerovy knížky hovoří modernější terminologie, než jakou najdeme v díle Karla Petra.

V roce 1938 navázal Vojtěch Jarník „druhou částí“ na knížku svého kolegy Miloše Kösslera pod názvem *Úvod do počtu integrálního*. Zajímavým průřezem knihami [K33], [Jarník (1938)] a [Petr (1923)] byl Jarníkův článek *Návod ke studiu analysy pro začátečníky*, jenž byl vydán za 2. světové války v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky (viz [Jarník (1941)]). Cílem pojednání bylo přiblížit postup studia matematické analýzy pro čtenáře s hlubším zapálením pro matematiku. Návod je podán zhruba tímto způsobem: . . . „*Nejprve nechť si čtenář vezme* [$K33$] *a pročte kap. I.*“ . . . „*Potom nechť čtenář prostuduje knížku* [$Jarnk(1938)$]“ . . . „*Místo* [$Petr(1923)$] *může čtenář prostudovati též část knihy* . . . “ Kösslerova učebnice hraje v tomto pojednání velmi významnou roli.

V roce 1946 vydal Jarník knihu stejnojmennou jako [K33]. Zaměříme-li se na Jarníkův *Úvod do počtu diferenciálního*, setkáme se opět s mnohem rozsáhlejším dílem – má celkem 450 stran. V předmluvě na str. VIII Jarník poznamenal:

> „*Je zbytečno podotýkat, že mně při tom* (rozuměj při psaní této učebnice) *byly velmi užitečny knihy: M. Kössler: Úvod do počtu diferenciálního a K. Petr: Počet differenciální.*“

Jarníkova kniha se od té doby dočkala mnoha vydání pod názvem *Diferenciální počet I* jako první část ze čtyřsvazkového díla věnovaného infinitesimálnímu počtu *Diferenciální počet I, II* a *Integrální počet I, II*. Po vydání této tetralogie Kösslerova kniha prakticky upadla v zapomnění, neboť Jarníkovo dílo ji předčilo svou precizností i obsažností.

Než přistoupíme k přehledu zajímavých bodů z Kösslerovy učebnice, uvedeme si drobné srovnání některých odborných termínů – jejich podobu v Kösslerově knize a podobu, v jaké jsou nejčastěji představovány v současných učebnicích a skriptech.

Pro pochopení Kösslerova nástinu teorie reálných čísel je zapotřebí si uvědomit, že *cifrou řádu n* rozuměl cifru na $n-$tém místě v desetinném rozvoji čísla, *úsekem řádu $n-$tého* potom číslo zapsané pouze ciframi až do řádu n (např. úsek nultého řádu čísla π je číslo 3, úsek řádu třetího čísla π je číslo $3,141$, apod.).

Znaménko rozlišující kladná a záporná čísla Kössler nazýval *znamením vztahu.* Pro čísla opačná používal pojmenování *čísla souměrná* (*symetrická*). *Množstvím* označoval množinu, místo desetinné čárky používal *desetinnou tečku*, a podobně se lišil ve způsobu zápisu čísel periodických: zápis $0.\dot{2}$ znamenal $0,22222\ldots$, zápis $0.\dot{1}0\dot{2}$ pak odpovídal číslu $0,102102\ldots$ (dnes bychom tato dvě čísla zapsali jako $0,\overline{2}$ a $0,\overline{102}$).

Na místě nerovností Kössler pracoval s *nerovninami*; *posloupností nestoupající* rozuměl posloupnost nerostoucí. Zatímco dnes používáme při rozhodování o konvergenci řady mj. srovnávací kriterium, Kössler tuto metodu popisoval jako *princip přirovnávání řad.* O neabsolutní konvergenci hovořil jako o *konvergenci relativní*, nevlastní limitu nazýval *limitou v širším smyslu. Celistvá funkce racionální* byl vlastně polynom. Drobné odchylky v terminologii bychom našli i u dalších případů, i když se nejedná o rozdíly, které by mohly způsobit chybné pochopení smyslu - namísto zrychlení se setkáme s *urychlením*, místo globálních extrémů čteme o *absolutních extrémech*, hledání *relativního maxima* v sobě skrývá hledání lokálního maxima, apod.

Přistupme nyní ke stručnému přehledu obsahu Kösslerovy učebnice a jejímu srovnání se stejnojmennou, avšak mladší knihou Jarníkovou.

Kössler rozdělil svou práci celkem do sedmi kapitol a dvou dodatků o celkovém rozsahu 143 strany. Jarníkova práce je rozčleněna do patnácti kapitol v rozsahu 442 stran (pozn. uvedené počty stran nezahrnují rejstříky).

I. kapitola Čísla racionální a reálná

Již z názvu první kapitoly je jasný její cíl – zavedení racionálních a reálných čísel a operací s nimi. Shrnutí základních znalostí o operacích s racionálními čísly (s řadou z nich se setkávají žáci již na základní škole) uvádí velmi pěkná Kösslerova úvaha hledající paralelu mezi matematikou a šachovou partií:

„Matematika jedná o číslech. Z těchto čísel odvozujeme při počítání jiná čísla podle určitých nezměnitelných pravidel početních. S tohoto hlediska můžeme přirovnati matematiku ke hře šachové, která jest definována figurami, šachovnicí a přesnými pravidly hry. Pravidla tato jsou tak zvolena, aby žádné z nich neodporovalo druhému. Výsledkem operací jsou určité posice figur na šachovnici. Základem matematiky jest deset cifer (*figur*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, *potom řada operačních symbolů jako* $+$, $-$, $=$, $:$, *zlomková čára, desetinná tečka, závorky atd. a obecná čísla* a, b, c, $\ldots$, p, q, *to jest zkratky, jimiž označujeme určitá seskupení cifer a jiných symbolů, jako na př.* $a = 0.357$, $b = 8/7$ *atd. Z těchto symbolů tvoříme podle přesně předepsaných pravidel symboly nové. Ty jsou pak výsledkem počtu.“* (str. 7)

Jelikož se Kössler ve své učebnici zabýval základními pojmy, v dalším komentáři se soustředíme především na definice, věty a důkazy, resp. příklady neobvyklé, odlišné od současných formulací a různé zajímavosti. Pokud v následujícím textu není uvedeno jinak, jsou všechny citace z [K33], a pro snazší orientaci je u nich uvedena strana, ze které bylo na konkrétních místech citováno.

Základní důležitost prof. Kössler připisoval zavedení reálných čísel a logickému vybudování počítání s nimi, neboť jak sám uvedl

„jen v tomto vybudování spočívá oprávněnost matematiky, neboť o správnosti výsledku nemůžeme se přesvědčiti experimentem (jako např. ve fysice), nýbrž jen tím, že dokážeme jeho souhlas s pravidly početními, která jsme přijali jako základ.“ (str. 10)

Reálné číslo pak Kössler definoval následujícím způsobem:

Definice: *Číslo reálné jest symbol myšlený v podobě čísla desetinného kladného, záporného nebo rovného nule o nekonečném počtu cifer.* (rozuměj: „symbol, v němž za každou cifrou na pravo od desetinné tečky následující cifry ležící ještě dále na pravo – takové číslo nemůžeme definovati tím, že bychom je vskutku napsali.“) (str. 10)

a dále dodával, co přesně bychom si měli představit pod slovním spojením „*mějme dáno reálné číslo*“:

„Číslo reálné, od nuly různé, jest dáno, když jest možno jednoznačně stanoviti jeho znamení vztahu (pozn. +,-) a cifru stojící na libovolném místě před nebo za desetinnou tečkou.“ (str. 10)

Podrobnější náhled na konstrukci množiny reálných čísel Kössler ponechal až na závěrečný dodatek, protože jde o látku, „*která by při prvním studiu čtenářův krok zpomalovala a tak brala mu chuť k pokračování.*“

Podívejme se pro zajímavost na způsob, kterým prof. Kössler zaváděl pojem číselné posloupnosti:

Definice: *Jestliže každému celistvému číslu z přirozené řady číselné* 1, 2, 3, …*jest přiřazeno určité číslo reálné* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ *nazýváme všechna tato čísla hromadným názvem posloupnost čísel.* (str. 12)

Tato definice je prakticky analogická dnes užívaným formulacím. Pro pochopení Kösslerovy definice limity posloupnosti si dále přiblížíme pojem definitivního úseku na případu posloupnosti $\alpha_1 = 3,2\overline{4}$, $\alpha_2 = 3,22\overline{4}$, $\alpha_3 = 3,222\overline{4}$ atd.:

Ať zvolím jakkoliv vysoký řád n, vždy od α_n *počínajíce všechna čísla* $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$ *mají totožné úseky řádu n-tého* $(3,222\ldots2)$. *Tento úsek nazveme definitivní úsek dané posloupnosti řádu n-tého.* (str. 12–13)

V Kösslerově podání potom definice limity posloupnosti zní:

Definice: *Posloupnost* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *má limitu, a to jednu jedinou, když v ní eksistují úseky definitivní každého řádu. Limita ta jest reálné číslo určené definitivními úseky.* (str. 13)

Povšimněme si, že uvedená definice je založena pouze na postulátech o reálných číslech, nepoužívá v žádné své části operaci odčítání ani pojmy jako $\varepsilon-$okolí.

Snaha omezit rozsah celé knihy na některých místech vedla autora k nepřesnostem či drobným chybám. Tak např. na str. 14 se objevuje γ zjevně označující reálné číslo, s jehož pomocí jsou symbolicky popsány komutativní, asociativní a distributivní zákony pro sčítání a násobení reálných čísel, avšak tento fakt na rozdíl od reálných čísel α, β není nikde poznamenán. Na téže straně se dočteme, že vztah $\alpha \cdot 1 = \alpha$ platí pro $\alpha \neq 0$. Toto omezení se však vztahuje ke skutečnosti, že rovnice $\alpha \cdot x = \alpha$ má pro $\alpha \neq 0$ jediné řešení $x = 1$, zatímco pro $\alpha = 0$ jsou řešením všechna reálná čísla. Při zběžném čtení tak může čtenář dospět k mylnému závěru, že omezení $\alpha \neq 0$ je na daném místě uvedeno zcela zbytečně.

Vojtěch Jarník ve své knize v první kapitole rozněž připomínal základní pojmy, soustředil se dále na množinu racionálních a reálných čísel, přičemž reálná čísla zavedl pomocí teorie řezů. V závěru pak formuloval pojem suprema a infima. Oproti Kösslerovi se jednotlivým pojmům věnoval ve větším rozsahu, a rovněž je doprovázel velkým množstvím příkladů.

II. kapitola Posloupnosti

V úvodu druhé kapitoly Kössler odvodil z pro nás neobvyklého výše uvedeného způsobu definování limity posloupnosti i dobře známou $\varepsilon-$definici, a řadu vět o vlastnostech limit posloupností dokazoval dnes používanými metodami. Pozoruhodné je cvičení č. 6, na str. 21 zařazené v rámci této kapitoly:

Příklad: *Počet dní v roce N po Kr. jest*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ 365 + \left| \cos \frac{2NR}{4} \right|^n - \left| \cos \frac{2NR}{100} \right|^n + \left| \cos \frac{2NR}{400} \right|^n \right\}, R = 90\,, N \geq 1582\,.$$

Uvedený příklad je velmi pěknou úlohou na jednoduché procvičení pojmu limity v konkrétním praktickém případě, byť v této situaci používá pro všeobecně známé pravidlo pro určení přestupného roku poněkud složitě vyhlížející vzorec.

V současných skriptech se rovněž častěji setkáváme se zdánlivě složitější definicí pojmu okolí, resp. prstencového okolí než používal Miloš Kössler:

Definice: *Okolí bodu x jest každý otevřený interval, který obsahuje x. Bod x samotný k okolí nepřísluší.* (str. 16)

Jednoduchý, ale pěkný příklad zvolil Kössler pro ilustraci vztahu limity posloupnosti a vybrané posloupnosti. Dokazoval, že

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ pro } a > 1\,.$$

Posloupnost $a^{\frac{1}{1}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, \ldots$ je klesající, zdola omezená ($a^{\frac{1}{n}} \geq 1$). Podle věty o limitě monotonní posloupnosti tedy existuje její limita A. Posloupnost z původní vybraná $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{6}}, \ldots a^{\frac{1}{2n}}, \ldots$ má tedy tutéž limitu A. Z vět o limitě součinu a vlastnostech obecné mocniny dostáváme

$$A = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2n}} \cdot a^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2n}} = A^2\,.$$

Rovnice $A = A^2$ je splněna pro $A = 0$ nebo $A = 1$. Pro $A = 0$ platí $|a^{\frac{1}{n}} - 0| \geq 1$, což odporuje definici limity – zbývá tedy pouze možnost $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = A = 1$, což bylo cílem dokázat. Uvedená úloha tedy komplexně využívá celou řadu vět o vlastnostech a limitách posloupností.

V rámci druhé kapitoly v §6. Kössler shrnul nejdůležitější vlastnosti odmocniny a obecné mocniny kladného reálného čísla, neboť tuto látku potřeboval k důkazu, že posloupnosti

$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ a $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ mají stejnou limitu, rovnou číslu e. Dále ukázal, že tutéž limitu má posloupnost $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Poté, co Kössler zavedl pomocí *bodů zhuštění* (tj. hromadných bodů posloupností) pojmy *limes inferior* a *limes superior*, dokázal Bolzano-Cauchyovu (dále jen B-C) podmínku za využití úvah o úsecích $k-$tého řádu.

Jarník si rozdělil danou látku do dvou kapitol. Ve druhé kapitole věnované posloupnostem se zabýval stejnou problematikou jako Kössler, opět však uvedl mnohonásobně větší množství konkrétních příkladů i vět týkajících se posloupností. Rovněž uvedl i všechny tři výše zmíněné posloupnosti, jejichž limitou je číslo e. Do třetí kapitoly pak zařadil studium obecné mocniny a dále logaritmu, jímž se Kössler zabýval až v dalších částech.

III. kapitola Řady

Pasáž o řadách se v Kösslerově podání příliš nevymyká rámci úvodního kursu matematické analýzy v současné době, zmíníme tedy opět jen některé zajímavosti.

Pod názvem *všeobecné kriterium pro řady* bychom u Kösslera našli B-C podmínku pro řady. Konkrétně pak uváděl kriterium srovnávací, Cauchyovo odmocninové, d'Alembertovo podílové a Cauchyovo kondensační. Příklad selhání d'Alembertova kriteria ukázal v případě řady

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots,$$

kde podíl a_{n+1}/a_n je roven $(\frac{2}{3})^n \cdot \frac{1}{3}$ pro n liché, $(\frac{3}{2})^n \cdot \frac{1}{2}$ pro n sudé. V případě sudého n podíl a_{n+1}/a_n roste nade všechny meze, pro liché n se blíží nule. Nemůžeme proto soudit ani na divergenci, ani na konvergenci, kterou zjistíme např. pomocí Cauchyova kriteria, neboť $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2}$. V případě řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pro $\alpha > 0$ selhává podílové i odmocninové kriterium. Zde Kössler poukázal na užitečnost kondensačního kriteria, jež se dnes v základním kursu analýzy často ani neobjevuje.

Dirichletovým teorémem byla v této učebnici označena věta o přerovnávání konvergentních řad s kladnými členy. V dalších úvahách Kössler zmínil neplatnost Dirichletova teorému pro řady, které konvergují pouze relativně. Uprostřed těchto úvah objevíme skrytou i tzv. Riemannovu větu pro přerovnání relativně konvergentní řady k libovolnému předem zvolenému součtu. Možnost přerovnat takovou řadu v řadu divergentní však Kössler nediskutoval.

V odstavci věnovaném alternujícím řadám na několika řádcích autor shrnul kriterium, které dnes bývá označováno jako Leibnizovo, aniž by však toto tvrzení jakkoli v průběhu textu zvýraznil.

V Jarníkově knize jsou nekonečné řady diskutovány v kapitole čtvrté. Výklad je i zde doprovázen pestrým množstvím příkladů. Podílové a odmocninové kriterium je uvedeno a podrobně rozebráno i ve své limitní podobě. Kondensační kriterium Jarník důkladně dokázal, avšak nepoužíval pro něj toto označení, uvedl jej jako větu 88. Stejně tak Leibnizovo kriterium (větu 89.) najdeme v jeho knize s důkazem, příkladem, avšak rovněž bez názvu. Jako aplikace teorie nekonečných řad v závěru kapitoly Jarník rozebral problematiku nekonečných desetinných zlomků. Otázka přerovnávání řad je zmíněna jen stručně s odkazem na druhý připravovaný svazek knihy (proslulý *Diferenciální počet II.*).

IV. kapitola Funkce

Na úvod této partie si pro zajímavost uvedeme Kösslerovu definici funkce:

Definice: *Jestliže y tak závisí na proměnné x, že každé hodnotě x odpovídá určitá jediná hodnota y, říkáme, že y jest funkce proměnné x.* (str. 47)

Poté, co Kössler vysvětlil pojem funkce a jejího grafu, uvedl celou řadu jednoduchých příkladů, včetně polynomu, lomené racionální funkce, či funkce celá část. Funkční předpis $y = [x]$ Kössler četl *„y jest celé číslo v x“*. Do své učebnice zařadil i graf této funkce, přičemž z obrázku uvedeného na str. 52 však není patrné, jakých funkčních hodnot nabývá funkce pro celá čísla. Autor si však byl tohoto nedostatku vědom a sám poznamenal:

„Jest však dobře uvědomiti si, že obrazec nevystihuje všech vlastností funkce, neboť pro $x = 1, 2, 3, \dots$ má y vždy jedinou hodnotu $1, 2, 3, \dots$, což nikterak není patrno z obrazce.“ (str. 51)

Limitu funkce Kössler definoval nejprve v případě nevlastního bodu, kdy $x \to \infty$, a až poté podal i obecnou definici limity pro $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$ tak, jak ji známe z dnešních skript a učebnic. Jako příklad uvedl důkaz vztahu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

který dnešní studenti přijímají téměř automaticky, aniž by se zvlášť pozastavovali nad faktem, že x označuje úhel měřený v obloukové míře. Kössler ve své učebnici uvedl i situaci, kdy x'' znamená míru úhlu měřenou v sekundách, x míru obloukovou a odvodil analogický vztah pro tento případ (str. 55):

$$\lim_{x'' \to 0} \frac{\sin x''}{x''} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{x''} = \frac{\pi}{648000}\,.$$

V odstavci nazvaném *Limita v rozšířeném smyslu* Kössler stručně zmínil jednostranné limity a tzv. limitu v širším smyslu, tj. $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ - dnes bychom řekli limitu nevlastní. Mezi kriteria pro existenci limity funkce zařadil větu o limitě monotonní posloupnosti ve spec. případě a B-C podmínku pro limitu funkce. Poté, co autor definoval spojitost funkce v bodě, uvedl několik jednoduchých úloh, např. funkci $y = [1 - x^2]$ - nespojitou v bodě $x_0 = 0$, ačkoliv limita v tomto bodě existuje.

Po rozšíření pojmu spojitosti v bodě na spojitost funkce v intervalu Kössler popsal tři věty o spojitých funkcích: větu o zachovávání znaménka nenulové funkce spojité v bodě na malém okolí tohoto bodu, větu o nabývání mezihodnot funkce spojité na uzavřeném omezeném intervalu a větu o nabývání maxima a minima funkce spojité na uzavřeném omezeném intervalu.

Dále najdeme stručný obecný popis funkce inverzní, v zápětí využitý na dvojici funkce exponenciální a logaritmické. V závěru kapitoly je uveden přehled základních vlastností a grafů cyklometrických funkcí jakožto funkcí inverzních k funkcím goniometrickým.

Jarník uvedené látce věnoval ve své knize celkem tři kapitoly. Pátou kapitolu zaměřil na otázku spojitosti a limity funkce. Pro srovnání si uvedeme i Jarníkovu definici pojmu funkce:

Definice: *Budiž M nějaká množina reálných čísel. Jestliže každému číslu x množiny M je přiřazeno určité číslo y, říkáme, že y je funkcí x; množinu M nazýváme oborem této funkce.* [Jarník (1951), str. 162]

Z tohoto jednoduchého příkladu je patrná Jarníkova preciznost při definování základních pojmů. Spojitost funkce v bodě a limitu funkce zavedl analogicky jako Kössler, avšak věnoval mnohem větší pozornost jednotlivým tvrzením, mj. pečlivě dokazoval věty o aritmetice limit, vše doprovázel mnoha příklady. Obecné věty o spojitých funkcích však v této fázi zatím neformuloval. V šesté kapitole své práce Jarník do detailu popsal vlastnosti goniometrických funkcí a základních identit mezi nimi. V následující kapitole pak formuloval věty o inverzních funkcích, jimž se Kössler vyhýbal, a dále detailně rozebral funkce cyklometrické.

V. kapitola Prvá derivace a diferenciál

Výklad pojmu derivace Kössler doprovázel jejím geometrickým významem jakožto směrnice tečny ke křivce a fyzikálním významem v souvislosti s pojmy střední a okamžitá rychlost. Ukázal, že spojitost v bodě x je nutnou, avšak nikoli postačující podmínkou pro existenci derivace v bodě x. Dále odvodil derivace nejčastěji se vyskytujících funkcí a základní pravidla pro derivování. Při popisu derivace funkce $\sin x$ se neopomenul vrátit k problému volby míry a ukázal, že v případě, kdy je úhel x měřen v sekundách, platí pro derivaci podle výše zmíněné limity

$$(\sin x)' = \frac{648000}{\pi} \cos x \,.$$

Zvláštní pozornost je pak věnována odvození derivace funkce exponenciální a logaritmické. Na str. 78 Kössler poznamenal jeden z důvodů, proč se logaritmům při (pro studenty zcela nepřirozeném) základu e říká „přirozené“ – jejich derivace je zvláště jednoduchá:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \,, x \neq 0$$

a tak *„se jim v analysi dává pravidelně přednost před každou jinou soustavou logaritmickou.“*

S pojmem *logaritmické derivace* se dnešní studenti setkávají většinou pouze v kursu komplexní analýzy nebo při výpočtu integrálů, z úvodního kursu diferenciálního počtu se jaksi vytratila. Prof. Kössler upozorňoval na fakt, že někdy bývá snazší vypočítat derivaci logaritmu nějaké funkce, nežli derivaci funkce samotné a své tvrzení demonstroval na příkladech funkcí $y = (x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\cdots(x-a_n)^{p_n} \,, x > max(a_1,\ldots,a_n)$ a podobně $y = \{f(x)\}^{\varphi(x)}$. V části věnované výpočtu derivací je obsaženo i množství cvičení s výsledky, množství na Kösslerovu knihu skutečně neobvyklé. Stručně se Kössler zmínil o derivování funkce implicitní, a to ve speciálním případě algebraické funkce určené rovnicí

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0 \,,$$

kde $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, jsou mnohočleny v proměnné x.

Derivací v širším smyslu rozuměl autor knihy nevlastní derivaci. Z důležitých vět založených na pojmu derivace uvedl větu o rostoucí funkci (tj. rozhodování o monotonii funkce na základě znaménka derivace), větu Rolleovu, větu o střední hodnotě a některé její důsledky, větu Cauchyovu o střední hodnotě. Oblíbenou autorovou úlohou na aplikaci odvozované teorie byla *Keplerova rovnice*, patrně první transcendentní rovnice v historii[5.1]

$$x - e \sin x = M\,.$$

Diferenciál Kössler definoval takto:

$$\text{diferenciál } y = dy = f'(x) \cdot \Delta x\,, \text{kde } \Delta x \,\text{jest libovolné číslo}\,.$$

Derivaci funkce $y = f(x)$ je pak možno zapsat jako podíl diferenciálů, tzv. *diferenciální kvocient* funkce a nezávisle proměnné: $dy/dx = f'(x)$. Zde však Kössler důrazně upozorňoval na skutečnost, že ačkoli při daném značení $dx = \Delta x$, rozhodně neplatí $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Tento rozdíl ukázal i geometricky s využitím přehledného obrázku.

Vojtěch Jarník nejprve ilustroval geometrický význam směrnice tečny ke grafu funkce a fyzikální význam okamžité rychlosti, aby poté definoval derivaci. Volil tedy v této fázi opačný postup než Kössler. Odvodil pravidla pro derivování, k nimž připojil rozsáhlý přehled úloh pro čtenáře k procvičování. Dále definoval derivace vyšších řádů a v závěru osmé kapitoly i diferenciál funkce. Kapitolu devátou Jarník vyhradil obecným větám o spojitosti a derivacích. Složitější tvrzení tak v jeho podání mají větší prostor a neztrácí se v okolním textu tak jako u Kössslera. Rovněž důkazy jednotlivých vět jsou v Jarníkově knize podány mnohem precizněji.

VI. kapitola Vyšší derivace a jejich užití

Definici $n-$té derivace provedl Kössler paralelně s definicí $n-$tého diferenciálního kvocientu. Z obecných formulí pro vyšší derivace odvodil pouze Leibnizův vzorec. Neopomenul připojit možný fyzikální význam druhé derivace – *okamžité zrychlení.* Z obrovského množství aplikací vyšších derivací Kössler uvedl Taylorovu větu spolu s výpočtem Taylorova polynomu, Maclaurinovu větu, podmínky pro hledání extrémů funkcí. Podívejme se na Kösslerovu formulaci pravidla pro zjištění lokálních extrémů:

„Vypočteme kořeny rovnice $f'(x) = 0$; budiž ξ jeden z nich. Dosazujeme tento kořen postupně do vyšších a vyšších derivací $f(x)$ až dojdeme k té z nich, která prvá jest od nuly různa. Je-li tato derivace lichého stupně, není v bodě ξ extrém. Je-li stupeň ten sudý a derivace sama záporná, nastává maximum, je-li kladná, minimum.“ (str. 95)

Jako zajímavé cvičení na hledání extrému funkce položil autor svým čtenářům otázku, ve kterých logaritmických soustavách lze najít čísla rovna svému logaritmu. Odpověď na tuto otázku dává studium funkce $f(x) = x - \log_a x$, jež nabývá nulové hodnoty, pokud $\min f(x) \leq 0$, což nastane právě když $a < e^{\frac{1}{e}}$. V tomto místě je v knize chyba uvádějící výsledek $a < e^{\frac{1}{2}}$.

V odstavci nazvaném *Poloha křivky vůči tečně* jsou slovy popsány pojmy křivky konvexní, konkávní a inflexe pomocí geometrického názoru. Při odvození Taylorovy řady pro $f(x) = \sin x$ použil autor vzorec pro $k-$tou derivaci $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$, jenž elegantně vystihuje

[5.1] Keplerova rovnice vyjadřuje vztah mezi tzv. excentrickou anomálií x a střední anomálií M nebeského tělesa pohybujícího se po eliptické dráze s numerickou excentricitou e, $0 \leq e < 1$. Lze ji odvodit na základě 2. Keplerova zákona pro pohyb vesmírných těles.

dnes často používaný rozpis

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } k = 4n \\ \cos x & \text{pro } k = 4n+1 \\ -\sin x & \text{pro } k = 4n+2 \\ -\cos x & \text{pro } k = 4n+3\,, \end{cases}$$

ačkoli se jedná o jednoduchou aplikaci středoškolské matematiky. Taylorovu řadu pro funkci $\ln(1+x)$ a řady z ní odvozené Kössler využil při vyčíslování logaritmů. Upozornil čtenáře na možnost postupně určit logaritmy všech celých čísel pomocí logaritmů prvočísel a jejich sčítání. Pro tento postup je obzvlášť vhodná řada:

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(z+1) + \frac{1}{2}\ln(z-1) + \left\{ \frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3(2z^2-1)^3} + \cdots \right\}.$$

Je-li z prvočíslo, jsou čísla $(z+1)$ a $(z-1)$ rozložitelná v prvočísla menší, a tak se situace zjednodušuje. Známe-li např. $\ln 2$, můžeme tak počítat $\ln 3$ podle vzorce

$$\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 2 + \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \cdots \right\}, \text{atd.}$$

Dále Kössler zmínil řadu binomickou a v závěrečné části kapitoly se zaměřil na neurčité výrazy a l'Hospitalovo pravidlo, které objasňoval i na konkrétních příkladech.

Jarník v kapitole desáté podrobně popsal použití věty o přírůstku funkce ke studiu průběhu funkce – opět mnohem detailněji než Kössler, který v podstatě pojmy konvexní a konkávní funkce jen zmínil, aniž by dokazoval hlubší tvrzení. Neurčité výrazy a l'Hospitalovo pravidlo tvoří náplň jedenácté kapitoly, oproti Kösslerovi se autor navíc zabýval i výpočtem oskulačních kružnic. Taylorovu vzorci a jeho aplikacím je věnována celá dvanáctá kapitola, najdeme zde i pasáž věnovanou výpočtu logaritmů. Navíc v Jarníkově knize objevíme i podrobnosti k řadám funkcí $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ a „výpočet" čísla π.

VII. kapitola Funkce dvou proměnných

Funkci dvou proměnných Kössler definoval tímto způsobem:

Definice: *Funkce z dvou nezávisle proměnných x,y $\quad z = f(x,y)$ jest definována, když dán jest předpis, jak k dvojici čísel $[x,y]$ se přiřadí číslo z.* (str. 107)

Dále formuloval význam základních pojmů jako *bod prostoru*, *ohraničená posloupnost bodů* apod., definoval limitu a spojitost funkce dvou proměnných, zobecnil některé věty o spojitých funkcích. Zdůraznil ve stručné poznámce rozdíl mezi limitou

$$\lim_{[x,y]\to[a,b]} f(x,y) = A \;\text{ a tzv. dvojitou limitou }\; \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = B\,.$$

Při výčtu možností způsobu zápisu parciální derivace funkce $z = f(x,y)$ byl autor opravdu pečlivý:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta x} = D_x z = D_x f = f'_x(x,y) = z'_x\,.$$

V §46. Kössler komentoval fakt, že obecné studium spojitosti funkce $f(x, y)$ může být často složité, a odvodil postačující podmínku pro zjištění spojitosti:

Věta: *Funkce $f(x, y)$ jest spojitá v bodě $[x, y]$, jestliže jest tam spojitá v jedné proměnné (např. x) a má-li mimo to v okolí $[x, y]$ ohraničenou parciální derivaci podle druhé proměnné (např. $|f'_y| < M$).* (str. 113)

Dále zdůraznil, že ke spojitosti v bodě $[x, y]$ není postačující podmínkou ani existence obou parciálních derivací (kde je patrný rozdíl oproti teorii funkcí jedné proměnné), ani spojitost funkce $f(x, y_0)$ vzhledem k proměnné x a funkce $f(x_0, y)$ vzhledem k proměnné y.

Následující řádky knihy jsou věnovány funkcím, pro něž existuje totální diferenciál, a jejich vlastnostem, derivaci funkce složené, možnosti záměny parciálních derivací druhého řádu, vyšším diferenciálům, Taylorově větě pro dvě proměnné. Posledně jmenovaný pojem je však zmíněn pouze obecně, což jej činí dosti neprůhledným a je ke škodě snadnějšímu pochopení výkladu. Vzhledem k jiným částem knihy relativně obšírně je popsán způsob vyšetřování extrémů funkcí dvou proměnných. Ani zde však Kössler neuvedl žádný konkrétní řešený příklad, pouze zadání několika úloh na procvičení.

Poslední odstavec kapitoly je zaměřen na funkce určené implicitně. Nejprve autor podrobně dokázal větu o řešení rovnice $f(x, \varphi(x)) = 0$, poté ukázal, jak počítat v tomto případě derivaci, včetně dvou jednoduchých příkladů. I na tomto místě by však jistě bylo vhodné uvést více konkrétních řešených úloh.

Jarník popsal funkce dvou proměnných ve třinácté kapitole své knihy; začal vybudováním geometrického názvosloví pro znázorňování funkcí dvou proměnných, pokračoval zavedením limity, spojitosti, parciálních derivací a možností jejich záměny, totálního diferenciálu a derivací složené funkce. Implicitním funkcím věnoval zvláštní kapitolu. Celý výklad doprovodil několika příklady a celou řadou poznámek k dané problematice. Pro závěr své knihy volil v kapitole patnácté jako téma nástin teorie komplexních čísel. Vyšetřování extrémů funkcí dvou proměnných odložil až do připravovaného druhého dílu své knihy.

I. dodatek Nástin teorie čísel reálných

Mezi pozoruhodné myšlenky Kösslerovy knihy lze zařadit především jeho výklad teorie reálných čísel. Do dnešní doby je známo několik různých způsobů zavedení množiny $\mathbb{R}$, řadu z nich najdeme např. v knize [Šalát (1982)]. Na našich školách se nejčastěji setkáváme s axiomatickým způsobem zavedení $\mathbb{R}$. Méně časté je použití Dedekindových řezů množiny racionálních čísel, jež zůstává doménou vysokých škol, stejně jako studium Cantorovy metody Cauchyových posloupností. Pomocí řezů zavedli reálná čísla ve svých knihách i K. Petr (viz [Petr (1923), str. 1–16)] či V. Jarník (viz [Jarník (1951), str. 39–66]).

Miloš Kössler si zvolil metodu v naší literatuře do té doby poněkud opomíjenou – teorii spočívající na pojmu nekonečného desetinného rozvoje založenou na Weierstrassově principu (věta (IV.)). Později se s tímto způsobem konstrukce tělesa reálných čísel v menší či větší míře setkáváme např. v [Blažek et al. (1981)], [Veselý (1997), str. 40–41, 85–86], [Staněk (1995)]. Kösslerovu knihu doporučuje čtenářům v pasáži věnované reálným číslům např. [Výborný (1966), str. 41].

Kössler přitom nepodal zevrubný výklad celé teorie, ale pouze několikastránkový nástin, zájemce o podrobné studium této metody odkázal na knihy [Loewy (1915)] a [Perron (1921)].

Vycházel z faktu, že reálná čísla musí splňovat stejné postuláty jako čísla racionální (viz str. 8):

A. Spořádanost čísel

(1.) Jsou-li a, b dvě čísla, jest splněn vždy jeden a jen jeden ze vztahů $a = b$, $a > b$ (čili $b < a$), $a < b$ (čili $b > a$).

(2.) Je-li $a > b$, $b > c$, jest také $a > c$.

B. Sčítání

(3.) Jsou-li a, b čísla, jest také $a + b$ číslo (jednoznačně určené).

(4.) $a + b = b + a$. (Zákon komutativní.)

(5.) $a + (b + c) = (a + b) + c$. (Zákon asociativní.)

(6.) Jediné číslo nula má vlastnost $a + 0 = a$.

(7.) Je-li $a > b$, jest také $a + c > b + c$. (Zákon monotonie.)

(8.) Rovnice $a + x = 0$ má vždy (jediné) řešení, které označujeme $x = -a$.

C. Násobení

(9.) Jsou-li a, b čísla, jest také ab číslo (jzn. stanovené). Píšeme také $ab = a \cdot b = a \times b$.

(10.) $ab = ba$. (Zákon komutativní.)

(11.) $a(bc) = (ab)c$. (Zákon asociativní.)

(12.) Jediné číslo jedna má vlastnost $a \cdot 1 = a$, když $a \neq 0$.

(13.) Je-li $a > b$ a $c > 0$, jest $ac > bc$. Je-li $c < 0$, jest $ac < bc$, a je-li $c = 0$, jest $ac = bc = 0$. (Zákon monotonie.)

(14.) Rovnice $ax = 1$ má vždy (jediné) řešení, pokud $a \neq 0$. Řešení to označujeme $x = 1/a = 1 : a$. (Rovnice $0 \cdot x = 1$ nemá řešení!)

(15.) $a(b + c) = ab + ac$. (Zákon distributivní.)

D. Odčítání a dělení

definujeme vztahy $a - b = a + (-b)$ a $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, $(b \neq 0)$.

E. Požadavek Archimedův

(16.) Je-li a číslo, pak lze nalézti celistvá kladná čísla n, pro která jest $n > a$.

Pro další úvahy si musíme ujasnit některé pojmy, se kterými Kössler ve svém nástinu pracoval. *Úseky téměř totožnými $n-$tého řádu* rozumíme takové dva úseky, jejichž rozdíl je roven jedné jednotce $n-$tého řádu (např. čísla $-4{,}6590$ a $-4{,}6589$ mají téměř totožné úseky čtvrtého řádu). Dále je třeba si uvědomit možnost nahradit čísla s periodou $\dot{9}$ čísly s nimi ekvivalentními, např. $42{,}324049999\cdots = 42{,}32405000\ldots$. Zastavme se na chvíli u pojmu definitivního úseku. Označme symbolem $\alpha^{(k)}$ úsek $k-$tého řádu čísla α. Jestliže v posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ existuje takový člen a_N, že úseky $a_n^{(k)}$ jsou pro všechna $n > N$ rovny buď témuž číslu a nebo číslu $a + 10^{-k}$, říkáme, že posloupnost má definitivní úseky $k-$tého řádu. Nyní si znovu připomeňme Kösslerovu definici limity:

Definice: *Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ má limitu a to jedinou, jen když v ní eksistují totožné nebo téměř totožné úseky definitivní každého řádu. Limita ta jest reálné číslo určené definitivními úseky.* (str. 130)

Jednoznačnost výše definované limity posloupnosti je patrná v případě totožných definitivních úseků. Situace pro téměř totožné úseky je trochu složitější, jak Kössler ukazoval na str. 13–14. Platí dokonce:

Věta: *Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ve které se vyskytují stále definitivní úseky každého řádu dvojího typu (téměř totožné), má limitu s periodou $\dot{9}$ (anebo, což jest totéž, číslo ekvivalentní s periodou $\dot{0}$).* (str. 14)

Pomocí uvedené definice limity posloupnosti pak lze snadno zavést sčítání a násobení reálných čísel: uvažujme dvě reálná čísla α, β a jim příslušné úseky $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ a $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$. Jejich součtem nazveme limitu σ posloupnosti $\sigma_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $\sigma_2 = \alpha_2 + \beta_2, \ldots$ a jejich součinem limitu τ posloupnosti $\tau_1 = \alpha_1\beta_1$, $\tau_2 = \alpha_2\beta_2, \ldots$. K tomu, aby pro takto definované operace sčítání a násobení Kössler dokázal platnost tvrzení (A)–(E), využíval ve svých úvahách následující:

Věta:

(*I.*) *Jestliže jest* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *jest* $\lim(-a_n) = -a$.

(*II.*) *Jestliže jest* $\lim a_n = a$ *a je-li* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k \ldots$ *libovolná posloupnost celistvých kladných čísel, jest* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. *Stručně říkáme, že posloupnost vybraná z členů posloupnosti konvergentní má tutéž limitu.*

(*III.*) *Jestliže dvě posloupnosti* $a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$ *mají členy o konečném počtu cifer a jestliže jest* $\lim a_n = a$, $\lim(b_n - a_n) = 0$, *pak i druhá posloupnost jest konvergentní a jest* $\lim b_n = a$. *Také obráceně, je-li* $\lim a_n = \lim b_n$, *jest* $\lim(b_n - a_n) = 0$.

(*IV.*) *Každá posloupnost monotonní a ohraničená má limitu.*

Zatímco první dvě věty plynou z výše podané definice, věty (III) a (IV) bylo nutno dokázat. Při důkazu věty (III) se Kössler opíral pouze o definici limity a operace s racionálními čísly. Podrobně rozebral a dokázal všechny možnosti, které mohou nastat - definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ mohou být totožné a od jistého řádu končit samými devítkami (případ 1.), resp. samými nulami (případ 2.), může se mezi nimi vyskytovat nekonečný počet čísel končících cifrou jinou než 9 nebo 0 (případ 3.), nebo od jistého řádu počínaje mohou končit nulou nebo devítkou, a sice po každé devítce (byť i několikrát opakované) následuje nula a po každé nule podobně devítka (případ 4.). Případ 5., uvažující posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ s téměř totožnými definitivními úseky, lze snadno převést na případy předchozí. Věta (IV) vyplyne po několika jednoduchých obratech z věty o limitě neklesající shora omezené posloupnosti kladných čísel, jejíž důkaz lze provést pouze na základě definice limity a uspořádanosti množiny reálných čísel. Přistupme nyní k důkazům jednotlivých podmínek (**A**)–(**E**).

Spořádanost reálných čísel

Dejme na úvod při zdůvodnění podmínky (1.) slovo samotnému autorovi:

„Číslo kladné jest větší než nula a než jakékoliv číslo záporné. Číslo kladné α jest větší než kladné číslo β, jestliže prvá cifra z leva u čísla α, která se neshoduje se stejnolehlou cifrou čísla β, jest větší nežli tato a jestliže při tom α a β nejsou ekvivalentní. Pak píšeme $\alpha > \beta$ a říkáme také, že β jest menší než α ($\beta < \alpha$). Nula jest větší než kterékoliv číslo záporné. Dvě čísla záporná $\alpha \neq \beta$ nechť mají k sobě souměrná čísla kladná $\alpha_1 \neq \beta_1$. Pak říkáme, že $\alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$ podle toho, zda $\alpha_1 < \beta_1$ či $\alpha_1 > \beta_1$. Z těchto definic jest zřejmo, že pro dvě daná čísla reálná platí vždy jeden a jen jeden ze tří vztahů $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$. “ (str. 11)

Podmínka (2.) plyne samozřejmě z výše uvedené definice uspořádanosti.

Sčítání reálných čísel

Uvažujme dvě reálná čísla a, b mající úseky $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$. Definujme pomocí posloupností jejich úseků dvě nové posloupnosti tzv. *zvětšených úseků* na základě vztahů

$$a_n^+ = a_n + 2 \cdot 10^{-n}\,, \quad b_n^+ = b_n + 2 \cdot 10^{-n}\,.$$

Obě nově získané posloupnosti budou klesající a zdola omezené. Tuto skutečnost dokážeme pro reálné číslo a. Nejprve si stačí ujasnit, že z toho, jak je posloupnost čísel a_n^+ definovaná a z toho, jak jsme určili $n-$tý úsek reálného čísla, plyne triviálně nerovnost

$$a_n^+ > a_n > a_0 - 1\,, n \in \mathbb{N}$$

a tudíž posloupnost a_n^+ je zdola omezená číslem $a_0 - 1$. V dalším kroku dokážeme, že je navíc klesající, tj. že $a_{n+1}^+ - a_n^+ < 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Platí

$$\begin{aligned} a_{n+1}^+ - a_n^+ &= a_{n+1} + 2 \cdot 10^{-(n+1)} - a_n - 2 \cdot 10^{-n} \\ &= a_{n+1} - a_n - 2(10-1)10^{-(n+1)} = \\ &= a_{n+1} - a_n - 18 \cdot 10^{-(n+1)}\,. \end{aligned}$$

Nyní musíme rozlišit tři možné případy. Je-li $a = 0$, pak $a_{n+1} = a_n$, a tedy $a_{n+1}^+ - a_n^+ = -18 \cdot 10^{-(n+1)} < 0$. Je-li a kladné, potom $a_{n+1} - a_n \leq 9 \cdot 10^{-(n+1)}$, a tedy $a_{n+1}^+ - a_n^+ \leq 9 \cdot 10^{-(n+1)} - 18 \cdot 10^{-(n+1)} < 0$, a konečně pro a záporné máme $a_{n+1} - a_n \leq -9 \cdot 10^{-(n+1)} < 0$, a opět dostáváme $a_{n+1}^+ - a_n^+ < 0$. Ve všech případech je tedy patrné, že posloupnost a_1^+, a_2^+, $\ldots$, a_n^+, $\ldots$ je posloupností klesající. Dále $\lim\,(a_n^+ - a_n) = \lim 2 \cdot 10^{-n} = 0$, takže podle věty (III) platí $\lim a_n^+ = a$. Analogicky bychom odvodili $\lim b_n^+ = b$.

Posloupnost čísel $s_n^+ = a_n^+ + b_n^+$ je tedy rovněž klesající, zdola omezená, a tudíž podle věty (IV) existuje její limita s. Protože však jsou splněny předpoklady věty (III), neboť navíc

$$\lim\,(s_n^+ - s_n) = \lim\,[(a_n^+ + b_n^+) - (a_n + b_n)] = \lim 4 \cdot 10^{-n} = 0\,,$$

existuje i $\lim s_n$ (kde $s_n = a_n + b_n$) a je rovna témuž číslu s.

Součet reálných čísel a, b můžeme proto regulérně definovat jako limitu s posloupnosti $a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n,\ \ldots$. Tím je dokázána podmínka (3.), tj. jsou-li a, b reálná čísla, je i jejich součet $a+b$ jednoznačně určené reálné číslo (plyne z jednoznačnosti limity). Dále na základě vlastností limit máme $\lim(a_n+b_n)=\lim(b_n+a_n)$, tj. komutativní zákon - podmínka (4.) je splněna. Podívejme se podrobněji na podmínku (5.) - asociativní zákon. Studujme nejprve součet $a+(b+c)$. Označíme-li $b+c=d$, podle definice sčítání platí $a+d=\lim(a_n^+ + d_n^+)$. Posloupnost $(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+)$ je analogicky jako v předcházející úvaze klesající, zdola omezená, má tedy limitu. Dále

$$\lim((a_n^+ + b_n^+ + c_n^+) - (a_n^+ + d_n^+)) = \lim(b_n^+ + c_n^+ - d_n^+) = 0$$

a podle věty (III) tedy $\lim(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+) = a+d$. Podobně bychom odvodili při označení $a+b=e$, že $e+c=\lim(e_n^+ + c_n^+) = \lim(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+) = a+d$, což jsem potřebovali dokázat. Podmínka (6.) plyne triviálně z uvedené definice sčítání, neboť pro jakékoliv číslo b obsahující alespoň jednu nenulovou cifru se v definitivních úsecích součtu $a+b$ mění nejméně jedna cifra v porovnání s číslem a. Podmínka (8.) plyne z podmínek (5.) a (6.). Jestliže totiž b je řešením rovnice $a+x=0$, tj. $a+b=0$, pak zároveň $-a=-a+0=-a+(a+b)=(-a+a)+b=0+b=b$, tzn. $b=-a$ je jediné možné řešení. Definujeme-li podle oddílu **D.** odčítání reálných čísel předpisem $a-b=a+(-b)$, můžeme použít tuto operaci při důkazu podmínky (7.) – zákonu monotonie. Ze vztahu $a>b$ jednoduše plyne $a-b=\varepsilon>0$. Pro libovolné reálné číslo c lze psát $((a+c)-(b+c))=\varepsilon$, čili $a+c>b+c$.

Násobení reálných čísel

Uvažujme posloupnost definitivních úseků a_n reálného čísla a. Je-li a kladné, jedná se o posloupnost neklesající, pro a záporné o posloupnost nerostoucí, vždy je však daná posloupnost omezená. Vezmeme-li v úvahu dvě reálná čísla a, b a vytvoříme z posloupností jejich úseků $n-$tého řádu posloupnost a_nb_n, získáme v případě $a>0$, $b>0$, resp. $a<0$, $b<0$ posloupnost omezenou a neklesající, v případech $a>0$, $b<0$ a $a<0$, $b>0$ posloupnost omezenou a nerostoucí. Situace, kdy by alespoň jedno z čísel a, b bylo rovno nule, je triviální. Posloupnost a_nb_n má tedy vždy limitu, což je fakt, jenž nám umožňuje definovat součin reálných čísel a, b právě jako limitu posloupnosti a_nb_n (podmínka (9.)).

Čísla a_n, b_n jsou racionální, pro jejich součin tak platí komutativní zákon $a_nb_n=b_na_n$. Odtud plyne $\lim a_nb_n=\lim b_na_n$, což je tvrzení podmínky (10.). Dokažme asociativní zákon (podmínka (11.)): podobně jako v úvahách při důkazu podmínky (5.) označme $bc=d$, $ab=e$. Posloupnosti b_nc_n a d_n mají při tomto značení stejnou limitu. Limity posloupností $a_nb_nc_n$ a a_nd_n obě existují. Dále můžeme využít nerovnosti $|a_n|<|a_0|+1<10^r$ splněné pro nějaké $r\in\mathbb{N}$. Protože podle věty (III) $\lim(b_nc_n-d_n)=0$, lze vždy najít $N(k)$ takové, že pro všechna $n>N(k)$ platí $|b_nc_n-d_n|<10^{-k-r}$, ať je k libovolné přirozené číslo (jednoduchý přepis definice limity). Dohromady máme $|a_n(b_nc_n-d_n)|<10^{-k}$ pro $n>N(k)$, tudíž $\lim a_n(b_nc_n-d_n)=0$. Věta (III) pak říká, že $\lim a_nb_nc_n=ad$. Podobně lze dokázat, že $\lim a_nb_nc_n=ec$, celkově tedy $ad=ec$, což je vlastně tvrzení asociativního zákona pro násobení reálných čísel.

Poslední podmínka z oddílu **C.**, kterou můžeme dokázat, aniž bychom řešili důkladněji vztah mezi racionálními a reálnými čísly, je distributivní zákon. Označme si pracovně $b+c=d$, $ab=e$ a $ac=g$. Protože $\lim\{a_nd_n-(a_nb_n+a_nc_n)\}=\lim a_n\{d_n-(b_n+c_n)\}=0$, posloupnosti a_nd_n a $a_nb_n+a_nc_n$ mají stejnou limitu ad. Podle definice sčítání platí $e+g=\lim(e_n+g_n)$, podle zvoleného označení dále pro libovolné k a $n>N(k)$ platí $|a_nb_n-e_n|<10^{-k}$ a zároveň $|a_nc_n-g_n|<10^{-k}$. Vzhledem ke skutečnosti, že čísla a_n, b_n, c_n, e_n, g_n jsou čísla racionální, můžeme z obou posledních vztahů odvodit nerovnost

$|(a_nb_n - e_n) + (a_nc_n - g_n)| < 2 \cdot 10^{-k}$, tedy $\lim\{(a_nb_n - e_n) + (a_nc_n - g_n)\} = \lim\{a_nb_n + a_nc_n - (e_n + g_n)\} = 0$. Podle věty (III) z poslední rovnosti plyne $e + g = ad$, což bylo naším cílem dokázat.

Při budování množiny reálných čísel bychom měli vždy dbát na skutečnost, že racionální čísla tvoří podmnožinu $\mathbb{R}$, tudíž naše nová teorie nesmí být v rozporu s vlastnostmi čísel racionálních. Kössler tento fakt ve svém dodatku neopomenul. Uvažujeme-li kladné racionální číslo p/q, snadno najdeme celá kladná čísla A_n splňující nerovnosti $A_n \leq 10^n \cdot \frac{p}{q} < A_n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Posloupnost desetinných čísel A_0, $A_1 10^{-1}$, $A_2 10^{-2}$, ... představuje úseky reálného čísla odpovídajícího číslu p/q, přičemž toto reálné číslo má buď jen konečný počet cifer od nuly různých nebo je periodické, což plyne z následující úvahy: číslo A_{n+1} vznikne přidáním další cifry k číslu A_n, přičemž tato poslední cifra závisí jen na velikosti zbytku při dělení číslem q - do úvahy připadají zbytky 0, 1, 2, 3, ..., $q - 1$. Při výpočtu posloupnosti čísel A_n tedy buďto narazíme na zbytek 0 (hledané reálné číslo je číslem s konečným desetinným rozvojem), nebo narazíme na tentýž zbytek podruhé a dále se posloupnost zbytků opakuje (reálné číslo s periodickým desetinným rozvojem).

Obráceně, každé reálné číslo a s předčíslím o k cifrách za desetinnou čárkou a periodou o n cifrách odpovídá jistému číslu racionálnímu, protože číslo $a \cdot (10^{n+k} - 10^k) = B$ je číslem celým, a tudíž racionální číslo $B : (10^{n+k} - 10^k)$ je rovno reálnému číslu a. Analogicky lze najít pro každé záporné racionální číslo jemu odpovídající reálné číslo.

Naše teorie tedy musí zaručit, aby součet, součin či podíl dvou racionálních čísel byl tentýž jako součet, součin či podíl jim příslušných čísel reálných. Pro ilustraci si uvedeme úryvek z pasáže na str. 136, ve kterém Kössler dokazoval oprávněnost uvedeného postupu v případě sčítání:

„Nechť jsou $p_1 : q_1$ a $p_2 : q_2$ dvě racionální čísla, k nimž přísluší čísla reálná a, b. Celistvá čísla A_n, B_n, C_n, D_{2n} definovaná vztahy

$$\frac{A_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} < \frac{A_n + 1}{10^n}, \qquad \frac{B_n}{10^n} \leq \frac{p_2}{q_2} < \frac{B_n + 1}{10^n},$$

$$\frac{C_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} < \frac{C_n + 1}{10^n}, \qquad \frac{D_{2n}}{10^{2n}} \leq \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} < \frac{D_{2n} + 1}{10^{2n}},$$

jsou jednoznačně stanovena, je-li n známo. Z prvých dvou vztahů plyne

$$\frac{A_n + B_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} < \frac{A_n + B_n + 2}{10^n}$$

a tedy vzhledem k třetímu vztahu C_n jest rovno buď $(A_n + B_n)$ nebo $(A_n + B_n + 1)$. Protože posloupnosti $(A_n + B_n) : 10^n$ a $(A_n + B_n + 1) : 10^n$ mají touž limitu $(a+b)$, má touž limitu také posloupnost $C_n : 10^n$. To znamená: Reálné číslo příslušné k součtu dvou čísel racionálních jest rovno součtu reálných čísel příslušných k jednotlivým racionálním sčítancům.“

Situace v případě násobení je analogická. Zbývá nám však dokázat platnost podmínek (12.)–(14.) a (16.). Jak vypadá řešení rovnice $ax = 1$ pro $a \neq 0$? Uvažujme posloupnost úseků čísla a (jsou-li některé z úvodních úseků rovny nule, vypustíme je, a symbolem a_1 označíme až první nenulový úsek). Posloupnost racionálních čísel ve tvaru převrácených hodnot $1/a_1$,

$1/a_2, \dots$ má limitu (označíme ji b), neboť je omezená a navíc pro $a > 0$ nerostoucí, pro $a < 0$ neklesající. Z existence této limity plyne fakt, že od jistého indexu $n(k)$ mají členy posloupnosti $1/a_n$ úseky $k-$tého řádu totožné, resp. téměř totožné s úseky téhož řádu čísla b, tj. platí

$$\left|\frac{1}{a_n} - b_n\right| < \frac{2}{10^k}\,,$$

a tedy $|1 - a_n b_n| < 2 \cdot 10^{-k} \cdot |a_n|$. Volbou čísla k lze pravou stranu této rovnice učinit menší než předem zvolené libovolně malé kladné číslo, což znamená, že posloupnost samých jednotek a posloupnost čísel $a_n b_n$ mají stejnou limitu. Číslo $b = 1 : a$ je tedy jediným řešením rovnice $ax = 1$, protože $b = 1 \cdot b = (ax)b = (ab)x = 1 \cdot x$.

Dělení reálných čísel $a : b$ pak lze definovat pomocí násobení čísel $a \cdot \frac{1}{b}$. Z definice násobení je patrné, že číslo 1 (ať už ve tvaru $1.\dot{0}$ či $0.\dot{9}$) splňuje rovnici $a \cdot 1 = a$. Skutečnost, že pro $a \neq 0$ je číslo 1 jediným takovým číslem, plyne z rozpisu

$$\underbrace{(ax)}_{a} \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1\,.$$

Možnost $a = 0$ je třeba vyloučit z daného znění, neboť rovnici $0x = 0$ vyhovuje každé reálné číslo, nikoliv jen jediné řešení, zatímco rovnice $0x = 1$ nemá žádné reálné řešení. Předchozí kroky v podstatě dokazují podmínky (12.) a (14.).

Jestliže $a > b$, existuje $e > 0$ takové, že $a - b = e$, a tedy pro $c > 0$ platí $ac = (b+e)c = bc + \underbrace{ec}_{>0} > bc$. Je-li $c < 0$, potom $ac = (b+e)c = bc + \underbrace{ec}_{<0} < bc$, pro $c = 0$ je podmínka monotonie (13.) splněna triviálně.

Uvažujeme-li úsek nultého řádu reálného čísla a_0, získáváme jednoduchou úvahou celé kladné číslo $a_0 + 2$ vyhovující tvrzení Archimedova požadavku (16.), neboť $a < a_0 + 2$. Korektnost definice dělení z pohledu souladu při rozšiřování množiny racionálních čísel na množinu reálných čísel lze dokázat analogicky jako v případě sčítání.

Výše uvedené úvahy dokazují podmínky (**A**)–(**E**), navíc ukazují na účelnost rozšíření množiny racionálních čísel a opravňují tak autora k uvedenému způsobu vybudování množiny čísel reálných.

II. dodatek Funkce goniometrické

V celé knize Kössler používal funkce $\sin x$, $\cos x$, přičemž při jejich definování vycházel z geometrického názoru. Ve druhém dodatku se proto rozhodl pro exaktnější vybudování goniometrických funkcí. Dokázal, že řady

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{a} \quad c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{5.1.1}$$

konvergentní pro všechna reálná x splňují podmínky

$$s(0) = 0\,, \quad c(0) = 1, \qquad (I)$$

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{s(x)}{x} = 1, \qquad (II)$$

$$s(-x) = -s(x)\,, \quad c(-x) = c(x), \qquad (III)$$

$$s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)\,, c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \qquad (IV)$$

a vztahy (5.1.1) pak prohlásil za aritmetickou definici základních goniometrických funkcí. Při důkazu adičních teorémů (IV) zajímavě využil první derivace, když uvažoval funkci

$$\varphi(x) = \{\cos(a+x) - \cos a \cos x + \sin a \sin x\}^2 + \{\sin(a+x) - \sin a \cos x - \sin x \cos a\}^2$$

a povšiml si, že pro její derivaci plyne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi'(x) &= \{\cos(a+x) - \cos a \cos x + \sin a \sin x\}\{-\sin(a+x) + \cos a \sin x + \sin a \cos x\} \\ &+ \{\sin(a+x) - \sin a \cos x - \sin x \cos a\}\{\cos(a+x) + \sin a \sin x - \cos a \cos x\} = 0\,. \end{aligned}$$

Podle vět o vlastnostech derivace tedy platí $\varphi(x) =$ konst., odkud dosazením $x = 0$ máme $\varphi(x) = 0$. Součet dvou čtverců reálných čísel je však roven nule pouze tehdy, jsou-li obě čísla rovna nule, tj.

$$\begin{aligned} \cos(a+x) &= \cos a \cos x - \sin a \sin x \\ \sin(a+x) &= \sin a \cos x + \sin x \cos a\,. \end{aligned}$$

V závěru Kössler dokázal jednoznačnost funkcí určených vztahy (I)–(IV) a s využitím věty Rolle-ovy dokázal, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou periodické s periodou 2π.

Jarník zavedl funkce $\sin x$ a $\cos x$ obdobně. Nejprve v šesté kapitole své práce definoval obě funkce pomocí podobné série čtyř vztahů jako Kössler a dokázal jejich základní vlastnosti, poté se ve dvanácté kapitole vrátil k důkazu jejich existence a jednoznačnosti. Za povšimnutí stojí skutečnost, že Kössler se oproti Jarníkovi vyhýbal v definičních podmínkách (I)–(IV) číslu π. Jarník ve svém třetím postulátu ukázal, že dále existuje kladné číslo, které označil π, takové, že funkce $\sin x$ je rostoucí v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ a $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

5.2. Úvod do theorie komplexní proměnné

„*The imaginary number is a fine and wonderful resource of the human spirit, almost an amphibian between being and not being.*“

G.W. von Leibniz

Kromě již zmíněné učebnice *Úvod do počtu diferenciálního* byl Miloš Kössler autorem textu, který bychom mohli označit jako skripta k jeho přednášce, nazvaného *Úvod do theorie komplexní proměnné*. Kössler vedl přednášky z komplexní analýzy v letech 1934/35, 1936/37, 1938/39, 1949/50. V této době neměli studenti k dispozici mnoho jiných českých učebnic pro komplexní analýzu, [5.2] a proto byl tento text, psaný na stroji a šířený v několika kopiích v řadách studentů, velkým pomocníkem při studiu. Bohužel musíme konstatovat, že se nám nepodařilo získat ucelenou kopii tohoto textu, ale pouze prvních 92 stran, přičemž celkový přesný počet stran nám není znám.

[5.2] Touto problematikou se zabývala např. kniha [Dusl (1941)]. První z dnes již klasických učebnic komplexní analýzy I.Černého *Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné* byla vydána až v roce 1959.

První kapitola textu byla věnována komplexním číslům. Kössler zavedl komplexní čísla jako dvojice reálných čísel a označil je analogicky dnešnímu způsobu zápisu, např. $z_1 = (a_1, b_1)$. Dále definoval početní pravidla v oboru komplexních čísel, a poukázal na fakt, že komplexní číslo $(0, 1)$ je řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$, přičemž zavedl označení *imaginární jednotky* $i = (0, 1)$. Rovněž zavedl tzv. algebraický zápis komplexního čísla $a + ib$, drobný rozdíl v terminologii se objevuje v pojmenování zápisu čísla komplexně sdruženého $\overline{z}$, jež dnes obvykle čteme „zet s pruhem", Kössler uváděl výslovnost „zet s příčkou".

Uvedeny byly dva způsoby geometrického znázornění komplexních čísel – v pravoúhlých a polárních souřadnicích. V dalším textu byly připomenuty základní pojmy matematické analýzy - okolí bodu, konvergence posloupnosti, limita posloupnosti, ... v rozšířeném pojetí pro obor komplexních čísel. ∞ bylo označeno jako *bod nevlastní* (resp. číslo nekonečné). Byly shrnuty základní definice a věty týkající se řad s komplexními členy. Řada, která po libovolném přerovnání zůstává konvergentní s týmž součtem, byla nazývána *bezpodmínečně konvergentní*; řada, která při přerovnání může měnit svůj součet, byla označena jako *podmínečně konvergentní*. Takto definovaná bezpodmínečná konvergence odpovídá v dnešní terminologii konvergenci absolutní.

Dále Kössler připomínal pojem dvojné řady a s ním související Cauchyovský součin řad, ukazoval nutnost znalostí základních pojmů teorie množin a geometrie. Tyto pojmy definoval standardně, dnešního čtenáře by snad mohla překvapit terminologie pro *sjednocení* dvou a více množin, pro něž Kössler používal název *součet*, resp. označení *okrajový bod množiny* namísto *bodu hranice* (*bodu hraničního*) *množiny*. Poté, co byl zaveden pojem průměr množiny, byla uvedena věta o zařazených intervalech a její důkaz, stejně jako věta Borelova o konečném pokrytí množiny. Z oblasti geometrie a topologie byly připomenuty základní pojmy jako křivka, lomená čára, jednoduše souvislá oblast, apod. Po zavedení pojmu *funkce komplexní proměnné* byla zvláštní pozornost věnována funkcím spojitým a funkcím majícím derivaci. V textu se autor průběžně zmiňoval o analogiích v diferenciálním počtu reálné proměnné. V paragrafu věnovanému Cauchy-Riemannovým podmínkám se na str. 42 odvolával i na svou knihu *Úvod do počtu diferenciálního*.

Kapitola třetí si kladla za cíl definovat křivkový integrál funkce komplexní proměnné a jeho základní vlastnosti. Odlišnost lze najít při označování samotného integrálu – namísto dnešního symbolu $\int\limits_C f(z)\,dz$ je použito symbolu ${}^{(C)}\!\!\int f(z)\,dz$, což je samozřejmě pouze drobná odchylka. Ihned poté, co Kössler provedl důkaz věty o existenci křivkového integrálu funkce spojité na Jordanově rektifikace schopné křivce $\underline{k}$, poukázal v § 11, str. 49, na fakt, že numericky jsme schopni tento integrál vyčíslit podle jeho definice

$$I = {}^{(k)}\!\!\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\xi_\nu)$$

(kde z_0, z_1, ..., $z_n = Z$ jsou body uvažované křivky, body ξ_ν jsou voleny na obloucích omezených body z_i $(i = 0, \ldots, n)$) pouze u několika málo zcela jednoduchých funkcí. Jako příklad byly voleny funkce $f(z) = 1$, $f(z) = z$. Dále byla rozebrána situace, kdy je křivka dána parametricky, přičemž oba v textu uváděné příklady na místě křivky k uvažovaly kružnici.

Čtvrtá kapitola byla věnována Cauchyově integrální větě, jejím dvěma formulacím a důkazu. První formulace hovoří o nulovosti křivkového integrálu pro regulární funkci na uzavřené křivce, druhá formulace se týká nezávislosti křivkového integrálu na zvolené cestě v jednoduše souvislé oblasti. Důkaz byl prováděn pro první formulaci, a to postupně pro trojúhelník, libovolný uzavřený mnohoúhelník, a na závěr pro libovolnou uzavřenou křivku vyhovující předpokladům obecně formulované věty.

Pátá kapitola se zaměřila na důsledky Cauchyovy integrální věty, a sice Cauchyova integrálního vzorce pro kruh (včetně důkazu) a obecně libovolnou jednoduchou spojitou, uzavřenou, rektifikace schopnou křivku (bez důkazu). Dále byla zmíněna souvislost mezi nezávislostí integrálu na zvolené integrační cestě a existencí primitivní funkce v dané oblasti. Na závěr kapitoly autor uvedl větu Morerovu:

Věta: *Jestliže $f(z)$ jest funkce spojitá v jednoduše souvislé oblasti O a jestliže integrál*

$$^{(k)}\!\!\int f(z)\,dz$$

podle jakékoliv uzavřené křivky v O jest roven nule, pak funkce jest v oblasti O regulární.

Šestá kapitola pojednávala o posloupnostech a řadách funkcí. Drobnou odchylkou od dnešního pojetí je otázka pojmenování konvergence takové posloupnosti funkcí, která není stejnoměrná. Zatímco dnes mluvíme o konvergenci bodové, Kössler hovořil o *posloupnosti konvergentní, avšak nikoliv stejnoměrně konvergentní.* U obou zde zmiňovaných pojmů byl uveden jediný příklad, a sice posloupnost daná předpisem $w_n(z) = a+z+z^n$ pro $|z| \leq \frac{1}{2}$ (jde o konvergenci stejnoměrnou) a pro $|z| < 1$ (v případě této množiny se již o stejnoměrnou konvergenci nejedná). Poté, co Kössler formuloval a dokázal základní tvrzení o stejnoměrně konvergentních posloupnostech, např. spojitost limity uvedené posloupnosti spojitých funkcí, zobecnil situaci pro případ řady funkcí

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,,$$

a uvedl Weierstrassovo kriterium pro stejnoměrnou konvergenci. Jako příklad na aplikaci tohoto kriteria byla uvedena Lambertova řada

$$f(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \cdots + \frac{z^n}{1-z^n} + \cdots$$

v uzavřeném kruhu $|z| \leq r$, $r < 1$, kterou se mj. Kössler zabýval v práci [K4]. Z vlastností Taylorovy řady pro funkci regulární v oblasti O byla zdůrazněna především rozvinutelnost v okolí bodu $z_0 \in O$ v mocninnou řadu.

V sedmé kapitole bylo pojednáno o mocninných řadách speciálně, byly připomenuty pojmy poloměr konvergence, konvergenční kruh a další. Ke kriteriím pro konvergenci reálných řad přibylo kriterium vystihující závislost poloměru konvergence na koeficientech řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, známé jako věta Cauchy-Hadamardova:

Věta: *Největší hromadný bod (limes superior) posloupnosti čísel reálných a nezáporných*

$$|a_0|, |a_1|^{\frac{1}{1}}, |a_2|^{\frac{1}{2}}, |a_3|^{\frac{1}{3}}, \ldots, |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

určuje jednoznačně poloměr konvergence ϱ mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Jest totiž vždy

$$\varrho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}\,.$$

Zároveň prof. Kössler upozornil na skutečnost, že tato věta má podstatu existenční, neboť neukazuje cestu, jak obecně $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ hledat. Na posledním dochovaném listu uvedeného exempláře Kösslerova rukopisu je čtenář upozorňován na možné způsoby chování řady na konvergenční kružnici, což je problematika, jíž se Kössler zabýval ve svých pojednáních [K13]–[K17]. Posledním zmíněným pojmem byla transcendentní funkce.

Použité zdroje

BLAŽEK, J. et al. *Algebra a teoretická aritmetika II.* Praha: SPN, 1981.

CRKALOVÁ, Z. *Život a dílo Karla Petra.* Praha: Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta. Matematický ústav Univerzity Karlovy, 1992. Vedoucí diplomové práce Jindřich Bečvář.

ČECH, E. *Co je a nač je vyšší matematika?.* Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942.

ČERNÝ, I. *Úvod do theorie funkce komplexní proměnné* Praha: SPN, 1959.

DUSL, K. *Přehled teorie funkcí jedné komplexní proměnné*, Praha: nákladem České matice technické, 1941.

JARNÍK, V. Návod ke studiu analysy pro začátečníky. *Čas. pro pěst. mat. a fyz.* **70**, str. D109–D116, 1941.

JARNÍK, V. Vědecké práce M. Kösslera. *Čas. pro pěst. mat.* **80**, str. 106–117, 1955.

JARNÍK, V. *Úvod do počtu diferenciálního.* 2. vyd. Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1951.

KAŇKA, M. et al. *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty.* Praha: Victoria Publishing, 1996.

KÖSSLER, M. *Úvod do theorie funkce komplexní proměnné.* Učební text k přednášce.

LOEWY, A. *Lehrbuch der Algebra.* Lipsko, 1915.

PERRON, O. *Irrationalzahlen.* Berlín - Lipsko: Ver. wiss. Verl., 1921.

PETR, K. *Počet differenciální (Část analytická).* Praha: nákladem Jednoty československých mathematiků a fysiků, 1923.

SCHWARZ, Š. Niekoľko spomienok na akademika Vojtěcha Jarníka. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **35**, str. 340–345, 1990.

STANĚK, F. Jak (na)učit žáky chápat reálná čísla *Učitel matematiky* **4** (1), str. 9–24, 1995/96.

STUDNIČKA, F. J. *Základové vyšší mathematiky. Díl I. O počtu differenciálním.* Praha: tiskem Dr. E. Grégra, 1868.

ŠALÁT, T. *Reálne čísla* Bratislava: Alfa, 1982.

ŠIMŠA, J. Vývoj představ o reálných číslech. In *Matematika v 16. a 17. století.* Ed. Bečvář J., Fuchs E. Praha: Prometheus, str. 259–282, 1999. Edice Dějiny matematiky, sv. 12.

VESELÝ, J. *Komplexní analýza pro učitele.* Praha: Univerzita Karlova – Nakladatelství Karolinum, 2000.

VESELÝ, J. *Matematická analýza pro učitele.* Praha: Matfyzpress, 1997.

VÝBORNÝ, R. *Diferenciální počet.* Praha: Academia, 1966.

WEYR, E. *Počet differenciálný.* Praha: Jednota českých matematiků, 1902.

Kapitola 6.
Deníky prof. Kösslera

6.1. Obecné úvahy

> *„Proč jsem zvědavý a proč mne poutají matematické problémy? Proč jsem šťastný jen tenkráte, když se soustředím jen na nějakou myšlenku a všechen hmotný svět zmizí z mého vědomí?“*

Časopis Pokroky matematiky, fyziky a astronomie otiskl v roce 1961 v rubrice *Zprávy, jubilea, historie* vzpomínkový článek Jiřího Kopřivy *Prof. PhDr. Miloš Kössler zemřel*. Tento velmi pěkně psaný nekrolog zaměřený především na stručné připomenutí životních osudů Miloše Kösslera obsahuje mimo jiné i nenápadný, ale přesto zajímavý odstavec:

„Prof. Kössler užíval pro zápisky o své badatelské práci deníkové formy. Přitom strohé vědecké úvahy a výpočty jsou občas osvěženy nějakou osobitou úvahou filosofickou či o současném dění. V těchto sešitech jsou mnohé ještě nezpracované náměty řešení mnoha problémů. Jsem přesvědčen, že jich bude moci být ještě využito k pokroku v matematickém bádání.“ [Kopřiva (1961), str. 229]

Při pátrání v pozůstalosti prof. Kösslera se podařilo najít sedm „dílů“ těchto deníků.[6.1] Bohužel, velká část zápisků se s největší pravděpodobností nedochovala. Nelze však s určitostí vyloučit, že se některý „ztracený“ díl nezachoval v knihovně některého kolegy nebo studenta prof. Kösslera. I přes tuto neucelenost se nám do rukou dostal z omezeného časového období materiál, jenž nám umožňuje sledovat problémy, jimiž se Kössler v dané době zaobíral. Z řady odkazů můžeme usuzovat, že tuto formu používal Kössler pro zaznamenávání svých myšlenek od roku 1942. Stejně tak lze z posledního zápisu v sešitě č. XIX odhadovat, že další sešit již nenásledoval, neboť nemoc už autorovi zabraňovala v soustředěném psaní, a tedy deníky pravděpodobně končí rokem 1956. Následující tabulka obsahuje přehled jednotlivých dochovaných sešitů včetně časových období, jichž se týkají:

Sešit č.	Období
I, II	?
III	7. XI. 1942–17. III. 1943
IV–XIII	?
XIV	19. VI. 1948–24. VII. 1950
XV	17. VI. 1950–6. XII. 1950
XVI	7. XII. 1950–28. VII. 1951
XVII	28. VII. 1951–10. III. 1952
XVIII	11. III. 1952–27. XI. 1952
XIX	28. XI. 1952–2. I. 1956

[6.1] Úvodní citát je z Kösslerova deníku č. XIX, str. 22, úryvek z úvahy psaný v den 69. narozenin.

Z uvedeného přehledu je patrné, že jednotlivé sešity na sebe navazovaly. Výjimkou byly sešity č. XIV. a XV. Jejich časový překryv však lze snadno vysvětlit – sešit XIV. prof. Kössler zapůjčil svému studentovi Tiboru Šalátovi, a proto pokračoval v zápiscích do nového sešitu - sešitu č. XV., a předchozí sešit dopsal později.

Frekvence jednotlivých zápisů je rozlišná – v určitém období tak nacházíme velmi rozsáhlé poznámky psané několik dní v řadě, výjimkou na druhou stranu není ani více než půlroční odmlka (např. mezi záznamy ze 4. dubna 1954 a 29. prosince 1954).

Téměř výhradně tvoří obsah matematické úvahy a problémy. Jak ovšem uvádí Jiří Kopřiva ve svém článku, jsou „*výpočty občas osvěženy nějakou osobitou úvahou filosofickou či o současném dění*“. Jen na několika málo místech lze najít osobní připomínku týkající se rodiny či osobního života. Uveďme citace dvou z těchto zmínek, jež se objevují v sešitě č. XIV., na straně 32 a v sešitě č. XVII., na straně 116:

„9. 7. 1948
Dnes budou promovati mého syna Ivo na doktora přírodních věd.“

„8. 3. 1952
Minulý týden umřeli dva z mých spolužáků Vrňák a Cvrk. Už nás z naší oktávy z 44 zbývá jen 17 živých.[6.2]*“*

Relativně častěji se mezi výpočty objevují poznámky týkající se sledování tahu vlaštovek a rorýsů[6.3] Prof. Kössler zřejmě tento jev sledoval řadu let a pečlivě si poznamenával výsledky svého pozorování. Např. v sešitě č. XVIII. na str. 32 najdeme věty

„30. 4. 1952
Přiletěli rorejsi. O týden dříve než v minulých letech. Budou to asi jen přední hlídky!“

Zápisy ze sešitu č. XIX. pak profesorovu zálibu jen potvrzují:

„15. 5. 1953 (str.43)
Letos byl tak studený květen, že ještě dnes nejsou u nás rorejsi. Obyčejně přilétají kolem 6.V.“

„16. 5. 1953 (str. 44)
Rorejsi už přiletěli.“

„5. 8. 1953 (str. 76)
Rorejsi už odletěli!“

Velmi poutavou částí Kösslerových sešitů jsou zřídka se vyskytující, avšak o to zajímavější filosofické poznámky. Uveďme si některé z nich pro upřesnění představy o obsahu takových drobných nápadů:

[6.2] Ve Výročních zprávách C.k. akademického gymnázia v Praze v letech 1901/02 a 1902/03 snadno objevíme celá jména obou spolužáků – Karel Cvrk byl z Příbrami a František Vrňák z Blaženic.

[6.3] Rorýsi jsou ptáci silně závislí na počasí, neboť teplota jejich těla značně kolísá podle teploty vzduchu. U nás pobývají zpravidla od přelomu dubna a května, avšak už na přelomu července a srpna odlétají zimovat do střední a jižní Afriky.

„24. 8. 1948 (sešit č. XIV, str. 107)
Prší prší jen se leje.“

„3. 9. 1948 (sešit č. XIV, str. 120)
† president Dr.Ed.Beneš   Fortiores sunt mulieres; super omnia autem vincit veritas. (Ezdraš III,3. v. 12)“

„28. 10. 1948 (sešit č. XIV, str. 159)
Z důvodů mi neznámých tlačí se do mé mysli představa, že duben roku 1949 bude kritickým v dějinách naší Země. Snad jsou příčinou toho podvědomé úvahy. Zaznamenávám si to pouze proto,abych mohl konstatovati, zda taková „tušení“ něco znamenají, nebo zda jsou to pouze vagní nápady.“

„17. 2. 1949 (sešit č. XIV, str. 184)
Říká se, že nevděk světem vládne. Mohlo by se také říkati, že lež světem vládne. Zvláštní jest, že lidé jsou nakloněni nejvášnivěji potírati názor nebo věc, které sami nerozumějí. Jest to však dosti přirozené neboť názor nebo věc, která jest mi neznáma nebo které nerozumím vzbuzuje nedůvěru.“

„4. 3. 1949 (sešit č.XIV, str. 194)
Zajímavý citát z knihy „E.Luiklater: Juan in China“, Chap.XV.

Work is the deadliest of the perversions. The natural instinct of natural man is to avoid work, and nothing shows more clearly the degeneracy of the modern world than the fact that work has become a social jewel, something to be sought with favour, even a rarity, a prize for those who most closely resemble the ant, the pismire, the detestable insect that never raises its head. . . . I say work's a perversion, and so it is; everything except pure and volunteery creation. But it isn't recognized as a perversion because its results are profitable. But no one who has worked for twenty years – and when I say worked, I mean laboured for hire – can either see clearly, hear with certainty, think straight, or feel ecstasy.“

„5. 7. 1949 (sešit č.XIV, str. 223)
Puškin „Exegi monumentum“ Poslední strofa:

Jen vůle boží dbát jest povinností Musy.
Nebát se urážek a slávy nežádat.
Být k chvále lhostejný i ke klevetám lůzy
a s hlupákem se nehádat.“

„27. 8. 1950 (sešit č.XV, str. 44)
Jest pozoruhodné, že nové nápady mi přicházejí buď ráno při probuzení nebo večer před usnutím.“

„27. 2. 1951 (sešit č.XVI, str. 36–37)
V celé řadě problémů, jimiž jsem se za svého života zabýval narážel jsem často na potíže zdánlivě nepřekonatelné. Když již jsem byl zcela vyčerpán a rozhodl jsem se večer, že té práce nechám, probudil jsem se ráno a první myšlenka, která prošla mým vědomím, byla zcela jasnou cestou vedoucí k cíli. Psychologové říkají, že jest to práce podvědomí během spánku.

Uznávám tuto thesi. Avšak zbývá otázka: Co jest podvědomí a jak pracuje to podvědomí?"

„18. 6. 1951 (sešit č. XVI, str. 86)
Včera i dnes jsem se marně pokoušel o důkaz vyslovené domněnky pomocí determin. tvaru $R(u)$. Dnes ráno jsem zkoušel při postup. zkouškách 6 kandidátů a hrozně mne to unavilo. Proto mne vskutku udivuje, že když jsem teď odpoledne přišel do své pracovny, náhle jako záblesk jsem si uvědomil zcela jednoduchý důkaz."

„29. 8. 1951 (sešit č. XVII, str. 16)
Jsem zase v Praze. Trochu jsem si odpočinul. Některé maličkosti z Bohulib zapíšu až později. Musím nejdříve zaznamenati další nápad který mne dnes „posedl". Jest to skutečně „posedlost" jak to dobře vystihl K. Čapek ve své knížce „Meteor", která nás nutí zabývati se určitým nápadem."

„31. 8. 1952 (sešit č. XVIII, str. 88)
Výročí Sloven. povstání. Výročí 4$^{\text{tého}}$ dělení Polska."

„19. 6. 1953 (sešit č. XIX, str. 22)
Jest mi 69 let. Mám však dojem jako bych byl živ již od doby plesiosaurů. Všechno to nynější dění v lidském pokolení mi připadá jako bezvýznamná episoda v celém dění vesmírném. Proč jsem živ a proč jsem živ právě nyní? Anebo jest snad to „nyní" pouhé zdání nebo klam? „Největší tajemství jest, že vše jest tajemství" řekl Meeterling. Proč jsem zvědavý a proč mne poutají matematické problemy? Proč jsem šťastný jen tenkráte, když se soustředím jen na nějakou myšlenku a všechen hmotný svět zmizí z mého vědomí? Jest to moje myšlenka nebo jest to myšlenka Nadjá, která proniká do „mého" vědomí? Má „pravdu" materialismus nebo mají pravdu Védy? Otazník za otazníkem a vše jest otazník. Říká se, že pravdivé tvrzení jest takové, které můžeme dokázati. Důkaz vede až k axiomům, které dokázati nedovedeme, avšak pokládáme je za dané a „pravdivé". Jinak řečeno věříme, že jsou „pravdivé". Jaký jest tedy rozdíl mezi vírou a vědeckým důkazem? Z toho všeho plyne, že všechno naše vědění jest podmíněné axiomy přijatými bez důkazu."

„28. 9. 1953 (sešit č. XIX, str. 144)
S.V.v.č.z.n.z.n.n.b."[6.4]

„28. 12. 1955 (sešit č. XIX, str. 182)
Byla oznámena měnová reforma a zrušení přídělového systému na trhu spotřeb. zboží. Mám velkou pochybnost o tom, zda tím bude dosaženo cíle, k němuž reforma ta směřuje. Jednoduchý výpočet ukazuje, že lze očekávati vzrůst poptávky po spotřebním zboží místo očekávaného poklesu této poptávky. To ukáže blízská budoucnost. Budu vskutku rád, jestliže se nenaplní moje obavy!"

Smutným doprovodným rysem všech deníků jsou poznámky o zhoršujícím se zdravotním stavu. Zdraví prof. Kösslera výrazně podlomily události druhé světové války. V deníku č. XIV. se tak můžeme dočíst:

[6.4]Svatý Václave, vévodo české země, nedej zahynouti nám ni budoucím.

„27. 7. 1948, str. 70
Celý týden mne trápil zub. Už jest venku. Snad teď konečně hnu s těmi ohranič. polynomy. Nervovaly mne ten týden spolu se zubem tak, že jsem celé noci měl stále sny o těch koeficientech. Zdálo se mi, že jsem celý takový system parametrů; křepčily ve mně jako skřítkové v noci na pasece."

„14. 11. 1948, str. 164
Mám tolik práce se zkouškami a přednáškami, že mi nezbývá síla k jiné práci. Také stálé schůze všeho druhu mne silně vyčerpávají."

Po válce se nalomené zdraví projevovalo snad nejčastěji ve formě žaludečních potíží. V deníku č. XIV. se o tom můžeme přesvědčit mj. na str. 205, 239 a 264:

„7. 4. 1949
Zlobí mne žaludek. Jsem téměř neschopen něco dělat."

„1. 8. 1949
Jest mi zase mizerně. Ani kouření mi nechutná. Vedle žaludku mne trápí bolesti v pravé ruce a pak v pravé noze v podkolení. Jsem stále jako omámený. K tomu mám podrážděné nervy takže každá sebemenší obtíž nebo starost mne velmi deprimuje. Následkem toho nejsem téměř schopen jakékoliv práce. Zůstanu doma a budu jen číst."

„5. 9. 1949
Udělal jsem nějakou dietní chybu. Jest mi tak nedobře, že si musím jít lehnout."

Problémy přetrvávají dál, jak je patrné i v sešitě č. XVI:

„20. 2. 1951, str. 25
Mám stále obtíže s žaludkem. Mimo to jsem upadl na schodech a rozbil si lícní kost. A. E. I. O. U."

„26. 4. 1951, str. 55
Jsem doma. Před týdnem jsem měl záchvat srdeční slabosti. Jsem velmi unaven. Vzhledem k tomu zaznamenám nápad, jehož by bylo škoda, kdyby měl zapadnouti."

Zdravotní stav patrně v roce 1956 zapříčinil ukončení zápisů přicházejících nápadů. Svědčí o tom některé zmínky v závěrečné části sešitu č. XIX., např.

„14. 7. 1955 (str. 175)
Přes půl roku jsem se nedostal k práci. Jsem ve špatném stavu. Jest to asi pokračující sklerosou. Jsem stále unaven a přestává mne těšiti život."

„28. 12. 1955 (str. 182)
Půl roku jsem nic nezapsal. Jsem už hodně vyčerpaný!"

Poslední zaznamenaný zápis je datován 2. ledna 1956.

6.2. Matematická část

„Dělati různé domněnky může býti pro další výzkum užitečné (Fermat, Dirichlet, Riemann, Goldbach a t.d.). Následující fakt mne vede k doměnce ...“

Ke svým sešitům si Kössler zprvu sám psal jejich obsah na vnitřní obálku, avšak u sešitů vyšších pořadových čísel už je tento postup velmi nedůsledný. Podívejme se nyní podrobněji na obsahy[6.5] zachovaných sešitů z pohledu matematického, přičemž se zaměříme především na pasáže týkající se číselně-teoretických úvah.

Vzhledem ke skutečnosti, že Kösslerovy postřehy uváděné v těchto denících dosud nikdy nebyly zveřejněny a přitom dobře doplňují obraz o jeho bádání v průběhu 40. a 50. let, uvádíme v dalším textu této kapitoly rozsáhlé úryvky z těchto sešitů, zvýrazněné odlišným typem písma. Na řadě míst tak můžeme sledovat vývoj nápadů vedoucích až k publikovanému pojednání (např. [K30], [K31]), resp. návraty k již vydaným článkům (např. [K4], [K26]) a návaznost drobných poznámek na ně. Pro zachování autentičnosti jsou vybrané pasáže přepsány *doslova, včetně pravopisu a úpravy textu.* Z tohoto důvodu je dále mj. používáno značení $\log x$ pro přirozený logaritmus, jež Kössler ve svých poznámkách používal.

Deník č. III

Nejstarší dochovaný deník začíná zápisem ze 7. listopadu 1942 a navazuje na předchozí sešity č. I, II. V úvodu se Kössler pokusil formulovat některé číselné identity pro $\theta_1(n)$, $\theta_2(n)$, ... jakožto zobecněné Möbiovy faktory se zápornými indexy, tj. $\theta_2(n) = \mu_{-2}(n)$, $\theta_3(n) = \mu_{-3}(n)$ atd. Již na druhé straně zápisků se však autor vrátil k identitě **(P)** ze své práce [K26] vydané téhož roku (viz diskuse tohoto pojednání v kapitole 3., vzorec 3.3.2). Poznamenal doslova:

„Identita (P) mě neustále přitahuje, takže téměř nemohu se zabývati něčím jiným. Musím tomu tlaku povoliti.“

Kössler konkrétně volil funkci $v(n) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = T\left(\frac{N}{n}\right)$, a dále se pak zabýval identitou

$$\sum_{1}^{N} \log k \ \cdot T\left(\frac{N}{n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \theta(k) \log k \ \cdot \psi\left(\frac{N}{k}\right)$$

umožňující výpočet střední hodnoty $\mathcal{M}\left(\ k\psi\left(N/k\right); \theta(k) \log k/k\right) = N + O\left(N/\log N\right)$. Podobně se stručně zabýval i dalšími analogickými identitami, které získáme vhodnými volbami α_k v relaci

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\sum\limits_{d|k} \alpha_k}{k} f\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{k} \psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) \ ,$$

[6.5] Úvodní citace je z Kösslerova deníku č. XVIII, srpen 1952.

a hledal vhodné odhady mj. pro $\sum\limits_1^N \mu_2(n)/n$, $\sum\limits_{n\leq x} \mu_2(n)$. Pro lepší představu, jak Kösslerovy poznámky vypadaly, lze nahlédnout v závěrečné obrazové příloze kopie str. 1–4 z tohoto deníku (obr. č. 20a–d). Od str. 8 dále je pojednáno o Gaussových celých číslech $a + ib$, a, $b \in \mathbb{Z}$, v souvislosti s funkcí $\zeta(s)$. Záhy je formulována základní identita v teorii Gaussových celých čísel – rozšíření identity $(\mathcal{I})$ z práce [K26]:

$$\sum_{|n|\leq N} v(n)\mathcal{F}(n) = \sum_{|q_k|\leq N} f(q_k)\cdot\mathcal{V}(q_k), \qquad (\mathcal{I}_g)$$

kde q_1, q_2, ... je posloupnost Gauss. celých čísel, $f(n)$, $v(n)$ dvě libovolné číselně teoretické funkce definované pro Gauss. celá čísla $|n| \leqq N$, funkce $\mathcal{F}(n) = \sum\limits_{q_k|n} f(q_k)$.

Uvažujeme-li v konkrétních situacích posloupnost q_1, q_2, ... jakožto posloupnost prvočísel, musíme mít v těchto případech na paměti, že mezi Gaussova prvočísla patří všechna reálná prvočísla $p_3 \equiv 3 \pmod 4$, číslo $(1 + i)$ ($1 - i$ nikoliv, neboť $1 - i = -i(1 + i)$), a všechna čísla $q_k = x \pm iy$, pro která $x^2 + y^2 = p_1 \equiv 1 \pmod 4$, p_1 reálné prvočíslo, x sudé.

Kössler dále připouštěl zobecnění identity $(\mathcal{I}_g)$ v tom smyslu, že místo podmínky $|n| \leqq N$ položil podmínku $n \in \mathcal{O}$ (kde $\mathcal{O}$ je libovolná oblast v rovině Gaussových čísel). S tím související problematika počtu mřížových bodů v dané oblasti inspirovala na str. 20 Kösslera k zamyšlení, jak by se identita $(\mathcal{I}_g)$ změnila, kdyby místo čtvercové sítě Gaus. čísel byla vzata v úvahu síť rovnostranných trojúhelníků, v níž roli celých čísel přebírají čísla $n = a + b\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right\}$, kde a, $b \in \mathbb{Z}$, nebo podobně síť mřížových bodů $n = a + i\sqrt{5}b$.

Na str. 30 Kössler konstatoval, že ve svých zápisech ztrácí přehled, a raději se proto začal věnovat starému problému z let 1922–1928, jehož vyšetřování předtím nezveřejnil. Jednalo se o studium funkčních rovnic Lambertových řad

$$\mathcal{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{e^{\pi(a+nz)} - 1}$$

za následujících předpokladů:

(1) $\varphi(t)$ je regulární funkce v polorovině $\mathrm{Re}(t) > 0$

(2) a, z jsou reálné nebo komplexní konstanty, za předpokladu $\mathrm{Re}(z) > 0$

(3) pro žádné celé n nenastane případ $e^{\pi(a+nz)} = 1$

(4) řada konverguje absolutně pro $|e^{\pi z}| > 1$.

Na str. 46 se opět vracíme k problému mřížových bodů, tentokrát v různě otočených či posunutých čtvercích. O šest stran dále je nastíněn jiný postup pro odvození základní identity pro Gaussova celá čísla. Oproti původní identitě $(\mathcal{I}_g)$ je volena podmnožina $\mathcal{M}$ čísel Gaussových a funkce $v(n)$ je definována pro množinu $\mathcal{M}$, přičemž v případě čísel $n \notin \mathcal{M}$ je $v(n) \overset{\text{def.}}{\to}= 0$. Vzniká tak identita

$$\sum_{n\in\mathcal{M}} v(n)\mathcal{F}(n) = \sum_{q_k} f(q_k)\mathcal{V}(q_k)\,.$$

Kössler podrobil diskusi dva případy, kdy množinou $\mathcal{M}$ byl obdélník se středem v bodě $(0,0)$ a stranami $\underline{2V}$, $\underline{2N}$ rovnoběžnými s osami, a dále úsečka délky $2N$ kolmá na osu reálnou. Poznamenal, že volba množiny $\mathcal{M}$ jako úseku reálné osy mezi body 0, N vede k Čebyševově identitě.

V zápise ze dne 5. února 1943 se Kössler rozhodl opět rozšířit svou oblíbenou „základní identitu $\mathcal{I}$", tentokrát do teorie kvadratických ideálů:

Budiž q_1, q_2, q_3, ..., q_k, ... daná posloupnost ideálů. Zavedu symbol $d(r, q_k) = 1, 0$ podle toho, zda $q_k|r$ či $q_k \not| r$.

Dále definuji číselně teoret. funkce, jejichž hodnota jest <u>číslo</u> (reál. nebo komplexní) $f(q_k)$. To znamená, že ke každému ideálu q_k jest jednoznačně přiřazeno <u>číslo</u> $f(q_k)$. Pak jest také

$$\mathcal{F}(r) = \sum_{q_k} f(q_k) d(r, q_k)$$

zcela určité číslo jednoznačně přiřazené k ideálu r.

Budiž dále $\mathcal{M}$ daná množina (konečná) ideálů r, a $v(r)$ funkce čísel. theoret. (rovná číslu) definovaná v $\mathcal{M}$. Postupem známým z dřívějška dostanu identitu

$$\sum_{r \in \mathcal{M}} v(r) \mathcal{F}(r) = \sum_{q_k} f(q_k) \mathcal{V}(q_k), \qquad (\mathcal{I})$$

kdež $\mathcal{V}(q_k) = \sum_{lq_k \in \mathcal{M}} v(lq_k)$. Speciální volba q_k = prvoideál nebo celistvá mocnina prvoideálu t. jest $q_k = p^\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots f(p^\nu) = \log(\mathcal{N}p)$ (logaritmus normy prvoidealu). Pak jest $\mathcal{F}(r) = \log(\mathcal{N}r)$ protože rozklad $\underline{r}$ v součin prvoideálů jest <u>jednoznačný</u> a protože $\mathcal{N}(r_1 \cdot r_2) = \mathcal{N}(r_1) \cdot \mathcal{N}(r_2)$.

Identita prvoideální zní tedy

$$\sum_{r \in \mathcal{M}} v(r) \log(\mathcal{N}r) = \sum_p \log(\mathcal{N}p) \sum_{\substack{\nu=1,2,\ldots \\ lp^\nu \in \mathcal{M}}} \mathcal{V}(p^\nu).$$

Následuje zápis o různých případech, které vyplynou z konkrétní volby množiny $\mathcal{M}$, resp. funkce $v(n)$. Na str. 91 se Kössler vrátil k prvočíselné identitě (P), konkrétně volbou $v(n) = \varphi(n)/n^s$. Integrací (P) v tomto případě dostaneme známý vztah

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\,.$$

V dalších úvahách Kössler volil $v(n) = i(n)/n^s$, kde index $i(n)$ čísla $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_\nu^{\alpha_\nu}$ je roven $\nu + 1$. Analogicky označil bazí $b(n)$ čísla n jeho největší čtverce prostý dělitel (tj. číslo $p_1 p_2 \cdots p_\nu$) a exponentem $e(n)$ číslo $1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu$, a uvažoval funkce $v(n) = b(n)/n^s$ a $v(n) = e(n)/n^s$.

Od str. 97 se Kössler vrátil k výpočtům středních hodnot a ke vzorcům pro aritmetické řady (spec. prvočíselné řady $1+8\tau$, $3+8\tau$, $5+8\tau$, $7+8\tau$). Jeho cílem bylo dokázat s pomocí těchto řad vztah

$$\sum_{p_1 \le N} \frac{\log p_1}{p_1 - 1} = \frac{1}{2} \log N + O(1)\,.$$

Na str. 103 se autor pozastavil nad součtem $\mathcal{F}(N,p) = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^3} \right\rfloor + \cdots$, s jehož pomocí Čebyševova identita

$$\sum_{p \le N} \log p \left\{ \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right\} = \sum_{n=1}^{N} \log n$$

dostává tvar

$$N \sum_{p \le N} \frac{\log p}{p-1} - \sum_{p \le N} \frac{\sigma(N,p) \log p}{p-1} = \sum_{n=1}^{N} \log n \,,$$

kde $\sigma(N,p)$ je ciferný součet čísla N vyjádřeného v číselné soustavě o základu p.

Zápis ze dne 6. března 1943 (str. 105) je věnován zobecněné Dirichletově identitě a jejím integrálním analogiím. Při označení $y = \phi(s)$ pro monotonně klesající funkci, $s = \varphi(y)$ pro funkci k ní inverzní, q celé číslo menší než p, dospěl Kössler ke vzorci

$$\sum_{s=q+1}^{p} g(s)\mathcal{F}[\phi(s)] = \sum_{s=[\phi(p)+1]}^{[\phi(q)]} f(s)\mathcal{G}[\varphi(s)] + \mathcal{F}[\phi(p)]\mathcal{G}(p) - \mathcal{F}[\phi(q)]\mathcal{G}(q)\,.$$

Závěr sešitu č. III (str. 109–115) byl věnován snaze systematicky vyšetřit identitu (P) v souvislosti s kvadratickými zbytky. Volba $v(n) = \left(\frac{n}{\nu}\right)/n^s$ vedla Miloše Kösslera ke vztahu[6.6]

$$-\frac{d\zeta(s,\nu)}{ds} = \zeta(s,\nu) \sum_{p_+} \frac{\log p_+}{p_+^s - 1} - \zeta(s,\nu) \sum_{p_-} \frac{\log p_-}{p_-^s + 1}\,, \text{ kde } \zeta(s,\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{\nu}\right)}{k^s},$$

prvočíslo p_+ (resp. p_-) vyhovuje podmínce $\left(\frac{p}{\nu}\right) = +1$ (resp. $\left(\frac{p}{\nu}\right) = -1$). Integrací odtud plyne

$$\zeta(s,\nu) = \prod_p \left(1 - \frac{\left(\frac{p}{\nu}\right)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Celé vyšetřování dále pokračuje v následujícím deníku č. IV, který se však nepodařilo dopátrat.

Deník č. XIV

Na prvních stranách tohoto deníku se Kössler zabýval polynomem $P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2$ vlastnosti $|P(z)| \le 1$ pro $|z| \le 1$, s různými okrajovými podmínkami, např. existencí alespoň jednoho $z = e^{i\varphi}$, pro které $|P(z)| = 1$, nebo $\operatorname{Re} P(z) = 0$ alespoň ve dvou bodech apod.

[6.6] Zde $\left(\frac{n}{\nu}\right)$ označuje zobecněný Legendrův symbol, který je pro $n > 1$ definován takto: $\left(\frac{n}{\nu}\right) = 0$, je-li n dělitelné číslem ν; $\left(\frac{n}{\nu}\right) = +1$, není-li n dělitelné ν a zároveň je kvadratickým zbytkem podle modulu ν; $\left(\frac{n}{\nu}\right) = -1$, není-li n dělitelné ν a zároveň je kvadratickým nezbytkem. Kvadratickým zbytkem podle modulu ν přitom rozumíme číslo n, pokud existuje nějaké řešení kongruence $x^2 \equiv n \pmod{\nu}$. V opačném případě nazýváme číslo n kvadratickým nezbytkem.

Na str. 24 se téma posunulo k problematice kruhové ohrady polynomů (kruhovou ohradou „Pferchkreis“ se rozumí nejmenší kruh v rovině $\underline{w}$, který obsahuje uvnitř nebo na obvodu všechny funkční hodnoty $f(z)$ dané vlastnosti), na str. 57 je patrný záměr odvozovanou teorii aplikovat na ohraničené polynomy. Na str. 66–69 je popisováno integrální vyjádření polynomů, pro něž platí, že $\operatorname{Re} P_n(z) \geq 0$ pro $|z| \leq 1$, na str. 77 pak faktorizace obecného trigonometrického polynomu. V následující části najdeme řadu postřehů k vyšetřování polynomů, často získaných metodou pokusu a omylu, což se projevuje i tím, že mnohé dlouhé pasáže jsou přeškrtané díky odhaleným chybám. 5. září 1948 Kössler poznamenal, že není schopen soustředěné práce, a proto raději sepíše své předchozí výsledky o faktorizaci trigonometrických polynomů. Další zápis v deníku je datován 17. září a je v něm konstatováno, že rukopis je dokončen. Poznamenejme na tomto místě, že zmiňovaná práce *Some properties of trigonometric and algebraic polynomials* byla na veřejnosti prezentována 20. října téhož roku a záhy byla publikována ve Věstníku Král. české spol. nauk, viz [K28].

Od str. 122 je znovu od začátku rozebírána problematika prostých polynomů. Na str. 154 v zápise ze dne 13. října 1948 se v krátké poznámce dozvídáme, že Kössler v té době přednášel o Fourierových řadách, a úvahy týkající se trigonometrických polynomů jej tak vedly k zavedení Fourierova integrálu.

Dále znovu přicházejí ke slovu prosté polynomy. Na str. 168 pak najdeme nápad týkající se zobecnění Eulerových vztahů:

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + x^{2^\nu}), \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^n) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k-1})}$$

Význam těchto identit pro partitio numer. jest znám (viz n.př. Bachmann: Die analyt. Zahlenth. p. 29. und 30.) Tyto vztahy lze snadno zobecniti. Je-li totiž $\underline{n}$ libovolné celé číslo > 1 bude

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + x^{n^\nu} + +x^{2n^\nu} + x^{3n^\nu} + \cdots + +x^{(n-1)n^\nu}) \qquad (A)$$

Číselně teor. význam jest zřejmě ten, že každé celé číslo $k \geq 1$ lze jedním jediným způsobem vyjádřiti v soustavě o základu $\underline{n}$. To jest

$$k = \alpha_0 + \alpha_1 n^1 + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 n^3 + \cdots + \alpha_\nu n^\nu$$

kdež $0 \leq \alpha_i \leq n-1$ jsou celá čísla (t.j. cifry v této soustavě $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$).

Důkaz vztahu (A) jest týž jako důkaz Eulerova prvního vztahu. Jest totiž

$$\begin{aligned} (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) &= 1 - x^n \\ (1-x^n)(1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{(n-1)n}) &= 1 - x^{n^2} \quad \textit{at.d.} \end{aligned}$$

Tak n.př. pro $n = 3$ jest

$$\frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2)(1 + x^3 + x^{2\cdot 3})(1 + x^9 + x^{2\cdot 9})(1 + x^{27} + x^{2\cdot 27})\cdots$$

21.XII. *Slunovrat*

Druhá Eulerova relace plyne z první tím způsobem, že do této dosadíme za x číslo x^k kdež $k = 2\mathcal{K} + 1$ jest liché a znásobíme pak všechny tak vzniklé rovnice

$$\prod_{\mathcal{K}=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2\mathcal{K}+1}} = \prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + x^{2^\nu}) \cdot \prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + x^{3\cdot 2^\nu}) \cdot \prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + x^{5\cdot 2^\nu}) \cdots .$$

Protože každé celé číslo $\underline{n}$ se dá psáti jedním jediným způsobem ve tvaru $n = 2^\nu(2\mathcal{K} + 1)$ a protože nekon. součiny na pravé straně jsou absolut. konvergentní plyne z toho druhý vztah Eulerův. Vzniká nyní problem jak z relace (A) odvoditi analogon druhé Euler. relace. Shora přeškrtané řádky ukazují nezdařený pokus. Snad bude možno opříti se o tu okolnost, že v druhé Eul. rel. exponenty $\underline{x}$ v součinu $\prod \frac{1}{1-x^{2\mathcal{K}+1}}$ tvoří aritmet. řadu (lichá čísla). Nabízí se tedy tento postup. V relaci (A) pro $n = 3$ dosadím za x postupně x^1, x^4, x^7, x^{10}, ... obecně $x^{1+3\mathcal{K}}$ $(\mathcal{K} = 0, 1, 2, \dots)$ a znásobím všechny rovnice.

22.XII. *Tak dostanu tuto relaci*

$$\prod_{\mathcal{K}=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{3\mathcal{K}+1}} = \prod_{\nu}(1 + x^\nu + x^{2\nu})$$

kdež čísla $\underline{\nu}$ jsou tvaru buď $\nu = 1 + 3\mathcal{K}$ $(\mathcal{K} = 1, 2, 3, \dots)$ nebo tvaru $\nu = 3^\lambda$ $(\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$. Rozvedu-li levou stranu v mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}(n)x^n$ bude zřejmě $\mathcal{C}(0) = 1$, $\mathcal{C}(n)$ = počet rozkladů čísla $\underline{n}$ na <u>stejné</u> nebo <u>různé</u> sčítance tvaru $s = 1 + 3\mathcal{K}$. Rozvedu-li pravou stranu v mocninnou řadu dostanu pro $\mathcal{C}(n)$ počet rozkladů čísla $\underline{n}$ ve tvaru

$$n = \sum s_1 + \sum s_2$$

kdež $\underline{s_1}$ jsou sčítanci tvaru $s_1 = 1 + 3\mathcal{K}$ z nichž každý smí se v součtu objeviti buď jen jednou nebo dvakráte a $\underline{s_2}$ jsou sčítanci tvaru $s_2 = 3^\lambda$ z nichž každý se smí v součtu objeviti opět buď jen jednou nebo dvakráte.

Postup tento lze patrně užiti i na aritmetickou posloupnost $2+3\mathcal{K}$ a zobecniti i na formuli (A).

Následuje opět návrat k prostým polynomům a práce s jejich koeficienty. Kössler mj. uvažoval kladné konstanty $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ a hledal součet $\mathcal{S}(n) = \pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n$ s vhodnou volbou znamének + a − tak, aby získal součet o nejmenší prosté (absolutní) hodnotě. Obecné úvahy jsou prokládány konkrétními příklady (jen na str. 194–198 je drobnou vsuvkou poznámka k součinu $\prod_{k=1}^{\infty}(2 - x^{\frac{1}{2^k}})$). Na str. 207 (23. dubna 1949) se Kössler zmínil o cíli sepsat všechny své dosavadní poznatky o prostých polynomech, a proto další zápisky směřovaly k ujasnění některých nepřesností z předchozích úvah. Od str. 223 se poznámky týkaly Fareyových zlomků, v návaznosti na nedochovaný sešit č. VII, str. 197 a následující, podle něhož

$$\sum_{k=1}^{q} \vartheta\left\lfloor q^{\frac{1}{k}} \right\rfloor = \psi(q) = \log \prod_{\nu}(2 \sin \pi r_\nu)\,,$$

kde $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$, r_ν jsou všechny Fareyovy zlomky se jmenovateli 2, 3, ..., q. Kromě prvočíselné funkce $\psi(q)$ se Kössler snažil vyjádřit s pomocí Far. zlomků i funkce

$$g(q) = \sum_{n=1}^{q} \frac{\mu(n)}{n}, \qquad \mathcal{M}(q) = \sum_{n=1}^{q} \mu(n), \qquad f(q) = -\sum_{n=1}^{q} \frac{\mu(n)\log n}{n}\,,$$

jimiž se zabýval při hledání středních hodnot v [K26].

Na str. 227 se pak vrátil k rozvoji funkce $F(x) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi n)^{s-1}}{e^{2\pi n x}}$, kde s je pevně zvolené reálné číslo, a uvedl, že se tímto problémem zabýval už v deníku č. IV na str. 46 a dále. V této souvislosti uvedl zobecnění Wallisovy a Stirlingovy formule ve vztahu k dzeta funkci $\zeta(s)$ (jedno takové zobecnění najdeme v práci [K25]), opět s využitím vzorců z deníku IV, a s jejich pomocí se bez úspěchu pokusil vyšetřit „něco nového“ o nulových bodech $\zeta(s)$. Na str. 234 se znovu vrátil k Fareyovým zlomkům a identitě **(P)** z práce [K26]; diskutoval situaci vážící se ke vzorci

$$\sum_{k=1}^{q} g(k)\Big(\sum_{\frac{a}{k}\le x} f\left(\frac{a}{k}\right)\Big) =$$

$$= \sum_{1}^{q} \left(f\left(\frac{1}{k}\right) + f\left(\frac{2}{k}\right) + \cdots + f\left(\frac{\lfloor xk\rfloor}{k}\right)\right) \cdot \sum_{\nu=1}^{k\nu\le q} \mu(\nu) g(\nu k)$$

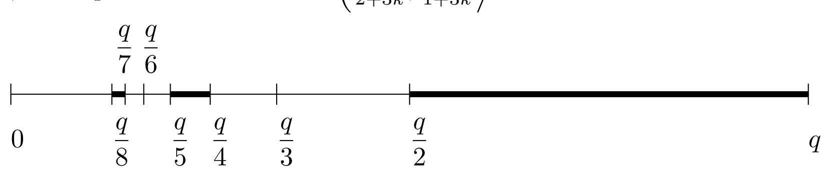
pro jiné volby než $x = 1$, resp. $x = \frac{1}{2}$, o nichž bylo psáno již v deníku č. VIII. Výsledkem těchto úvah jsou zajímavé „mezerové věty“. Označíme-li $\mathcal{P}_x$ počet Fareyových zlomků $\le x$, tj. $\mathcal{P}_x = \sum_{1}^{q} M\left\lfloor \frac{q}{k}\right\rfloor \lfloor xk\rfloor$, resp. $\mathcal{P}(x,y)$ počet Fareyových zlomků $> x$ avšak $\le y$ dostaneme mj. tyto vzorce:

$$\mathcal{H}(q) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) - \mathcal{P}\left(0,\frac{1}{3}\right) = \sum_{3k+2\le q} \mathcal{M}\left\lfloor \frac{q}{2+3k}\right\rfloor \qquad (B_1)$$

$$\mathcal{H}(q) = -\sum_{1+3k\le q} \mathcal{M}\left\lfloor \frac{q}{1+3k}\right\rfloor \qquad (B_2)$$

$$2\mathcal{H}(q) = -\sum \left\{\mathcal{M}\left\lfloor \frac{q}{1+3k}\right\rfloor - \mathcal{M}\left\lfloor \frac{q}{2+3k}\right\rfloor\right\}, q \ge 3 \qquad (B_3)$$

To má následující jednoduchý význam. Interval $(0, q\rangle$ rozdělím body $\frac{q}{2}$, $\frac{q}{3}$, $\frac{q}{4}$, $\frac{q}{5}$, ... na intervaly částečné. Rozdíl $M\left\lfloor\frac{q}{1+3k}\right\rfloor - M\left\lfloor\frac{q}{2+3k}\right\rfloor$ jest roven součtu Moebius. faktoru $\mu(k)$ pro ta celá čísla $\underline{k}$, která padnou do intervalu $\left(\frac{q}{2+3k}, \frac{q}{1+3k}\right\rangle$. Jest to interval zleva otevřený zprava uzavřený.



Obr. -i-

Představuje tedy $-2\mathcal{H}(q)$ součet Moebius. faktorů $\underline{\mu(k)}$ jen pro ta $\underline{k}$, která leží ve svrchu definovaných (silněji vytažených) intervalech.

Analogicky této úvaze pro $x = 1/3$ Kössler uvedl celý postup i pro $x = 1/4$, $1/5$, $1/6$ a zarazil se u faktu, že součty typu $\sum M \lfloor q/(a+bk) \rfloor$ lze pro $x = 1/3$, $1/4$ vyjádřit pomocí příslušných $\mathcal{H}(q)$, kdežto pro $x = 1/5$ takové vyjádření nenalezl. Od str. 244 se opět věnoval především prostým polynomům. Dále vyšetřoval spec. polynomy daného stupně, v mnoha případech jsou však úvahy chybné, a proto několikrát opravované. Kössler často opakovaně zkoušel různé cesty vedoucí k témuž cíli, v zásadě však stále řešil jediný problém - kdy je daný polynom $\mathcal{P}(z)$ prostý v kruhu $|z| \leq 1$, včetně hledání nutných a postačujících podmínek pro koeficienty polynomu a_k. Vyústěním těchto rozsáhlých úvah bylo pojednání [K30] publikované v roce následujícím. Svým obsahem 394 stran je tento sešit ze všech zachovaných deníků nejrozsáhlejší.

Deník č. XV

Úvodní zápis z 16. června 1950 (str. 1–7) pojednává o řadě mocninné konvergentní na celé konvergenční kružnici. Na str. 8 se dočteme o tom, že Kössler dokončil anglickou verzi své práce *Simple polynomials*, dal ji přehlédnout Katětovovi, a do deníku si 4. srpna 1950 poznamenal jiný způsob vyšetřování associované resultanty k polynomu $z + a_2z^2 + a_3z^3$, $a_3 > 0$, a_2 ryze imaginární. Tomuto problému a otázkám s ním souvisejícím se věnoval až do str. 49, kde se začal zabývat tím, jakou funkcí r je výše zmiňovaná reálná charakteristika $\mathcal{M}(r)$ (viz diskuse práce [K31]), aby se záhy vrátil k úvahám o associované resultantě, jež mu „nedávala spát“.

Na str. 61 se objevuje zmínka, že autor „předělával disertaci pana H. o omezených polynomech“. Tato práce mu vnukla nápad, jak by se mělo postupovat při odvozování nutných podmínek pro koeficienty prostých polynomů v naději, že dospěje k obecnějším větám než *Bieberbachova domněnka.* Až do str. 96 se střídají zápisy týkající se této oblasti a vlastností reálných charakteristik. V záznamech z 30. října 1950 se dále dočteme:

... To také asi bude poměrně lehké. Avšak pro dnešek to opouštím protože musím zaznamenati další nápad z teorie prvočísel. Vznikl ve mne při přemýšlení o Goldbachově větě.

Budťež $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $\ldots p_k$ *... lichá prvočísla. Vezmu z nich všechna menší nebo rovná celému číslu* $\underline{N}$. *Utvořím součin*

$$F(\alpha) = \left(e^{2\pi i\alpha p_1} + e^{2\pi i\alpha p_2} + \cdots + e^{2\pi i\alpha p_n}\right)\left(e^{-2\pi i\alpha p_1} + \cdots + e^{-2\pi i\alpha p_n}\right)$$

kdež p_n *jest* <u>*největší*</u> $p_k \leq N$. *Provedu-li násobení závorek dostanu cosinus-ový polynom v proměnné* $\underline{\alpha}$. *Je-li* $\underline{s}$ *sudé číslo menší nebo rovné* $p_n - p_1 = p_n - 3$ *dostanu rozdíl* $s = p_{n_\lambda} - p_{n_\nu}$ *tolikrát, kolik jest prvočísel v intervalu* 3 *až* N *jichž rozdíl jest právě* $\underline{s}$. *Vzhledem k symetrii závorek dostanu právě tolikráte také rozdíl*

$$-s = p_{n_\nu} - p_{n_\lambda} \,.$$

Následkem toho bude

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \Pi(N) + 2\Pi_2(N)\cos 2\cdot(2\pi\alpha) + 2\Pi_4(N)\cos 4(2\pi\alpha) + \cdots \\ &+ \cdots + 2\cdot 1\cdot\cos{(p_n - p_1)}2\pi\alpha \end{aligned}$$

Při tom značí $\Pi_2(N)$ *počet dvojic prvočísel jichž vzdálenost od sebe v přirozené řadě čísel jest rovna dvěma (počet dvojčat).* $\Pi_{2r}(N)$ *jest podobně počet dvojic prvočísel až do* N *jichž* *vzdálenost od sebe jest rovna* $\underline{2r}$ *(mezi nimi ovšem v přiroz. řadě mohou ležeti ještě* *jiná* *prvočísla.)*

Jinak také mohu interpretovati číslo $\Pi_{2r}(N)$ *jako počet representací čísla sudého* $\underline{2r}$ *jakožto* *rozdíl* *dvou* *lichých* *prvočísel menších nebo rovných* $\underline{N}$.

(III) Tak vzniká problem podobný Goldbachovu. Jest možno každé sudé číslo vyjádřiti jako rozdíl dvou lichých prvočísel?

Ze vzorce pro $F(\alpha)$ *plyne pro* $\underline{\alpha = 0}$ *okamžitě důsledek*

$$\begin{aligned} \Pi^2(N) &= \Pi(N) + 2(\Pi_2(N) + \Pi_4(N) + \Pi_6(N) + \cdots + \Pi_{p_n - p_1}(N)) \\ \Pi(N) - 1 &= 2\left(1 + \frac{\Pi_2}{\Pi} + \frac{\Pi_4}{\Pi} + \cdots + \frac{\Pi_{p_{n-1}-3}}{\Pi}\right) \end{aligned}$$

Pro jiná $\alpha \neq 0$ *vhodně zvolená dostanu další zajímavé relace.*
Pokud se týče problemu obecného **(III)** *jest velmi pravděpodobné, že pro* *každé* $\underline{r}$ *jest*

$$\Pi_{\substack{2r \\ N\to\infty}}(N) \to \infty\,.$$

Důkaz bude pravděpodobně tak obtížný jako Goldbachův teorem.

Na tomto místě nakrátko přerušíme Kösslerovy úvahy drobnou historickou vsuvkou týkající se studovaných problémů.

V roce 1742 Christian Goldbach (1690–1764) v dopise Eulerovi svěřil svou domněnku, že každé přirozené číslo $n > 5$ je součtem tří prvočísel. Euler odpověděl, že toto tvrzení je ekvivalentní větě *„Každé sudé číslo větší než 2 je součtem dvou prvočísel.“* Plně se Goldbachovu hypotézu dosud nepodařilo dokázat. Zatím nejlepšího výsledku dosáhl Joerg Richstein v roce 1998, kdy za pomoci výpočetní techniky dokázal platnost této hypotézy pro sudá $n < 4 \cdot 10^{14}$.

Slavná *hypotéza o dvojčatech* se týká otázky: „Existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat?“ Ani tato domněnka dosud nebyla v plném rozsahu dokázána. V květnu 2004 sice matematickou veřejnost vzrušila zpráva o tom, že Richard F. Arenstorf našel správný důkaz, záhy v něm však byla objevena mezera. Přesto řada matematiků věří, že tento nedostatek nebude příliš závažný a podaří se jej odstranit. Miloš Kössler ve svých denících nezůstal pouze u dvojčat, ale definoval si *„káčata“* jako dvojice prvočísel lišících se o dvojnásobek přirozeného čísla k (např. $17 - 13 = 4$ $(k = 2)$, $37 - 31 = 6$ $(k = 3)$, $41 - 31 = 10$ $(k = 5)$, ...) - viz pokračování úryvku. Analogicky dle Goldbacha se pak tázal, zda by bylo možné každé sudé přirozené číslo zapsat jako rozdíl dvou káčat, resp. kolik takových možných zápisů existuje. Nutno podotknout, že Kössler nebyl první, koho tato analogie zajímala – již v roce 1849 Polignac vyslovil domněnku, že ke každému sudému číslu $2k$ existuje nekonečně mnoho dvojic následujících prvočísel lišících se o $2k$.

31.X. *Jiný speciální výsledek.*

Volím $\alpha = \frac{1}{4}$. *Potom*

$$e^{2\pi i\alpha p} = e^{\frac{\pi}{2}ip}\,.$$

Je-li $\underline{p}$ *tvaru* $p = 2k + 1$, k *liché* *pak*

$$e^{i\frac{\pi}{2}p} = e^{\frac{\pi i}{2}} \cdot e^{ik\pi} = -i\,.$$

Je-li $p = 4k + 1$ *,* $\underline{k}$ *jakékoliv jest*

$$e^{i\frac{\pi}{2}p} = e^{\frac{\pi i}{2}} \cdot e^{2k\pi i} = +i\,.$$

Tedy je-li $\Pi^{(1)}(N)$ *počet prvočísel* $\leq N$ *tvaru* $p = 2k + 1$*,* k *liché a* $\Pi^{(2)}(N)$ *počet prvoč.* $\leq N$ *tvaru* $p \equiv 1 \pmod 4$ *bude*

$$F(\tfrac{1}{4}) = \left(i\Pi^{(2)}(N) - i\Pi^{(1)}(N)\right)\left(-i\Pi^{(2)}(N) + i\Pi^{(1)}(N)\right) = \left(\Pi^{(2)}(N) - \Pi^{(1)}(N)\right)^2$$

Dále jest $\cos 2k(2\pi\alpha) = \cos \pi k = (-1)^k$ *a tedy podle prvního řádku str. 97.*

$$\begin{aligned}\left(\Pi^{(2)}(N) - \Pi^{(1)}(N)\right)^2 = \Pi(N) \quad &+ \quad 2(\Pi_4(N) + \Pi_8(N) + \cdots)\\ &- \quad 2(\Pi_2(N) + \Pi_6(N) + \cdots).\end{aligned}$$

1.listopadu. *Bude výhodnější klásti místo* α *pouze* $\frac{\alpha}{2}$*. Funkce uvažovaná jest pak*

$$\begin{aligned}F(\alpha) &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi p_1\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi p_2\alpha} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi p_n\alpha}\right)\left(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}p_1\alpha} + \cdots + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi p_n\alpha}\right)\\ &= \Pi(N) + 2\{\Pi_2(N)\cos 2\pi\alpha + \Pi_4(N)\cos 4\pi\alpha + \Pi_6(N)\cos 6\pi\alpha +\\ &\qquad + \cdots + \Pi_{p_n - p_1}(N)\cos(p_n - p_1)\pi\alpha\}.\end{aligned}$$

Zde dostanu předchozí dva výsledky pro $\Pi^2(N)$ *a* $(\Pi^{(2)}(N) - \Pi^{(1)}(N))^2$ *dosazením za* $\underline{\alpha}$ *jednak* $\alpha = 0$ *a pak* $\alpha = \frac{1}{2}$*. Jistě bude dobře vypočísti i některé další hodnoty pro* $\underline{\alpha}$ *vhodně volené racionální n.př.* $\alpha = \frac{1}{3}$*,* $\alpha = \frac{2}{3}$ *a t.d. Tak dostanu zřejmě vztahy mezi počty prvočísel v aritmet. řadách a mezi* Π_2*,* Π_4*,* Π_6 *a t.d. Je mi z toho až úzko! A. a. m. e.*

2.XI. *Je mi zase velmi mizerně. Pro možnou potřebu později si sem zaznamenám násled. vztahy mezi Far. zlomky a Moebius. faktory. Jest*

$$\sum_{a_i<k} \cos 2\pi \frac{a_i}{k} = \mu(k)\,,$$

kdež $a_i < k$ *jsou všechna čísla menší než* $\underline{k}$ *vlastnosti* $(a_i, k) = 1$*. Je-li* $\underline{l}$ *celé číslo a při tom* $l \equiv l_1 \pmod k$ *pak*

$$\sum^{(l)} = \sum_{a_i<k} \cos \frac{2\pi a_i}{k} l = \sum_{a_i<k} \cos \frac{2\pi a_i}{k}\, l_1\,.$$

Pro $l_1 = 0$ *jest tedy* $\sum^{(l)} = \varphi(k)$*. Je-li* l_1 *nesoudělné s* $\underline{k}$ *a tedy rovno některému z* $\underline{a_i}$ *pak součiny* $l_1 a_i$ *jsou shodné s* $\underline{a_i}$ *a dostanu* $\sum^{(l)} = \mu(k)$*. Je-li* $l_1 = l_2\alpha$*,* $k = l_2\beta$*,* $(k, l_1) = l_2$*,* $\beta > \alpha$*,* $(\beta, \alpha) = 1$ *pak*

$$\begin{aligned}\sum^{(l)} \quad &= \quad \sum_{a_i<k} \cos \frac{2\pi a_i \cdot l_2\alpha}{l_2\beta} = l_2 \sum_{a_i<\beta} \cos \frac{2\pi a_i}{\beta} = l_2\mu(\beta) =\\ &= \quad l_2\mu\left(\frac{k}{l_2}\right) = (l_1, k)\mu\left(\frac{k}{(l_1, k)}\right).\end{aligned}$$

4.XI. *Jiný prvočíselný problem.*
Nechť $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$, $p_n \leq N$ *jsou všechna prvočísla* $\leq N$. *Utvořím součin*

$$F(\alpha) = \left(e^{i\pi p_1\alpha} + e^{i\pi p_2\alpha} + \cdots + e^{i\pi p_n\alpha} + e^{-i\pi p_1\alpha} + e^{-i\pi p_2\alpha} + \cdots + e^{-i\pi p_n\alpha}\right)^2$$

Zřejmě jest

$$F(\alpha) = 4\,(\cos\pi p_1\alpha + \cos\pi p_2\alpha + \cdots + \cos\pi p_n\alpha)^2$$

Provedu-li však přímo násobení původní závorky $\left(e^{i\pi p_1\alpha} + \cdots + e^{-i\pi p_n\alpha}\right)$ *samy sebou dostanu cosinusový polynom*

$$F(\alpha) = A_0 + A_1\cos\pi\alpha + A_2\cos 2\pi\alpha + \cdots + A_{2p_n}\cos 2\pi p_n\alpha$$

Při tom bude $A_0 = 2\Pi(N)$, $A_1 = 4$ *protože* $\pm i\pi\alpha$ *dostanu jedině násobením* $e^{i\pi\alpha}\cdot e^{-i\pi 2\alpha}$ *dvakrát a* $e^{-i\pi 3\alpha}\cdot e^{i\pi 2\alpha}$ *dvakrát.*

[Pozn. Zbylá část zápisu ze 4. listopadu je stejně jako zápis ze dne 5. listopadu přeškrtána a označena jako chybná.]

8.XI. *Úsudky předešlé byly chybné. Provedu tedy znovu celou tu úvahu. Jestliže sudé číslo* $2k > 2$ *se dá vyjádřiti jako součet dvou různých lichých prvočísel* $2k = p_\lambda + p_\mu$ *pak dostanu násobením obou závorek pro* $F(\alpha)$ $e^{i\pi\alpha(p_\lambda+p_\mu)}$ *dvakrát t.j.* $2e^{i\pi p_\lambda\alpha}\cdot e^{i\pi p_\mu\alpha}$ *a právě tak* $2e^{-i\pi p_\lambda\alpha}\cdot e^{-i\pi p_\mu\alpha}$ *celkem tedy*

$$4\cos\pi(p_\lambda + p_\mu)\alpha = 4\cos 2k\pi\alpha\,.$$

Jestliže však $2k$ *jest dvojnásobek prvočísla* $2k = 2p_\nu$ *pak dostanu jen jednou* $e^{i\pi 2p_\nu\alpha}$ *a jen jednou* $e^{-i\pi 2p_\nu\alpha}$ *tedy* $2\cos 2k\pi\alpha$. *Mimo to ovšem* $4\cos 2k\pi\alpha$ *pro každé vyjádření* $2k = 2p_\nu$ *jako součet dvou různých prvočísel. Tedy ta část koeficientu* A^+_{2k} *pocházející od součtů prvočísel bude*

$$A^+_{2k} = (2) + 4I^+(2k)$$

kdež (2) *se přičítá jen je-li* $2k = 2p_\nu$ *a* $I^+(2k)$ *značí počet representací čísla* $2k$ *jako součet dvou různých prvočísel.*

Dále mohu $2k$ *obdržeti také jako rozdíl dvou různých lichých prvočísel* $(2k > 0)$ $2k = p_\mu - p_\nu$. *To dostanu z členů*

$$2e^{i\pi p_\mu\alpha - i\pi p_\nu\alpha} + 2e^{-i\pi p_\mu\alpha + i\pi p_\nu\alpha} = 4\cos 2k\pi\alpha = A^-(2k) = 4I^-(2k)$$

Tedy celkem koeficient A_{2k} *při* $\cos 2k\pi\alpha$ *bude*

$$A_{2k} = A^+_{2k} + A^-_{2k} = (2) + 4I^+(2k) + 4I^-(2k)$$

kdež (2) *se přičítá jen je-li* $2k = 2p_\mu$.

Koeficient A_2 *bude tedy pouze*

$$A_2 = 4I^-(2)$$

kdež zřejmě značí $I^-(2)$ *počet prvočíselných dvojčat která jsou obě* $\leq N$. $(I^+(2) = 0)$ *Podobně* $I^-(2k)$ *značí počet těch lichých prvočísel které mají tu vlastnost, že po každém z nich* p_ν *následuje číslo* $p_\nu + 2k$ *které jest také prvočíslo a to* $\leq N$. *Mohly by se tedy taková prvočísla nazvati třeba „káčata“.*

Nyní spočtu koeficient A_{2k+1} kdež $\underline{k > 2}$. Číslo $(2k+1)$ mohu dostati jen jako součet lichého prvočísla p_μ a dvojky nebo jako rozdíl lichého prvočísla p_μ a dvojky.

Je-li $\underline{2k+1 = p_\mu}$ samo prvočíslo a je-li také $\underline{2k+3} = p_\mu + 2$ prvočíslo pak ovšem $2k-1 = p_\mu - 2$ není už prvočíslo vyjímaje jedinou výjimku $\underline{2k+1 = 5}$. Je-li tedy $p_\mu > 5$ a je-li také $p_\mu + 2$ prvočíslo dostanu číslo $2k+1 = p_\mu$ jako rozdíl $(p_\mu + 2) - 2$ a to z členů

$$2e^{i\pi(p_\mu+2)\alpha - i\pi\cdot 2\alpha} + 2e^{-i\pi(p_\mu+2)\alpha + i\pi\cdot 2\alpha} = 4\cos(2k+1)\pi\alpha$$

Totéž platí o $2k+1 = p_\mu + 2$ které dostanu z

$$2e^{i\pi p_\mu\alpha + i\pi\cdot 2\alpha} + 2e^{-i\pi p_\mu\alpha - i\pi\cdot 2\alpha} = 4\cos(2k+1)\pi\alpha$$

Následkem toho jest volím-li $N = 2N_1$ (sudé)

$$A_{2k+1} = 4$$

když a jen když $\underline{2k+1}$ jest jedno z dvojčat která obě jsou $< 2N_1$. Je-li $\underline{2k+1}$ liché číslo, které nepředchází nebo nenásleduje po prvočíslu, bude $A_{2k+1} = \underline{0}$. Výjimku tvoří A_5 které dostanu z rozkladů $5 = 3 + 2$ a také $5 = 7 - 2$.

$$A_5 \cos 5\pi\alpha = 2e^{i\pi(3+2)\alpha} + 2e^{-i\pi(3+2)\alpha} + 2e^{i\pi(7-2)\alpha} + 2e^{-i\pi(7-2)\alpha} = \underline{8\cos 5\pi\alpha}\,.$$

Koeficient $A_4 = 2 + 4I^-(4)$ protože 4 dostanu také jako $\underline{2+2}$. Ovšem

$$I^+(4) = 0$$

Jest tedy

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 2\Pi(N) + 4\cos\pi\alpha + \sum_{k=1}^{k=p_n<2N_1} A_{2k}\cos 2k\pi\alpha \\ &+ 4\cos 3\pi\alpha + 8\cos 5\pi\alpha + \sum_{k=3}^{2k+1<2N_1} A_{2k+1}\cos(2k+1)\pi\alpha \end{aligned}$$

kdež $(p)_2 \le 2N_1$ jsou všechna dvojčata lichá větší než $\underline{5}$.

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 2\Pi(N) + 4\cos\pi\alpha + A_2\cos 2\pi\alpha + 4\cos 3\pi\alpha + 8\cos 5\pi\alpha \\ &+ \sum_{k=3} A_{2k+1}\cos(2k+1)\pi\alpha + \sum_{k=2}^{k=p_n<2N_1} ((2) + 4I^+(2k) + 4I^-(2k))\cos 2k\pi\alpha \end{aligned}$$

Zde musím ještě připomenouti, že $I^-(2)$ jest počet párů dvojčat lichých. Všechna tato dvojčata musí býti > 5. Pár 5, 7 tedy k nim nepatří. Jest tedy

$$\begin{array}{ccccccl} A_2 = & 4 & + & 4 & + & 4 & I^-(2) = 8 + 4I^-(2) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{od } 5-3 & & \text{od } 7-5 & & \text{pro dvojčata} > 7 & \end{array}$$

Teď však vidím, že jsem zapoměl na ta lichá čísla která předcházejí nebo následují nějaké liché prvočíslo p které není členem dvojčete. Je-li to $2k+1 = p+2$ *dostanu sčítance* $2e^{i\pi p\alpha + i\pi\cdot 2}$ *a také* $2e^{-i\pi p\alpha - i\pi\cdot 2}$ *celkem* $4\cos(p+2)\pi$.

Podobně dostanu $4\cos(p-2)\pi\alpha$. *Avšak totéž platí je-li p členem dvojčete tedy ať p jest jakékoliv prvočíslo liché větší, nebo rovné* 5*ti. Pro každé jiné liché číslo bude* $A_{2k+1} = 0$. *Pro* $2k+1 = 5$ *dostanu* $8\cos 5\pi\alpha$ *protože* $\underline{5}$ *jednak následuje po* $\underline{3}$ *a za druhé předchází* $\underline{7}$. *Tedy členy s lichými indexy budou*

$$\begin{aligned}&4\cos\pi\alpha + 4\cos 3\pi\alpha + 4\cos 5\pi\alpha + \\ &\quad +4\sum_{p\geq 7}^{p<2N_1}\cos(p-2)\pi\alpha + 4\sum_{p\geq 5}^{p+2<2N_1}\cos(p+2)\pi\alpha\end{aligned}$$

Tedy při lichých $\underline{2k+1}$ *nehrajou dvojčata žádnou zvláštní roli. Celkem jest tedy*

$$\begin{aligned}F(\alpha) &= 2\Pi(2N_1) + 4\cos\pi\alpha + 4\cos 3\pi\alpha + 4\cos 5\pi\alpha + \\ &\quad +4\sum_{p\geq 7}\cos(p-2)\pi\alpha + 4\sum_{p\geq 5}\cos(p+2)\pi\alpha + (8+4I^-(2))\cos 2\pi\alpha + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{k\leq 2N_1}((2) + 4I^+(2k) + 4I^-(2k))\cos 2k\pi\alpha\end{aligned}$$

Musím tuto formuli přezkoušeti na jednoduchém příkladě n.př. $2N_1 = 8$.

9.XI. *Pro* $N = 2N_1 = 8$ *jest*

$$F(\alpha) = \left(e^{2\pi i\alpha} + e^{3\pi i\alpha} + e^{5\pi i\alpha} + e^{7\pi i\alpha} + e^{-2\pi i\alpha} + e^{-3\pi i\alpha} + e^{-5\pi i\alpha} + e^{-7\pi i\alpha}\right)^2$$

Přímým vynásobením dostanu

$$\begin{aligned}F(\alpha) &= 8 + 4\cos\pi\alpha + 8\cos 2\pi\alpha + 4\cos 3\pi\alpha + 6\cos 4\pi\alpha + 8\cos 5\pi\alpha \\ &+ 2\cos 6\pi\alpha + 4\cos 7\pi\alpha + 4\cos 8\pi\alpha + 4\cos 9\pi\alpha + 6\cos 10\pi\alpha \\ &+ 4\cos 12\pi\alpha + 2\cos 14\pi\alpha\end{aligned}$$

Nyní prvočísla jsou $2, 3, 5, 7$. *Tedy* $\Pi(8) = 4$

$$4\sum_{p\geq 7}\cos(p-2)\pi\alpha = 4\cos 5\pi\alpha\,, \quad 4\sum_{p\geq 5}\cos(p+2)\pi\alpha = 4\cos 7\pi\alpha + 4\cos 9\pi\alpha$$

$I^{-2}(2) = 0$ *protože neexistuje dvojče s prvočísly* > 7. *Tedy* $A_2 = 8$ *to jest člen* $8\cos 2\pi\alpha$.
Dále jest $A_4 = 2+4 = 6$ (*neboť* $I^+(4) = 0$, $I^-(4) = 1$ *tj.* $4 = 7-3$)
$A_6 = 2 + 4I^+(6) + 4I^-(6) = 2$ (6 *není součet dvou různých prvoč. ani rozdíl*)
$A_8 = 4I^+(8) + 4I^-(8) = 4$ ($I^+(8) = 1$, $8 = 5+3$, $I^-(8) = 0$)
$A_{10} = 2 + 4I^+(10) + 4I^-(10) = 6$ ($I^+(10) = 1$, $7+3$; $I^-(10) = 0$)
$A_{12} = 4I^+(12) + 4I^-(12) = 4$ ($12 = 7+5$, $I^-(12) = 0$)

$A_{14} = 2 + 4I^+(14) + 4I^-(14) = 2 \; (I^+ = 0, \; I^- = 0 \;)$
Indexy větší než 14 nemohou se vyskytnouti.)
Tedy podle obecné formule

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 8 + 4\cos\pi\alpha + 4\cos 3\pi\alpha + +4\cos 5\pi\alpha \\ &+ 4\cos 7\pi\alpha + 4\cos 9\pi\alpha + \\ &+ 8\cos 2\pi\alpha + 6\cos 4\pi\alpha + 2\cos 6\pi\alpha + 4\cos 8\pi\alpha + 6\cos 10\pi\alpha \\ &+ 4\cos 12\pi\alpha + 2\cos 14\pi\alpha \end{aligned}$$

a to jest týž výsledek jako při přímém násobení. Totéž vyjde pro $N = 2N_1 = \underline{10}$ *neboť prvočísla jsou táž* $2, 3, 5, 7$.
Z obecné formule pro $F(\alpha)$ *mohu přímo vypočísti hodnotu tu pro každé vhodně volené* $\underline{\alpha}$.
Tak n.př. $\alpha = 0$, $\cos\pi k\alpha = 1$ *dostanu*

$$\begin{aligned} (2\Pi(2N_1))^2 &= 2\Pi(2N_1) + 12 + 4\,(\Pi(2N_1) - 3) + 4\,(\Pi(2N_1) - 2) \\ &+ 8 + 4I^-(2) + 2\Pi(2N_1) + 4\sum_{k=2}^{k\le 2N_1} I^+(2k) + 4\sum_{k=2}^{k\le 2N_1} I^-(2k) \\ 4\Pi^2(2N_1) &= 12\Pi(2N_1) + 4I^-(2) + 4\sum_{k=2}^{k\le 2N_1} I^+(2k) + 4\sum_{k=2}^{k\le 2N_1} I^-(2k) \end{aligned}$$

$I^{-2}(2)$ *jest počet dvojčat* > 7. $I^-(2k)$ *jest počet „káčat“ a* $I^+(2k)$ *jest počet representací čísla* $\underline{2k}$ *jako součet dvou od sebe* *<u>různých</u>* *lichých prvočísel menších než* $\underline{2N_1}$.

Následuje téměř polovina strany textu, jež je přeškrtána a označena jako chybná.

$$\Pi^2(2N_1) = 3\Pi(2N_1) + I^-(2) + \sum_{k=2}^{k\le 2N_1} \big(I^+(2k) + I^-(2k)\big)$$

$$A_4 - 2 = 4\,, A_6 - 2 = 0\,, A_8 = 4\,, A_{10} - 2 = 4\,, A_{12} = 4\,, A_{14} - 2 = 0$$

$$4^2 = 3\cdot 4 + 4 \overset{!}{\to}= 16$$

<u>10.XI.</u> *Zcela podobnou úvahu mohu provésti pro funkci* $(p_n \le 2N_1)$

$$G(\alpha) = \big(e^{i\pi p_1\alpha} + e^{i\pi p_2\alpha} + \cdots + e^{i\pi p_n\alpha}\big)\,\big(e^{-i\pi p_1\alpha} + e^{-i\pi p_2\alpha} + \cdots + e^{-i\pi p_n\alpha}\big)$$

Zde dostanu cosinusový polynom $\cos k\pi\alpha$ *kdež* $\underline{k}$ *jsou jen* *<u>rozdíly</u>* *prvočísel.*
Prostý člen jest zřejmě jen $\Pi(2N_1)$.
$p_1 = \underline{2}$ *ostatní* p_k *jsou lichá prvočísla* $< 2N_1$ *(To už jsem jednou dělal na str. 96. a 97. avšak tam jsem nebral do počtu prvočíslo* $p_1 = 2$.)

<u>11.11.</u> *Jest patrno, že na pravé straně dostanu při* $\underline{\cos\pi\alpha}$ *koeficient* $\underline{2}$ *protože člen* $A_1\cos\pi\alpha$ *vznikne sečtením členů*

$$e^{i2\pi\alpha}\cdot e^{-i3\pi\alpha} + e^{-i2\pi\alpha}\cdot e^{+i3\pi\alpha} = 2\cos\pi\alpha$$

a žádným jiným způsobem. Dále dostanu dostanu $2\cos(2k+1)\pi\alpha$ *tolikrát kolikrát se dá* *<u>liché</u>* *číslo* $(2k+1)$ $(k \geq 1)$ *vyjádřiti jako rozdíl* $\underline{p-2}$ *kdež* $\underline{p}$ *jest liché prvočíslo* $< 2N_1$. *Žádné jiné* *<u>liché</u>* *číslo nelze vyjádřiti jako rozdíl dvou prvočísel. Tedy členy cosinusového polynomu pro* *<u>liché</u>* *násobky čísla* $\underline{\pi\alpha}$ *budou* *<u>pouze</u>* *tyto*

$$S_1(\alpha) = \sum_{p\geq 3}^{p<2N_1} 2\cos(p-2)\pi\alpha\,.$$

V tom jest zahrnut i člen $2\cos\pi\alpha$ *(pro* $p = 3$*). Počet všech těchto sčítanců jest tedy* $(\Pi(2N_1)-1)$.

Dále dostanu $\underline{2\cos 2k\pi\alpha}$ *tolikrát, kolik jest lichých prvočísel v intervalu* $\langle 3, 2N_1\rangle$ *jichž* *<u>rozdíl</u>*

$$p_{n_\lambda} - p_{n_\nu} = 2k \quad n_\lambda > n_\nu\,.$$

To jest počet „káčat“ $= I^-(2k)$. *Přesněji řečeno jest to počet těch lichých prvočísel* $< 2N_1$ *jimž ve vzdálenosti* $\underline{2k}$ *(v přirozené řadě čísel) předchází také liché prvočíslo (n.př.* $p = 11^{ti}$ *předchází ve vzdálenosti* $2k = 4$ *prvočíslo* $\underline{7}$*). Bude tedy v součtu* $G(\alpha)$ *člen* $2I^-(2k)\cos 2k\pi\alpha$

Tak n.př. bude $I_1^-(2)$ *počet* *<u>párů</u>* *dvojčat lichých prvočísel a to* *<u>úplných</u>* *párů (t.j.* *<u>větší</u>* *z dvojčat musí ještě býti* $< 2N_1$*) Proti značení na str. 104. jest tedy*

$$I^-(2) = I_1^-(2) - 2$$

(neboť při $I^-(2)$ *odpadají dvojčata* $(3,5)$, $(5,7)$*). Jest tedy celkem*

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \Pi(2N_1) + 2\sum_{p\geq 3}^{p<2N_1} \cos(p-2)\pi\alpha + (4 + 2I^-(2))\cos 2\pi\alpha \\ &+ 2\sum_{k\geq 2}^{k<N_1} I^-(2k)\cos 2k\pi\alpha \end{aligned}$$

V posledním součtu podmínka $k < N_1$ *jest způsobena tím, že* *<u>největší</u>* *sudé číslo* $\underline{2k}$ *které vůbec mohu obdržeti jest* $\underline{p_n - 3} = 2k_{max}$ *a tedy* $k_{max} = \frac{p_n-3}{2} \leq N_1 - 1$.

To ovšem platí i ve *<u>formuli</u>* *pro* $F(\alpha)$ *na str. 105. takže tam jsou všechna* $I^-(2k)$ *pro* $k > N_1 - 1$ *rovna* *<u>nule</u>*. *Zejména jest tedy pro* $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \Pi^2(2N_1) &= \Pi(2N_1) + 2(\Pi(2N_1) - 1) + 4 + 2I^-(2) + 2\sum_{k\geq 2}^{k<N_1} I^-(2k) \\ & 3\Pi(2N_1) + 2 + 2I^-(2) + 2\sum_{k\geq 2}^{k<N_1} I^-(2k) \end{aligned}$$

Mimo to podle str. 107.

$$\Pi^2(2N_1) = 3\Pi(2N_1) + I^-(2) + \sum_{k=2}^{k\leq 2N_1} I^+(2k) + \sum_{k=2}^{k\leq N_1-1} I^-(2k)$$

Odečtením těchto rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= 2 + I^-(2) + \sum_{k=2}^{N_1-1} I^-(2k) - \sum_{k=2}^{k\le 2N_1} I^+(2k) \\ \sum_{k=2}^{k\le 2N_1} I^+(2k) &= 2 + I^-(2) + \sum_{k=2}^{N_1-1} I^-(2k) \end{aligned}$$

To jsem eliminoval z rovnic $\Pi(2N_1)$. *Mohu také eliminovati součet* $I^-(2) + \sum_{k=2}^{N_1} I^-(2k)$
Dostanu tak

$$2\sum_{k=2}^{2N_1} I^+(2k) = \Pi^2 - 3\Pi + 2 = (\Pi - 1)(\Pi - 2)$$

Tak n.př. pro $2N_1 = 8$ *jest*

$$I^+(4) = 0\,, \quad I^+(6) = 0\,, \quad I^+(8) = 1 \quad (8 = 3 + 5)$$

$$I^+(10) = 1 \quad (10 = 3 + 7)\,, \quad I^+(12) = 1 \quad (12 = 7 + 5)$$

$$I^+(14) = 0\,, \quad I^+(16) = 0\,, \quad \Pi(8) = 4$$

$$(\Pi - 1)(\Pi - 2) = 6 = 2 \cdot 3 = 6$$

To všechno jsou asi triviality. Chci-li dostati více musím užíti formulí pro $\alpha \neq 0$ *a pokusiti se o výpočet koeficientů cosinusového polynomu pomocí sčítání* <u>*bez užití*</u> *integrálů* $\int_0^{2\pi} \cos 2k\pi\alpha F(\alpha)\, d\,\alpha$.

21. listopadu 1950 Kössler konstatoval, že nevidí cestu dál, a tak se znovu vrátil ke hledání reálné charakteristiky $\mathcal{M}(r)$. Dospěl k následujícímu výsledku:

Budiž

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

moc. řada s komplex. koeficienty $\underline{a_k}$ *toho druhu, že ji není možno substitucí* $z = z_1 e^{i\psi}$ *převésti v řadu s koeficienty vesměs reálnými. To znamená, že nesmí býti pro všechna* $k \geq 1$

$$a_k = \pm |a_k| e^{-ki\psi} \quad \textit{při pevném } \psi\,.$$

Podle věty Blumenthalovy existuje interval $0 < r < r_1 > 0$ *v němž*

$$\mathcal{M}(r) = max_{|z|=r}|f(z)| = 1 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \cdots\,,$$

kdež $b_1 > 0$ *a všechna další* b_k, $k \geq 2$ *jsou reálná.* $\underline{b_1}$ *musí býti positivní protože* $\mathcal{M}(r)$ *monot. stoupá s* $\underline{r}$.

Sestrojím-li nyní řadu mocninnou s reál. koeficienty

$$f_1(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$$

pak v jistém intervalu $0 < r < r_2 > 0$ *jest podle důkazu na str. 113–118.*

$$\mathcal{M}_1(r) = max_{|z|=r}|f_1(z)| = f_1(r)$$

Je-li $\underline{r_3}$ *menší z čísel* r_1, r_2 *pak tedy mají obě řady* $f(z) = 1+\sum_1^\infty a_k z^k$, $f_1(z) = 1+\sum_1^\infty b_k z^k$ *totéž* $\mathcal{M}(r) = f_1(r)$ *v intervalu* $0 < r < r_3 > 0$.

Tento výsledek platí i v případě kdy několik prvních koef. $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_{n-1} = 0$ *avšak* $b_n \neq 0$. *Pak musí* $b_n > 0$ *protože* $\mathcal{M}(r)$ *jest rostoucí funkce* $\underline{r}$.

Deník č. XVI

Na str. 1–3 autor dospěl k poněkud překvapivému výsledku v rámci hledání reálných charakteristik mocninných řad:

Dvě zcela různé mocninné řady

$$f(z) = 1 + iz + iz^2 + iz^3 + \cdots, \quad f_1(z) = \frac{z + \sqrt{1 - 2z^2 + 2z^4}}{1 - z^2}$$

mají v intervalu $0 \leq |z| = r \leq r_1$ *stejné maximum prosté hodnoty a stejné minimum prosté hodnoty*

$$Max_{|z|=r}|f(z)| = Max_{|z|=r}|f_1(z)| = f_1(r)$$

$$min_{|z|=r}|f(z)| = min_{|z|=r}|f_1(z)| = f_1(-r)$$

pokud $r \leq r_1$.

Pozoruhodný byl podle Kösslera především fakt, že tyto dvě zcela různé funkce mají současně společné $\mathcal{M}(r)$ i $m(r)$.

Na str. 4 pak byl vyšetřován polynom $\mathcal{P}(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5$ s reálnými koeficienty pomocí associované resultanty. Jednalo se o problém, kterému se Kössler věnoval již v deníku č. VII, avšak tehdy ještě neměl k dispozici vytvořenou obecnou teorii pro studium prostých polynomů (viz práce *Simple polynomials*).

Zápis od str. 12 byl opět věnován otázce kruhové ohrady funkčních hodnot. Na str. 18 byl formulován dílčí výsledek:

Polynom $A_1 e^{i\varphi} + A_2 e^{2i\varphi}$ $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ *má poloměr kruhové ohrady*

$$R = \frac{1}{8\sqrt{2}A_2}\left\{80A_1^2A_2^2 + 128A_2^4 - A_1^4 + A_1(A_1^2 + 32A_2^2)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Následující stránky deníku věnované částečně kruhovým ohradám, reálným charakteristikám, částečně prostým polynomům jsou poněkud chaotické – např. část textu je přeškrtána, označena za chybnou, a poté znovu za správnou apod. Na str. 55 je formulován nový problém – geometrický, resp. topologický význam diskriminantu algebraické rovnice s reálnými koeficienty.

Na str. 68 se opět Kössler vrátil k vyšetřování reálných charakteristik $\mathcal{M}(r)$ a $m(r)$, na str. 79 pro změnu připisoval další poznámky k prostým polynomům s vesměs reálnými koeficienty. V textu se opět vyskytují dlouhé úseky, které jsou chybné nebo zbytečně složité. Na str. 112 je formulována jistá nutná podmínka pro prosté polynomy, která je dále doprovázena příkladem pro polynom $\mathcal{P}(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$.

Deník č. XVII

Na začátku tohoto sešitu se autor vrátil ke str. 99 z deníku č. XVI, tj. k prostým polynomům s vesměs reálnými koeficienty. Jedná se o problematiku související s článkem *Simple polynomials*, Kössler si proto do sešitu vložil separát své práce [K30]. Na str. 42 (zápis ze dne 22. září 1951) se zmínil o tom, že jej od října opět čekají přednášky, a proto namáhavých úvah zanechal a začal se zabývat jinou problematikou, a sice konstrukcí funkce s kruhovou ohradou $|w| = 1$. Uvažoval nezáporný trigonometrický polynom

$$(1 - \cos\varphi)(1 + \cos 2\varphi) = 1 - \frac{3}{2}\cos\varphi + \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi$$

a jemu příslušný polynom $\mathcal{P}(z) = 1 - \frac{3}{2}z + z^2 - \frac{1}{2}z^3$. Funkce $w = f(z) = e^{-\mathcal{P}(z)}$ tedy měla vlastnost $|f(z)| \leq 1$ pro $|z| \leq 1$ a dále $f(1) = 1$, $f(i) = e^{-i}$, $f(-i) = e^{i}$. Body 1, e^i, e^{-i} však v rovině w tvoří tupoúhlý trojúhelník, a proto nejde o hledanou funkci. Abychom získali funkci s kruhovou ohradou $|w| = 1$, stačí uvažovat funkci

$$f_1(z) = f^2(z) = e^{-2+3z-2z^2+z^3}\,.$$

Podobně lze konstruovat další funkce s kruhovou ohradou $|w| = 1$ ve tvaru $f_\alpha(z) = f^\alpha(z)$ pro $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ atd. Za problémy diskutované v následující části těchto zápisků zmíníme alespoň jeden:

<u>*4.X.51*</u> *Tato formule řeší problem zásadní důležitosti: Jest dána řada*

$$A(r) = r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + \cdots + A_k r^k + \cdots$$

s <u>reálnými</u> koefic. a positivním poloměrem konvergence. Jest nalézti všechny analyt. funkce tvaru

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty}(a_k + ib_k)z^k$$

s reálnými (a_k, b_k), které mají pro dosti malá $|z|$ <u>totéž</u> maximum reálné části dané řadou $A(r)$.

Podle předcházející úvahy to budou ty funkce $f(z)$, pro které jest

$$a_2 = A_2\,, \quad a_3 + 2b_2^2 = A_3\,, \quad a_4 + 6b_2b_3 - 8b_2^2a_2 = A_4 \quad \textit{atd.} \qquad (*)$$

Jsou-li <u>všechna</u> $b_k = 0$ pak zřejmě ta řada jest $f_1(z) = z + \sum_2^\infty A_k z^k$, což jest výsledek už mi známý.

Avšak jest zřejmé, že takových řad bude nespočetně nekonečně mnoho, protože při daných $\underline{A_k}$ mají rovnice $(*)$ *nekonečně mnoho řešení pro koef.* (a_k, b_k). *Musí sice* *vždy* $a_2 = A_2$ *avšak už rovnice* $a_3 + 2b_2^2 = A_3$ *neurčuje jednoznačně* $\underline{a_3}$ *a* $\underline{b_2}$. *Zvolím-li nyní* $\underline{a_3}$ *a* $\underline{b_2}$ *tak aby rovnice byla splněna neurčuje opět další* $A_4 = a_4 + 6b_2b_3 - 8b_2^2a_2$ *jednoznačně* $\underline{a_4}$ *a* $\underline{b_3}$ *a t.d.*

Na str. 53 se téma mění, a to směrem k úvahám o diferenčním kvocientu $\Delta(z_1, z_2)$ z práce [K30], ve které byla vyslovena domněnka, že associovaná resultanta nemůže nikdy identicky vymizet. Kössler si poznamenal, že k tomu účelu by bylo postačující dokázat, že rovnice

$$\begin{aligned} \Delta(z_1, z_2) &= 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \left(z_1^{k-1} + z_1^{k-2} \cdot z_2 + \cdots + z_2^{k-1}\right) = 0\,, \\ \overline{\Delta}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \overline{a_k} \left(\frac{1}{z_1^{k-1}} + \frac{1}{z_1^{k-2} \cdot z_2} + \cdots + \frac{1}{z_2^{k-1}}\right) = 0 \end{aligned}$$

nemají nekonstantní společnou míru. Důkaz této úvahy provedl na str. 54–56. V následující části se pokusil využít právě dokázaného faktu pro vyšetřování zásoby funkčních hodnot daného polynomu $w = \mathcal{P}(z)$ uvnitř kruhu s daným poloměrem $|z| = r$. V zápisu ze dne 29. prosince 1951 se pak začal opět důkladněji věnovat reálným charakteristikám mocninných řad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Jednou z otázek, kterými se v této souvislosti zabýval, byla otázka, zda totéž $A(r)$ může příslušet k různým mocninným řadám. Na str. 108 (zápis z 21. února 1952) najdeme zmínku o tom, že autor v této době psal článek o reálných charakteristikách $A(r)$, $B(r)$, $\mathcal{M}(r)$ a $m(r)$. V dalším textu se tak objevují poznámky, které byly v upravené podobě publikovány v práci [K31] o dva roky později.

Deník č. XVIII

Úvodní strany byly věnovány charakteristikám polynomů, specielně funkcím

$$e^{i\varphi_1(r)} = \cos\varphi_1(r) + i\sin\varphi_1(r)\,,$$

přičemž za $\sin\varphi_1(r)$ byla volena mocninná řada $\sin\varphi_1(r) = \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \cdots = \psi(r)$, a dále charakteristice $A(r) = r + \alpha r^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Na str. 10 se objevuje poznámka k teorii prostých funkcí v kruhu $|z| \leq 1$, týkající se důkazu souvislosti prostoru koeficientů určeného associovanou resultantou. Úvahy jsou vedeny částečně v obecné rovině, částečně pro konkrétní funkce, např. na str. 25 pro funkci

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{ki\varphi}, k > 0\,.$$

Na str. 29 se Kössler zabýval otázkou, které polynomy

$$w = f(t) = t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots + a_nt^n$$

komplexní proměnné t jsou prosté v polorovině $-\tau < \mathrm{Im}(t) < +\infty$ ($\tau > 0$). Vyslovil nutnou podmínku pro to, aby $f(t)$ byla prostá funkce: alespoň jeden z koeficientů a_k musí být komplexní. Dále ukazuje, že v takto volené polorovině mohou být prosté polynomy nejvýše druhého stupně (str. 37) $P(t) = t + a_2t^2$. Na str. 38 se Kössler vrátil k vyšetřování prostého polynomu $P(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3$, $|z| \leq 1$, $a_3 \geq 0$, jemuž se částečně věnoval už v práci [K30]. O čtyři strany dále však poznamenal, že nemá náladu se tímto trápit hlouběji, a tak si zapsal následující:

21.V.52 *Nápad o nulových bodech $\zeta(s)$.*

Jest

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} .$$

Tedy

$$\zeta(2s) = \frac{1}{\prod_p (1 - \frac{1}{p^s}) \cdot \prod_p (1 + \frac{1}{p^s})} = \zeta(s) \cdot \frac{1}{\prod_p (1 + \frac{1}{p^s})} .$$

Tedy $\zeta(s) = \zeta(2s) \cdot \zeta_1(s)$ *kdež*

$$\zeta_1(s) = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s}) = \sum_1^\infty \frac{|\mu(n)|}{n^s}$$

kdež $\mu(n) = 0, +1, -1$ *jsou Moebius. faktory. Z toho plyne*

$$\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta_1(2s) \cdot \zeta(4s)$$

a obecně

$$\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta_1(2s) \cdot \zeta_1(2^2s) \cdots \zeta_1(2^{n-1}s) \cdot \zeta(2^ns) .$$

$\underline{n}$ libovolné celé číslo ≥ 1. *Protože* $\zeta(s)$ *a* $\zeta(2s)$ *jsou celistvé transcend. až na triviální poly* ($s = 1$ *a* $s = \frac{1}{2}$) *musí* $\zeta_1(s)$ *býti meromorfní funkce. Rovnice*

$$\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta(2s)$$

má tento důsledek:

Protože $\zeta(s)$ *nemá nulové body pro* $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ *nemůže míti* $\zeta(2s)$ *nulové body pro* $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$. *Z toho plyne že <u>všechny</u> nulové body* $\zeta(s)$ *ležící v pásu* $\frac{1}{2} \leq s < 1$ *jsou současně nulovými body (- a to stejné multiplicity -) funkce* $\underline{\zeta_1(s)}$. *Dále jest zřejmé že* $\zeta_1(s)$ *nemůže míti pro* $\frac{1}{2} \leq s < 1$ *<u>žádný pól</u> protože ho nemá* $\zeta(s)$. *Mimo to musí* $\zeta_1(\frac{1}{2}) = 0$ *protože* $\zeta(2s)$ *pro* $s = \frac{1}{2}$ *má pól a* $\zeta(\frac{1}{2}) \neq 0$. *Z předešlého plyne zejména, že všechny kompl. nulové body* $\zeta(s)$ *ležící na kritické přímce* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, *jichž jest nekoneč. mnoho (Hardy), musí mít také funkce* $\zeta_1(s)$ *a to v téže multiplicitě jako* $\zeta(s)$. *To plyne z toho, že tam* $\zeta(2s)$ *<u>nemá</u> nulové body. Mimo má* $\zeta_1(s)$ *a* $\zeta(s)$ *společný pol* $s = 1$. *Pro* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *nemá* $\zeta_1(s)$ *ani nulové body ani poly.*

<u>8.VI.</u> *Ty nulové body* $\zeta(s)$ *mi nechtějí jíti z hlavy. Zapíšu si některé důsledky vztahu*

$$\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta(2s) .$$

$\zeta(s)$ a $\zeta_1(s)$ mají v pásu $\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(s) < 1$ společné nulové body téže multiplicity protože $\zeta(2s)$ tam nemá nul. body. ($\zeta_1(s)$ jest tam regulární, $\zeta_1(1) = \infty$; $\zeta_1(\frac{1}{2}) = 0$) Nyní jsou dvě možnosti:

(I) … Buď $\zeta_1(s)$ nemá v pásu $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ žádný nul. bod nebo má tam nul. body … (II)

V prvním případě pak $\zeta(s)$ musí míti v tom pásu nulové body shodné s nul. body $\zeta(2s)$ a žádné jiné nul. body tam nemůže míti.

Jsou-li nyní s_1, $\overline{s_1}$, s_2, $\overline{s_2}$, …, s_n, $\overline{s_n}$, … nulové body $\zeta(s)$ v pásu $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,(s) < 1$ má $\zeta(2s)$ nulové body $\frac{s_1}{2}$, $\frac{\overline{s_1}}{2}$, $\frac{s_2}{2}$, $\frac{\overline{s_2}}{2}$, … v pásu $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}\,(\frac{s_k}{2}) < \frac{1}{2}$. Ty tedy musí býti buď současně nulovými body $\zeta(s)$. To jest $\zeta(\frac{s_k}{2}) = 0$ a tedy i $\zeta(1 - \frac{\overline{s_k}}{2}) = 0$ (podle funkční rovnice $\zeta(s)$). Avšak

$$\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,(1 - \frac{\overline{s_k}}{2}) < \frac{3}{4}\,.$$

Jiná možnost jest, že takový nulový bod $\zeta(2s)$ t.j. $\frac{s_k}{2}$ jest současně polem funkce $\zeta_1(s)$ který ruší ten nulový bod $\zeta(2s)$ a pak tam není $\zeta(\frac{s_k}{2}) = 0$. Kdyby toto bylo splněno pro všechna $\frac{s_k}{2}$ pak $\zeta(s)$ by vůbec neměla žádný nulový bod v pasu $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ a tedy také žádný v pásu $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < \frac{3}{4}$. Je-li splněna Rieman. doměnka pak nastává právě tento případ.

Učiním-li vedle předpokladu (I) (že $\zeta_1(s)$ nemá v pásu $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ žádný nulový bod) ještě další předpoklad (Ia), že tam také nemá žádný pol pak zřejmě všechna $\frac{s_k}{2}$, $\frac{\overline{s_k}}{2}$ jsou i nulovými body $\zeta(s)$ v tom pásu a jiné nulové body tam $\zeta(s)$ nemůže míti. Pak jest však také

$$\zeta(1 - \frac{\overline{s_k}}{2}) = \zeta(1 - \frac{s_k}{2}) = 0$$

a přitom $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,(1 - \frac{\overline{s_k}}{2}) < \frac{3}{4}$ a jiné nulové body $\zeta(s)$ v tomto pásu neexistují.

Za předpokladů (I) a (Ia) lze dokázati, že Rieman. dom. jest splněna (viz str. 54). Důkaz prozatím vypustím protože jsem dostal jiný nápad.

9.VI.1952 Sestrojím totiž funkční rovnici pro $\zeta_1(s)$. Jest

$$\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta(2s) \qquad (\alpha)$$

a tedy

$$\zeta(1 - s) = \zeta_1(1 - s) \cdot \zeta(2 - 2s)\,.$$

Užiju funkční rov. (Landau: Primzahlen I. 285.)

$$\zeta(1 - s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \cdot \zeta(s) \qquad (\gamma)$$

Tedy

$$\zeta(1 - s) = F(s) \cdot \zeta(s)\,.$$

$F(s)$ jest meromorfní funkce s poly $s = 0, -2, -4, -6,$ … a nemá žádné komplexní nulové body ani póly. Jest tedy

$$F(s) \cdot \zeta(s) = \zeta(1 - s)\zeta(2 - 2s) \qquad (\beta)$$

Podle (α) *jest tedy*

$$F(s)\cdot\zeta_1(s)\cdot\zeta(2s)=\zeta_1(1-s)\zeta(2-2s)$$

Zavedu novou proměnnou $s=\frac{1+\sigma}{2}$

$$F\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\cdot\zeta_1\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\cdot\zeta(1+\sigma)=\zeta_1\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\zeta(1-\sigma)$$

Kladu-li místo σ *opět* s *dostanu*

$$\zeta(1-s)\zeta_1\left(\frac{1-s}{2}\right)=F\left(\frac{1+s}{2}\right)\cdot\zeta_1\left(\frac{1+s}{2}\right)\cdot\zeta(1+s)$$

$\zeta(1-s)$ *nahradím výrazem* (γ)

$$F(s)\cdot\zeta(s)\cdot\zeta_1\left(\frac{1-s}{2}\right)=F\left(\frac{1+s}{2}\right)\cdot\zeta_1\left(\frac{1+s}{2}\right)\cdot\zeta(1+s)$$

$$\zeta_1\left(\frac{1+s}{2}\right)=\frac{F(s)}{F(\frac{1+s}{2})\cdot\zeta(1+s)}\cdot\zeta(s)\cdot\zeta_1\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

$F(s)/F(\frac{1+s}{2})$ *nemá žádné* <u>*komplex.*</u> *nulové body ani poly. Také* $1/\zeta(1+s)$ *nemá* <u>*žádný*</u> *nulový bod ani pol pokud* $\underline{\mathrm{Re}(s)>0}$*. Tedy funkce meromorfní*

$$G(s)=\frac{F(s)}{F(\frac{1+s}{2})\cdot\zeta(1+s)}$$

nemá v půlrovině $\mathrm{Re}(s)>0$ <u>*žádné komplexní*</u> *nulové body ani poly.*

$$\zeta_1\left(\frac{1+s}{2}\right)=G(s)\cdot\zeta(s)\cdot\zeta_1\left(\frac{1-s}{2}\right)\qquad(\delta)$$

Tato vlastnost funkce $G(s)$ *platí, tedy zejména v pásu kritickém* $0<\mathrm{Re}(s)<1$*. Jest tedy v tomto pásu* $\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,(\frac{1+s}{2})<1$.
Symetrický tvar (δ) *jest*

$$F\left(\frac{1+s}{2}\right)\cdot\zeta_1\left(\frac{1+s}{2}\right)\cdot\zeta(1+s)=F(s)\zeta(s)\zeta_1\left(\frac{1-s}{2}\right)\qquad(\gamma)$$

Je-li s_1 *nulový kompl. bod* $\zeta(s_1)=0\quad 0<\mathrm{Re}\,(s_1)<1$ *musí buď* $\zeta_1(\frac{1-s_1}{2})=\infty$ *a rušiti nulový bod* $\zeta(s_1)=0$ *nebo je-li* $\zeta_1(\frac{1-s_1}{2})\neq\infty$ *musí* $\zeta_1(\frac{1+s_1}{2})=0$ *protože*

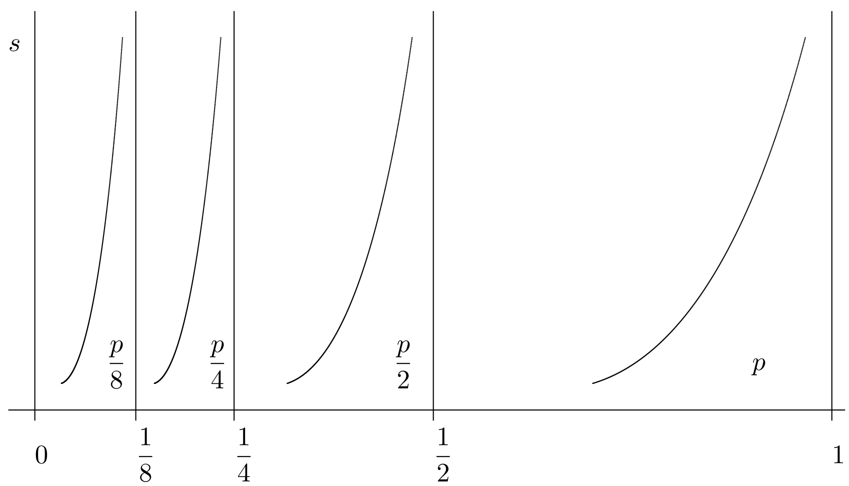
$$F(\frac{1+s_1}{2})\cdot\zeta(1+s_1)\neq 0$$

a tedy i $\zeta(\frac{1+s_1}{2})=0$ *(v* $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ *mají* $\zeta_1(s)$ *a* $\zeta(s)$ *společné nul. body!)*

<u>*18. VI.*</u> *Pozbývám naděje, že bych tak mohl něco nového dokázat! Budu asi nucen celou věc nechat „uležet“ a vrátit se k ní později.*

Poznamenám si zde však ještě jednu úvahu, abych na ni nezapoměl.

Jest známo, že $\zeta(s)$ *nemá nul. body v jistém prostoru* $\underline{p}$ *poblíže přímky* $\mathrm{Re}(s) = 1$ *který se „nahoru“ a dolů zůžuje. (Viz obrazec)*



Obr. -ii-

Jest $\zeta(s) = \zeta_1(s)\zeta(2s)$. *Sestrojím prostory (uzavřené)*

$$\frac{p}{2}, \frac{p}{4}, \frac{p}{8}, a.t.d.$$

Protože v $\underline{p}$ *jest* $\zeta(2s) \neq 0, \infty$ *musí* $\zeta(s)$ *a* $\zeta_1(s)$ *míti v* $\frac{p}{2}$ *a na pravo tytéž nulové body stejné multiplicity a* $\zeta_1(s)$ *tam nemá pol protože* $\zeta(2s)$ *jest tam* $\neq 0, \infty$. *(Uvažuju jen komplexní s!) Zejména má* $\zeta_1(s)$ *na krit. přímce* $s = \frac{1}{2} + it$ *tytéž nulové body jako* $\zeta(s)$. *Dále jest*

$$\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta_1(2s) \cdot \zeta(4s)$$

Je-li (s_1) *posloupnost nulových bodů* $\zeta(s)$ *a tedy* $\zeta_1(s)$ *v* $(\frac{p}{2})$ *má* $\zeta_1(2s)$ *v* $(\frac{p}{4})$ *posl. nulových bodů* $(\frac{s_1}{2})$ *a žádné jiné.*

$\zeta(4s) \neq 0, \infty$ *v* $(\frac{p}{4})$

Mimo to $\zeta_1(2s)$ *nemá v* $(\frac{p}{4})$ *pol (protože* $\zeta_1(s)$ *nemá v* $(\frac{p}{2})$ *poly). Jestliže tedy* $\zeta_1(s)$ *má v* $(\frac{p}{4})$ *pol musí to býti současně nulový bod* $\zeta_1(2s)$, *který ten pol zruší. Všechny nulové body* $\zeta_1(2s)$ *v* $(\frac{p}{4})$ *jsou dány posloupností* $(\frac{s_1}{2})$. *Tedy* $\zeta_1(s)$ *může míti v* $(\frac{p}{4})$ *pouze poly vyskytující se v posloupnosti* $(\frac{s_1}{2})$.

Nyní jsou dvě možnosti. Buď ty poly $\zeta_1(s)$ *v* $(\frac{p}{4})$ *jsou všechny body posloupnosti* $(\frac{s_1}{2})$ *a pak součin* $\zeta_1(s) \cdot \zeta_1(2s)$ *jest buď konečný nebo nula. Nebo poly* $\zeta_1(s)$ *v* $(\frac{p}{4})$ *vyčerpají pouze část posloupnosti* $(\frac{s_1}{2})$ *a pak zbývající posloupnost* $(\frac{s_2}{2}) \subset (\frac{s_1}{2})$ *musí tvořiti nulové body funkce* $\underline{\zeta(s)}$ *v* $(\frac{p}{4})$.

Totéž ovšem nastane jestliže sice <u>*celá*</u> *posl.* $(\frac{s_1}{2})$ *tvoří poly* $\zeta_1(s)$ *v* $(\frac{p}{4})$ *avšak aspoň některé z těch* $(\frac{s_1}{2})$ *mají vlastnost* $\zeta_1(\frac{s_1}{2}) \cdot \zeta_1(s_1) = 0$. *Jsou-li* <u>*všechna*</u> $\zeta_1(\frac{s_1}{2}) \cdot \zeta_1(s_1) \neq 0$ *pak* $\zeta(s)$ <u>*nemá žádný*</u> *nulový bod v* $(\frac{p}{4})$. *Jestliže však existuje posl.* $(\frac{s_2}{2}) \subset (\frac{s_1}{2})$ *neprázdná pak musí* $\zeta(s)$ <u>*má nulové body*</u> $(\frac{s_2}{2})$ *v* $(\frac{p}{4})$ *a žádné jiné. Pak však platí* $\zeta(\frac{s_2}{2}) = \zeta(s_2) = 0$ *kdež* s_2 *leží v* $(\frac{p}{2})$.

<u>*21. VI.*</u> *Slunovrat.*

Z rovnice $\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta(2s)$ *se mi nepodařilo dokázati nic jiného nežli toto.* $\zeta_1(s)$ *má pro* $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ *tytéž nulové body jako* $\zeta(s)$ *a to stejné multiplicity. Mimo to v této půlrovině nemá* $\zeta_1(s)$ *žádný komplexní pol, protože* $\zeta(2s) \neq 0, \infty$ *a rovněž* $\zeta(s) \neq 0, \infty$ *(pol* $\zeta(1) = \infty$ *nebeřu v úvahu protože uvažuji* <u>*pouze*</u> *komplexní* s. *Musí ovšem* $\zeta_1(\frac{1}{2}) = 0$ *protože* $\zeta(2 \cdot \frac{1}{2}) = \infty$ *a dá to* $\zeta_1(1) = \infty$ *protože* $\zeta(1) = \infty$.)

Zejména má $\zeta_1(s)$ *s* $\zeta(s)$ *všechny nulové body tvaru* $s = \frac{1}{2} + it$ *společné co do hodnoty i multiplicity. Domnívám se však že z funkční rovnice* (γ), *je-li ovšem správně odvozena, plynou další poznatky o nulových bodech funkce* $\zeta_1(s)$ *a také o jejích případných polech.*

Ještě další důsledek plyne z rovnice

$$\zeta_1(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\,.$$

Protože pro <u>*reálná*</u> s *nabývá* $\zeta_1(s)$ *reálných hodnot, tedy podle principu zrcadlení pro komplexní* $\underline{s_1}$ *nabývá jisté hodnoty a pro komplexně sdružené* $\overline{s_1}$ *nabývá hodnoty komplexně sdružené t.j.*

$$\overline{\zeta_1(s_1)} = \zeta_1(s_1)\,.$$

Z toho plyne zejména: Je-li v $\underline{s_1}$ *komplexním nul. bod nebo pol funkce* $\zeta_1(s)$ *má také v bodě* $s = \overline{s_1}$ *nulový bod nebo pol stejné multipl. jako v bodě* $s = s_1$.

Funkční rovnice (γ) *má tvar (str. 47)*

$$F\left(\frac{1+s}{2}\right) \cdot \zeta(1+s) \cdot \zeta_1\left(\frac{1+s}{2}\right) = F(s)\zeta(s)\zeta_1\left(\frac{1-s}{2}\right) \qquad (\gamma)$$

Budu nyní předpokládati, že

$$\underline{1 \geq \mathrm{Re}(s) \geq 0}$$

a že $\underline{s}$ *jest komplexní (nikoliv reálné). Potom* $\frac{1}{2} \geq \mathrm{Re}\,(\frac{1-s}{2}) \geq 0$.

Funkce $\zeta_1(s)$ *může míti v levé polorovině kritického pásu (tj. pro* $0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ *) nulové body a také poly. Dejme tomu, že číslo* $\frac{1-s_1}{2}$ *jest nulovým bodem t.j.* $\zeta_1(\frac{1-s_1}{2}) = 0$. *Potom se anuluje pravá str. rovnice* (γ) *(protože ani* $\zeta(s)$ *ani* $F(s)$ *nemají pol) a tedy se anuluje i levá strana. To však musí*

$$\zeta_1\left(\frac{1+s_1}{2}\right) = 0$$

protože $F(\frac{1+s_1}{2})$ *a* $\zeta(1+s_1)$ *jsou konečná a od nuly různá čísla. Nulové body* $\zeta_1(s)$ *t.j. čísla* $\frac{1-s_1}{2}$ *a* $\frac{1+s_1}{2}$ *jsou tedy téže multiplicity pokud* <u>*není*</u> *současně* $\zeta(s_1) = 0$. *Nastane-li tento případ pak nulový bod* $s = \frac{1+s_1}{2}$ *jest multiplicity* <u>*vyšší*</u> *než bod* $s = \frac{1-s_1}{2}$.

Současně jest ovšem vždy $\zeta_1(\frac{1-s_1}{2}) = 0$, $\zeta_1(\frac{1+s_1}{2}) = 0$, $\zeta(\frac{1+s_1}{2}) = 0$ *a tedy i*

$$\zeta(1 - \frac{1+s_1}{2}) = \zeta(\frac{1-s_1}{2}) = 0\,.$$

Nulové body $\zeta_1(\frac{1-s}{2})$ *mohou tedy ležeti pouze tam, kde leží nulové body* $\zeta(\frac{1-s}{2})$. (*To plyne ostatně i z rovnice*

$$\zeta_1(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)})\,.$$

24.VI. *Nemohu nalézti nic podstatného. Nechám zatím té věci.*

5.VII. *Některé důsledky přece jest možno odvoditi.*

$$\zeta(s) = \zeta_1(s) \cdot \zeta(2s)$$

V pásu $\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(s) < 1$ *mají* $\zeta(s)$ *a* $\zeta_1(s)$ *tytéž nulové body co do hodnoty i multiplicity. Učiňme o* $\zeta_1(s)$ *předpoklad, že v pásu* $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ *nemá poly a má tam všechny nulové, i co do multipl., body společné s* $\zeta(s)$. *Potom* $\zeta(2s)$ *v tom pásu nesmí míti žádný nul. bod. Je-li* (s_1) *posloupnost nulových bodů* $\zeta(s)$ *v pásu* $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1$ *má* $\zeta(2s)$ *posloup. nul. bodů* $\left(\frac{s_1}{2}\right)$ *v pásu* $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$. *To však jest možné za předpokladu hořejšího jen když posl.* (s_1) *jest prázdná a tedy pak* $\zeta(s)$ *nemá v pásu* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ *žádné nulové body mimo body na kritické přímce* $s = \frac{1}{2} + it$. *Jest tedy splněna R.D. Platí ovšem také opačné tvrzení.* (*Samozřejmé*).

(*Nyní musím udělati pokus o vyšetření předpokladu:* $\zeta_1(s)$ *nemá poly v pásu* $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$. *Při tom o nulových bodech* $\zeta_1(s)$ *v tom pásu nic nepředpokládám. Potom* $\zeta(s)$ *v tom pásu může býti rovno nule jen když současně jest buď* $\zeta_1(s) = 0$ *nebo* $\zeta(2s)$ *nebo konečně obojí* $\zeta_1(s) = \zeta(2s) = 0$.)

6.VII. *Sepíšu si vše co mohu bezpečně dokázati o* $\zeta_1(s)$.

1. *Má v pásu* $\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(s) < 1$ *společné všechny nulové body s* $\zeta(s)$ (*co do hodnoty i multiplicity*). *Dokonce to platí v poněkud širší oblasti.* (*V té kde nemá* $\zeta(2s)$ *nulové body.*)

2. *V této oblasti nemůže míti poly.*

3. *Může míti poly jen na levo od této oblasti a to pouze tam kde* $\zeta(2s)$ *má nulové body. Tyto poly nemohou býti vyššího řádu nežli jest multiplicita přísluš. nulového bodu* $\zeta(2s)$.

4. *Jestliže* $\zeta(s)$ *a* $\zeta(2s)$ *nemají žádný společný nulový bod* s_1, *pak* $\zeta_1(s)$ *má všude tam pol, kde* $\zeta(2s)$ *má nulový bod a to tak že součin* $\zeta_1(s)\zeta(2s)$ *jest tam* $\neq 0, \infty$.

Udělám nyní předpoklad (str. 45) že $\zeta_1(s)$ *v pásu* $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ *nemá ani poly ani nulové body. Je-li* (s_1) *posloup. nulových bodů* $\zeta(s)$ *v pásu* $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1$ *musí* $\zeta(2s)$ *míti nulové* *body* $\left(\frac{s_1}{2}\right)$ *v pásu* $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ *a jen ty nulové body. Vzhledem k předpokladu o* $\zeta_1(s)$ *musí tedy také*

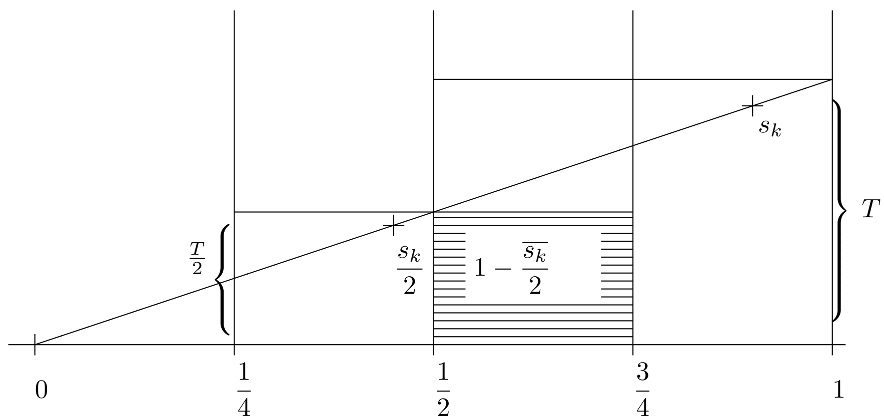
$$\zeta\left(\tfrac{s_1}{2}\right) = \zeta_1\left(\tfrac{s_1}{2}\right) \cdot \zeta(s_1)\,,$$

$$\zeta_1\left(\tfrac{s_1}{2}\right) \neq 0, \infty$$

a tedy $\zeta\left(\frac{s_1}{2}\right) = 0 \quad \zeta\left(\frac{\overline{s_1}}{2}\right) = 0$. *Následkem toho jest také* $\zeta\left(1 - \frac{\overline{s_1}}{2}\right) = 0$ *a při tom* $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\left(1 - \frac{\overline{s_1}}{2}\right) < \frac{3}{4}$.

Nyní postupuji takto:

Zvolím v pásu $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1$ *obdélník omezený reálnou osou a přímkou* $\mathrm{Im}(s) \leq T$ *kdež* $T > 0$ *jinak libovolné (Viz obrazec.)*



Obr. -iii-

Je-li $\underline{s_k}$ *nulový bod* $\zeta(s_k) = 0$, *bude také*

$$\zeta\left(\frac{s_k}{2}\right) = \zeta\left(1 - \frac{\overline{s_k}}{2}\right) = 0$$

a při tom $\left(1 - \frac{\overline{s_k}}{2}\right)$ *leží ve vyčárkovaném obdélníku o výšce* $\frac{T}{2}$.*Počet těchto bodů* $\left(1 - \frac{\overline{s_k}}{2}\right)$ *bude tedy roven počtu všech nulových bodů* $\zeta(s)$ *v obdélníku* $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1 \quad 0 < \mathrm{Im}(s) \leq T$. *Následkem toho v nevyčárkované části nemůže ležeti žádný nulový bod* $\zeta(s)$. *Zejména nemůže tedy ležeti žádný nulový bod* $\zeta(s)$ *v pásu* $1 > \mathrm{Re}(s) > \frac{3}{4}$ *protože úvaha platí pro každé* T. *Podle vyšetření R. J. Baclunda nemá* $\zeta(s)$ *žádné nulové body pro* $T = 100$ *(mimo* $s = \frac{1}{2} + it$*).*

Volím-li nyní $T = \underline{200}$ *bude vyčárkovaný obdélník míti výšku* $\frac{T}{2} = 100$ *a tedy tam nejsou nulové body* $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < \frac{3}{4}$ *a tedy podle dokázané věty také žádné nul. body* $\zeta(s)$ *v pásu* $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1 \quad \mathrm{Im}(s) \leq \underline{200}$. *Volím dále* $T = 400$, *a dokážu tak postupně že pro* $T = 100,\ 200,\ 400,\ 800,\ 1600$, *a t. dále nemá* $\zeta(s)$ *v pásu* $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1$ *nulových bodů. Tedy jest splněna Riem. doměnka pro předpoklad učiněný o* $\underline{\zeta_1(s)}$ *na předešlé straně.*

Nový nápad.

Bude asi účelné užíti pro $\zeta(s)$ přímo Weierstrass. součinu podle nulových bodů. Podobně pro $\zeta(2s)$ a uvažovati o podílu

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = F(s) \cdot \zeta_1(s) .$$

Pak lze lehko dokázati, že $\zeta_1(s)$ musí míti v pásu $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1$ poly, jestliže není splněna Riem. Dom.

Hadamard dokázal (1893) že

$$(s-1)\zeta(s) = ae^{ks} \frac{1}{\Gamma(1+\frac{s}{2})} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}$$

kdež $\underline{\varrho}$ jsou všechny nulové komplexní body $\zeta(s)$ v pásu $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Jest dále známo, že vedle nulového bodu ϱ_1 má $\zeta(s)$ také nulový bod $\overline{\varrho_1}$ a další dva $(1-\varrho_1)$ a $(1-\overline{\varrho_1})$. To plyne z funkční rov. pro $\zeta(s)$. Jest

$$(2s-1)\zeta(2s) = ae^{2ks} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\frac{\varrho}{2}}\right) e^{\frac{s}{\frac{\varrho}{2}}}$$

Z toho plyne

$$\zeta_1(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \frac{\prod\limits_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}}{\prod\limits_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho:2}\right) e^{\frac{s}{\varrho:2}}} F(s) .$$

Při tom $F(s)$ nemá žádné komplexní nulové body ani poly. Je-li tedy ϱ_1 nulový bod $\zeta(s)$ v pásu $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1$, který má nejmenší positivní imaginárnou část, bude $\frac{\varrho_1}{2}$ míti poloviční imag. část a nemůže tedy faktor $\left(1 - \frac{s}{\varrho_1:2}\right)$ v jmenovateli býti vykrácen některým z faktorů $\left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)$ v čitateli! Tedy jest $\frac{s}{\varrho_1:2}$ pol funkce $\zeta_1(s)$ v pásu $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$.

10.VII. *Jsou velká horka a daří se mi špatně. Jsem téměř neschopen souvislého usuzování. Poznamenám zde pouze jisté zobecnění funkce*

$$\zeta_2(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s}) .$$

Označím obecněji

$$\zeta_k(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)} = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{(k-1)s}}) ,$$

což plyne ze vztahu

$$\zeta_k(s) = \frac{\prod\limits_p (1 - \frac{1}{p^{ks}})}{\prod\limits_p (1 - \frac{1}{p^s})}$$

Jest tedy

$$\zeta(s) = \zeta_k(s) \cdot \zeta(ks)\,.$$

Protože $\zeta(ks) \neq 0,\ \infty$ *pro* $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{k}$ *musí všechny nulové body funkce* $\zeta(s)$ *a* $\zeta_k(s)$ *v pásu tom spolů souhlasiti so do polohy i do multiplicity. Mimo to tam* $\zeta_k(s)$ *nemá žádný pol a jest* $\zeta_k(\frac{1}{k}) = 0$ *protože* $\zeta(k \cdot \frac{1}{k}) = \infty$, *a* $\zeta(\frac{1}{k}) \neq \infty,\ 0$.

Dirichletovu řadu pro $\zeta_k(s)$ *dostanu z řady*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

tím, že z ní vypustím všechny sčítance $\frac{1}{n^s}$ *kde celé číslo* $\underline{n}$ *obsahuje alespoň jednoho dělitele, který jest úplnou k-tou mocninou větší než jedna. Stejně jako na str. 56. se dokáže, že* $\zeta_k(s)$ *musí míti v pásu* $\mathrm{Re}(s) < \frac{1}{k}$ *poly jestliže není splněna R. D. Je-li splněna R. D. má* $\zeta_k(s)$ *nulové body shodné s* $\zeta(s)$ *na přímce* $s = \frac{1}{2} + it$ *a poly na přímce* $s = \frac{1}{2k} + it$.

12.VII. *O funkcích* $\zeta_k(s)$ *platí funkční rovnice*

$$\zeta_{k_1k_2}(s) = \zeta_{k_1}(s) \cdot \zeta_{k_2}(k_1 s) = \zeta_{k_2}(s) \cdot \zeta_{k_1}(k_2 s)\,.$$

Jest totiž

$$\zeta_{ks} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)} = \frac{\prod\limits_p (1 - \frac{1}{p^{ks}})}{\prod\limits_p (1 - \frac{1}{p^s})}$$

a tedy je-li $k = k_1k_2$ *pak*

$$1 - \frac{1}{p^{k_1k_2s}} = (1 - \frac{1}{p^{k_1s}})(1 + \frac{1}{p^{k_1s}} + \frac{1}{p^{2k_1s}} + \cdots + \frac{1}{p^{(k_2-1)k_1s}})$$

a tedy

$$\zeta_{ks} = \frac{\zeta(s)\zeta_{k_2}(k_1s)}{\zeta(k_1s)} = \zeta_{k_2}(k_1s)\frac{\zeta(s)}{\zeta(k_1s)} = \zeta_{k_2}(k_1s) \cdot \zeta_{k_1}(s)$$

s.e.d. Tak např.

$$\zeta_{k^2}(s) = \zeta_k(s) \cdot \zeta_k(ks)\,.$$

Dále platí tato věta:

$\zeta(s)$ *a funkce* $\zeta(s) - \zeta_k(s)$ *mají pro* $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{k}$ *všechny nulové body společné a ovšem nemají tam pol.*

To jest důsledkem toho, že $\zeta_k(s)$ *má v této oblasti společné nul. body s funkcí* $\zeta(s)$. *Totéž platí o jakékoliv lineární kombinaci*

$$a\zeta(s) + b\zeta_k(s)\,.$$

S odvoláním na skutečnost, že různé důsledky výše uvedených vět nedokáže odvodit a je „neobvykle tupý“, obrátil se Kössler na str. 59 k problemu Cauchyova integrálu. Na str. 62 se dočteme ještě jednu poznámku k funkci $\zeta_k(s)$ (z předchozích úvah):

13. VII. *Vydělím-li obě strany definiční rovnice*

$$\zeta_k(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)$$

konečným počtem faktorů pro $p = p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n$ *obdržím*

$$\zeta_k(s) : \prod_{p_n, n=1,2,\ldots,n} \left(1 + \frac{1}{p_n^s} + \cdots + \frac{1}{p_n^{(k-1)s}}\right) = \prod_{p \neq p_1, p_2, \ldots, p_n} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)$$

Součin v jmenovateli na levé str. rovnice má nulové body <u>*pouze*</u> *na* $\mathrm{Re}(s) = 0$*a nemá poly nikde v rovině* <u>*s*</u>*. Ergo součin*

$$\prod_{p \neq p_1, p_2, \ldots, p_n} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)$$

musí míti pro $1 > \mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{k}$ <u>*tytéž*</u> *nulové body jako* $\zeta_k(s)$ *a tedy i jako* $\zeta(s)$.

V zápise z 20. července 1952 se objevuje zmínka o tom, že Kössler v té době sepisoval článek o reálných charakteristikách, o nichž se proto v dalším textu znovu pojednávalo – zřejmě se jednalo o práci [K31], která vyšla tiskem v roce 1954.

Na str. 82 se Kössler zmínil o faktu, že se kdysi zabýval problémem čtyř barev. Pokus sepsat si vzájemné vztahy mezi zeměmi mapy topologického rázu však rychle vzdal a poznamenal si:

18.8.1952, str. 84
Zjistil jsem ve svých záznamech z r. 1940 (Problém 4 barev), že těmito věcmi jsem se už zabýval téměř celý rok a nedošel jsem k výsledku. Proto toho nechám. Při té příležitosti jsem prohlížel denník č. I z roku 1942. Jest tam tolik věcí, že to přesahuje možnosti jednotlivce. Avšak nepochybuji o tom, že ty myšlenky si najdou schopnější jednotlivce nežli jsem sám. Nemám žáky a nevím, co se stane s mými denníky. Utěšuji se tím, že myšlenky nejsou výtvorem jednotlivce. Jest to výtvor Nadjá a nemůže tedy zaniknouti.

Na tomto místě se sluší připomenout, že problém čtyř barev byl vyřešen až 15 let po Kösslerově smrti, v roce 1976. Od tohoto obtížného a vyčerpávajícího problemu se tak znovu vrátil na str. 84 k prostým funkcím. V zápise ze dne 31. srpna 1952 se dočteme:

Dělati různé domněnky může býti pro další výzkum užitečné (Fermat, Dirichlet, Riemann, Goldbach a.t.d.) Následující fakt mne vede k doměnce o prostých řadách.

Nechť $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$ *jest prostá v* $|z| < 1$*. Dosadím-li místo* <u>*z*</u> *číslo* rz*, kdež* $0 < r \leq 1$ *bude zřejmě*

$$f_1(z) = \frac{f(rz)}{r} = z + \sum_2^\infty a_n r^{n-1} z^n$$

také prostá v $|z| \leq 1$.

Dále jest známa tato věta: Je-li $f(z)$ prostá hvězda, potom

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z}\, dz \quad (t.j.\ f(z) = f_1'(z) \cdot z)$$

jest prostá konvexní funkce.

Tak n.př. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ jest hvězda a $f_1(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z}\, dz = \frac{z}{1-z}$ jest konveksní.

Moje domněnka zní takto: Je-li $f(z)$ prostá řada v $|z| < 1$ pak

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z}\, dz = z + \frac{a_2}{2} z^2 + \frac{a_3}{3} z^3 + \cdots + \frac{a_n}{n} z^n + \cdots$$

jest také prostá řada a to geometricky „jednoduššího" typu nežli $f(z)$.

Následující Kösslerovy pokusy dokázat tuto domněnku v obecné podobě selhaly, s výjimkou důkazu, že domněnku nelze obrátit. O ní a podobných hypotézách Kössler referoval o tři roky později na 4. sjezdu československých matematiků v Praze v září 1955.

Od str. 109 opět hrají hlavní roli prvočíselné problémy, související s Polignacovou předpovědí a dvojčaty. Pro zajímavost uvádíme podobu těchto poznámek v rámci obrazové přílohy, obr. 21a–d.

16. XI. *Z tvaru vzorce (I) vyplývá, že kosinový polynom na pravé straně nemůže nikdy nabývati hodnoty záporné. Jest to tedy positivní polynom. Bude asi možno odvoditi z toho aspoň některé podmínky pro jeho koeficienty to jest pro funkce $\Pi_{2k}(N)$.*

Další námět k vyšetřování jest následující. Z vzorce (I) plyne po vydělení číslem $\Pi^2(N)$, že polynom algebraický

$$\frac{1}{\Pi^2(N)} \left\{ \Pi(N) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-3}{2}} \Pi_{2k} \cdot z^k \right\} = \mathcal{P}(z)$$

má v kruhu $|z| \leq 1$ maximum reálné části positivní (nebo nulu) a vždy menší nežli jedna! Dokonce jest i $|\mathcal{P}(z)| \leq 1$ pokud $|z| \leq 1$.

21. XI. *Jestliže při polynomu $w = \mathcal{P}_1(z) = \Pi^2(N)\mathcal{P}(z)$ sledujeme křivku $w = \mathcal{P}_1(z)$ pro $z = e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$, seznáme že reálná část $\mathrm{Re}(\mathcal{P}_1(e^{i\varphi}))$ jest právě polynom trigon. (I) když v něm místo φ kladu $\frac{\varphi}{2}$. Z toho plyne, že křivka $w = \mathcal{P}_1(e^{i\varphi})$ probíhá zcela v pravé půlrovině roviny w. Podle mé věty o zásobě funkčních hodnot jest důsledkem tohoto faktu, že polynom*

$$w = \mathcal{P}_1(z) = \Pi(N) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-3}{2}} \Pi_{2k}(N) \cdot z^k$$

má pro $|z| \leq 1$ reálnou část nikoliv negativní. Pro $|z| < 1$ dokonce reálnou část positivní a nemá tedy nulový bod v kruhu $|z| < 1$.

Tímto postřehem zápisy tohoto deníku končí.

Deník č. XIX

V úvodní části navazuje tento sešit na úvahy z deníku předcházejícího. Na str. 1–7 je pojednáno o ekvidistantních prvočíslech:

28. listop. 1952 *Ekvidistantní prvočísla.*

Ke konci předešlého denníku počal jsem se zabývati ekvidistantními prvočísly lichými. Vyšel jsem od vytvořující funkce

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi) &= \left(e^{3i\varphi} + e^{5i\varphi} + \cdots + e^{p_{n-1}i\varphi} + e^{p_n i\varphi}\right)\left(e^{-3i\varphi} + e^{-5i\varphi} + \cdots + e^{-p_n i\varphi}\right)\\ &= \Pi(N) + 2\Pi_2(N)\cos 2\varphi + 2\Pi_4(N)\cos 4\varphi + \cdots + \qquad (I)\\ &+ 2\Pi_{2k}(N)\cos 2k\varphi + \cdots + 2\Pi_{(N-3)}(N)\cos(N-3)\varphi\end{aligned}$$

Zde značí $\Pi_{2k}(N)$ počet těch prvočíselných dvojic $p_{m_1} > p_{m_2}$ jichž distance (rozdíl) jest

$$p_{m_1} - p_{m_2} = 2k \quad \textit{a přitom} \quad p_{m_1} \le N = p_n\,.$$

Jest tedy $2\Pi_2(N)$ počet dvojčat $\le p_n$ a t.d. $\Pi(N)$ jest počet lichých prvočísel $\le N$ a tedy $\Pi(N) = n$.

Vyslovil jsem ovšem nedokázanou hypothezu, že $\Pi_{2k}(N) \to \infty$ když $N \to \infty$. Hypotheza ta není dokázána ani pro $k = 1$ to jest pro počet dvojčat.

Pro vhodně volená $\underline{\varphi}$ plynou z (I) různé věty a zdá se mi, že vhodnou volbou takové posloupnosti $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \cdots$ a t.d. dostanu lineární rovnice pro $\Pi_{2k}(N)$, z nichž bude možno dělati různé úsudky. Tak n.př. pro $\varphi = \pi$ (nebo $\varphi = 0$) dostanu

$$\mathcal{F}(0) = \Pi^2(N) = \Pi(N) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-3}{2}} \Pi_{2k}(N)\,. \qquad (II)$$

Bude nyní jistě účelné klásti za $\underline{\varphi}$ postupně čísla

$$\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}; \textit{a t.d.}$$

tedy obecně $\frac{1\cdot\pi}{m}$, $\frac{\pi\cdot m_2}{m}$, $\frac{\pi\cdot m_3}{m}$, ..., $\frac{\pi\cdot m_{\varphi(m)}}{m}$, kdež 1, m_2, m_3, ..., $m_{\varphi(m)}$ jsou celá čísla $< m$ nesoudělná s $\underline{m}$ t.j. $(m, m_k) = 1$.

Počet těch zlomků jest $\varphi(m)$ (Eulerova funkce). Zřejmě $\frac{m_k}{m}$ jsou Farey-ovy zlomky s jmenovatelem $\underline{m}$. Protože však současně s $\frac{m_k}{m}$ jest také $1 - \frac{m_k}{m} = \frac{m-m_k}{m}$ Far. zlomek a tedy

$$\cos 2k\pi \cdot \frac{m_k}{m} = \cos 2k\pi(1 - \frac{m_k}{m})$$

stačí voliti mezi m_k jen ta která $< \frac{m}{2}$ v počtu $\frac{\varphi(m)}{2}$.

Systematická cesta k výpočtu $\Pi_{2k}(N)$ tedy by spočívala v konstrukci relací typu (II) pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ tak dlouho až poprvé

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \tfrac{1}{2}\left[\varphi(3) + \varphi(4) + \cdots + \varphi(m)\right] \ge \tfrac{N-3}{2}$$

V denníku XVIII. str. 112. jsem už spočetl

$$\mathcal{F}(\tfrac{\pi}{2}) = \left(\Pi^{(1)}(N) - \Pi^{(3)}(N)\right)^2 = \Pi(N) + 2\left\{\Pi_4(N) + \Pi_8(N) + \right.$$
$$\left. + \Pi_{12}(N) + \cdots\right\} - 2\left\{\Pi_2(N) + \Pi_6(N) + \Pi_{10}(N) + \cdots\right\} \qquad (III)$$

kdež $\Pi^{(1)}(N)$ *jest počet lichých prvočísel* $\leq N$ *shodných s* $\underline{1}$ (mod 4) *a* $\Pi^{(3)}(N)$ *počet prvoč. shodných s* $\underline{3}$ (mod 4) (*nebo shodných s* $\underline{-1}$ (mod 4)).

29. XI. *Vypočtu ještě případ* $\varphi = \frac{\pi}{3}$ *a* $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
V případě $\varphi = \frac{\pi}{3}$ *bude*

$$e^{\frac{p_k i\pi}{3}} = e^{\frac{\pi i(6k_1 \pm 1)}{3}}$$

podle toho je-li $p_k = 6k_1 + 1$ *nebo* $p_k = 6k_1 - 1$. *Tedy*

$$e^{\frac{p_k i\pi}{3}} = e^{2k_1\pi i \pm \frac{\pi i}{3}} = e^{\pm\frac{\pi i}{3}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{i\sqrt{3}}{2}$$

Horní znamení + *platí pokud* $p_k \equiv 1 \pmod 3$ *a dolní je-li* $p_k \equiv -1 \pmod 3$. *Pro* $p_k = 3$ *však* $e^{\frac{\pi i}{3}} = \underline{-1}$.

Označím $\Pi^{(+1)_3}(N)$ *počet prvoč.* $\leq N$ *shodných s* $+1$ (mod 3) *a podobně* $\Pi^{(-1)_3}(N)$. *Pak bude*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\tfrac{\pi}{3}) &= \left(-1 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2})\Pi^{(+1)_3} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2})\Pi^{(-1)_3}\right)\left(-1 + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2})\Pi^{(+1)_3} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2})\Pi^{(-1)_3}\right) \\ &= \left(-1 + \tfrac{1}{2}(\Pi^{(+1)_3} + \Pi^{(-1)_3})\right)^2 + \tfrac{3}{4}\left(\Pi^{(+1)_3} - \Pi^{(-1)_3}\right)^2\end{aligned}$$

Jest $\Pi^{(+1)_3} + \Pi^{(-1)_3} = \Pi(N) - 1$ (*není mezi nimi* $\underline{3}$)

$$\mathcal{F}(\tfrac{\pi}{3}) = \left(\tfrac{\Pi(N)}{2} - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\left(\Pi^{(+1)_3} - \Pi^{(-1)_3}\right)^2$$

Podle vzorce (*I*) *jest to rovno*

$$\Pi(N) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-3}{3}} \Pi_{2k}(N)\cos\frac{2k\pi}{3}$$

$\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2}$, $\cos\frac{6\pi}{3} = 1$, $\cos\frac{8\pi}{3} = \frac{-1}{2}$, $\cos\frac{10\pi}{3} = \frac{-1}{2}$, *a t.d. Tedy celkem*

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{\Pi(N)}{2} - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\left(\Pi^{(+1)_3} - \Pi^{(-1)_3}\right)^2 = \\ \Pi(N) + 2\left\{\Pi_6(N) + \Pi_{12}(N) + \Pi_{18}(N) + \cdots\right\} + \qquad (IV) \\ -\left\{\Pi_2(N) + \Pi_4(N) + \Pi_8(N) + \Pi_{10}(N)\cdots\right\}\end{gathered}$$

30. XI. *Podobně pro* $\varphi = \frac{\pi}{4}$. *Prvočísla mají tvar* $p_k = 8k_1 + z$ *kdež* $z = +1$, -1, $+3$, -3 *t.j. prvočísla se rozpadnou na tvary* $p_k = 8k_1 + 1$, $8k_1 - 1$, $8k_1 + 3$, $8k_1 - 3$. *Tedy*

$$\begin{aligned}e^{\frac{p_k i\pi}{4}} &= e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{-\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{-\frac{3\pi i}{4}} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i), -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i), -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\end{aligned}$$

Dostanu tedy $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ *tolikrát kolik jest prvočísel shodných s* $\underline{1}$ (mod 8) *t.j.* $\Pi^{(1)}(N)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ *kolik jest prvoč. sh. s* $\underline{-1}$ (mod 8) $\Pi^{(-1)}(N)$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ *tolikrát kolik jest* $\Pi^{(+3)}(N)$ *a* $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ *tolikrát kolik jest* $\Pi^{(-3)}(N)$. *Celkem*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\tfrac{\pi}{4}) &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\Pi^{(1)}+\Pi^{(-1)}-\Pi^{(3)}-\Pi^{(-3)})+\tfrac{i}{\sqrt{2}}(\Pi^{(1)}-\Pi^{(-1)}+\Pi^{(3)}-\Pi^{(-3)})\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{(\Pi^{(1)}-\Pi^{(-3)})+(\Pi^{(-1)}-\Pi^{(3)})\right\}^2+\tfrac{1}{2}\left\{(\Pi^{(1)}-\Pi^{(-3)})-(\Pi^{(-1)}-\Pi^{(3)})\right\}^2 \\
&= (\Pi^{(1)}(N)-\Pi^{(-3)}(N))^2+(\Pi^{(3)}(N)-\Pi^{(-1)}(N))^2 = \qquad (V) \\
&= \Pi(N)-2\Pi_4(N)+2\Pi_8(N)-2\Pi_{12}(N)+2\Pi_{16}(N)-\cdots
\end{aligned}$$

Pro $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ *dostanu týž výsledek. Nežli vypočtu další formule připomenu, že již z formule* (II) *plyne dosti zajímavý důsledek.*

Jest $2\sum\limits_{1}^{\frac{N-3}{2}}\Pi_{2k}(N)=\Pi^2(N)-\Pi(N)$. *Protože čísla* $\Pi_{2k}(N)$ *jsou* *<u>positivní</u>* *nebo nula pro každé* $\underline{N}$ *a protože levá strana má* $\frac{N-3}{2}$ *sčítanců, bude střední hodnota* $2\Pi_{2k}(N)$ *rovna* $\frac{2(\Pi^2(N)-\Pi(N))}{N-3}$. *Pomocí asymptot. formule pro*

$$\Pi(x)=\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

mohu provésti odhad té střední hodnoty. Vyjde, že střed. hodn.

$$2\Pi_{2k}(x)=2\frac{x}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

Jest tedy *<u>největší</u>* *z* $2\Pi_{2k}(x)$ *pro různá* $\underline{k}$

$$\geq \frac{x}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

Nevím však pro které $\underline{k}$ *to nastane. Ono* $\underline{k}$ *může býti závislé na* $\underline{x}$.

<u>4. XII.</u> *Další nápad jest následující. Mohu vzíti ve vytvořující funkci* $\mathcal{F}(\varphi)$ *v úvahu pouze prvočísla určité třídy. N.př. všechna shodná s* $\underline{1}$ (mod 4) *nebo všechna shodná s* $\underline{-1}$ (mod 4). *Dostanu zřejmě obdobné formule. Tak n.př.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{4,1}(\varphi) &= \left(e^{5i\varphi}+e^{13i\varphi}+\cdots+e^{p_n i\varphi}\right)\left(e^{-5i\varphi}+e^{-13i\varphi}+\cdots+e^{-p_n i\varphi}\right)= \\
&= \Pi_1(N)+2\Pi_4^{(1)}(N)\cos 4i\varphi+2\Pi_8^{(1)}(N)\cos 8i\varphi+\cdots \qquad (VI)
\end{aligned}$$

Při tom jest $\Pi_1(N)$ *počet těch prvočísel a* $\Pi_{4k}^{(1)}(N)$ *počet těch dvojic mezi nimi které mají distanci* $\underline{4k}$.

Podobně pro prvočísla tvaru $4k-1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{4,-1}(\varphi) &= \left(e^{3i\varphi}+e^{7i\varphi}+e^{11i\varphi}+\cdots+e^{p_n i\varphi}\right)\left(e^{-3i\varphi}+\cdots+e^{-p_n i\varphi}\right)= \\
&= \Pi_{-1}(N)+2\textstyle\sum_{k=1}\Pi_{4k}^{(-1)}(N)\cos 4k\varphi \qquad (VII)
\end{aligned}$$

s obdobným významem $\Pi_{-1}(N)$ *a* $\Pi_{4k}^{(-1)}(N)$. *Pro* $\varphi = 0$ *(nebo* π*) dostanu tak*

$$\begin{aligned}\Pi_1^2(N) &= \Pi_1(N) + 2\sum \Pi_{4k}^{(+1)}(N) \qquad (VIII)\\ \Pi_{-1}^2(N) &= \Pi_{-1}(N) + 2\sum \Pi_{4k}^{(-1)}(N)\end{aligned}$$

Sečtením

$$\Pi_1^2(N) + \Pi_{-1}^2(N) = \Pi(N) + 2\sum \Pi_{4k}(N) \qquad (IX)$$

protože $\Pi_{+1}(N) + \Pi_{-1}(N) = \Pi(N)$ *a* $\Pi_{4k}^{(+1)}(N) + \Pi_{4k}^{(-1)}(N) = \Pi_{4k}(N)$. *Jestliže totiž distance dvou prvočísel jest* <u>*4k*</u> *tedy* <u>*obě*</u> *patří buď k třídě shodných s* $+1 \pmod 4$ *nebo k třídě shodných s* $(-1) \pmod 4$. *Vzdálenost dvou prvočísel z třídy první a druhé jest totiž vždy* $(4k_1 + 1) - (4k_2 - 1) = 4k_3 + 2 \neq 4k_4$ *((*IX*) mohu kombinovati s (*III*)).*

Sečtením (VI*) a (*VII*) dostanu obecněji*

$$\mathcal{F}_{4,1}(\varphi) + \mathcal{F}_{4,-1}(\varphi) = \Pi(N) + 2\sum_{k=1}^{\cdots} \Pi_{4k}(N)\cos 4k\varphi \qquad (X)$$

A to lze kombinovati s (I*).*

<u>*5. XII.*</u> *Dostanu tak*

$$\mathcal{F}(\varphi) - (\mathcal{F}_{4,1}(\varphi) + \mathcal{F}_{4,-1}(\varphi)) = 2\sum_{k=0}^{\cdots} \Pi_{2(2k+1)}(N)\cos 2(2k+1)\varphi \qquad (XI)$$

Tak n.př. pro $\varphi = 0$ *nebo* π

$$\begin{gathered}(\Pi_{+1}(N) + \Pi_{-1}(N))^2 - \Pi_{+1}^2(N) - \Pi_{-1}^2(N) = 2\textstyle\sum_{k=0}^{\cdots} \Pi_{2(2k+1)}(N)\\ 2\Pi_{+1}(N)\cdot \Pi_{-1}(N) = 2\textstyle\sum_{k=0}^{\cdots} \Pi_{2(2k+1)}(N)\\ \Pi_{+1}^2(N) + \Pi_{-1}^2(N) = \Pi(N) + 2\textstyle\sum_{k=1}^{\cdots} \Pi_{4k}(N) \qquad (XII)\end{gathered}$$

(Z toho už možno počítati střední hodnotu jako na str. 5.) Z toho lze činiti různé další úsudky. Tak n.př. dělením rovnic XII.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_{+1}(N)}{\Pi_{-1}(N)} + \frac{\Pi_{-1}(N)}{\Pi_{+1}(N)}\right) = \frac{\Pi(N)}{2\Pi_{+1}(N)\Pi_{-1}(N)} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{\cdots} \Pi_{4k}(N)}{\sum\limits_{k=0}^{\cdots} \Pi_{2(2k+1)}(N)}$$

Protože $\Pi_{+1}(N) \simeq \Pi_{-1}(N)$ *a* $\frac{\Pi(N)}{\Pi_{+1}(N)\Pi_{-1}(N)} \to 0$ *jest asymptoticky*

$$\sum \Pi_{4k}(N) \simeq \sum \Pi_{2(2k+1)}(N) \qquad (XIII)$$

23. 12. 1952 se Kössler ve svých poznámkách znovu vrátil k problematice prostých polynomů, konkrétně se pokusil sestrojit associovanou resultantu způsobem jiným, než použil ve

své práci *Simple polynomials*. Na str. 8–18 se tedy objevují myšlenky o této alternativní možnosti psané pro jednodušší případ $n = 3$, tj. specielně pro polynom $P(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3$. Z textu je opět patrná únava pisatele a známky špatného zdravotního stavu, jež bránily v dlouhodobějším studiu jediného problému, a tak na str. 18 se opět mění téma a přechází do oblasti teorie čísel:

9. II. *Z elementárních identit (viz Einige Sätze aus der elem. Zahlentheorie 1942) plynou různé a často kuriósní výsledky pro teorii prvočísel. Identita* ((3.2)*l.c.*)

$$\sum_{1}^{N} g(k) f \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = f(1)G(N) + \sum_{k=2}^{N} \left(f(k) - f(k-1)\right) G \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

$g(k)$ a $f(k)$ jsou libovolné celočíselné funkce. Při tom $g(k)$ mohou hráti roli „výběrových faktorů“. Příkladem jsou identity (3.5) *a* (3.6)*. Hrál jsem si s tím minulý týden. Sepíšu některé výsledky.*

Označím p_1 prvočísla tvaru $p_1 \equiv 1 \pmod 4$. Při tom $\underline{1}$ pokládám také za prvočíslo. Volím $g(k) = 1$ nebo 0 podle toho je-li $k = p_1$ nebo není-li tvaru p_1. Pak jest

$$G(r) = g(1) + g(2) + \cdots + g(r) = \pi_1(r)\,,$$

kdež $\pi_1(r)$ jest počet těch $p_1 \leq r$.

Dále označím $\Pi_3(k)$ počet prvoč. tvaru $p_3 \equiv 3 \pmod 4$ menších nebo rovných k a volím $f(k) = \Pi_3(k)$. Pak jest $f(k) - f(k-1) = 1$ je-li $k = p_3$, $f(k) - f(k-1) = 0$ není-li $k = p_3$. Podle zákl. identity jest tedy

$$\sum_{p_1 \leq N} \Pi_3\left(\frac{N}{p_1}\right) = \sum_{p_3 \leq N} \Pi_1\left(\frac{N}{p_3}\right)$$

To jest jistě překvapující fakt. Dále jest tedy

$$\sum_{p_1 \leq N} \Pi_3\left(\tfrac{N}{p_1}\right) + \sum_{p_3 \leq N} \Pi_3\left(\tfrac{N}{p_3}\right) = \sum_{p_3 \leq N} \underbrace{\left(\Pi_1\left(\frac{N}{p_3}\right) + \Pi_3\left(\frac{N}{p_3}\right)\right)}_{\Pi\left(\frac{N}{p_3}\right)}$$

$$\sum_{p \leq N} \Pi_3\left(\tfrac{N}{p}\right) = \sum_{p_3 \leq N} \Pi\left(\tfrac{N}{p_3}\right)$$

Příklad 2. *Volím $g(k) = 1$ je-li $k = \underline{p^2}$, $g(k) = 0$ je-li $k \neq p^2$. Tedy*

$$G(r) = g(1) + g(2) + \cdots + g(r) = \Pi_2(r)\,,$$

kdež $\Pi_2(r)$ jest počet čtverců prvočísel $p^2 \leq r$. Jest tedy $\Pi_2(r) = G(r) = \Pi(\sqrt{r})$. Dále volím $f(k) = \Pi(k) =$ počet prvoč. $\leq k$. Jest tedy $f(k) - f(k-1) = 1$ je-li $\underline{k} = p$, $f(k) - f(k-1) = 0$ je-li $k \neq p$.

$$\sum_{1 \leq p^2 \leq N} \Pi\left(\frac{N}{p^2}\right) = \Pi(1)\Pi_2(N) + \sum_{2 \leq p \leq N} \Pi_2\left(\frac{N}{p}\right)$$

Jinak psáno

$$\sum_{1\leq p^2\leq N} \Pi\left(\frac{N}{p^2}\right) = \Pi(\sqrt{N}) + \sum_{2\leq p\leq N} \Pi\left(\sqrt{\frac{N}{p}}\right)$$

Píšu-li místo $N \ldots N^2$

$$\sum_{1\leq p^2\leq N^2} \Pi\left(\frac{N^2}{p^2}\right) = \Pi(N) + \sum_{2\leq p\leq N^2} \Pi\left(\frac{N}{\sqrt{p}}\right)$$

Zkouška pro $N = 5$ dává

$$\Pi(25)+\Pi(6)+\Pi(2)+\Pi(1) = \Pi(5)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{2}}\right)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{3}}\right)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{5}}\right)+$$
$$+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{7}}\right)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{11}}\right)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{13}}\right)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{17}}\right)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{19}}\right)+\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{23}}\right)$$

Jest $\Pi(25) = 10$, $\Pi(6) = 4$, $\Pi(2) = 2$, $\Pi(1) = 1$, $\Pi(5) = 4$, $\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{2}}\right) = 3$, $\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{3}}\right) = 2$, $\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{5}}\right) = 2$, $\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{7}}\right) = 1$ *protože* $\tfrac{5}{\sqrt{7}} < 2$ $(25 < 28)$ *a všechna další* $\Pi\left(\tfrac{5}{\sqrt{p}}\right)$ $7 < p \leq 23$ *jsou* $= 1$. *Tedy pravá strana dává součet*

$$4+3+2+2+6 = 17\,.$$

Levá strana

$$10+4+2+1 = 17\,.$$

Z identity jest patrno, že znám-li všechna prvočísla menší nebo rovná $\underline{N}$ dovedu vypočísti

$$\sum_{1\leq p^2\leq N} \Pi\left(\frac{N^2}{p^2}\right) = \Pi(N^2) + \Pi\left(\frac{N^2}{4}\right) + \Pi\left(\frac{N^2}{9}\right) + \Pi\left(\frac{N^2}{25}\right) + \cdots$$

To ukazuje na souvislost s Eratosthen. sítem.

Podobný vzorec dostanu volím-li obecněji výběrový faktor

$$\begin{array}{rcl} g(k) & = & 1 \quad \textit{je-li } k = p^\nu (\nu \textit{ celé} > 1) \\ g(k) & = & 0 \quad \textit{je-li } k \neq p^\nu \end{array}$$

Dostanu obecněji

$$\sum_{1\leq p^\nu\leq N} \Pi\left(\frac{N}{p^\nu}\right) = \Pi(N^{\frac{1}{\nu}}) + \sum_{2\leq p\leq N} \Pi\left(\left(\frac{N}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

Zřejmě když $\nu \to +\infty$ bude na levo $\Pi(N)$ a všichni sčítanci na pravo budou rovny $\underline{1}$.

<u>10. II.</u> *Napadlo mi, zda-li se snad Eratosthenovo síto nedá nějak atithmetisovati. Jestliže totiž <u>znám</u> všechna prvočísla $p \leq N$ a tedy také $\Pi(N)$ mohu užíti Eratosth. postup pro nějaké větší číslo $N_1 > N$. Jest známo, že <u>všechna</u> čísla mezi $\underline{N}$ a $\underline{N^2}$, která nejsou dělitelna <u>žádným</u> prvočíslem $p \leq N$ jsou právě <u>všechna prvočísla</u> ležící mezi N^2 a N.*

Nyní jest známa tato věta (Landau: Primzahlen I. §14. p. 67):

Jsou-li p_1, p_2, ..., p_n všechna prvočísla $< N$ a $\underline{x > N}$ pak počet čísel nedělitelných žádným $p \leq N$ jest

$$B(x; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \lfloor x \rfloor - \left\{ \left\lfloor \frac{x}{p_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p_2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{p_n} \right\rfloor \right\}$$
$$+ \left\{ \left\lfloor \frac{x}{p_1 p_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p_1 p_3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{p_{n-1} p_n} \right\rfloor \right\} - \left\{ \left\lfloor \frac{x}{p_1 p_2 p_3} \right\rfloor + \cdots \right\}$$
$$+ \cdots + (-1)^n \left\lfloor \frac{x}{p_1 p_2 p_3 \cdots p_n} \right\rfloor$$

Položím-li $x = p_n^2$ udává podle Eratosth. postupu $B(p_n^2; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ právě počet prvočísel mezi p_n a p_n^2 čili

$$\boxed{\Pi(p_n^2) - \Pi(p_n) = B(p_n^2; p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

11. II. *Ve vzorci $B(p_n^2; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ vypadnou zřejmě všechny závorky $\left\lfloor \frac{p_n^2}{t} \right\rfloor$ kde $t > p_n^2$. Zejména tedy vypadnou všechny závorky $\pm\{\ \}$ kde v prvním sčítanci $\left\lfloor \frac{p_n^2}{p_1 p_2 \cdots p_k} \right\rfloor = 0$ to jest $p_1 p_2 p_3 \cdots p_k > p_n^2$.*

$$2 \log p_n < \sum_{p \leq p_k} \log p \simeq p_k + o(p_k)$$

Jest $p_k = k(\log k + \log\log k + O(1))$. Tedy $(k \cdot \log k)^k \geq p_n^2 \simeq (n \log n + n \log\log n + O(n))^2$. Nebo také jinak

$$\log\left(n(\log n + \log\log n)\right) \leq p_k$$

1. III. *Elementární vzorec pro* $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Ve své práci „Součet řady Lambertovy a.t.d.“ v Čas. Č.M.F. roč. XLV (1916) jsem odvodil integrální vzorec pro $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Lze sestrojiti konečný součet vyjadřující tuto Gaussovu funkci, jak se také zmiňuji ke konci toho článku.

Ztratil jsem příslušné poznámky a provedu zde to odvození znovu. Budiž $\underline{p}$ celé číslo kladné ≥ 1. Kořeny binom. rovnice

$$x^p = 1 \quad \textit{jsou}$$

$x_k = e^{\frac{2k\pi i}{p}}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$. Označím

$$S_n(p) = x_0^n + x_1^n + \cdots + x_{p-1}^n$$

kdež $\underline{n}$ jest celé číslo positivní. Jest známo, že

$$S_n(p) = 0 \quad \textit{pro } 0 < n \leq p-1\,.$$

Pro $n = p$ jest $S_p(p) = p$. Je-li nyní $n > p$ a $n \equiv \tau \pmod p$ bude

$$S_n(p) = S_\tau(p) = \begin{cases} p & \textit{pro } \tau = 0 \\ 0 & \textit{pro } \tau > 0\,. \end{cases}$$

Následkem toho jest funkce

$$\begin{aligned} I(n,p) \quad = \quad & \frac{S_n(p)}{p} = 0 \quad \textit{jestliže } \underline{p} \ \underline{\textit{není}} \textit{ dělitel } \underline{n} \\ & \frac{S_n(p)}{p} = 1 \quad \textit{jestliže } \underline{p} \ \underline{\textit{jest}} \textit{ dělitel } \underline{n} \end{aligned}$$

Jest tedy

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \sum_{n=1}^{n} \frac{S_n(p)}{p}$$

protože $\frac{S_n(p)}{p} = 1$ *je-li* $\underline{n}$ *násobkem* $\underline{p}$ *a* $\frac{S_n(p)}{p} = 0$ *není-li* $\underline{n}$ *násobkem* $\underline{p}$*. Dále jest*

$$\frac{S_n(p)}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{p-1}^n\}$$

a tedy

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \sum_{n=1}^{n} \frac{S_n(p)}{p} = \frac{n}{p} + \frac{1}{p}\left\{ x_1 \frac{1 - x_1^n}{1 - x_1} + x_2 \frac{1 - x_2^n}{1 - x_2} + \cdots + x_{p-1} \frac{1 - x_{p-1}^n}{1 - x_{p-1}} \right\}$$

Vypočtu reálnou část výrazu

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \frac{1 - \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \quad &= \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\varphi} - 1 + \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi}}{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})} \\ &= \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1}{2(1 - \cos\varphi)} + \frac{\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{2(1 - \cos\varphi)} \end{aligned}$$

Reálná část tohoto čísla jest

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2} + \frac{\cos n\varphi(1 - \cos\varphi)}{2(1 - \cos\varphi)} + \frac{\mathrm{i}\sin n\varphi(-i\sin\varphi)}{2(1 - \cos\varphi)} \\ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos n\varphi + \frac{\sin n\varphi \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2 \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \\ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos n\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sin n\varphi \end{gathered}$$

nebo také (sloučením)

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sin\,(n + \frac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \quad \textit{za předpokl., že } \varphi \neq 0$$

Imagin. části toho výrazu si nemusím všímati protože při výpočtu $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ *ty imag. části se musí zrušiti. Dosadím tedy za* $\underline{\varphi}$ *postupně čísla* $\frac{2k\pi}{p}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ *a sečtu*

$$\boxed{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \frac{n}{p} + \frac{1}{p}\left\{ -\frac{p-1}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\sin\frac{(2n+1)k\pi}{p}}{2\sin\frac{k\pi}{p}} \right\}}$$

<u>Kontrola:</u> a.) Je-li $\underline{n}$ *dělitelno číslem* $\underline{p}$ *jest* $\sin\left(\frac{2n}{p}k\pi + \frac{k\pi}{p}\right) = \sin\frac{k\pi}{p}$ *a tedy*

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \frac{n}{p} + \frac{1}{p}\left\{ -\frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2} \right\} = \frac{n}{p}$$

b.) Jestliže $2n+1$ *jest dělitelno* $\underline{p}$ *(p liché), pak zřejmě* $\underline{n}$ *není dělitelno* p *a musilo by býti podle předešlého vzorce*

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \frac{n}{p} + \frac{1}{p}\left\{ -\frac{p-1}{2} + 0 \right\} = \frac{n}{p} - \frac{p-1}{2p}$$

a to jest neboť když $2n+1 = 2t \cdot p + p$ *bude*

$$\tfrac{n}{p} + \tfrac{1}{2p} = t + \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{n}{p} = t + \tfrac{p-1}{2p} \quad \textit{a tedy} \quad \left\lfloor \tfrac{n}{p} \right\rfloor = t$$

<u>3. III.</u> *Na str. 24. jest vypočteno* $S_n(p)$*. Jest možno počet sčítanců na pravé straně zmenšiti na polovinu. Jest totiž při* $n = kp + r \quad 0 \le r \le p-1$

$$S_n(p) = 1 + e^{\frac{2\pi r}{p}i} + e^{\frac{4\pi r}{p}i} + \cdots + e^{\frac{2(p-1)\pi r}{p}i}$$

Imaginární části se na pravo vždy zruší. Dále jest při $\nu < p$

$$e^{\frac{2(p-\nu)\pi r}{p}i} = e^{2\pi r i - \frac{2\nu\pi r i}{p}} = e^{-\frac{2\nu\pi r}{p}i}$$

Následkem toho jest vzhledem k vztahu

$$S_n(p) = 1 + \cos\frac{2\pi r}{p} + \cos\frac{4\pi r}{p} + \cdots + \cos\frac{2(p-1)\pi r}{p}$$

při <u>lichém</u> $\underline{p}$ *a jakémkoliv* $n \ge p$

$$S_n(p) = 1 + 2\left\{ \cos\frac{2\pi r}{p} + \cos\frac{4\pi r}{p} + \cdots + \cos\frac{(p-1)\pi r}{p} \right\}$$

a tedy i

$$\boxed{S_n(p) = 1 + 2\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} \cos\frac{2\pi k n}{p}} \quad (p \textit{ liché})$$

Je-li $\underline{p}$ *sudé bude podobně*

$$S_n(p) = 1 + 2\left\{\cos\frac{2\pi r}{p} + \cos\frac{4\pi r}{p} + \cdots + \cos\frac{(p-2)\pi r}{p}\right\} + \cos\pi r$$

Místo $\underline{r}$ *mohu opět psáti* $\underline{n}$ *a tedy*

$$\boxed{S_n(p) = 1 + 2\sum_{k=1}^{k=\frac{p-2}{2}} \cos\frac{2\pi kn}{p} + \cos\pi n} \quad (p \textit{ sudé})$$

neboť při sudém p jest $\cos\pi n = \cos\pi r$.

Odvozené formule pro $\lfloor n/p \rfloor$ a $\sum_{p=1}^{n} \lfloor n/p \rfloor$ Kösslerovi pomohly uvést Dirichletův problém dělitelů do vztahu k Fareovým zlomkům a rovněž Möbiovým faktorům. Postupným dosazováním $p = 1, 2, 3, \ldots$ do výše uvedených vztahů po jejich sečtení celkem odvodil formuli

$$\sum_{p=1}^{\nu=\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor = n\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right\} - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right\} +$$
$$+\sum_{p=2}^{p=\nu}\left(\frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\left\lfloor\frac{\nu}{p}\right\rfloor}\right\}\cdot\sum_{k\subset p}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi k}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}\right),$$

kde $k \subset p$ znamená, že sčítáme pouze podle $\underline{k} < p$, nesoudělných s p, přičemž do úvahy bereme i $k = 1$ podobně jako u Eulerovy funkce. Problémem však zůstává v tomto případě transformace součtu

$$\sum_{k\subset p}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi k}{p}}{\sin\frac{\pi k}{p}}.$$

Jarní deprese zmíněná v zápisu ze dne 3. dubna 1953 byla důvodem, proč se na str. 29 opět změnilo téma poznámek. Kössler si na tomto místě zaznamenal krátký postřeh týkající se diferenčního kvocientu

$$\Delta(z_1, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}.$$

Uvědomil si, že zatímco svou teorii prostých polynomů do značné míry založil na práci s tímto kvocientem, v teorii funkcí komplexní proměnné kvocientu $\Delta(z_1, z_2)$ téměř nikde nevyužíval.

Na str. 35 pokračoval úvahou týkající se hradebního kruhu a průměru uzavřené křivky určené rovnicí $u = u(\varphi)$, $v = v(\varphi)$, za předpokladu existence spojitých 1. a 2. derivací u i v v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, $2\pi-$periodičnosti funkcí u, v a splnění podmínky, že křivka má ve všech bodech tečnu. *Hradebním okruhem* byl míněn nejmenší kruh, v němž je celá křivka uzavřena. Kössler poznamenal, že problém hradebního okruhu nebyl dosud obecně řešen. V některých případech je přitom tento kruh identický s kruhem, jehož střed leží ve středu průměru křivky. V tomto případě je pak průměr křivky absolutním maximem vzdáleností dvou bodů na křivce, jako příklad lze uvést tupoúhlý a pravoúhlý trojúhelník.

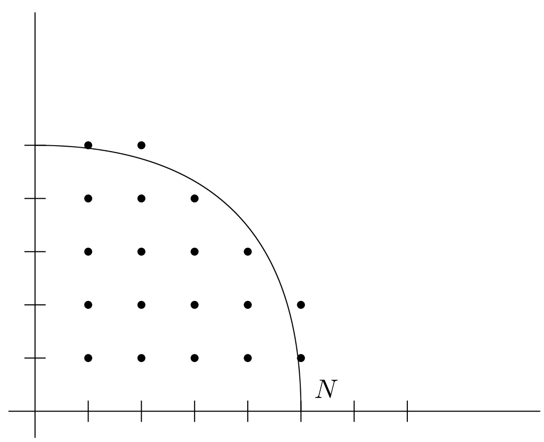
Na str. 40 se pak objevila poznámka k prostým řadám, která byla na str. 51 ukončena oznámením měnové reformy. Na téže straně vyvstal nový problém:

13. VI. *Počet rozkladů celého čísla v součet dvou čtverců* $k = n_1^2 + n_2^2$

Jestliže pokládám rozklad $n_1^2 + n_2^2$ *za různý od* $n_2^2 + n_1^2$ *pokud* $n_1 \neq n_2$ *a připustím-li pro* n_1 *a* n_2 *také hodnotu* 0 *pak při označení* $r(k) =$ *počet rozkladů čísla* k *v součet dvou čtverců jest zřejmě*

$$S(N^2) = \sum_{k=1}^{k=N^2} r(k) = \sum_{n=0}^{n=N} \left\lfloor (N^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \right\rfloor$$

($\lfloor x \rfloor$ *Gauss. symbol*) *Jest to počet mřížových bodů ve čtvrtkruhu o poloměru* N *(celé číslo)*



Obr. -iv-

Neznám zpaměti odhad pro $S(N^2)$ *avšak patrně jest*

$$S(N^2) = \sum_{0}^{N^2} (N^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} - O(N) = \frac{\pi}{4} N^2 + O(N)$$

S jakou přesností jest znám zbytek $O(N)$ *nevím jest to však jistě propracovaná věc (Jarník). Také nevím zda jest známa nějaká přesná analyt. formule pro* $S(N^2)$ *obdobná formuli Voronoï-ově pro*

$$\sum_{1}^{N} d(k) = N(\log N + 2C - 1) + \frac{1}{2} d(N) + \frac{1}{4}$$
$$+ N^{\frac{1}{2}} \sum_{1}^{\infty} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \left\{ V_1(4\pi\sqrt{Nn}) - H_1(4\pi\sqrt{Nn}) \right\}$$

($d(k)$ počet dělitelů čísla k). Takové formule lze ovšem nalézti pomocí známé funkční rovnice

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi s}=\frac{1}{\sqrt{s}}\left(1+2\sum_{1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi}{s}}\right)$$

platné pro $\mathrm{Re}(s)>0$. *Z toho plynou* *dva* *vzorce*

$$\mathcal{F}(s)=\begin{cases}\left(1+2\sum\limits_{1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi s}\right)^2=\dfrac{1}{s}\left(1+2\sum\limits_{1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi}{s}}\right)^2\\ \left(1+2\sum\limits_{1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi s}\right)^2=\dfrac{1}{\sqrt{s}}\left(1+2\sum\limits_{1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi s}\right)\left(1+2\sum\limits_{1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi}{s}}\right)\end{cases}$$

Nyní stačí násobiti obě strany výrazem $\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{\pi N^2 s}}{s}$, $s=\sigma+it$, $\sigma>1$ *a provésti integraci*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\mathcal{F}(s)e^{\pi N^2 s}}{s}\,ds\,.$$

Následují opakované pokusy o danou integraci pro různé integrační cesty, ve všech případech však buď obsahují chybu, nebo vedou k výsledkům již známým.

23. VI. *Zjistil jsem, že zcela zbytečně jsem hledal ty různé integr. cesty. Jest totiž z teorie gamma funkce znám integrál*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{bti}}{(a+it)^x}\,dt=\begin{cases}\dfrac{2\pi e^{-ab}b^{x-1}}{\Gamma(x)} & \text{pro } b>0\\ 0 & \text{pro } b\le 0\end{cases}$$

za předpokladu $\mathrm{Re}(x)>0$.

Viz Nielsen: Handbuch der Th. d. Gammaf. p. 155 vzorec (8), (9).

Následkem toho jest při $\sigma>0$ *a* *pevném*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\pi sx}}{s^{\frac{3}{2}}}\,ds\,,\qquad s=\sigma+it$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t=-\infty}^{t=+\infty}\frac{e^{\pi\sigma x}\cdot e^{\pi xti}}{(\sigma+it)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^{\pi\sigma x}}{2\pi}\cdot\frac{2\pi e^{-\sigma\pi x}(\pi x)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}=(\pi x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=2x^{\frac{1}{2}}$$

Obecněji bude

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\pi sx}}{s^{k+\frac{1}{2}}}\,ds\,,\quad s=\sigma+it\,,\quad k=0,1,2,3,\dots$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\pi\sigma x}\cdot e^{\pi xti}\,dt}{(\sigma+it)^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{e^{\pi\sigma x}}{2\pi}\cdot\frac{2\pi e^{-\pi\sigma x}(\pi x)^{-\frac{1}{2}+k}}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}=\frac{(\pi x)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}$$

Nyní už mohu počítati také integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\pi sx}\cdot e^{-\frac{\pi y}{s}}}{s^{\frac{3}{2}}}\,ds \quad \textit{při } x>0, y\geq 0\,.$$

K tomu stačí užíti řady pro

$$e^{-\frac{\pi y}{s}} = 1-\frac{\pi y}{s}+\frac{\pi^2y^2}{2!s^2}-\cdots+(-1)^k\frac{\pi^ky^k}{k!\,s^k}+\cdots$$

a integrovati člen za členem (konvergence jest absolutní). Tak dostanu

$$\frac{(-1)^k\pi^ky^k}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\pi sx}}{s^{k+1+\frac{1}{2}}}\,ds = \frac{(-1)^k(\pi y)^k}{k!}\frac{(\pi x)^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1+\frac{1}{2})}$$

Sčítáním podle k dostanu zřejmě Bessel-ovu řadu:

$$(\pi x)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi^2xy)^k}{k!\,\Gamma(\frac{3}{2}+k)} = \frac{(\pi xy)^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi\sqrt{xy})^{2k}}{k!\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+1)}$$

Ani tímto způsobem však autor nedospěl k ničemu novému.

Na str. 62 si pak stěžoval na vyčerpání po spoustě zkoušek na konci roku, a tak zápis počínající 6. červencem 1953 byl z převážné části spíše přehledem základních identit teorie dělitelů:

6. VII. *Není znám žádný vztah mezi Dirichlet. problemem dělitelů t.j. $\sum_{n=1}^{N} d(n)$ a mezi větami prvočíselnými.*

Bylo by tedy záhodno vyšetřiti vztah mezi $d(n)$ a prvočíselnou strukturou čísla n. Jest předem zjevné, že $d(n)$, t.j. počet dělitelů čísla n, nezávisí na velikosti čísla n nýbrž na tvaru rozkladu čísla n v prvočíselné faktory,

$$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_\nu^{\alpha_\nu}\,.$$

Budu značiti znakem $d(n)$ počet dělitelů čísla n s výjimkou jednotky.

Následující zápisy jednoznačně potvrzují prohlubující se Kösslerovu sklerosu – dlouze odvozoval elementárně známé vzorce pro $d(n)$ plynoucí z kanonického rozkladu čísla n, aby o několik stran dále zjistil, že tyto jsou obsaženy v každé knize věnované elementární teorii čísel.

V dalším textu se opět vrátil k práci [K26], konkrétně speciálním volbám funkcí $f(k)$, $g(k)$:

10. VII. *Berija?*

Ve svém článku „Einige Sätze aus der elem. Zahlentheorie“ V.K.Č.S.N. 1942 jsem odvodil identity

$$\sum_{1}^{N} g(k)f\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor = f(1)G(N)+\sum_{k=2}^{N}\{f(k)-f(k-1)\}G\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor \qquad (I)$$

kdež $G(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} g(k)$, $f(k)$ *a* $g(k)$ *libovolné celočíselné funkce. Transformací parciální sumace při* $1 \leq \varrho < N$, $r = \lfloor N/(\varrho + 1) \rfloor$

$$\sum_{k=1}^{N} g(k) f \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{r} g(k) f \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor + + \sum_{k=1}^{\varrho} \{f(k) - f(k-1)\} G \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor - f(\varrho) G(r) \qquad (II)$$

(*Vzorce* (3.2) *a* (3.3) *l.c.*)

V článku citovaném jsou některé aplikace. Pokusím se o další. Tak n.př. volím $\underline{f(k) = k^2}$, $g(k) = 1$. *Pak jest* $G(r) = r$, $f(k) - f(k-1) = 2k - 1$. *Tedy*

$$\sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor^2 = \sum_{k=1}^{r} \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor^2 + \sum_{k=1}^{\varrho} (2k-1) \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor - \varrho^2 \cdot r$$

Bude také dobře zvoliti za $f(k)$ *nějaký vhodný polynom n.př.* $f(k) = k^2 + ak + b$ *a voliti vhodně konstanty* $\underline{a}$, $\underline{b}$. *Podobně pro polynomy vyšších stupňů! Ty konstanty a, b jest možno voliti jako funkce* $\underline{N}$.

13. VII. *Z této identity plynou některé dosti zajímavé vztahy pro prvočísla. V cit. článku jsou to n.př. vzorce (3.5) a (3.6) t.j.*

$$\begin{aligned} \Pi(\varrho) \cdot \Pi(r) &= \textstyle\sum_{p \leq \varrho} \Pi\left(\frac{N}{p}\right) - \sum_{p > r} \Pi\left(\frac{N}{p}\right) \quad a \\ \textstyle\sum_{k=1}^{N} \Pi(\frac{N}{k}) &= \textstyle\sum_{p \leq N} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor \qquad (*) \end{aligned}$$

$\underline{p}$ *jsou prvočísla. Podobných vztahů lze odvoditi více vhodnou volbou „výběrového“ faktoru* $\underline{g}(k)$.

Tak n.př. volím funkci celočíselnou $g(k)$ *takto:*

$$\begin{aligned} g(k) &= 1 \qquad \text{je-li } k = p^\nu \quad (\underline{\nu} \text{ pevné celé číslo}) \\ g(k) &= 0 \qquad \text{je-li } k \neq p^\nu \quad (\underline{p} \text{ jsou prvočísla}) \end{aligned}$$

Tak dostanu $G(r) = \sum_{k=1}^{r} g(k) =$ *počet* p^ν *která jsou* $p^\nu \leq r$ *a tedy* $G(r) = \Pi(r^{\frac{1}{\nu}})$.

Z prvního vzorce na str. 65. plyne pak

$$\sum_{p^\nu \leq N} f \left\lfloor \frac{N}{p^\nu} \right\rfloor = f(1)\Pi(N^{\frac{1}{\nu}}) + \sum_{k=2}^{N} \{f(k) - f(k-1)\} \Pi\left(\left(\frac{N}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right) \qquad (1)$$

Tak n.př. pro $f(k) = k$

$$\sum_{p^\nu \leq N} \left\lfloor \frac{N}{p^\nu} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{N} \Pi\left(\left(\frac{N}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right) \qquad (**)$$

To jest zobecnění vzorce $(*)$ *z předešlé strany (pro* $\nu = 1$*). Vzorec jest tak zvláštní, že potřebuje numerické kontroly. Kladu* $N = 25$, $\nu = 2$

$$\left\lfloor \frac{25}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{25}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{25}{25} \right\rfloor \overset{?}{\to}= \Pi(\sqrt{25}) + \Pi(\sqrt{\tfrac{25}{2}}) + \Pi(\sqrt{\tfrac{25}{3}}) + \Pi(\sqrt{\tfrac{25}{5}}) + \Pi(\sqrt{\tfrac{25}{6}})$$

protože $\sqrt{\frac{25}{7}}$, $\sqrt{\frac{25}{8}}$ *a.t.d. jest* < 2

$$
\begin{aligned}
&6+2+1 \overset{?}{\to}= \Pi(5)+\Pi(\sqrt{12.5})+\Pi\left(\sqrt{8\tfrac{1}{3}}\right)+\Pi\left(\sqrt{6\tfrac{1}{4}}\right)+\Pi(\sqrt{5})+\Pi\left(\sqrt{4\tfrac{1}{6}}\right)\\
&6+2+1 = \Pi(5)+\Pi(3)+\Pi(2)+\Pi(2)+\Pi(2)+\Pi(2)\\
&9 \overset{!}{\to}= 3+2+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Jiný kuriósní vzorec dostanu z rovnice (1) *jestliže volím* $f(k) = \Pi(k)$.

Pak jest $f(k) - f(k-1) = 1$ *je-li* $\underline{k}$ *prvočíslo* $\underline{p}$. *Jinak jest* $f(k) - f(k-1) = 0$. *Tedy z* (1)

$$\sum_{p^\nu \le N} \Pi\left\lfloor \frac{N}{p^\nu} \right\rfloor = \sum_{p \le N} \Pi\left(\left(\frac{N}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

Pro $\nu = 1$ *jsou obě strany rovnice stejné. Avšak pro* $\nu > 1$ *jsou to strukturální vzorce.*

Jest ovšem ještě mnoho jiných možností n.př. užití identity (II).

<u>*14. VII.*</u> *Bude jistě zajímavé studovati i jiné „lehčí“ výběrové funkce* $g(k)$ *nežli jsou prvočíselné. Tak n.př. voliti* $g(k) = 1$ *nebo* 0 *podle toho je-li* $\underline{k}$ *čtverce prosté nebo není. Nebo ještě jednodušeji zvoliti* $g(k) = 1,\ 0$ *podle zbytkové třídy* $k \equiv \nu \pmod p$.

<u>*17. VII.*</u> *Souměrnou formu Dirichl. identity dostanu volbou*

$$f(r) = G(r) = g(1) + g(2) + \cdots + g(r)$$

a tedy $g(r) = f(r) - f(r-1)$. *Tak dostanu identitu* $\underline{f(0) = 0}$.

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{N}(f(k)-f(k-1))f\left\lfloor \frac{N}{k}\right\rfloor &= \textstyle\sum_{1}^{r}(f(k)-f(k-1))f\left\lfloor \frac{N}{k}\right\rfloor +\\
&+ \textstyle\sum_{k=1}^{\varrho}(f(k)-f(k-1))f\left\lfloor \frac{N}{k}\right\rfloor - f(\varrho)f(r)
\end{aligned}
$$

Tak n.př. $f(k) = \Pi(k)$, $\Pi(1) = 1$.

$$\sum_{1\le p\le N} \Pi\left(\frac{N}{p}\right) = \sum_{1\le p\le r} \Pi\left(\frac{N}{p}\right) + \sum_{1\le p\le \varrho} \Pi\left(\frac{N}{p}\right) - \Pi(r)\cdot\Pi(\varrho)$$

a to jest (3.5) *l.c.*

<u>*19. VII.*</u> *Podle volby* $f(k)$ *dostanu tak různé vzorce. Jestliže dovedu odhadnouti* $f(k)$ *pro* <u>*velká*</u> $\underline{k}$ *dostanu tak asymptotický vzorec pro součet*

$$\sum_{k=1}^{N}(f(k)-f(k-1))f\left\lfloor \frac{N}{k}\right\rfloor$$

v němž se vyskytují i <u>*malé*</u> *hodnoty* $f\left\lfloor \frac{N}{k}\right\rfloor$ *to jest součet*

$$\sum_{k>r}(f(k)-f(k-1))f\left\lfloor \frac{N}{k}\right\rfloor$$

Tak n.př. pro $f(k)=k$ dostanu Dirichlet. vzorec

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{N}\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor &= \textstyle\sum_{k\leq r}\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor+\sum_{k\leq\varrho}\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor-r\cdot\varrho\\ &= \textstyle N\sum_{k\leq r}\frac{1}{k}+N\sum_{k\leq\varrho}\frac{1}{k}-r\cdot\varrho+O(Max.\ \varrho,r)\end{aligned}$$

Nejlepší odhad pro $\varrho \doteq r \doteq N^{\frac{1}{2}}$ a ten jest dosti hrubý(van der Corput!)

Jiný podobný vzorec dostanu volbou $f(k)=\vartheta(k)=\sum_{p\leq k}\log p$. Pak jest

$$g(k)=f(k)-f(k-1)=\begin{cases}\log p & pro\ k=p\\ 0 & pro\ k\neq p\end{cases}$$

$$\sum_{p\leq N}\log p\ \vartheta\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor=\sum_{p\leq r}\log p\ \vartheta\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor+\sum_{p\leq\varrho}\log p\ \vartheta\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor-\vartheta(r)\cdot\vartheta(\varrho)$$

21. VII. *Pokusím se ještě o transformaci součtů*

$$\sum_{k=1}^{N}g(k)f\left(\left\lfloor\tfrac{N}{k}\right\rfloor\cdot k\right)_{f(0)=0}\quad a\quad\sum_{1}^{N}g(k)f\left(\left\lfloor\tfrac{N}{k^\nu}\right\rfloor\right)$$

V druhém jest $\left\lfloor\frac{N}{k^\nu}\right\rfloor=1$ pokud $1\leq\frac{N}{k^\nu}<2$, $\left\lfloor\frac{N}{k^\nu}\right\rfloor=t$ pokud $t\leq\frac{N}{k^\nu}<t+1$ to jest $\left\lfloor\frac{N}{k^\nu}\right\rfloor=t$ pokud $\frac{N}{t+1}<k^\nu\leq\frac{N}{t}$, $\sqrt[\nu]{\frac{N}{t+1}}<k\leq\sqrt[\nu]{\frac{N}{t}}$. Označím $g(1)+g(2)+\cdots g(r)=G(r)$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{1}^{N}g(k)f\left\lfloor\frac{N}{k^\nu}\right\rfloor &= \textstyle\sum_{k=1}^{N}f(k)\left\{G\left\lfloor\sqrt[\nu]{\frac{N}{k}}\right\rfloor-G\left\lfloor\sqrt[\nu]{\frac{N}{k+1}}\right\rfloor\right\}\\ &= \textstyle f(1)G\left\lfloor\sqrt[\nu]{N}\right\rfloor+\sum_{k=2}^{N}\left\{f(k)-f(k-1)\right\}G\left\lfloor\sqrt[\nu]{\frac{N}{k}}\right\rfloor\end{aligned}$$

Zde jest možno provésti podobnou transf. jako v „Einige Sätze u.s.w.“ p.5. vzorec (3.3) *a* (3.4)*. To později provedu.*

23. VII. *Musím se podrobněji zabývati posloupností čísel $\lfloor N\rfloor$, $\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$, $\left\lfloor\frac{N}{3}\right\rfloor$, $\ldots$, $\left\lfloor\frac{N}{N}\right\rfloor$. Při tom budu pokládati $\underline{N}$ za celé číslo. Tato posloupnost obsahuje N členů, z nichž některé jsou stejné. Následkem toho nemůže obsahovati všechna celá čísla mezi $\underline{1}$ a $\underline{N}$.*

Tedy: Která čísla obsahuje a která nikoliv? To zřejmě souvisí s multiplikat. strukturou čísla $\underline{N}$.

Tak n.př. jest zřejmé, že ta posloupnost obsahuje všechny dělitele čísla N: 1, d_1, d_2, $\ldots$, N. Dále jest

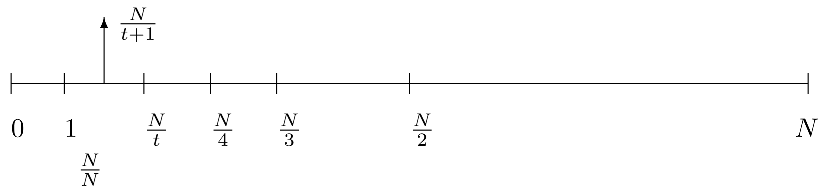
$\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor=1$ *pro* $\frac{N}{2}<k\ \leq N$*. Takových* $\underline{k}$ *jest* $N-\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$

$\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor=2$ *pro* $\frac{N}{3}<k\ \leq\frac{N}{2}$. -”- k -”- $\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{N}{3}\right\rfloor$

$\ldots$

$\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor=t$ *pro* $\frac{N}{t+1}<k\ \leq\frac{N}{t}$. -”- k -”- $\left\lfloor\frac{N}{t}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{N}{t+1}\right\rfloor$.

V posloupnosti čísel $\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N$ se tedy nebudou vůbec vyskytovati taková celá čísla $\underline{t}$ pro něž jest $\left\lfloor\frac{N}{t}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{N}{t+1}\right\rfloor=0$. To musí býti int. $\left(\frac{N}{t+1},\frac{N}{t}\right)$ kratší jedné. To má *následující geometr. význam: Vyznačím na ose číselné všechna čísla* N, $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{3}$, $\ldots$, $\frac{N}{N-1}$, $\frac{N}{N}=1$.



Obr. -v-

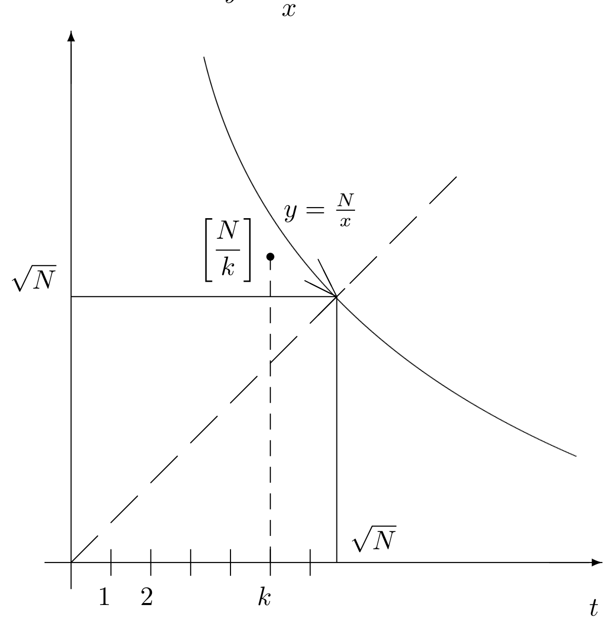
Tak vznikne na ose té N intervalů uzavřen. $\langle 0, \frac{N}{N}\rangle$, $\langle \frac{N}{N}, \frac{N}{N-1}\rangle$, $\langle \frac{N}{N-1}, \frac{N}{N-2}\rangle$, $\ldots$, $\langle \frac{N}{N-3}, \frac{N}{N-2}\rangle$, $\ldots\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{1}\rangle$.

Je-li interval $\langle \frac{N}{t+1}, \frac{N}{t}\rangle$ *menší než jedna, může v něm ležeti nejvýše jedno celé číslo nebo žádné. Jedno tam bude ležeti jen když buď* $\frac{N}{t+1}$ *nebo* $\frac{N}{t}$ *jest celé nebo leží-li mezi nimi celé číslo.*

24. VII.

Zde jest zřejmá souvislost s mřížovými body v rovnoramenné hyperbole

$$y = \frac{N}{x}\,.$$



Obr. -vi-

31. VII. *Měl jsem po ovoci velké obtíže s trávením. Také bolesti v krajině srdeční stále pokračují.*

Ta posloupnost čísel $\left\lfloor \frac{N}{k}\right\rfloor$, $k = 1, 2, \ldots, N$ *zasluhuje velké pozornosti. Souvisí s Dirichletovým a příbuznými problemy a její struktura není probádána.*

Musím pomalu a s velkou trpělivostí zkoumati různé její vlastnosti. Posloupnost má N členů. Avšak některé si jsou rovny. Tak vím že pro

$\frac{N}{2} < k \ \leq N \qquad \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = 1,$ *takových* $\underline{k}$ *jest* $N - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$
$\frac{N}{3} < k \ \leq \frac{N}{2} \qquad \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = 2,$ *takových* k -"- $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$
$\frac{N}{4} < k \ \leq \frac{N}{3} \qquad \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = 3,$ -"- k -"- $\frac{N}{3} - \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor$
a.t.d.

To jsem už počítal na str. 71. Z toho plyne, že pokud interval $\langle \frac{N}{t+1}, \frac{N}{t} \rangle$ *<u>uzavřený</u> jest <u>větší</u> nebo roven jedné, existuje <u>aspoň</u> jedno celé* $\underline{k}$*, pro něž* $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = t$*. <u>Přesně</u> jest takových* k *v počtu* $\left\lfloor \frac{N}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{t+1} \right\rfloor \geq 1$*. Jest pak*

$$\frac{N}{t} - \frac{N}{t+1} \geq 1 \ \textit{pro} \ N \geq t(t+1)\,,\ t^2 + t - N \leq 0$$

to jest pro $t \leq \frac{1}{2}(\sqrt{1+4N} - 1)$, $t + \frac{1}{2} \leq \sqrt{N + \frac{1}{4}}$ *to jest (celé)* $t \leq \left[\sqrt{N + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right]$

<u>2. VIII.</u> *Z předchozího jest především zřejmé, že v posloupnosti* $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = t$ *jsou obsažena všechna čísla* $t = 1, 2, 3, \ldots, \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ *<u>aspoň</u> jednou. Neboť*

$$\left\lfloor \frac{N}{\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{N}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$$

a čísla $t < \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ *tedy* $t = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - 2, \ldots, 1$ *jsou tam obsažena a to* $t = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - K$ *pro všechna*

$$\frac{N}{\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor + 1 - K} < k \ \leq \frac{N}{\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - K}$$

a pro $K \geq 1$ *neboť Interval* $\left(\frac{N}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor - K}, \frac{N}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1 - K} \right)$ *má délku*

$$I = N \left\{ \frac{N}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor - K} - \frac{N}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1 - K} \right\} = \frac{N}{(\lfloor \sqrt{N} \rfloor - K)(\lfloor \sqrt{N} \rfloor + K - 1)}$$

a při tom jest tedy

$$I \geq \frac{N}{(\sqrt{N} - K)(\sqrt{N} - K + 1)} \geq \frac{N}{(\sqrt{N} - 1)\sqrt{N}} \overset{!}{\rightarrow} > 1 \quad \textit{pro } N > 1\,.$$

<u>3. VIII.</u> *Běží nyní o to zjistiti zda mezi čísly* $t = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$, $k = 1, 2, \ldots, N$ *se pro <u>každé</u> celé* $\underline{N}$ *vyskytne také číslo* $t = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$*?*

Je-li N *úplný čtverec t.j.* $N = \mathcal{K}^2$ *(*$\mathcal{K}$ *celé) pak zajisté*

$$\left\lfloor \frac{N}{\sqrt{N}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}} \right\rfloor = \underline{\mathcal{K}} = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$$

Je-li $N = \mathcal{K}^2 + K$, $1 \leq K < \mathcal{K}$ *bude opět*

$$\left\lfloor \frac{N}{\sqrt{N}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathcal{K}^2 + K}{\mathcal{K}} \right\rfloor = \left\lfloor \mathcal{K} + \frac{K}{\mathcal{K}} \right\rfloor = \mathcal{K} = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$$

Je-li $N = \mathcal{K}^2 + \mathcal{K} + K$, $0 \le K \le \mathcal{K}$ *bude opět* $\sqrt{N} = \mathcal{K}$ *protože* $\sqrt{N} < \mathcal{K} + 1$. *Pak jest*

$$\left\lfloor \frac{N}{\mathcal{K}+1} \right\rfloor = \left\lfloor \mathcal{K} + \frac{K}{\mathcal{K}\ +1} \right\rfloor = \mathcal{K} = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor!$$

Tedy celkem ať jest *<u>N</u>* *jakékoliv celé číslo, vždy v posloupnosti* $t = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$, $k = 1, 2, \ldots, N$ *se vyskytnou všechna celá čísla* $t = 1, 2, 3, \ldots, \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ *<u>aspoň jednou</u>.*

Další otázka jest zdali se tam mohou vyskytnouti také čísla $t = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor + 1$, $\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor + 2$, *a.t.d. a kdy to nastane jakož i jak daleko tato* $t > \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ *tvoří po sobě jdoucí celá čísla? Kdy nastane první mezera? Je-li* $N = \mathcal{K}^2$ *potom*

$$\left\lfloor \frac{N}{\mathcal{K}\ -1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathcal{K}^2 - 1 + 1}{\mathcal{K}\ -1} \right\rfloor = \left\lfloor \mathcal{K} + 1 + \frac{1}{\mathcal{K}\ -1} \right\rfloor = \mathcal{K}\ +1$$

pokud $\frac{1}{\mathcal{K}-1} < 1$ *t.j.* $\underline{\mathcal{K} > 2}$. *Dále*

$$\left\lfloor \frac{N}{\mathcal{K}-2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathcal{K}^2 - 4 + 4}{\mathcal{K}\ -2} \right\rfloor = \left\lfloor \mathcal{K} + 2 + \frac{4}{\mathcal{K}-2} \right\rfloor = \mathcal{K}\ +2$$

pokud $\frac{4}{\mathcal{K}\ -2} < 1$ *t.j.* $\mathcal{K} > 6$. *Obecně při* $N = \mathcal{K}^2$

$$\left\lfloor \frac{N}{\mathcal{K}-K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathcal{K}^2 - K^2 + K^2}{\mathcal{K}-K} \right\rfloor = \left\lfloor \mathcal{K} + K + \frac{K^2}{\mathcal{K}-K} \right\rfloor = \mathcal{K} + K$$

pokud $\frac{K^2}{\mathcal{K}-K} < 1$ *t.j.* $\mathcal{K} > K(K+1)$ *to jest pokud* $N = \mathcal{K}^2 > (K(K+1))^2$. *Co nyní nastane jestliže* *<u>N</u>* *není úplný čtverec? A dále jaké jsou zbytky čísel* $\frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}\ -K}$ *pro* $K(K+1) > \mathcal{K}$, *jakož i příslušná celá čísla* $\left\lfloor \frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}\ -K} \right\rfloor$*? Která* *<u>celá</u>* *čísla* $t = \left\lfloor \frac{\mathcal{K}^2}{K} \right\rfloor$ *budou chyběti v té posloupnosti* $\underline{t}$ *pro taková* K*?*

<u>4. VIII.</u> *Při speciální volbě* $N = \mathcal{K}^2$ *dovedu tedy přímo počítati zbytky zlomků* $\frac{N}{\sqrt{N}-K}$ *t.j. čísla* $\frac{K^2}{\mathcal{K}\ -K}$ *pokud* $K = 1, 2, 3, \ldots$ *až po* $\underline{K}$ *které splňují nerovnosti* $K(K+1) < \mathcal{K} = \sqrt{N}$. *Součet těch zbytků bude tedy*

$$\frac{1^2}{\mathcal{K}-1} + \frac{2^2}{\mathcal{K}-2} + \frac{3^2}{\mathcal{K}-3} + \cdots + \frac{K^2}{\mathcal{K}-K}$$

kdež $\underline{K}$ *jest největší z celých čísel vlastnosti* $K(K+1) < \mathcal{K}$. *Jistě jest možné velikost tohoto součtu odhadnouti n.př. pomocí Plana-Abel-Cauchyovy formule nebo jinou sumací. (Euler-Maclaurinova formule.) Jest tedy záhodné hledati další nějakou specialisaci čísla* $\underline{\mathcal{K}}$ *tak, aby bylo možno počítati* *<u>další</u>* *zbytky pro ještě větší* $\underline{K}$*:*

Tak se mi zdá, že k tomu cíli bude vhodná volba $\mathcal{K} = k(k+1)$, *při daném* $\underline{k}$ *dosti velikém. Potom číslo* $\underline{K}$ *bude určeno vztahem* $K(K+1) < k(k+1)$ *to jest* $K = k - 1$ *a čísla* l *větší než* $\underline{k}$ *budou splňovati vztah*

$$l(l+1) > \mathcal{K} = (k+1) \cdot k\,.$$

5. VIII. Jiná snad schůdnější cesta spočívá ve výpočtu zbytků při dělení $\frac{N}{\mathcal{K}-K} = \frac{K^2}{\mathcal{K}-K}$. Pokud $K(K+1) < \mathcal{K}$ znám ty zbytky podle předešlé strany. Jsou to zlomky $\frac{K^2}{\mathcal{K}\ -K}$. Je-li však $K(K+1) > \mathcal{K}$ jsou ty zlomky > 1. Pokud však budou *menší* než $\underline{2}$ budou zbytky při dělení $\frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - 1$. To tedy nastane pokud

$$\mathcal{K} \leq K(K+1) \quad a\ d\acute{a}le \quad \frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - 1 < 1 \ \ \check{c}ili$$

$K^2 < 2\mathcal{K}\ - 2K$, $K^2 + 2K < 2\mathcal{K}$, $(K+1)^2 < 2\mathcal{K}+1 \quad K+1 < \sqrt{2\mathcal{K}+1}$, $K < \sqrt{2\mathcal{K}+1} - 1$. To jest $\mathcal{K} \leq K(K+1) < 2\mathcal{K} + 1 - \sqrt{2\mathcal{K}+1}$. Pro taková $\underline{K}$ budou ty zbytky

$$\frac{K(K+1) - \mathcal{K}}{\mathcal{K}-K} = \frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - 1$$

Tak jest možno pokračovati dále. Tak n.př. $1 \leq \frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - 1 < 2$. To jest $2\mathcal{K} \leq K^2 + 2K$, $K^2 + 3K < 3\mathcal{K}$ a t.d. Obecně $K^2 + \alpha K \geq \alpha\mathcal{K}$, $K^2 + (\alpha+1)K < (\alpha+1)\mathcal{K}$. Pro taková $\underline{K}$ jsou zbytky $\frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - \alpha$ Jest nyní otázka pro která celá $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ taková celá $\underline{K}$ existují? A jestliže existují, kolik jest jich?

Nerovnostem pro $\underline{K}$ jest možno dáti tvar

$$\begin{aligned} \left(K + \frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad &\geq \quad \alpha\mathcal{K} + \frac{\alpha^2}{4}, \quad \left(K + \frac{\alpha+1}{2}\right)^2 < (\alpha+1)\mathcal{K} + \frac{(\alpha+1)^2}{4} \\ K + \frac{\alpha}{2} \quad &\geq \quad \sqrt{\alpha\mathcal{K} + \frac{\alpha^2}{4}}, \quad K + \frac{\alpha+1}{2} < \sqrt{(\alpha+1)\mathcal{K} + \frac{(\alpha+1)^2}{4}} \end{aligned}$$

Takových $\underline{K}$ bude tedy tolik, kolik jest celých čísel v intervalu polouzavřeném

$$\left\langle \sqrt{\alpha\mathcal{K} + \frac{\alpha^2}{4}} - \frac{\alpha}{2}, \sqrt{(\alpha+1)\mathcal{K} + \frac{(\alpha+1)^2}{4}} - \frac{\alpha+1}{2} \right)$$

Je-li délka tohoto intervalu *menší* než jedna nebo rovna jedné může existovati jen *jedno* takové $\underline{K}$ celé anebo vůbec žádné. Je-li ta délka větší než jedna, avšak menší nebo rovna dvěma musí existovati aspoň jedno celé K nejvýše však *dvě* a t.d. Jest tedy nutno vypočísti tu délku

$$I = \sqrt{(\alpha+1)\mathcal{K} + \frac{(\alpha+1)^2}{4}} - \sqrt{\alpha\mathcal{K} + \frac{\alpha^2}{4}} - \frac{1}{2}$$

při daném celém $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$

Nerovnosti pro $\underline{K}$ z předešlé strany ukazují také souvislost s teorií mřížových bodů vezmu-li za základ rovnici křivky $y = \frac{x^2}{\mathcal{K}\ -x}$ a křivky $y = \frac{\mathcal{K}-x^2}{\mathcal{K}-x}$ (Psáno jest $\underline{y}$ místo α, $\underline{x}$ místo $\underline{K}$)

6. VIII. Jsou to hyperboly se společnou asymptotou $x = \mathcal{K}$. První má druhou asympt. $y = -x - \mathcal{K}$ a druhá $y = x + \mathcal{K}$. První se dotýká osy x v bodě $(0,0)$ a pro kladná $x < \mathcal{K}$ probíhá nad osou x. Druhá hyperbola protíná osu x v bodech $x = \pm\sqrt{\mathcal{K}}$ a pro $x = 0$ prochází bodem $(0,1)$.

7. VIII. Ta druhá hyperbola jest zbytečná. Stačí ke geometr. interpretaci ta první o rovnici

$$y = \frac{x^2}{\mathcal{K} - x}$$

Jest totiž zřejmé, že pro celá K pokud $0 < \frac{K^2}{\mathcal{K}-K} < 1$ bude tento výraz zbytek. Je-li $1 \leq \frac{K^2}{\mathcal{K}-K} < 2$ bude příslušný zbytek $\frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - 1$. Obecně pokud $\alpha \leq \frac{K^2}{\mathcal{K}-K} < \alpha + 1$ bude ten zbytek $\frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - \alpha$. Stačí tedy nakresliti tu hyperbolu a vésti rovnoběžky k ose x ve vzdálenostech $+1, +2, +3, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots$ Rovnoběžky (α) a $(\alpha+1)$ protnou hyperbolu ve dvou bodech s kladnými x_α, $x_{\alpha+1}$. Potom ona celá čísla K ležící v intervalu $\langle x_\alpha, x_{\alpha+1})$ to jest $x_\alpha \leq K < x_{\alpha+1}$ budou v podílu $\frac{K^2}{\mathcal{K}-K}$ tvořiti zbytky $\frac{K^2}{\mathcal{K}-K} - \alpha$. Délku intervalu $\langle x_\alpha, x_{\alpha+1})$ jsem už vypočetl na str. 77.

$$I = \sqrt{(\alpha+1)\mathcal{K} + \frac{(\alpha+1)^2}{4}} - \sqrt{\alpha\mathcal{K} + \frac{\alpha^2}{4}} - \frac{1}{2}$$

8. VIII. Při vyšetřování zbytků čísel $\frac{N}{k}$ stačí se omeziti na taková k, která jsou větší než $N^{\frac{1}{4}}$ protože pro taková k která jsou menší než $N^{\frac{1}{4}}$ bude součet těch zbytků menší než jejich počet t.j. $\left\lfloor N^{\frac{1}{4}} \right\rfloor$ a jest známo, že exponent v Dirichlet. problemu jest větší než $\frac{1}{4}$ (Van der Corput?) Protože jsem volil $N = \mathcal{K}^2$ bude při vyšetřování zbytků sledovati jen taková K kdy $\frac{N}{k} = \frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}-K}$ má vlastnost $\mathcal{K} - K > \sqrt{\mathcal{K}}$ čili $K < \mathcal{K} - \sqrt{\mathcal{K}}$.

To však znamená, že stačí se omeziti na taková α, kdy

$$x_\alpha \leq K < \mathcal{K} - \sqrt{\mathcal{K}}\,.$$

Označím-li $\alpha = 2y$ musí $\sqrt{2y\mathcal{K} + y^2} - y < \mathcal{K} - \sqrt{\mathcal{K}}$ čili $y^2 + 2\mathcal{K}\,y < (\mathcal{K} + y)^2 - 2(\mathcal{K}+y)\sqrt{\mathcal{K}} + \mathcal{K}$, $0 < \mathcal{K}^2 + \mathcal{K} - 2\mathcal{K}\sqrt{\mathcal{K}} - 2y\sqrt{\mathcal{K}}$, $2y\sqrt{\mathcal{K}} < (\mathcal{K} - \sqrt{\mathcal{K}})^2$, $\alpha = 2y < (\mathcal{K}^{\frac{3}{4}} - \mathcal{K}^{\frac{1}{4}})^2 = \sqrt{\mathcal{K}}(\sqrt{\mathcal{K}} - 1)^2$. Bude tedy asi účelné zvoliti $\sqrt{\mathcal{K}}$ jako celé číslo t.j. $N = \mathcal{L}^4$, $\mathcal{K} = \mathcal{L}^2$, $\sqrt{\mathcal{K}} = \mathcal{L}$.

Jak dlouhé budou příslušné intervaly I pro taková α? To znamená kolik různých K se vejde do takového intervalu nejvýše?

9. VIII. Délka intervalu pro dané α jest

$$I = \sqrt{(\alpha+1)\mathcal{K} + \frac{(\alpha+1)^2}{4}} - \sqrt{\alpha\mathcal{K} + \frac{\alpha^2}{4}} - \frac{1}{2}$$

Pro malá α to snadno odhadnu

$$I = \sqrt{\mathcal{K}(\alpha+1)}\sqrt{1 + \frac{(\alpha+1)}{4\mathcal{K}}} - \sqrt{\mathcal{K}\,\alpha}\sqrt{1 + \frac{\alpha}{4\mathcal{K}}} - \frac{1}{2}\,.$$

Je-li $\mathcal{K}$ velké číslo

$$I_\alpha = \sqrt{\mathcal{K}}(\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}) - \frac{1}{2} + \frac{(\alpha+1)^{\frac{3}{2}}}{8\sqrt{\mathcal{K}}} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{8\sqrt{\mathcal{K}}} + O\left(\frac{1}{\mathcal{K}^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Nežli budu v tomto počtu pokračovati pokusím se nalézti dolní hranici pro součet těch zbytků. To jest vypočtu zbytky pro $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ a t.d. pokud to dovedu a sečtu je. Podle str. 75. jsou ty zbytky pro $\alpha = 0$

$$\frac{1^2}{\mathcal{K}-1}+\frac{2^2}{\mathcal{K}-2}+\cdots+\frac{K_0^2}{\mathcal{K}-K_0}\,,\qquad K_0(K_0+1)<\mathcal{K}=\sqrt{N}$$

Pro $\underline{\alpha = 1}$ *budou ty zbytky*

$$\left(\frac{(K_0+1)^2}{\mathcal{K}-(K_0+1)}-1\right)+\left(\frac{(K_0+2)^2}{\mathcal{K}-(K_0+2)}-1\right)+\cdots+\left(\frac{K_1^2}{\mathcal{K}-K_1}-1\right)$$

kdež (str. 76.) $\mathcal{K}<K_1(K_1+1)<2\mathcal{K}+1-\sqrt{2\mathcal{K}+1}$. *Tedy součet obojích zbytků* $(\alpha = 0,\, 1)$

$$\sum_{x=1}^{K_1}\frac{x^2}{\mathcal{K}-x}-(K_1-K_0)\,.$$

Podobně dále

$$\sum_{x=1}^{K_2}\tfrac{x^2}{\mathcal{K}-x}-(K_1-K_0)-2(K_2-K_1)=\sum_{x=1}^{K_2}\tfrac{x^2}{\mathcal{K}-x}+K_0+K_1-2K_2$$

$$\sum_{x=1}^{K_\nu}\tfrac{x^2}{\mathcal{K}-x}+K_0+K_1+K_2+\cdots+K_{\nu-1}-\nu K_\nu \qquad (A)$$

kdež K_ν *odpovídá* $\alpha=\nu$*!*

10. VIII. *Stále mi není jasné jak souvisí čísla* $\underline{K}$ *s příslušnými* $\underline{\alpha}$*. Jest totiž zřejmé, že s rostoucím* $\underline{\alpha}$ *délka intervalů* I_α *se zmenšuje. Nastane tedy moment, kdy s rostoucím* $\underline{\alpha}$ *interval* I_α *bude velmi krátký a pak do něho nepadne žádné* $\underline{K}$ *celé. Má to nějaký vliv na formuli (A)? Při tom budu asi přinucen opříti se o geometrický názor t.j. o tu hyperbolu a to nejlépe v nějakém speciálním případě. Volím n.př.* $N = 100 = 10^2$.

V dalším textu je znovu konstatována přílišná únava podpořená koncentrací na jediný problém, a proto navazují „jednodušší problemy z teorie prostých řad“. V následujících řádcích je formulováno několik domněnek o prostých řadách, z nichž je většina o několik stránek dále vyvrácena, nebo je konstatováno, že daným postupem je nelze ani potvrdit, ani vyvrátit. Zároveň se výrazně prodlužují intervaly mezi jednotlivými záznamy. V zápisu z 1. ledna 1955 najdeme projev „hravosti“ v rozkladu nového letopočtu na součin prvočísel ($1955 = 23\cdot 17\cdot 5$). Samotné úvahy se však i nadále stále točí kolem prostých funkcí. Na str. 182 je uveden nápad vyšetřovat místo koeficientů polynomu

$$P(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n$$

kořeny tohoto polynomu. Bohužel, na str. 185 zápisky končí, a tak problémy výše zmiňované zůstávají nedořešeny.

Použité zdroje

Deníky z pozůstalosti, zapůjčené s laskavým dovolením profesorova vnuka Miloše Kösslera.

KOPŘIVA, J. Prof. PhDr. Miloš Kössler zemřel. *Pokroky Mat. Fyz. Astronom.* **6**, str. 226–230, 1961.

Kapitola 7.
Faktografické přílohy

7.1. Přehled publikací Miloše Kösslera

Přehled publikací Miloše Kösslera byl vytvořen na základě seznamu, který sestavil v roce 1955 Vojtěch Jarník pro svůj článek *Vědecké práce M. Kösslera* uveřejněný v Časopise pro pěstování matematiky (viz [Jarník (1955)]). Tento výchozí materiál byl ověřen, rozšířen a doplněn o citace v referativních časopisech na základě databází *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* a *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.[7.1]

Číslování jednotlivých článků zůstalo zachováno podle seznamu Vojtěcha Jarníka, navíc bylo před pořadová čísla prací přidáno písmeno K pro odlišení Kösslerova díla od ostatní citované literatury. Inspirací pro použitý způsob uvedení seznamu autorova díla včetně recenzí byla kniha [Lepka (1995)].

Ve sledovaných obdobích – u časopisu Zentralblatt (v dalším textu použito zkratky **ZB**) od roku 1931 do roku 2000 a u časopisu Mathematical Reviews (dále pod zkratkou **RE**) od roku 1940 do roku 2000 – jsou v obou databázích obsaženy téměř všechny Kösslerovy publikace z daného časového intervalu – s drobnými výjimkami: Zentralblatt vynechává v intervalu článků ([K20]–[K32]) práci, která je v našem seznamu označena ([K28]) a byla vydána roku 1948 ve Věstníku Královské české společnosti nauk. Oproti tomu databáze Mathematical Reviews se nezmiňuje o článku psaném společně s V. Jarníkem označeném jako ([K32]). Jahrbuch (pod zkratkou **JFM**) zmiňuje Kösslerovy práce z období 1913 až 1934.

Největším problémem při vyhledávání citací Kösslerových prací v referativních databázích je samo autorovo jméno. Objevují se různé přepisy Kossler, Koessler, dokonce Köszler. S posledně zmíněnou úpravou souvisí např. i dvojí citace práce [K2] v Jahrbuchu. Nejprve se objevuje pouze citace pod francouzským názvem článku se jménem autora správně zapsaným, stejně tak ale existuje i review (pod jiným číslem!) na tentýž článek, u níž je chybně zapsané jméno autora práce (Köszler) a rok vydání (místo roku 1914 je zde uveden rok 1915).

Nahlédneme-li do *Masarykova slovníku naučného*, najdeme zde pod heslem *Kössler Miloš* zmíněny práce [K3], [K5a,b], [K33]. V rámci *Ottova slovníku naučného nové doby* bychom se s Milošem Kösslerem shledali až v Dodatcích z roku 1935, kde jsou uvedeny práce [K5a,b], [K14], [K20], [K21], [K33]. [7.2]

Dodejme ještě na závěr drobnou poznámku – v roce 1936/37 byla do vydavatelského programu Jednoty zařazena publikace Miloše Kösslera *Teorie funkcí*, avšak žádné pozdější zmínky o této práci se neobjevují. V následujícím seznamu proto rovněž není uvedena.

[7.1] V druhé polovině roku 2003 došlo k propojení obou databází. Zmiňované citace byly získávány v letech 2000–2002.

[7.2] V knize [Dodatky (1935)] je Kössler dokonce uveden v seznamu přibylých spolupracovníků.

Původní vědecká pojednání

K1 *O zonální funkci harmonické*

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **42**, str. 337–343, 1913
JFM 44.0430.01 *Über die zonale harmonische Funktion* (Czech) Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

kann man darstellen als ein bestimmtes Integral in der Form

$$\varphi(r, z) = \int_0^\pi \Phi_1(r \sin\vartheta, z) d\vartheta,$$

wobei $\Phi_1(r, z)$ eine beliebige harmonische Funktion der Veränderlichen r, z ist.
Reviewer: *Prof. Petr (Prag)*

K2 *Řešení algebraické rovnice výrazy meznými*

Čas. pro pěst. mat. a fys. **43**, str. 162–169, 1914
JFM 45.1231.04 *La résolution d'une équation algébrique ŕ l'aide des limites* (Czech), pouze citace
JFM 45.0165.03 *Lösung der algebraischen Gleichungen durch Limitausdrücke* (Böhmisch) Der Verf. gibt eine Ableitung von einem Teile der bekannten (von *Jacobi* stammenden) Erweiterung der *Bernoulli*schen Auflösungsmethode.
Reviewer: *Prof. Petr (Prag)*

K3 *Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou*

Čas. pro pěst. mat. a fys. **44**, str. 38–42, 1915
JFM 45.0288.01 *Eine Beziehung zwischen Anzahl der Primzahlen und dem Satze von Wilson* (Böhmisch) Der Verf. gibt für die Anzahl der Primzahlen im Intervalle (A, B) folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \pi\varrho(z) \operatorname{cotg} \pi z \, dz\,.$$

Dabei ist

$$\varrho(z) = \frac{\sin\left(\pi \frac{\Gamma(z)}{z}\right)}{\sin\frac{\pi}{z}}\,,$$

und C ist eine einfache geschlossene Linie, die von den ganzzahligen Punkten der reelen Achse nur die in ihrem innern hat, welche im Intervalle (A, B) sich befinden.
Reviewer: *Prof. Petr (Prag)*

K4 *Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla*

Čas. pro pěst. mat. a fys. **45**, str. 178–188, 1916
JFM 46.0269.03 *Die Summe der Lambertschen Reihe und die Anzahl der Divisoren einer ganzen Zahl* (Czech) Ein neuer Ausdruck für diese Summe, welcher nicht – wie derjenige *Schlömilchs* – die Funktion log log enthält. Eine neue Formel für die Anzahl

der Teiler $\Theta(n)$ und für die Summe $\sum_{x\leq n}\Theta(x)$. Es werden auch die in diesen Formeln vorkommenden bestimmten Integrale berechent.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K5a *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru*, část I

Rozpravy České akademie, II.tř. **24** (41), 34 str., 1916
JFM 45.0640.03 *Über Reihenentwickelungen für eine in gegebenem Bereiche analytische Funktion* (Czech) Der Verf. beweist folgenden Satz: Die im einfach zusammenhängenden Bereiche K (inklusive Begrenzung C) analytische Funktion $F(z)$ lässt sich in eine Reihe von der Form

$$F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_k b_k(z)$$

entwickeln, wobei $b_k(z)$ algebraische, im K eindeutige Funktionen sind, welche bloß von der Kurve C (und nicht von der Funktion $F(z)$) abhängen. Für eine und dieselbe Funktion $F(z)$ und eine und dieselbe Begrenzungskurve C existiert eine unendliche Anzahl solcher Reihenentwickelungen. Für den Kreis ist die *Taylor*sche Reihe die einfachste.

Der Beweis dieses Satzes wird zuerst für den Fall gegeben, daß C eine algebraische rationale Kurve ist. Die Ausdehnung der Gültigkeit für andere Fälle führt der Verf. mit Hilfe des Satzes von *Osgood* durch, welcher besagt, daß man im allgemainen Falle immer eine reguläre, geschlossene Kurve C konstruieren kann, die sich der Begrenzung so eng anschmiegt, wie man will.
Reviewer: *Prof. Petr (Prag)*

K5b *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru*, část II

Rozpravy České akademie, II.tř. **26** (54), 38 str., 1916
JFM 46.0542.01 *Über die Entwicklungen einer analytischen Funktion in einem gegebenen Gebiete II.* (Czech) Im ersten Teile seiner Abhandlung (vgl. F. d. M. 45, 640, 1914–15) hat der Verf. seine Betrachtungen nur auf gewisse spezielle Gebiete beschränkt; in diesem zweiten Teile betrachtet er ganz allgemeine Gebiete. Er findet für jedes Gebiet vier Entwicklungen: zwei, die im Innern, und zwei, die ausserhalb des Gebietes Geltung haben.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K6 *Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou*

Rozpravy České akademie, II.tř. **25** (26), 23 str., 1916
JFM 46.0270.01 *Eine neue Entwicklung der Riemannschen Primzahlfunktion* (Czech) Bekanntlich hat *Riemann* für die Funktion

$$f(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}(x^{\frac{1}{3}})+\cdots,$$

wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bedeutet, eine Integralformel angegeben, welche die Nullstellen der *Riemann*schen Zetafunktion enthält. Der Verf. zeigt, wie das in dieser Formel vorkommende Integral ohne Kenntnis dieser Nullstellen in eine Reihe entwickelt werden kann. Es folgt hieraus übrigens noch eine zweite Darstellung für diese Funktion in Form einer unendlichen Reihe, deren Konvergenz jedoch

nicht bewiesen wird; diese Reihe führt indessen zu einer einfachen Berechnung von $\pi(x)$.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K7 *O rekurentním vzorci pro prvočísla*

Rozpravy České akademie, II.tř. **26** (48), 6 str., 1917
JFM 46.0270.02 *Über eine Rekurrenzformel für die Primzahlen* (Czech) Der Verf. leitet eine ziemlich einfache Formel ab, durch welche die k-te Primzahl bestimmt wird, wenn alle vorangehenden bekannt sind (und zwar auf Grund von *Bernoulli*schen Zahlen); diese Formel bietet den Vorteil dass sie keine Iterationen von Funktionen enthält.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K8 *Integrál Cauchyův a Dirichletův problém v rovině*

Čas. pro pěst. mat. a fys. **51**, 5 str., 1922
JFM 48.0319.01 *Das Cauchysche Integral und das ebene Dirichletsche Problem* (Czech, French summary) Eine Funktion $F(s)$, die regulär ist in einem einfach zusammenhängenden, von der analytischen Kurve C begrenzten Gebiet, wird, mit Hilfe des Cauchyschen Integrals, durch die Formel ausgedrückt:

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{H(t)\,dt}{t-s},$$

wo $H[t(\tau)] = 2h(e^{i\tau})$ durch eine Fredholmsche Integralgleichung

$$u(\psi) = h(e^{i\psi}) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi})\,\mathrm{Re}\left[\frac{t'(e^{i\varphi})e^{i\varphi}}{t(e^{i\varphi})t(e^{i\psi})}\right]\,d\varphi$$

bestimmt ist. Hier bedeutet $u(\psi)$ eine stetige Funktion, welche die Werte des reellen Teiles von $F(s)$ auf G wiedergibt.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K9 *Příspěvek k teorii Borelova pokračování funkcí*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír. **7**, 14 str., 1921–1922
JFM 48.0396.03 *Beitrag zur Borelschen Theorie der Fortsetzung von Funktionen* (Czech, English summary) Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist der interessante Satz: Auf welche Art man auch den Begriff der stetigen Fortsetzung erweitert, immer wird es Funktionen geben, welche auf diese Art über keinen Punkt ihres Konvergenzkreises fortgesetzt werden können, solange man an den Forderungen der Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion, und der Existenz, Endlichkeit und Stetigkeit ihrer Ableitung festhält.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag), Prof. Neder (Münster i. W.)*

K10 *O úhlech nesouměřitelných*

Čas. pro pěst. mat. a fys. **52**, str. 73–78, 1923
JFM 49.0710.03 *Über inkommensurable Winkel* (Czech, with French summary) Verf. leitet zwei Sätze über die Kommensurabilität von zwei Winkeln ab; er gebraucht sie

zur Konstruktion von Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten, für welche der Einheitskreis die natürliche Grenze bildet.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K11 *Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově*
Rozpravy České akademie, II.tř. **31** (19), 8 str., 1922
JFM 48.0396.02 *Potenzreihen mit natürlicher Grenze und ihre Borelsche Fortsetzung* (Czech) Verf. beweist, dass die Funktion

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(y\alpha^n)\, b_n x^n,$$

welche in dem Konvergenzkreise der Reihe ihre natürliche Grenze (im Weierstraßschen Sinne) hat, für $\alpha = e^{i\beta}$ (β eine passend gewählte, mit π nicht kommensurable Zahl) im Borelschen Sinne fortsetzbar ist, und zwar ist die Fortsetzung vermittelt durch die Transformationsformel

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(y\alpha^n)\, b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(x\alpha^n)\, a_n y^n.$$

Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag), Prof. Neder (Münster i. W.)*

K12 *On a generalization of the Lagrange series*
Proceedings of the London Mathematical Society **20** (2), str. 365–373, 1922
JFM 48.0396.01 Eigentlich handelt es sich hier nicht um eine Verallgemeinerung, sondern um *Anwendungen* der Lagrangeschen Reihenumkehrformel. Die trinomische Gleichung

$$x^n - u(ax+1) = 0$$

wird in der Form aufgelöst:

$$x_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \binom{m/n}{m-1} a^{m-1} \overset{n}{\to} \sqrt{u^m} e^{\frac{2\pi ikm}{n}},$$

die für $|\,u\,| \leqq \dfrac{n^n}{|\,a\,|^n (n-1)^{n-1}}$ gilt. Eine für $|\,u\,| \geqq \dfrac{n^n}{|\,a\,|^n (n-1)^{n-1}}$ gültige Formel erhält man durch die Substitution $x = \dfrac{1}{y}$, $u = \dfrac{1}{v}$. Weiterhin werden auch die Lösungen der allgemeinen algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$x^n - u(c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n) = 0$$

nach Potenzen von $\sqrt[n]{u}$ explizit entwickelt. Für die analytische Fortsetzung über den Konvergenzkreis hinaus wird aber nur auf die bekannten Sätze über polynomische Reihen verwiesen.
Reviewer: *Prof. Perron (München)*

K12' *On the zeros of analytic functions*[7.3]
Proceedings of the London Mathematical Society **20** (2), str. XVI–XVIII, 1922
JFM 48.0403.04 pouze citace

[7.3] Tato citace v Jarníkově seznamu chybí.

K13 *O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční*

Rozpravy České akademie, II.tř. **32** (35), 15 str., 1923
JFM 49.0710.02 *Über die auf dem Konvergenzkreis liegenden Singularitäten einer Potenzreihe* (Czech; with French summary in Bulletin 24) Verf. gibt den ausführlichen Beweis von zwei Kriterien, die er in Rom. Acc. L. Rend. 32_1, 26, 83, 528, 1923 angeführt hat dafür, dass ein Punkt auf der Peripherie des Konvergenzkreises ein singulärer oder regulärer Punkt der betrachteten Funktion ist. Er leitet, auf Grund dieser Kriterien, weitere Sätze ab, in denen als Speziallfälle die dieselbe Frage betreffenden Sätze von Vivanti-Dienes, Hadamard und Fatou-Plya enthalten sind.
Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K14 *Sur le singularités des séries entières*

Accademia dei Lincei. Rendiconti **32** (5), str. 26–29, 1923
JFM 49.0236.01 Bestimmung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $z_0 = e^{i\psi}$ ein singulärer Punkt für die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei, unter der Voraussetzung, dass $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = 1$ ist.
Reviewer: *Prof. Vivanti, Pavia*

K15 *Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières*

Accademia dei Lincei. Rendiconti **32** (5), str. 83–85, 1923
JFM 49.0236.02 jen citace

K16 *Sur le singularités des séries entières*

Accademia dei Lincei. Rendiconti **32** (5), str. 528–531, 1923
JFM 49.0236.03 Verallgemeinerung eines früher (Rom. Acc. L. Rend. (5) 32_1, 26 – 29, 1923; s. vorstehendes Referat) aufgestellten Satzes und Folgerungen aus diesen Sätzen.
Reviewer: *Prof. Vivanti, Pavia*

K17 *On a generalization of Fabry and Szász's theorems concerning the singularities of power series*

Proceedings of the international mathematical Congress Toronto I, str. 439–448, 1928
JFM 54.0340.06 Verf. hat in einigen Arbeiten aus dem Jahre 1923 (F. d. M. 49; 236, 710) Verallgemeinerungen der Sätze von *Vivanti-Dienes*, *Fatou-Pólya* und *Hadamard* bewiesen. Diese Sätze werden in der vorliegenden Arbeit mit ausführlichen Beweisen dargestellt und zur Herleitung je einer Verallgemeinerung eines Satzes von *E. Fabry* (1896, 1898; F. d. M. 27, 303304; 29, 209-210; vgl. insbesondere 381-382 der an erster Stelle zitierten Arbeit) und eines Satzes von *O. Szász* (1922; F. d. M. 48, 330) benutzt.
Reviewer: *G. Feigl (Berlin)*

K18 *Součtový vzorec* $S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}$

Čas. pro pěst. mat. a fys. **53**, str. 110–114, 1924
JFM 50.0163.02 *Die Summationsformel für* $S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}$ (Tschechisch, mit

einem franz. Auszug) Die Formel lautet:

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{nh} e^{-t^2}\, dt + \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 n^2} + R_n\,, \qquad R_n = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{n} x e^{-h^2 x^2} \left\{ \lfloor x \rfloor - x + \tfrac{1}{2} \right\} dx$$

Reviewer: *Prof. Bydžovský (Prag)*

K19 *Dvě poznámky k theorii číselné*

Čas. pro pěst. mat. a fys. **58**, str. 30–36, 1929

JFM 55.0701.06 *Zwei Bemerkungen zur Zahlentheorie* (Czech, French summary)

I. *Euler* hat den Satz bewiesen: Jede positive ganze Zahl lässt sich ebenso oft aus verschiedenen ganzen positiven Summanden überhaupt zusammensetzen, wie sie aus gleichen oder verschiedenen, aber ungeraden Summanden zusammengesetzt werden kann. (Siehe z. B. *Bachmann*, Die analytische Zahlentheorie (1894; F. d. M. 25, 249-252), S. 30.) Es wird ein Satz bewiesen, der dazu in der multiplikativen Theorie ein Gegenstück bildet: Jede natürliche Zahl lässt sich ebenso oft in verschiedene natürliche Faktoren zerlegen, wie dieselbe in gleiche oder verschiedene nichtquadratische Faktoren zerlegt werden kann.

II. $q_1, q_2, q_3, \dots$ seien die der Grösse nach geordneten natürlichen Zahlen (> 1), die die Eigenschaft haben, keine vollständigen Potenzen einer natürlichen Zahl zu sein. Jede natürliche Zahl $n > 1$ kann eindeutig in der Form $n = q_\nu^\alpha$ geschrieben werden, wo α und ν eindeutig durch die Zahl n bestimmt sind. Die Anzahl $p(x)$ der Zahlen $q < x$, wo x eine nichtganze Zahl bedeutet, wird durch die Formel

$$p(x) = \mu(1)\{[x] - 1\} + \mu(2)\{[x^{\frac{1}{2}}] - 1\} + \cdots + \mu(k)\{[x^{\frac{1}{k}}] - 1\}, \quad k = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right],$$

berechnet. ($\mu(n)$ bezeichnen die *Möbius*schen Faktoren.) Das asymptotische Wachsen für $p(x)$ wird durch die Formeln:

$$p(x) = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\log^r x}{\zeta(r) \cdot r!} + O(\log x),$$

$$p(x) = \mu(1)x + \mu(2)x^{\frac{1}{2}} + \cdots + \mu(r)x^{\frac{1}{r}} + O\big(x^{\frac{1}{r+1}}\big)$$

geliefert, wo r eine natürliche Zahl $< \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$ bezeichnet.

Reviewer: *Prof. Rychlík (Prag)*

K20 *Über die α- Stellen von beschränkten Potenzreihen*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír. **11**, 12 str., 1930

ZB 003.01503 Es seien alle im Einheitskreise $|x| < 1$ regulären und beschränkten Potenzreihen $|f(x)| \leq 1$ betrachtet, die in den ersten $n + 1$ Koeffizienten $c_0 \neq 0$, c_1, $\dots$, c_n übereinstimmen. Im Anschluß an eine Untersuchung von I. Schur (J. f. Math. 147, 148) läßt sich aus den c_n ein Gebiet $\mathcal{G}_n$ eindeutig bestimmen, das den Ursprung $x = 0$ enthält und in das keine Nullstelle aller Fuktionen der obigen Klasse eindringt.

Wohl aber können auf dem Rande von $\mathcal{G}_n$ Nullstellen liegen und sogar alle Nullstellen bei gewissen von Schur aufgestellten rationalen Funktionen. Insbesondere kann der Radius des größten Kreises um $x = 0$ genau angegeben werden, der noch ganz in $\mathcal{G}_n$ liegt, also sicher nullstellenfrei ist. Für $n = 0$ entspringt diese Schranke schon der Jensenschen Formel. Für allgemeines n ist dieser Kreisradius algebraisch von den c_n abhängig. Die Gebiete wachsen monoton mit n, d.h. es ist stets $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$. Durch lineare Transformation von $f(x)$ lassen sich natürlich analoge Aussagen für $\alpha-$Stellen machen.
Reviewer: *Ullrich* (Marburg, Lahn)
JFM 56.0271.02 Es habe $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ die folgende Eigenschaft:

$$f(x) \ \text{ regulär, } \ |f(x)| \leqq 1 \ \text{ für } \ |x| < 1. \qquad (*)$$

Man setze (nach *I. Schur*; F. d. M. 46, 475):

$$f_0(x) = f(x),\ \gamma_0 = f(0), f_{\nu+1}(x) = \frac{1}{x}\frac{f_\nu(x) - \gamma_\nu}{1 - \bar{\gamma}_\nu f_\nu(x)}, \gamma_{\nu+1} = f_{\nu+1}(0) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann ist bekanntlich entweder stets $|\gamma_\nu| < 1$ oder $|\gamma_\nu| < 1$ für $\nu < n$, $|\gamma_n| = 1$, $f_n(x) = \gamma_n$ (in diesem Falle bricht das Verfahren bei $f_n(x)$ ab); γ_ν hängt offenbar nur von $c_0, c_1, \ldots, c_\nu$ ab. Es seien nun die Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ gegeben, und zwar so, dass $\gamma_0 \neq 0$, $|\gamma_n| < 1$ für $0 \leqq \nu \leqq n-1$. Dann wird ein von einer algebraischen Kurve begrenzter Bereich K_n konstruiert, der folgende Eigenschaft besitzt: Wenn $f(x)$ die Eigenschaft $(*)$ besitzt, und die Potenzreihe für $f(x)$ mit

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$$

beginnt, so ist $f(x) \neq 0$ in allen inneren Punkten von K_n; auf dem Rande von K_n liegt eine Nullstelle (und dann alle Nullstellen) von $f(x)$ dann und nur dann, wenn $f_n(x) = \gamma_n$, $|\gamma_n| = 1$ (und zwar kann man jeden Randpunkt von K_n auf diese Weise erreichen). Von den Anwendungen sei hervorgehoben: (1) Eine scharfe untere Schranke für den Betrag der absolut kleinsten Nullstelle von $f(x)$. (2) Eine untere Schranke für den gegenseitigen Abstand zweier Nullstellen von $f(x)$.
Reviewer: *Prof. Jarník (Prag)*

K21 *Ein Beitrag zur Theorie der schlichten Potenzreihen*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír. **5**, 8 str., 1932
ZB 005.30103 Es werden neue Abschätzungen für die Rundungschranke in Abhängigkeit von a_2 und eine Verschärfung des Drehungssatzes angegeben.
Reviewer: *Ullrich* (Marburg, Lahn)
ZB 007.31203 Es sei $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ für $|z| < 1$ regulär und schlicht. Dann gilt nach Bieberbach $|a_2| \leq 2$ und $|a_3^2 - a_2| \leq 1$. In ähnlicher Weise wie R. Nevanlinna aus der ersten Ungleichung die Bieberbachschen Schranken für $|f'|$, $|f|$, $|\arg f'|$ gewinnt der Verf. aus der zweiten die folgenden beiden Abschätzungen

$$1 + \mathrm{Re}\left(z\tfrac{f''(z)}{f(z)}\right) \geq \tfrac{1-|a_2|r-6r^2-|a_2|r^3+r^4}{(1-r^2)(1+|a_2|r+r^2)}\,, \qquad (1)$$

$$|\arg f'(z)| \leq 2|a_2|r + \tfrac{3}{2}r\log\tfrac{1+r}{1-r}\,, \quad |z| = r\,. \quad (2)$$

(1) ist scharf, d.h. die rechte Seite kann durch keine größere Funktion von r und $|a_2|$ ersetzt werden. Aus (1) läßt sich u.a. die genaue Rundungsschranke in Abhängigkeit von $|a_2|$ entnehmen. (2) ist nicht scharf, jedoch besser als die Bieberbachsche Schranke, teilweise sogar besser als die bisher bekannten (vgl. z.B. die in dies. Zbl. 2, 400 besprochene Note des Verf.). Aus einer beim Beweis von (1) auftretenden Ungleichung lassen sich durch Integration die folgenden im obigen Sinne scharfen Abschätzungen herleiten

$$|f'(z)| \geq \frac{1-r^2}{(1+|a_2|r+r^2)^2}\,, \quad |f(z)| \geq \frac{r}{1+|a^2|r+r^2}\,,$$

von denen die zweite bekannt ist.
Reviewer: *W. Fenchel* (Kopenhagen)

JFM 58.1096.03 Entsprechend der Herleitung der klassischen Verzerrungssätze aus der für schlichte Funktionen

$$f(z) = z \ + a_2 z^2 + \cdots$$

gültigen Ungleichung

$$|a_2| \leq 2$$

zieht Verf. hier Folgerungen aus der weiteren bekannten Ungleichung

$$|a_2^2 - a_3| \leq 1.$$

Die Ausführung ist indes wenig klar. Die Hauptergebnisse sind Abschätzungen für

$$\mathrm{Re}\left(z\ \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \text{ und } \mathrm{arc} f'(z),$$

deren rechte Seiten noch von $|a_2|$ abhängen.
Druckfehler: Die linke Seite von (5) muss $A_3 - A_2^2$ anstatt A_3 lauten.
Reviewer: *H. Grunsky* (Berlin)

K22 *Eine Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach*

Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinig. **B. 41**, str. 80–82, 1931
ZB 002.40003 Für die im Einheitskreis regulären schlichten Funktionen $f(z) = z + \cdots$ gilt nach Bieberbach $|\arg f'(z)| \leq 2\log\frac{1+r}{1-r}$ für $|z| = r$. Bieberbach hat auch bemerkt, daß diese Schranke nicht die bestmägliche ist. Verf. beweist mit einer Verfeinerung der bekannten Nevanlinnaschen Schlußweise, daß die rechte Seite der obigen Ungleichung durch $\int\limits_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}$ ersetzt werden kann. Diese Schranke ist für $r > 0$ kleiner als die Bieberbachsche; ob sie die beste ist, wird nicht entschieden.
Reviewer: *W. Fenchel*
JFM 57.0398.04 Verf. verbessert die Schranke für die Drehung arg $f'(z)$ bei schlichter konformer Abbildung $f(z)$ des Einheitskreises, lässt jedoch die Frage offen, ob die neue Schranke scharf ist. Ref. hat gezeigt, dass das nicht der Fall ist (Jahresbericht D. M. V. 42 (1932), 71-73; F. d. M. 58). Beides hat schon früher *Golusin* gefunden (1929; F. d. M. 55_{II}, 789–791).
Reviewer: *H. Grunsky* (Berlin)

K23 *Über besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír. **14**, 7 str., 1934

ZB 010.36104 Es sei $\varrho(z)$ regulär und $|\varrho(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$. Dann sind

$$\varphi_1(z) = z^{-1} + \int_0^z \varrho(t)dt\,,\ \varphi_2(z) = z^{-1} - 1 + \int_1^z \varrho(t)dt\,,\ \varphi_3(z) = z^{-1}\{1 + z\int_0^1 \varrho(zt^2)dt\}^2$$

wie Verf. zeigt, schlicht und $\neq 0$ in $|z| < 1$. Ferner wird gezeigt, daß die Entwicklung von $\varphi_1(z)^{-1}$ und $\varphi_2(z)^{-1}$ um $z = 0$ durch $\frac{z}{1-z}$ bzw. $\frac{z}{(1-z)^2}$ majorisiert wird. Schließlich folgt eine Abschätzung der Bogenlänge der Kreisbilder für eine Klasse von im Kleinen schlichten Laurentreihen. – Bemerkung: Auch $\varphi_2(z)^{-1}$ hat $\frac{z}{(1-z)^2}$ zur Majorante, da

$$\varphi_2(z)^{-1} = \frac{z}{1-z}\left\{1 - \frac{z}{1-z}\int_t^1 \varrho(t)dt\right\}^{-1} = \frac{z}{1-z}\{1 - zk(z)\}^{-1}\,,$$

wo $|k(z)| < 1$, so daß der reelle Teil des zweiten Faktors $\geq \frac{1}{2}$, d.h.

$$\{1 - zk(z)\}^{-1} \ll (1 - z)^{-1}\,.$$

Reviewer: *G. Szegö* (St. Louis)

JFM 60.1034.04 Ist $\varrho(z)$ in $|z| < 1$ regulär, und gilt daselbst $\varrho(z)| \leq 1$, so sind die Funktionen

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t)dt\,,\ \varphi_1(z) = \frac{1}{z} + \int_{e^{i\varphi}}^z \varrho(t)dt - \frac{1}{e^{i\varphi}}\,,\ \varphi_2(z) = \frac{1}{z}\left\{1 + z\int_0^1 \varrho(zt^2)dt\right\}^2$$

in $|z| < 1$ schlicht und von Null verschieden. Für die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = z\ + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n, \quad f_2(z) = \frac{1}{\varphi_2(z)} = z\ + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

findet Verf. die genauen Koeffizientenabschätzungen:

$$|a_n| \leq 1, \quad |c_n| \leq n;$$

für

$$f_1(z) = \frac{1}{\varphi_1(z)} = z\ + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

gelingt ihm eine solche Abschätzung nicht. Ist ferner $L(r)$ die Länge des Bildes von $|z| = r < 1$ bei Abbildung durch $F(z) = \sum_{k=-(2n-1)}^{\infty} a_k z^k$, so findet Verf. eine genaue Abschätzung für $L(r)$ nach unten. Für die Klasse $\varphi(z)$ gelingt Verf. auch eine Abschätzung von $L(r)$ nach oben.

Reviewer: *H. Grunsky* (Berlin)

K24 *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír. **2**, 8 str., 1935

ZB 012.40901 Es sei $0 < b < \pi$. Eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$, $f(0) = 0$, erfüllt die Bedingung $0 \leq \operatorname{Im} f(z) + b \leq \pi$ dann und nur dann, wenn

$$f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(t)dt}{e^{it} - z}$$

gilt. Hier bezeichnet $\psi(t)$ eine reelle Funktion der ersten Baireschen Klasse, welche in $0 \leq t \leq 2\pi$ bis auf eine Nullmenge definiert ist und den Bedingungen

$$0 \leq \psi(t) \leq \pi\,, \qquad \int_0^{2\pi} \psi(t)dt = 2\pi b$$

genügt.

Reviewer: *G. Szegö* (St. Louis, Mo.)

JFM 61.1151.06 Ausführliche Ableitung der in F. d. M. 61_{I}, 347 angezeigten Ergebnisse.

Reviewer: *H. Pietsch* (Berlin)

K24' *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile*

Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha, 23.-28. IX. 1934, 1 str.

ZB 011.02903 pouze citace

JFM 61.0347.01 Es handelt sich um die für $|z| < 1$ regulären Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

mit $-b \leq \operatorname{Im} f(z) \leq \pi - b$, $0 < b < \pi$. Für sie gilt, wie ohne Beweis mitgeteilt wird, die Kennzeichnung

$$A_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) e^{-in\varphi}\, d\varphi.$$

Hier ist $\psi(\varphi)$ eine in $\langle 0, 2\pi \rangle$ definierte Funktion höchstens der ersten *Baire*schen Klasse mit

$$0 \leqq \psi(\varphi) \leqq \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\, d\varphi = 2\pi b.$$

Es wird noch eine andere Kennzeichnung des Koeffizientenkörpers der A_n gegeben, die dem *Carathéodory*schen Falle der Potenzreihen positiven Realteils ähnelt.

Reviewer: *W. Rogosinski* (Berlin)

K25 *Asymptotické rozvoje pro funkce $\zeta(s)$, $\zeta(a, s)$*

Rozpravy České akademie, II.tř. **51** (32), 10 str., 1941

ZB 063.03325 pouze citace
RE 10.104f The author gives asymptotic expansions for

$$\zeta(2v+1)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2v-1}\,, \quad S(2v)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-2v}$$

(v a positive integer). They are based on asymptotic expansions for $\zeta(s)$ and $\zeta(a,s)$. For example, let $N>0$, $K\geq 0$ be integers, $\mathrm{Re}(s)<2K+3$. Then

$$2(2\pi)^{-s}(1-2^s)\Gamma(s)\cos\frac{1}{2}\pi s\zeta(s)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}k^{s-1}+$$
$$+\sum_{k=0}^{K}(-1)^{k+N}E_k 2^{-2k-1}\binom{s-1}{2k}\left(N+\frac{1}{2}\right)^{s-1-2k}+R(N,K)$$

where

$$2^{2K+3}\,(2K+2)!\,\Gamma(1-s)\,R(N,K)=(-1)^{N+K+1}E_{K+1}\int_0^{\infty} e^{-(N+\frac{1}{2})z}z^{2K+2-s}\vartheta(z)dz$$

($0<\vartheta(z)\leq 1$; E_i Euler's numbers). For $s=2v+1$ the left side is zero and it is necessary to calculate the derivative in order to obtain $\zeta(2v+1)$. Some of the asymptotic formulae also lead to exact formulae (for $N\to\infty$) which are analogous to Wallis's and Stirling's formulae, e.g.

$$\frac{1}{4\pi^2}\zeta(3)=\lim_{n\to\infty}\log\frac{(1,2)(2,2)\dots(n-1,2)}{\exp\{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\log n+\frac{1}{12}n\}}$$

where $(k,s)=k^{k^s}$, $\exp x=e^x$.
Reviewer: *V. Jarník* (Prague)

K26 *Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír., N. 20, 1942, str. 1–18
ZB 028.20403 Es werden zunächst zwei Identitäten abgeleitet; dabei ist N eine natürliche Zahl; $f(n)$, $q(n)$, $v(n)$ sind für $n=1, 2, \dots, N$ definiert, $V(k)=\sum\limits_{1\leq\nu\leq N/k} v(\nu k)\,,$ $G(n)=\sum\limits_{k=1}^{n} g(k)$. Weiter ist (1) $q_1<q_2<\cdots$ eine Folge natürlicher Zahlen, $F(n)=\sum\limits_{q_i|n} f(q_i)$. Dann ist

$$\sum_{q_i\leq N} f(q_i)V(q_i)=\sum_{n=1}^{N}F(n)v(n)\,. \qquad (I)$$

Ist weiter ϱ ganz, $1\leq\varrho\leq N$, $\tau=\left\lfloor\frac{N}{\varrho+1}\right\rfloor$, so ist (man setze $f(0)=G(0)=0$ und schreibe $f\lfloor x\rfloor$ statt $f(\lfloor x\rfloor)$)

$$\sum_{k=1}^{N}g(k)f\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{r}g(k)f\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor+\sum_{k=1}^{\varrho}(f(k)-f(k-1))G\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor-f(\varrho)G(r)\,. \quad (II)$$

Beispiele zu (II): $\pi(\varrho)\pi(r) = \sum_{p \le r} \pi\left(\frac{N}{p}\right) - \sum_{p > r} \pi\left(\frac{N}{p}\right)$; $\sum_{k=1}^{N} \pi\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{p \le N} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$;

$$\sum_{n=1}^{N} (\vartheta_{01}(n) - \vartheta_{23}(n)) = \tfrac{1}{4}(\pi - 2\log 2)N + O(N^{\frac{1}{2}}),$$

wo $\vartheta_{ij}(n)$ die Anzahl der Teiler von n bezeichnet, die $= i$ oder $= j \pmod 4$ sind. – Ist speziell (1) die Folge aller Primzahlpotenzen, $f(p^k) = \log p$ für ganzes $k > 0$, so liefert (I) die Identität (2) $\sum_{p \le N} \log p \cdot \sum_{p^k \le N} V(p^k) = \sum_{n=1}^{N} v(n) \log n$. Die Wahl $q_k = k$, $f(n) = 1$ oder $= \log n$ gibt weiter (3) $\sum_{n=1}^{N} v(n)\vartheta(n) = \sum_{n=1}^{N} V(n)$, (4) $\sum_{n=1}^{N} v(n)\vartheta(n)\log n = 2\sum_{n=1}^{N} V(n) \log n$, wo $\vartheta(n)$ die Teileranzahl von n ist. Die linke Seite von (2) läßt sich auch in der oft vorteilhaften Gestalt

$$\sum_{p \le N} \log p \cdot W(p,1) + \sum_{p \le \frac{1}{2}N} \log p \cdot W(p,2) + \sum_{p \le \frac{1}{3}N} \log p \cdot W(p,3) + \cdots$$

schreiben; dabei ist $W(p,\nu) = \sum v(\nu p^k)$, wo über alle $k > 0$ mit $\nu p^k \le N$ summiert wird. Aus (2) folgt z.B. (für $v(n) = n^s$) $\sum_{k=1}^{N} k^s \psi(\frac{N}{k}, s) = \sum_{n=1}^{N} n^s \log n$, wo

$$\psi(x,s) = \sum_{p \le x} p^s \frac{p^{\lambda s} - 1}{p^s - 1} \log p, \quad \lambda = \lambda(x,p) = \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor;$$

weitere analoge Formeln sind (4,9), (4,12) (wo aber das Vorzeichen rechts $(-1)^k$ sein soll). – Aus der Definitionsgleichung für V folgt $v(k) = \sum_{\nu \le N/k} \mu(\nu) V(\nu k)$, so daß (3), (4) Identitäten über die Möbiussche Funktion μ liefern, z.B.

$$\sum_{n=1}^{N} \vartheta(n) \sum_{\nu \le N/n}^{N} \mu(\nu) = N$$

usw. (vgl. (6,7), (6,8), (6,9)). – Manche von diesen Identitäten nehmen eine prägnantere Form an, wenn man sie mit Hilfe von „Mittelwerten"

$$M(\varphi(k); \psi(k)) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\psi(k) \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} \psi(k)\right)^{-1}$$

aufschreibt. Da die rechten Seiten meistens leicht abzuschätzen sind, bekommt man so auch asymptotische Abschätzungen. – Die Abschätzung in (4,11) (in welcher übrigens das letzte Vorzeichen in der ersten Klammer $\pm$ sein soll) scheint auf einem Versehen zu beruhen, da auf S. 9, Z. 4 v.u. überall Nk^{-1} statt N stehen soll, was nachher zu einer schlechteren Abschätzung führt. – Auf S. 10, Z. 6 lies $v(n) = n^s \sin \frac{1}{2}\pi n$; auf S. 11 unten lies ψ statt φ.

Reviewer: *Jarník* (Prag)

RE 7.413h Two identities are set up as follows. Let (1) $q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$ denote an arbitrary sequence of positive integers; put $d(n, q_k) = \lfloor n/q_k \rfloor - \lfloor (n-1)/q_k \rfloor$, so that $d = 1$ or 0 according as n is or is not divisible by q_k. Let $1 \le n \le N$. For arbitrary $f(n)$, $v(n)$ put

$$\begin{aligned} V(k) &= v(k) + v(2k) + \cdots + v(k \lfloor n/k \rfloor) \\ F(n) &= \sum_{q_k \mid n} f(q_k) = \sum_{q_k \le N} f(q_k) \cdot d(n, q_k) \,. \end{aligned}$$

Then the following identity holds:

$$\sum_{q_k \le N} f(q_k) \cdot V(q_k) = \sum_{n=1}^{N} F(n) v(n) \,.$$

(2) Let $f(n)$ and $g(n)$ be two arbitrary functions of $n, f(0) = 0$; let $G(r) = \sum\limits_1^r g(k)$, ϱ an integer such that $1 \le \varrho < N$, $r = \lfloor N/(\varrho+1) \rfloor$. Then

$$\sum_1^N g(k) f(\lfloor N/k \rfloor) = \sum_1^r g(k) f(\lfloor N/k \rfloor) + \sum_1^{\varrho} \{f(k) - f(k-1)\} G(\lfloor N/k \rfloor) - f(\varrho) G(r) \,.$$

Various applications of these identities are given.
Reviewer: *L. Carlitz* (Durham, N. C.)

K27 *Über ein Teilerproblem*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír. **11**, 18 str., 1943
ZB 060.10405 pouze citace
RE 7.414a Let $S_t(N, s) = \sum_1^N \sigma_t(k) k^{-s}$, where $\sigma_t(k)$ is the sum of the t-th powers of the divisors of k. Making use of the second identity of another paper [see the preceding review], a rather complicated asymptotic formula for $S_t(N, s)$ is derived.
Reviewer: *L. Carlitz* (Durham, N. C.)

K28 *Some properties of trigonometric and algebraic polynomials*

Věstník Král. české spol. nauk. Třída mat.-přír. **15**, 6 str., 1948
RE 11.354b Conditions necessary and sufficient in order that a trigonometric polynomial should be nonnegative (or that a corresponding algebraic polynomial should have a nonnegative real part in the unit circle) are established using its representation as a product. The results are applied to the problem of algebraic polynomials bounded in the unit circle.
Reviewer: *O. Todd-Taussky* (Washington, D. C.)

K29 *O významu čísla* $\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ *v teorii mocninných řad*

Čas. pro pěst. mat. a fys. **74**, str. 47-53, 1949
RE 11.649b The author deduces a series of theorems which show how important for power series is the number $\sup |a_n|^{1/n}$. Using this number, a best possible lower bound is given for the smallest zero of $\sum_0^\infty a_n z^n$ and $\sum_0^\infty a_{nm} y^n z^m$. The result is generalized

in a significant way. Further, a best possible lower bound is given for the radius of the inverse series and of the circle in which the given function is schlicht.
Reviewer: *František Wolf* (Berkeley, Calif.)

ZB 033.26504 Die Tatsache, daß $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ für die Potenzreihe (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine so große Rolle spielt, veranlaßt den Verf., danach zu fragen, ob nicht auch $\overline{fin}\sqrt[n]{|a_n|}$ für die Potenzreihe (1) von Bedeutung ist. Zur Beantwortung dieser Frage werden folgende Sätze bewiesen: 1. Ist in (1) $|a_n| = \gamma_n^n$, $n = 1, 2, \ldots, k$, und $\underset{n>k}{\rightarrow} \overline{fin}\sqrt[n]{|a_n|} = g$, so gilt für jede Nullstelle ζ von (1): $|\zeta| \geq x/g$, wenn x die kleinste positive Wurzel der Gleichung $(1-x)(1-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu g^{-\nu}x^\nu) - x^{k-1} = 0$ bedeutet. 2. Ist in (1) $a_1 > 0$ und $\underset{n>1}{\rightarrow} \overline{fin}\sqrt[n]{|a_n|} = g$, so hat die zu (1) inverse Potenzreihe einen Konvergenzkreis, der nicht kleiner als $(\sqrt{1+a_1/g}-1)^2$ ist. 3. Die Potenzreihe

$$f(z_1, z_2) = a + \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu,\nu} z_1^{n-\nu} z_2^{\nu})$$

der beiden komplexen Variablen z_1 und z_2 hat in $|z_k| < r$, $k = 1, 2$, mit $r = g^{-1}(1-1/\sqrt{1+a})$ keine Nullstelle, wenn $a > 0$, $g > 0$ und $g = \overline{fin}\, g_n$ mit $g_n = \underset{0\leq\nu\leq n}{\rightarrow} \overline{fin}\sqrt[n]{|a_{n-\nu,\nu}|}$ ist. Mit Hilfe von Satz 3 wird schließlich bewiesen: 4. Ist $a > 0$ und $g_n = \underset{n\geq 1}{\rightarrow} \overline{fin}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}$, so ist der Radius ϱ_1 desjenigen Kreises $|z| < \varrho_1$, innerhalb dessen sich die Potenzreihe $az + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ konform verhält, nicht kleiner als $g^{-1}(1-1/\sqrt{1+a})$. – Die in den angeführten Sätzen auftretenden Schranken sind scharf. – Am Schluß der Arbeit weist Verf. noch darauf hin, daß seine Methode eine Reihe weiterer Anwendungsmöglichkeiten besitzt, wie z.B. bei der Frage nach der Existenz implizit gegebener Funktionen oder beim Existenzbeweis für die Lösungen von Differentialgleichungen. Die Bedeutung der sich ergebenden Sätze liegt in erster Linie darin, daß die erhaltenen Schranken nicht verbesserungsfähig sind.
Reviewer: *Lammel* (Tutzing)

K30 *Prostyje mnogočleny*

Čechoslovackij matem. žurnal, *Simple polynomials* **1** (76), Czechoslovak Math. Journal, str. 5–15, 1951

RE 13.841e For a polynomial $P(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k z^k$, $a_1 = 1$, $|a_n| > 0$, consider the associated system:

$$1 + \sum_{2}^{n} a_k x^{k-1} P_{k-1}(u) = 0\,, \qquad x^{n-1} + \sum_{2}^{n} \overline{a_k} x^{n-k} P_{k-1}(u) = 0\,,$$

where

$$P_{k-1}(u) = \sum_{r=0}^{r\leq\frac{1}{2}(k-1)} (-1)^r \binom{k-r-1}{r} u^{k-2r-1}\,.$$

Let $R(u) = \sum_{k=0}^{N} A_k u^{N-k}$, $N \leq 2(n-1)^2$ be the resultant of the associated system. It is proved that $P(z)$ is schlicht in $|z| < r$, $r > 1$, if and only if $R(u)$ does not vanish identically and has no real root lying in $-2 \leq u \leq 2$. Detailed discussion of the case $n = 3$ follows.

Reviewer: *P. Davis* (Washington, D. C.)

ZB 045.29901 Let $P(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots + a_nz^n$, $|a_n| > 0$, be a simple polynomial in and on the closed circle $|z| \leq 1$, that is, there is an $r > 1$ such that $P(z_1) \neq P(z_2)$ for $z_1 \neq z_2$, $|z_1| < r$, $|z_2| < r$. Here it is shown that $P(z)$ is simple for $|z| \leq 1$ if and only if the resultant $R(u)$ of an associated system of equations does not vanish identically and has no real root lying in the interval $-2 \leq u \leq 2$. These necessary and sufficient conditions are discussed for $P(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3$. Higher degree equations are also considered.
Reviewer: *E. Frank*

K31 *Über reele Charakteristiken von Potenzreihen*

Čechoslovackij matem. žurnal **4** (79), str. 274–282, 1954
RE 16.914a The author solves the following problem: given a series

$$A(r) = r + C_2r^2 + C_3r^3 + \cdots ,$$

with real coefficients, and converging for $|r| < r_1$, to find all functions

$$f(z) = z + C_2z^2 + C_3z^3 + \cdots$$

for which (1) $\max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re}\{f(z)\} = A(r)$ when r is sufficiently small. His method is based on the fact that if the function f satisfies (1) and if $\phi(r)$ is a function such that $f(re^{i\phi(r)}) = A(r)$ $(|r| < r_2)$, then (2) $re^{i\phi(r)}f'(re^{i\phi(r)}) = rA'(r)$.

The particular choice $\phi(r) \equiv 0$ leads to the obvious solution $f(z) = A(z)$. More generally, let a curve have the representation (3) $z = re^{i\phi(r)}$, where

$$\sin\phi(r) = \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \cdots$$

(γ_n real); the relation (3) determines an inverse function $r = v(z) = z + \delta_2z^2 + \delta_3z^3 + \cdots$ $(|z| < r_4)$; this, substituted in (2), gives the equation

$$zf'(z) = v(z)\{1 + 2C_2v(z) + 3C_3v^2(z) + \cdots\}\,.$$

Comparison of coefficients now determines a function f whose real part takes the prescribed maximum $A(r)$, relative to the circle $|z| = r$, for each r less than some r_5. Moreover, this maximum is taken at a point of intersection of the circle with the curve (3). In the special case where $A(r) \equiv r$ and $\sin\phi(r) = \frac{1}{2}\varepsilon r$ (ε real), $f(z) = 2\{(1 + i\varepsilon z)^{1/2} - 1\}/i\varepsilon$.

If $B(r) = -r + C_2r^2 + \cdots$ (C_n real), and if $\operatorname{Re} f^*(z)$ has the maximum $-B(r)$ on $|z| = r$, then the function $f(z) = -f^*(-z)$ has the minimum real part $B(r)$, on $|z| = r$. If

$$M(r) = 1 + C_1r + C_2r^2 + \cdots \quad (C_n\text{real}, C_1 > 0)\,,$$

let $A(r) = \log M(r)$; the author's method yields the solutions $f(z)$ of (1) and, by means of the function $g = \exp f$ and certain trivial changes of variable, all the solutions of the equation

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = M(r) \quad (|r| < r_5)\,.$$

Reviewer: *G. Piranian* (Ann Arbor, Mich.)

ZB 057.30804 Ist $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots$ mit positivem Konvergenzradius vorgegeben, so hat die Funktion $A(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re}\{f(z)\}$ die Form $A(r) = r + C_2 r^2 + \cdots$ (C_i reell) mit positivem Konvergenzradius, und es ist, wenn $A(r)$ in $z = re^{i\varphi(r)}$ angenommen wird, $\varphi(r) = d_1 r + d_2 r^2 + \cdots$ (d_i reell) mit positivem Konvergenzradius. Der Verf. behandelt nun die Umkehrfrage und beweist: Zu jedem $A(r)$ und $\varphi(r)$ der angegebenen Art gibt es genau ein in $|z| < r_0(A, \varphi)$ reguläres $f(z)$ mit $A(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re}\{f(z)\} = \operatorname{Re}\{f(re^{i\varphi(r)})\}$; eine prinzipielle Konstruktionsmöglichkeit wird angegeben. So haben z.B. die Funktionen $f(z) = z$ und $f_\varepsilon(z) = (2/i\varepsilon)\{(1 + i\varepsilon z)^{1/2} - 1\}$ ($\varepsilon > 0$) dieselbe Funktion $A(r) = r$. – Da das Problem der lokalen Charakterisierung von $A(r)$ äquivalent ist zum Problem der lokalen Charakterisierung von $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, so sind die Ergebnisse des Verf. implizit in den Resultaten von Hayman (dies. Zbl. 45, 355) über $M(r)$ enthalten. Dort wird überdies der zu $A(r) = C_k r^k + C_{k+1} r^{k+1} + \cdots$ ($k > 1$) entsprechende Fall $M(r) = 1 + D_k r^k + \cdots$ ($k > 1$), der die Untersuchungen kompliciert, ausführlich diskutiert.

Reviewer: *D. Gaier*

K32 *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů*, společně s V. Jarníkem

Čas. pro pěst. mat. a fys. **63**, str. 223–235, 1934

ZB 009.13106 Soient C_1, C_2, …, C_n n points d'un espace euclidien. Considérons tous les ensembles connexes G, satisfaisant aux conditions suivantes: 1. G contient les points C_1, C_2, …, C_n. 2. G est la somme d'un nombre fini de segments tels que deux quelconques entre eux n'aient qu'un point commun tout au plus. Soit $l(G)$ la somme des longueurs de ces segments. Dans cet article, on démontre l'existence d'un G_0, pour lequel $l(G_0)$ atteint la valeur minimum; ensuite, on démontre quelques propriétés de l'ensemble G_0 et on détermine G_0 complètement dans le cas particulier où les points C_1, C_2, …, C_n sont les sommets d'un polygone régulier ($n \geq 13$).

Reviewer: *Autoreferat*

JFM 60.0542.01 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ seien n Punkte eines euklidischen Raumes. Betrachten wir alle zusammenhängenden Mengen G, welche den Bedingungen genügen:
1. G enthält die Punkte $C_1, C_2, \ldots, C_n$;
2. G ist die Summe einer endlichen Anzahl von Strecken von der Art, dass je zwei von ihnen nur einen Punkt gemeinsam haben.
Sei $l(G)$ die Summe der Längen dieser Strecken. Es wird die Existenz eines G_0 bewiesen, für welches $l(G_0)$ am kleinsten ist; sodann werden einige Eigenschaften der Menge G_0 bewiesen, und es wird G_0 vollständig bestimmt im speziellen Falle, dass $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die Ecken eines regulären n-Eckes ($n \geqq 13$) sind.

Reviewer: *Prof. Rychlík (Prag)*

Knižní publikace

K33 *Úvod do počtu diferenciálního*

Jednota Čs. mat. a fys., Praha, 1926, 147 str.

K34 *Karel Petr. Stručný nástin jeho života a stručný přehled jeho prací*, spolu s Frant. Nušlem

Sborník prací matematických a fysikálních, vydaný na počest šedesátého výročí narozenin dr. Karla Petra, Jednota Čs. mat. a fys., Praha, 1928, 14 str.
JFM 54.0044.04 *Karel Petr* (Czech) Zum sechzigsten Geburtstag von *K. Petr*, Mitarbeiter an der Zeitschrift Casopis, wird ein kurzer Abriß seines Lebens und eine Übersicht über seine Arbeiten gegeben.
Reviewer: *R. Frucht* (Triest)

Výtahy z výše uvedených prací

K5* *Über Entwicklungen für analytische Funktionen*, (výtah z práce [K5a,b]), Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 21, 1917, 20 str.

JFM 46.0541.05 Der Verf. gewinnt Reihenentwicklungen für Funktionen, auch Darstellungen der Null, indem er in die *Cauchy*sche Integralformel neue Integrationsveränderliche einführt, nach deren Potenzen er den Integranden entwickelt.

Reviewer: *Faber (München)*

K6* *Eine neue Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion*, (výtah z práce [K6]), Bulletin **21**, 4 str., 1917

K7* *Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers*, (výtah z práce [K7]), Bulletin **22**, 3 str., 1918

K13* *Sur le singularités des séries entières situées sur le cercle de convergence*, (výtah z práce [K13]), Bulletin internat. de l'Acad. des Sciences de Boheme **24**, 3 str., 1924

JFM 49.0263.04 Verf. verallgemeinert den Vivanti-Dienensschen Satz in einer gewissen Richtung und deutet an, wie man auf diesem Wege zu einer Verallgemainerung des Fatou- Pólyaschen und des Hadamardschen Satzes gelangen kann. Die Beweise werden nur skizziert.
Reviewer: *Prof. Szegö* (Königsberg i. P.)

Na závěr si uvedeme Kösslerovy příspěvky, které v Jarníkově seznamu zcela chybí. Zatímco práci, kterou jsme v návaznosti na Jarníkovo číslování pracovně označili symbolem [K35], lze zařadit mezi původní vědecká pojednání, práce [K36] by patřila spíše do skupiny Ostatní publikace. Žádná z prověřovaných databází tyto příspěvky nezmiňuje. Vzhledem k faktu, že práce [K35] je v podstatě krátkým abstraktem přednášky pronesené na 4. sjezdu československých matematiků, uvádíme namísto její recenze v referativních časopisech její plné znění.

K35 *O jisté domněnce z theorie prostých řad mocninných*

Zprávy ze 4. sjezdu československých matematiků: Vědecká sdělení účastníků 4. sjezdu matematiků, Čas. pro pěst. mat. **81**, str. 110–111, 1956

Nechť řada $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$ zobrazuje kruh $|z| < 1$ prostě na jistou oblast v rovině w. Jest dokázáno, že $|a_2| \leq 2$, $|a_3| \leq 3$ a Bieberbach vyslovil domněnku dosud nedokázanou, že $|a_n| \leq n$. Obsah tohoto sdělení tvoří jiná dosud obecně nedokázaná domněnka, která zní následovně:

„*Je-li řada $f(z)$ prostá, pak také řada $F(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z}\, dz$ jest prostá a zobrazuje nějakou speciální jednodušší oblast v rovině w.*“

Tato věta jest dokázána v případě, že $f(z)$ zobrazuje t.zv. hvězdovitou oblast. Pak $F(z)$ zobrazuje oblast konvexní. Dovedu dokázati, že vyslovená domněnka jest správná, jestliže $f(z)$ má vesměs reálné koeficienty. V tomto případě jest $F(z)$ prostá řada pásová. To znamená, že k ní příslušná oblast v rovině w má tu vlastnost, že každá rovnoběžka k ose imaginární protíná hranici té oblasti v jediném bodě nad reálnou osou a jediném bodě pod reálnou osou. Nepodařilo se mi dokázat vyslovenou hypothesu, jestliže koeficienty řady $f(z)$ jsou čísla komplexní. Nepodařilo se mi však také dokázat nějakým speciálním příkladem, že domněnka ta jest nesprávná.

Druhá moje domněnka jest následující:

„*Je-li $f(z)$ prostá řada, pak také řada $f_1(z) = z + \sum_2^\infty |a_n| z^n$ jest prostá.*“

K36 *7. mezinárodní matematický kongres v Torontu*

Rubrika *Zprávy*, Čas. pro pěst. mat. a fys. **54**, str. 101–103, 1925

Vojtěch Jarník ve svém seznamu dále zcela pominul recenze z pera Miloše Kösslera. Nutno podotknouti, že na rozdíl od V. Jarníka, Q. Vettera a dalších se Kössler psaním recenzí příliš nezabýval. Podařilo se nám objevit pouze následující:

Giraud G. *Leçons sur les fonctions automorphes: Fonctions autom. de n. variables. Fonctions de Poincaré.* Paříž, 1920. Gauthier-Villars, 126 str.
Čas. pro pěst. mat. a fys. **50**, str. 311–312, 1921
Náplň knihy tvoří obsah přednášek na Collége de France.

Použité zdroje

Databáze Jahrbuch [online]. Dostupné z WWW: `http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html`.

Databáze Mathematical Reviews [online]. Dostupné z WWW: `http://www.ams.org/mathscinet`.

Databáze Zentrallblatt [online]. Dostupné z WWW: `http://www.emis.de/ZMATH`.

Dodatky k Velikému Ottovu slovníku naučnému, Dílu 3. svazek II.. Praha: Nakladatelství J. Otto společnost s.r.o., 1935.

JARNÍK, V. Vědecké práce M. Kösslera. *Čas. pro pěst. mat.* **80**, str. 106–117, 1955.

LEPKA, K. *Matyáš Lerch's work on Number Theory.* Brno: Masaryk University, Faculty of Science, Department of Mathematics, 1995.

Masarykův slovník naučný – Lidová encyklopedie všeobecných vědomostí, díl IV. Praha: nákladem Československého Kompasu, str. 116, 1929.

7.2. Seznam přednášek a cvičení prof. Kösslera

Miloš Kössler začal přednášet na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v roce 1921. Působil zde původně jako soukromý docent, od roku 1922 pak jako mimořádný profesor a od roku 1927 jako profesor řádný.

Jako jeden z ředitelů Matematického semináře pravidelně vedl od roku 1929/1930 cvičení nazvaná střídavě Seminární cvičení a Cvičení seminární. De facto přebíral část studentů ze semináře Karla Petra, jak plyne i z návrhu na úpravu matematického vyučování z března 1928:[1])

„Podepsaní profesoři matematiky (Bydžovský, Kössler, Sobotka, Petr)*, majíce na zřeteli další účelné vybudování matematického vyučování na přírodovědecké fakultě university Karlovy, navrhují: aby bylo zřízeno nové oddělení matematického semináře, jehož vedení by bylo svěřeno nově jmenovanému řádnému profesoru matematiky Dr. M. Koesslerovi. Prof. Koesslerovi umožní se tím prohloubení dosavadní činnosti učitelské po stránce vědecké - jež je právě účelem seminárního zařízení - a zároveň užší styk s budoucími kandidáty profesury, jenž je pro něho jako člena zkušební komise pro učitelství na středních školách nezbytný. Zároveň se tímto navrhovaným zřízením odlehčí semináři prof. Petra . . . “*

Přednášky vedl s výjimkou válečného období, kdy byla výuka na českých vysokých školách násilně přerušena, až do roku 1957, kdy odešel do důchodu, přičemž od akademického roku 1953 přešel z přírodovědecké fakulty na nově vzniklou fakultu matematicko-fyzikální. Po založení pedagogické fakulty, v období 1946–1948, působil rovněž po dobu dvou semestrů na této fakultě.

V následujícím seznamu jsou vždy uvedeny přednášky a semináře, které Kössler v daném studijním roce vedl, včetně jejich hodinové dotace v zimním (Z) a letním běhu (L). Za povšimnutí stojí skutečnost, že některé vícesemestrální přednášky měnily název, což dnes není příliš častým jevem. Rovněž v době Kösslerova působení na univerzitě bylo obvyklé, že se značná část přednášek konala jedenkrát za dva roky. Přednášky proto navštěvovalo několik ročníků najednou, a tak v seznamu předmětů nenajdeme přesně stanovený ročník, pro který byla daná přednáška určena.

Celý seznam byl vytvořen na základě *Seznamů přednášek konaných na Univerzitě Karlově* uložených v Archivu UK. Chybějící soupisy přednášek (fakulty přírodovědecké z let 1948/49, 1951/52, 1952/53, matematicko-fyzikální 1952/53, 1953/54, pedagogické 1948/49) se nepodařilo dohledat, neboť univerzitní archiv má v období padesátých let v těchto fondech znatelné mezery, stejně jako Národní knihovna Klementinum. Pouze z informací uvedených v Časopise pro pěstování matematiky vyplývá, že v akademickém roce 1953/54 vedl Miloš Kössler na matematicko-fyzikální fakultě seminář z analytických funkcí.

Přírodovědecká fakulta

	Z	*L*
1921(letní běh)		
O rozvíjení analytických funkcí v řady (Pokračování)		2
1921/22		
O celistvých funkcích transcendentních	2	-
Úvod do počtu infinitesimálního a analyt. geometrie v prostoru	-	3

O transcendentních řešeních rovnic algebraických	-	1
Elementární cvičení z vyšší analyse	-	2
1922/23		
Úvod do počtu infinitesimálního	3	4
Elementární cvičení z vyšší analyse	2	2
Počet pravděpodobnosti	3	2
1923/24		
O rovnicích diferenciálních	3	3
Úvod do počtu infinitesimálního	4	4
Elementární cvičení z vyšší analyse	2	2
1924/25		
Úvod do počtu infinitesimálního	4	4
Elementární cvičení z vyšší analyse	2	2
Vybrané části z theorie funkcí komplexní proměnné (Pro pokročilé)	3	3
Počet pravděpodobnosti	3	2
1925/26		
Úvod do počtu infinitesimálního	4	4
Elementární cvičení z vyšší analyse	2	2
Konformní zobrazení a jeho užití v theorii funkcí	3	3
1926/27[2])		
Úvod do počtu infinitesimálního	4	4
Elementární cvičení z vyšší analyse	2	2
Úvod do počtu variačního	3	3
Počet pravděpodobnosti	3	2
1927/28		
Úvod do počtu infinitesimálního	4	4
Elementární cvičení z vyšší analyse	2	2
Rovnice diferenciální. Elementární metody.	3	3
1928/29		
Funkce kompleksní proměnné	3	5
Rovnice diferenciální. Eksistenční theoremy.	2	-
Počet pravděpodobnosti	3	2
Seminární cvičení	-	2
1929/30		
O celistvých funkcích transcendetních	4	4
Parciální rovnice diferenciální	2	1
Seminární cvičení	2	2
1930/31		
Funkce prosté	-	3

Analytické pokračování	2	2
Počet pravděpodobnosti (Kurs pojistné matematiky)	3	2
Konformní zobrazování	3	-
Seminární cvičení	2	2
1931/32		
Počet variační	5	5
Matematika pro posluchače chemie a fysiky	3	3
Cvičení seminární	2	2
1932/33[3])		
O funkcích komplexní proměnné	5	5
Počet pravděpodobnosti	3	2
Seminární cvičení	2	2
1933/34		
Rovnice diferenciální	3	3
Vybrané části z theorie funkcí komplexní proměnné	2	-
Matematika pro posluchače chemie a fysiky	3	2
Cvičení seminární	2	2
1934/35		
Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné	5	-
Funkce komplexní proměnné	-	5
Počet pravděpodobnosti	3	2
Seminární cvičení	2	2
1935/36		
Rovnice diferenciální[4])	3	3
Seminární cvičení	2	2
1936/37		
Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné	5	3
Počet pravděpodobnosti[5])	3	2
Vybrané části z theorie funkcí komplexní proměnné	-	2
Cvičení seminární	2	2
1937/38		
Diferenciální rovnice	5	3
Funkce transcendentní a meromorfní	-	2
Seminární cvičení	2	2
1938/39		
Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné	5	4
Vybrané části z theorie funkcí komplexní proměnné	-	1
Seminární cvičení	2	2

1939/40[6])		
Rovnice diferenciální	5	-
Seminární cvičení	2	-
1945		
Diferenciální rovnice[7])	-	5
Seminář matematický: seminární cvičení	-	2
1945/46		
Funkce komplexní proměnné	3	3
Diferenciální rovnice	2	-
Seminář: cvičení z matematiky[8])	2	2
Rovnice diferenciální	-	2
1946/47[9])		
Funkce komplexní proměnné	3	3
Úvod do počtu pravděpodobnosti[10])	2	2
Seminář: cvičení z matematiky	2	2
1947/48		
Vybrané části z theorie funkcí kompl. prom.	3	3
Integrální rovnice	2	-
Seminář: cvičení	2	2
1949/50[11])		
Úvod do theorie funkcí kompl. prom.	2,5	2,5
Počet variační	2,5	2,5
Seminární cvičení	2	2
1950/51		
Analysa	2	2
Theorie obyčejných dif. rovnic	2	2
Vybrané části z theorie analytických funkcí	3	3
Seminární cvičení pro 3.,4. ročník	2	2

Pedagogická fakulta

1946/47		
Počet diferenciální a integrální pro II. st.	?	3
1947/48		
Infinitesimální počet	3/1	-
Numerické počítání[12])	1/2	-
Rovnice[13])	2/2	-

Matematicko-fyzikální fakulta

1954/55		
Analytické funkce II. (IV. r.)	4/0	-

1955/56

Analytické funkce I. (III. r.)	-	4/2
Analytické funkce (IV. r.)	3/0	-
Seminář z theorie funkcí	2	2

1956/57

Analytické funkce I. (III. r.)	-	4/2
Analytické funkce (IV. r.)	3/0	-
Seminář	2	2

Poznámky

[1]) Viz dopis adresovaný Ministerstvu školství a národní osvěty, fond Ministerstvo školství, karton č. 1073, Státní ústřední archiv Praha.

[2]) V letním běhu navíc vedl spolu s Bydžovským, Jarníkem, Hlavatým a Machytkou *Rozhovory o nejnovějších směrech v matematice* (1 hod. týdně).

[3]) V březnu tohoto roku se Kössler léčil v Priessnitzově sanatoriu v Gräfenberku z následků nervového zhroucení.

[4]) Látka ke druhé státní zkoušce, určeno posluchačům 5. a vyšších semestrů.

[5]) Přednášky kursu Počet pravděpodobnosti po Kösslerovi převzal Otomar Pankraz.

[6]) V listopadu 1939 byly české vysoké školy uzavřeny.

[7]) Přednáška určená pro posluchače připravující se ke druhé státní zkoušce.

[8]) Vysvědčení z těchto cvičení bylo povinné pro státní zkoušku kandidátů učitelství.

[9]) V obdobích 1946/47–1948/49 a 1949/50–1951/52 byl Kössler jmenován Ministerstvem školství, věd a umění členem zkušební komise pro státní zkoušky z matematické statistiky, pojistné matematiky a ekonometriky - odborným examinátorem pro algebru, geometrii a matematickou analysu jako předmět I. státní zkoušky a pro matematiku jako předmět II. státní zkoušky.

[10]) První a druhá část dvousemestrového cyklu pro posluchače matematiky a posluchače pojistné matematiky a matematické statistiky.

[11]) V akademickém roce 1948/49 byl Kössler navíc pověřen suplováním za Dr. V. Hlavatého konáním proseminaře, neboť Hlavatý v roce 1948 emigroval do Spojených států amerických, a bylo nutné jeho výuku odsuplovat.

[12]) Spolu s prof. Dr. K. Hrušou.

Použité zdroje

Seznam přednášek, které budou se konati na české universitě Karlově v Praze. Praha: Státní tiskárna v Praze, 1919–1939.

Seznam přednášek na přírodovědecké fakultě University Karlovy, z let 1945–1951.

Seznam přednášek na pedagogické fakultě University Karlovy, z let 1946–1948.

Seznam přednášek na matematicko-fyzikální fakultě University Karlovy ve studijních letech 1954/55, 1955/56, 1956/57.

7.3. Disertace posuzované Milošem Kösslerem

K funkci profesora na univerzitě neoddělitelně patřilo přizvání k obhajobám disertačních prací. Miloš Kössler během svého působení na přírodovědecké, později matematicko-fyzikální fakultě posuzoval celou řadu prací. Funkce „školitele“ v takové podobě, jak je to dnes obvyklé, neexistovala. Hlavní iniciativa k získání doktorátu bývala na posluchačích samotných. Zájemci zpravidla žádali profesora, který se zabýval jejich oborem, o stanovení tématu disertace. Pro získání doktorátu bylo nutné obhájit disertační práci a složit rigorósní zkoušku z matematiky a nějakého fyzikálního oboru. Počet získaných doktorátů z matematiky byl ve sledovaném období velmi nízký možná i z důvodu, že doktorát samotný nevedl k žádným hmotným výhodám.

Následující seznam je sestaven chronologicky podle studijních let, ve kterých proběhla obhajoba práce. Spolu se jménem autora dané práce, datem jeho narození (v závorce) a názvem disertační práce je vždy uveden Kösslerův spoluposuzovatel. Nejčastěji býval druhým posuzovatelem Karel Petr, Emil Schoenbaum, nebo Vojtěch Jarník. Výjimkou jsou práce posuzované spolu s Emanuelem Rádlem, Vladimírem Kořínkem a Eduardem Čechem.

1928/1929

Ervín Arnstein (8. 12. 1899)
Matematicko - statistické methody v novější psychologii se zvláštním zřetelem k methodám čítacím
(Karel Petr)

Jan Proněk (8. 5. 1902)
O Kummerových pracích o hypergeometrické řadě
(Karel Petr)

Bedřich Hustý (25. 2. 1904)
Invariantní útvary binární formy 5. stupně a jejich syrygie na základě vytvořující funkce
(Karel Petr)

Štěpán Sulatický (24. 8. 1897)
Některá vyšetřování funkce $ax_1x_2\dots x_m$
(Emil Schoenbaum)

Abram Gertner (15. 6. 1900)
O polynomech ultrasferických a o rozvojích funkcí reálné proměnné v řadu těchto polynomů
(Karel Petr)

1930/1931

Jaroslav Procházka (17. 4. 1907)
Generalisace teorému Cauchy-Poincaréova
(Karel Petr)

Otomar Pankraz (25. 3. 1903)
O divergenci Dirichletova integrálu
(Karel Petr)

Otakar Zich (26. 5. 1908)
O hranici oblasti jednoduše souvislé
(Karel Petr)

Vladimír Tardy (18. 9. 1906)
Logický rozbor matematického poznání
(Emanuel Rádl)

Antonín Kollert (18. 4. 1907)
Teorie risika
(Emil Schoenbaum)

Miloš Vacek (20. 1. 1908)
O Polyově zákonu řídkých zjevů a jeho užití ve statistice
(Emil Schoenbaum)

Vladimír Aulický (20. 7. 1904)
Laplaceovy methody k určení přesnosti statistických výsledků, Lexis-ova teorie disperse a stabilita statistických řad vůbec
(Emil Schoenbaum)

Václav Krčma (7. 12. 1906)
O separaci kořenů rovnic algebraických
(Karel Petr)

1931/1932

Antonín Srovnal (17. 2. 1898)
O Fejérových středech Fourierových řad
(Karel Petr)

Miloslav Hlaváček (6. 7. 1894)
Funkce spojité, jež nemají v žádném bodě intervalu derivace
(Karel Petr)

Oldřich Pokorný (8. 9. 1907)
Aplikace polynomů Bernoullských na součet n-tých mocnin daných čísel
(Karel Petr)

Ladislav Špaček (30. 5. 1909)
O koeficientech funkcí prostých
(Vojtěch Jarník)

Josef Ambrož (18. 1. 1905)
Hypotesa elementárních proměnných v počtu pravděpodobnosti
(Emil Schoenbaum)

Karel Kervitcer (28. 8. 1905)
Nerovnosti mezi středními hodnotami a jejich užití v aktuárských vědách
(Emil Schoenbaum)

Rudolf Pollak (19. 2. 1909)
O centrální mezní větě počtu pravděpodobnosti
(Emil Schoenbaum)

1932/1933

Helena Navrátilová (12. 5. 1907)
Zákon řídkých zjevů a jeho aplikace na kolektivy pojistných událostí
(Emil Schoenbaum)

Bohumil Jurek (3. 1. 1909)
O derivovaných číslech
(Vojtěch Jarník)

František Kudela (19. 5. 1904)
Mezní teorémy počtu pravděpodobnosti v oblasti zákona Laplace-Gaussova
(Emil Schoenbaum)

Adolf Klimeš (9. 10. 1908)
Teorie Hermiteových polynomů více proměnných a její aplikace na teorii korrelace
(Emil Schoenbaum)

Augustin Vorreith (12. 9. 1908)
Problém momentů
(Emil Schoenbaum)

Ota Fischer (3. 8. 1909)
Zobecnění analytických výrazů užívaných v theorii kolektivních předmětů
(Emil Schoenbaum)

Jarmila Iglauerová - Šimerková (7. 1. 1910)
Zavedení libovolných funkcí v počtu pravděpodobnosti
(Emil Schoenbaum)

Ferdinand Šamonil (6. 3. 1909)
O interpolaci a její aplikaci na numerickou summaci
(Emil Schoenbaum)

Věra Čechová (12. 5. 1910)
Teorie risika
(Emil Schoenbaum)

1933/1934

Josef Bílý (31. 8. 1905)
Skupinové metody pro výpočet reserv pojistného
(Emil Schoenbaum)

Oldřich Dvořák (25. 5. 1910)
O funkcích prostých
(Vojtěch Jarník)

Rostislav Rajchl (1. 1. 1910)
Extrapolační vzorce ve vývojové populaci
(Emil Schoenbaum)

1934/1935

Karel Šťastný (22. 9. 1907)
Dodatkové pojištění invalidity v soukromém pojištění
(Emil Schoenbaum)

Josef Talacko (24. 6. 1909)
Verhulstova logistická křivka, její zobecnění, analysa, kriterium aplikace a užití na československou populaci
(Emil Schoenbaum)

1935/1936

Václav Vilímek (26. 8. 1904)
Rozvíjení ve fakultní řady funkcí příbuzných gammafunkcí
(Karel Petr)

1936/1937

Jiřina Frantíková (26. 1. 1914)
Úrokový problém pro důchody životní s malou poznámkou pro premiové reservy smíšeného pojištění
(Emil Schoenbaum)

Rudolf Baloun (26. 10. 1905)
Rozšíření věty Tatouovy a věty bratří Rieszů na některé obecnější třídy funkcí
(Vojtěch Jarník)

Zdeněk Krejčí (22. 9. 1912)
Třídění spojitých komplexních funkcí v souvislosti s otázkou existence derivace
(Vojtěch Jarník)

Jiří Seitz (7. 6. 1911)
Teorie analytického vyrovnávání úmrtnostních tabulek
(Emil Schoenbaum)

Jaromír Haba (4. 10. 1913)
O pravděpodobnostech zjevů závislých
(Emil Schoenbaum)

Antonín Robek (4. 2. 1909)
Populační úmrtnostní tabulky
(Emil Schoenbaum)

1937/1938

Nikolaj Podtjagin (19. 4. 1887)
Quelques remarques sur la méthode de Lidston dans lássurance sur la vie
(Emil Schoenbaum)

1938/1939

Ing. Ivan Kochanovskov (25. 4. 1900)
Matematické základy teorie trendu
(Emil Schoenbaum)

Josef Veselka (29. 4. 1909)
O přerovnávání řad
(Vojtěch Jarník)

Karel Rakovič (19. 8. 1909)
Nerovnosti pro prostou hodnotu a pro koeficienty některých regulárních funkcí
(Vojtěch Jarník)

1939/1940

Miroslav Katětov (17. 3. 1918)
O absolutně uzavřených a bikompaktních prostorech
(Vojtěch Jarník, Vladimír Kořínek)

1945/1946

Josef Roudný (5. 9. 1909)
Problém úmrtnosti a jeho měření
(Vojtěch Jarník)

Antonín Špaček (11. 10. 1911)
O úplném rozšíření a obalech metrických prostorů vzhledem k dané množině metrik
(Vojtěch Jarník)

Václav Vodička (1. 8. 1911)
Symetrické funkce a jejich užití v matematické statistice
(Vojtěch Jarník)

1947/1948

Jaroslav Tuzar (25. 3. 1915)
O Schulteově metodě měření poptávky zobecněnou poptávkou funkcí
(Emil Schoenbaum)

1949/1950

Jiří Kopřiva (24. 6. 1925)
O jisté vlastnosti Fareyovy řady
(Vojtěch Jarník)

Jaroslav Kurzweil (7. 5. 1926)
Příspěvek k metrické teorii diofantických approximací
(Vojtěch Jarník)

Karel Winkelbauer (30. 10. 1925)
Statistické rozhodovací funkce
(Eduard Čech)

1950/1951

Alois Apfelbeck (18. 11. 1925)
Příspěvek k Chinčinově principu přenosu
(Vojtěch Jarník)

1951/1952

Karel Rektorys (4. 2. 1923)
Problém jednoznačnosti řešení parciálních rovnic diferenciálních pro vedení tepla při nespojitých okrajových podmínkách
(Vojtěch Jarník)

Tibor Šalát (13. 5. 1926)
Príspevok k teorii súčtov a nekonečných radov s reálnými členmi
(Vojtěch Jarník)

Zdeněk Koutský (17. 4. 1924)
Existenční věta řešení diferenciálních rovnic. Některé vlastnosti poloměrů konvergence tříd diferenciálních rovnic, mocninných a inversních řad
(Vojtěch Jarník)

Svatopluk Krupička (8. 1. 1922)
O mřížových bodech ve vícerozměrných prostorech
(Vojtěch Jarník)

1952/1953

Jiří Štěpánek (31. 1. 1924)
Rozvoj analytické funkce v polygonu konvergence
(Vojtěch Jarník)

Rudolf Výborný (3. 7. 1928)
O mocninné řadě konvergující na celém obvodu jednotkové kružnice
(Vojtěch Jarník)

Rok 1953 byl začátkem dlouhé přestávky v udělování doktorských akademických hodností na univerzitě. Chod škol byl již v té době výrazně poznamenán politickými změnami po roce 1948. Podle sovětského systému byl vytvořen nový zákon o vysokých školách (č. 58/1950 Sb.), jenž mimo jiné zrušil do té doby běžně užívané tituly RNDr. a PhDr. Brány univerzity tak opouštěli promovaní matematici, fyzici, inženýři ekonomie, ... Výjimka byla udělena pouze posluchačům imatrikulovaným ještě před tím, než nový zákon vstoupil v platnost. Tito studenti měli možnost zakončit studium rigorósními zkouškami, resp. obhájením disertační práce a ziskem akademického titulu. Rokem 1953 tak zápisy v matrice doktorů končí, stejně jako výše uvedený seznam disertací, jež spoluposuzoval Miloš Kössler.

Posledním studentem, jehož práci Kössler vedl, byl Prof. Rudolf Výborný, který si svého učitele velice vážil a dokonce jeho památce věnoval svou knihu o diferenciálním počtu [Výborný (1966)].

Použité zdroje

Life and Work of Vojtěch Jarník. Ed. Novák B. Praha: Society of Czech Mathematicians and physicists, Prometheus, 1999.

TULACHOVÁ, M. *Disertace pražské university 1882–1953 I.* Praha: UK - SPN, 1965.

VÝBORNÝ, R. *Diferenciální počet.* Praha: Academia, 1966.

Závěrečné slovo

Cílem této disertační práce bylo zpracování podrobného přehledu o životě a díle Miloše Kösslera, našeho předního specialisty v oboru teorie analytických funkcí první poloviny 20. století, jehož jméno postupem času po jeho smrti téměř upadlo v zapomnění.

Pohled na životní dráhu Miloše Kösslera dává čtenářům možnost sledovat cílevědomou trnitou cestu chlapce z chudé rodiny za vzděláním a uplatněním v milovaném oboru – matematice. Kösslerův osud výrazně ovlivnili profesoři na gymnáziu, především pak ale univerzitní profesor Karel Petr, jenž se pro něj stal celoživotním vzorem. V rámci popisu vzestupů a peripetií pracovní kariéry na pozadí radostných i smutných okamžiků týkajících se osobního života Miloše Kösslera lze získat řadu postřehů k situaci na středních školách a Univerzitě Karlově v daném období. Kösslerovu oddanost zvolenému oboru příkladně dokazuje jeho aktivní činnost v řadě českých vědeckých společností, mj. v Královské české společnosti nauk, Jednotě českých matematiků a fyziků a Akademii věd. Morální postoj v období první republiky, za 2. světové války i po únoru 1948 jednoznačně dokazuje, že Kössler byl člověkem pevných zásad, odmítajícím jakoukoli formu násilí či diktatury. Prostým biografickým faktům dodávají lidštější rozměr vzpomínky studentů a kolegů. Miloš Kössler byl podle jejich výpovědí velmi milý a dobrosrdečný člověk, shovívavý přednášející a dokonalý gentleman.

Během svého života Kössler publikoval více než 30 původních vědeckých pojednání v pěti světových jazycích. Z charakterizace jeho díla je patrné, že hlavními obory jeho zájmu byla problematika funkcí komplexní proměnné (otázky týkající se rozvojů analytických funkcí, singularit na hranici kruhu konvergence mocninných řad, Bieberbachovy domněnky, omezených polynomů) a dále teorie čísel, přestože tomuto oboru neměl možnost se věnovat v rámci svých přednášek na univerzitě. Na druhou stranu téměř patnáct let přednášel teorii pravděpodobnosti, dále spolu s Emilem Schoenbaumem posuzoval 25 doktorských disertací z oblasti náhodných jevů a statistiky, a přitom na toto téma sepsal pouze jediné kratičké pojednání. Součástí komentáře jednotlivých Kösslerových článků je stručný historický náhled na vývoj studovaných problémů spolu s citacemi v naší i zahraniční literatuře. Za nejvýznamnější Kösslerova díla lze označit práce *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru I, II* (v podstatě doktorské a habilitační pojednání současně), dále články z 20. let zpřesňující tehdejší výsledky v pokusech o důkaz Bieberbachovy domněnky, pojednání o prostých a ohraničených polynomech. Velkého počtu citací se dočkal i společný příspěvek psaný spolu s Vojtěchem Jarníkem o minimální kostře grafu, navazující na práci Borůvkovu, jenž patřil k prvním publikacím věnujícím se teorii grafů z celosvětového hlediska.

Kösslerovo pedagogické mistrovství dokumentuje mj. podrobná analýza jeho učebnice *Úvod do počtu diferenciálního* určené posluchačům 1. ročníku přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy, byť v porovnání se stejnojmennou, avšak mladší knihou Jarníkovou jde o práci menšího rozsahu, jejíž význam byl zvýrazněn ve své době potřebností podobné knihy pro studenty úvodního kursu matematické analýzy. Díky velmi vytříbenému podání však Kösslerovu knihu často používali i studenti středních škol se zájmem o matematiku k prohloubení svých znalostí před příchodem na vysokou školu. Druhý Kösslerův učební text *Úvod do theorie funkce komplexní proměnné* se bohužel knižního vydání nikdy nedočkal.

Dosti zajímavou a dosud nepublikovanou součástí Kösslerova díla jsou jeho matematické deníky z období let 1942–1956. Čtenáři je zde předložen neobvyklý „hrubý“ materiál v podobě úryvků (stručně okomentovaných a přesně přepsaných do počítačové podoby) skýtající možnost pozorovat vývoj autorových myšlenek, někdy vedoucích do slepé uličky, na jiných místech cíleně směřovaných k přípravě materiálu pro publikování článku v časopise.

Přehled Kösslerovy vědecké a pedagogické činnosti je doplněn výčtem všech jeho publikací spolu s citacemi ve vybraných referativních časopisech, seznamem konaných přednášek a cvičení na Univerzitě Karlově, stejně jako seznamem posuzovaných disertací.

S výjimkou článku vydaného u příležitosti Kösslerových sedmdesátin a několika nekrologů dosud nebylo publikováno žádné podrobnější pojednání o jeho životě a díle. Tato práce zahrnuje informace doposud publikované, na mnoha místech je reviduje a uvádí na pravou míru, výrazně je rozšiřuje jak v oblasti archivních údajů týkajících se životopisné části, tak v oblasti rozboru vědecké činnosti Miloše Kösslera. Parafrází na jeho úvod ke knize *Úvod do počtu diferenciálního* můžeme shrnout: „práce tato zcela splnila svůj úkol, pokud čtenářům přiblížila osobnost a dílo jednoho z nejlepších pedagogů – matematiků – své doby a přispěla k doplnění celkového obrazu výuky královny věd na pražské univerzitě.“

OBRAZOVÁ PŘÍLOHA

Soupis obrazových příloh

Školní rok	1895 / 1896		1896 / 1897		1897 / 1898		1898 / 1899	
Třída	Prima	(I.b)	Sekunda	(II.b)	Tercie	(III.b)	Kvarta	(IV.a)
	1.pololetí	2.pololetí	1.pololetí	2.pololetí	1.pololetí	2.pololetí	1.pololetí	2.pololetí
Mravné chování	uspokojivé	chvalitebné	chvalitebné	chvalitebné	uspokojivé	chvalitebné	chvalitebné	chvalitebné
Pilnost	náležitá	náležitá	vytrvalá	vytrvalá	náležitá	náležitá	náležitá	náležitá
Náboženství	výborný	výborný	výborný	výborný	chvalitebný	dobrý	chvalitebný	dostatečný
Jazyk latinský	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	dobrý	dobrý	dobrý	dobrý
Jazyk řecký	x	x	x	x	dostatečný	dobrý	dobrý	dobrý
Jazyk český	dobrý	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	dobrý	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný
Zeměpis a dějepis	dobrý	chvalitebný	výborný	chvalitebný	dobrý	dobrý	dobrý	chvalitebný
Matematika	chvalitebný	výborný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	výborný
Přírodopis	chvalitebný	výborný	chvalitebný	dobrý	x	dobrý	x	x
Fyzika (silozpyt)	x	x	x	x	dobrý	x	výborný	výborný
Filosof. propedeutika	x	x	x	x	x	x	x	x
Kreslení	x	x	x	x	x	x	x	x
Tělocvik	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	x	x
Jazyk německý	výborný	výborný	chvalitebný	chvalitebný	dobrý	dobrý	dobrý	dobrý
Těsnopis	x	x	x	x	x	x	chvalitebný	výborný
Jazyk francouzský	x	x	x	x	x	x	dobrý	dobrý
Krasopis	dostatečný	dobrý	dobrý	dobrý	x	x	x	x
Vnější úprava pís. prací	slušná	úhledná	velmi úhledná	velmi úhledná	úhledná	úhledná	úhledná	úhledná
Počet zameškaných VH	19/0	0/0	4/0	0/0	4/0	17/0	0/0	0/0
Třída vysvědčení	první s vyzn.	první s vyzn.	první s vyzn.	první s vyzn.	první	první	první	první

Obr. č. 1 - Přehled výročních vysvědčení z Akademického gymnázia – část první

Školní rok	1899 / 1900		1900 / 1901		1901 / 1902		1902 / 1903	
Třída	Kvinta	(V.b)	Sexta	(VI.)	Septima	(VII.)	Oktáva	(VIII.)
	1.pololetí	2.pololetí	1.pololetí	2.pololetí	1.pololetí	2.pololetí	1.pololetí	2.pololetí
Mravné chování	chvalitebné	uspokojivé	chvalitebné	uspokojivé	uspokojivé	chvalitebné	chvalitebné	chvalitebné
Pilnost	náležitá	náležitá	náležitá	náležitá	náležitá	náležitá	náležitá	náležitá
Náboženství	chvalitebný	dobrý	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný
Jazyk latinský	dobrý	dobrý	dobrý	dostatečný	dobrý	dobrý	dobrý	dostatečný
Jazyk řecký	dostatečný	dostatečný	dostatečný	dobrý	dobrý	dobrý	dobrý	dostatečný
Jazyk český	dobrý	dobrý	dobrý	dobrý	dobrý	dobrý	chvalitebný	chvalitebný
Zeměpis a dějepis	výborný	chvalitebný	chvalitebný	dobrý	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný	chvalitebný
Matematika	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný
Přírodopis	chvalitebný	chvalitebný	dostatečný	dobrý	x	x	x	x
Fyzika (silozpyt)	x	x	x	x	výborný	výborný	výborný	výborný
Filosof. propedeutika	x	x	x	x	výborný	chvalitebný	výborný	výborný
Kreslení	x	x	výborný	výborný	chvalitebný	výborný	výborný	výborný
Tělocvik	výborný	chvalitebný	x	x	x	x	x	x
Jazyk německý	dobrý	dostatečný	dobrý	dobrý	dobrý	chvalitebný	dobrý	dobrý
Těsnopis	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný	výborný
Jazyk francouzský	x	x	x	x	x	x	x	x
Krasopis	x	x	x	x	x	x	x	x
Vnější úprava pís. prací	obstojná	obstojná	obstojná	obstojná	obstojná	obstojná	obstojná	obstojná
Počet zameškaných VH	14/0	31/0	0/0	14/0	0/0	5/0	1/0	18/0
Třída vysvědčení	první	první	první	první	první s vyzn.	první	první s vyzn.	první

Obr. č.2 - Přehled výročních vysvědčení z Akademického gymnázia – část druhá

Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla.

Napsal Miloš Kössler.

Lambertova řada

$$L(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \dots \qquad (1.)$$

obdrží rozvinutím jednotlivých sčítanců v řady geometrické a srovnáním podle mocnin čísla z tvar řady mocninné

$$L(z) = \Theta(1)z + \Theta(2)z^2 + \Theta(3)z^3 + \dots + \Theta(n)z^n \dots, \qquad (1a)$$

$$|z| < 1,$$

kdež $\Theta(n)$ značí počet dělitelů celistvého čísla n *)

*) N. př. $\Theta(1)=1$, $\Theta(2)=2$, $\Theta(3)=2$, $\Theta(4)=3$, $\Theta(5)=2$, a t. d. Pro prvočíslo p jest vždy $\Theta(p)=2$, pro číslo složené $\Theta(k) > 2$.

Obr. č. 3 – Úvodní strana rukopisu [K4] pro redakci (1916)

Q. F. F. F. Q. S.

SUMMIS AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI IMPERATORIS AC REGIS

CAROLI I.

NOS

GABRIEL PECHÁČEK,

S. S. THEOLOGIAE DOCTOR, THEOLOGIAE PASTORALIS C. R. PROFESSOR PUBLICUS ORDINARIUS, SACRI AC MILITARIS ORDINIS CRUCIGERORUM CUM RUBEA STELLA CONSULTOR, ALMAE ET ANTIQUISSIMAE UNIVERSITATIS CAROLINAE FERDINANDEAE PRAGENSIS BOHEMICAE

H. T. RECTOR MAGNIFICUS,

IOANNES MÁCHAL,

PHILOSOPHIAE DOCTOR, LITTERARUM SLAVICARUM C. R. PROFESSOR PUBLICUS ORDINARIUS, ACADEMIAE SCIENTIARUM, LITTERARUM ARTIUMQUE IMPERATORIS FRANCISCI IOSEPHI I. BOHEMICAE SODALIS ORDINARIUS, REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM BOHEMICAE EXTRAORDINARIUS,

ORDINIS PHILOSOPHIAE H. T. DECANUS,

THEOPHILUS KUČERA,

Ph. Dr., PHYSICAE EXPERIMENTALIS C. R. PROFESSOR PUBLICUS ORDINARIUS,

PROMOTOR RITE CONSTITUTUS,

IN VIRUM CLARISSIMUM

MILOŠ KÖSSLER,

BOHEMUM PRAGENSEM,

POSTQUAM ET DISSERTATIONE, QUAE „O ROZVOJÍCH PLATNÝCH PRO FUNKCI ANALYTICKOU V DANÉM OBORU" INSCRIBITUR ET EXAMINIBUS LEGITIMIS LAUDABILEM IN MATHEMATICA ET PHYSICA EXPERIMENTALI NEC NON IN PHILOSOPHIA DOCTRINAM PROBAVIT,

DOCTORIS PHILOSOPHIAE

NOMEN ET HONORES, IURA ET PRIVILEGIA CONTULIMUS IN EIUSQUE REI FIDEM HASCE LITTERAS UNIVERSITATIS SIGILLO SANCIENDAS CURAVIMUS.

DATUM PRAGAE, DIE NONO M. JULII 1918.

Prof. Dr. G. Pecháček
H. T. RECTOR.

Dr. J. Máchal
H. T. DECANUS

Dr. Bohumil Kučera
PROMOTOR RITE CONSTITUTUS

Obr. č. 4 – Kösslerův doktorský diplom (1918)

Slavný sbore profesorský!

V úctě podepsaný žádá, aby připuštěn byl za soukromého docenta pro mathematickou analysi a algebru při filosofické fakultě čes. university.

K žádosti své přikládá, mimo předepsané doklady (průkaz o dokončení univers. studie, habilitační práci, curriculum vitae a program přednášek) několik svých dřívějších prací, aby dokázal, že již delší dobu jest ve svém oboru vědecky činným.

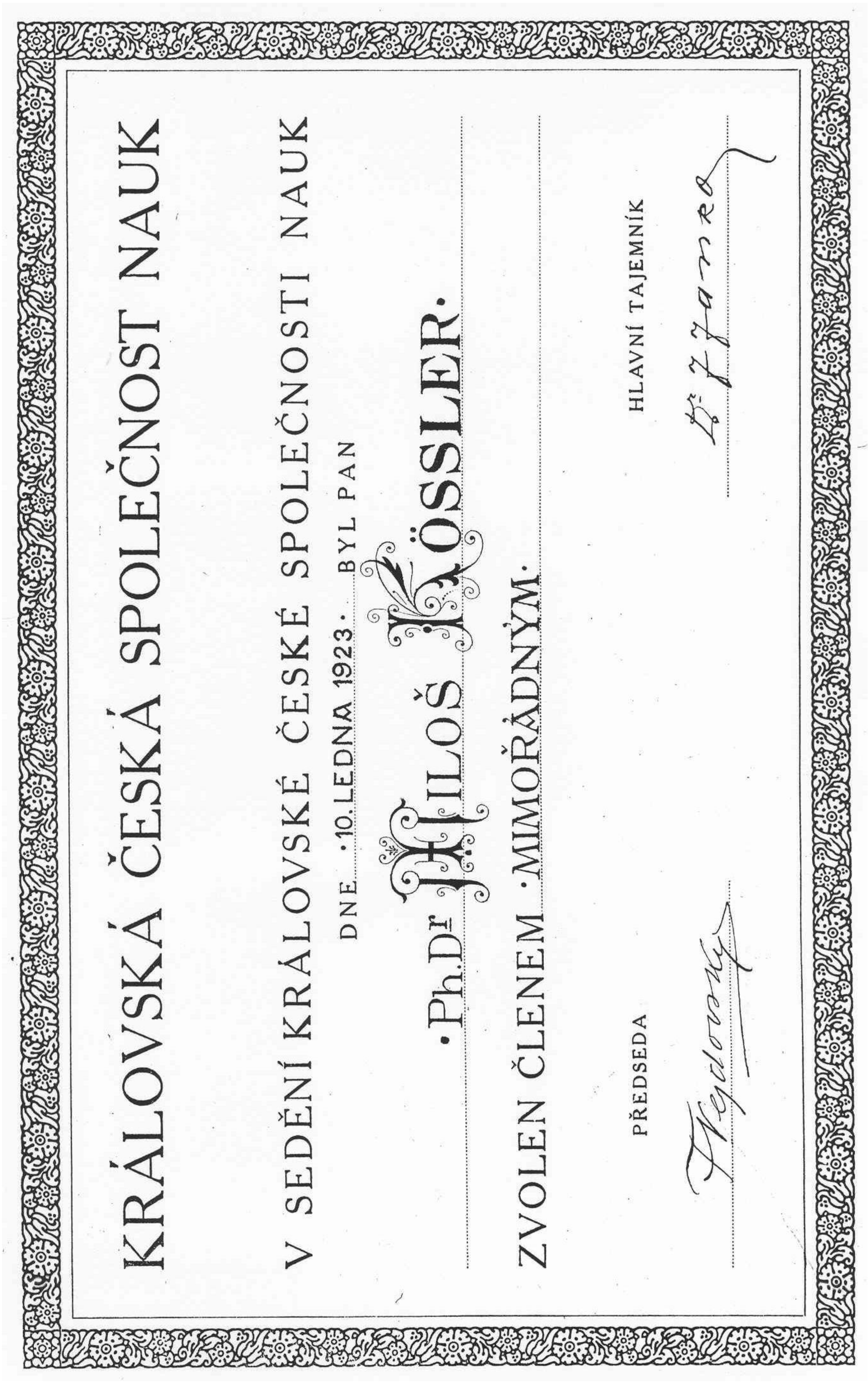
I, II, III, IV.

V.

V Praze dne 11. listopadu 1919.

Miloš Kössler, Ph. Dr.,
prof. při čes. gymnasiu na Kr. Vinohradech, Hálkova tř. č. 29.

Obr.č. 5 – Žádost o habilitaci (1919)


KRÁLOVSKÁ ČESKÁ SPOLEČNOST NAUK

V SEDĚNÍ KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK

DNE ·10. LEDNA 1923· BYL PAN

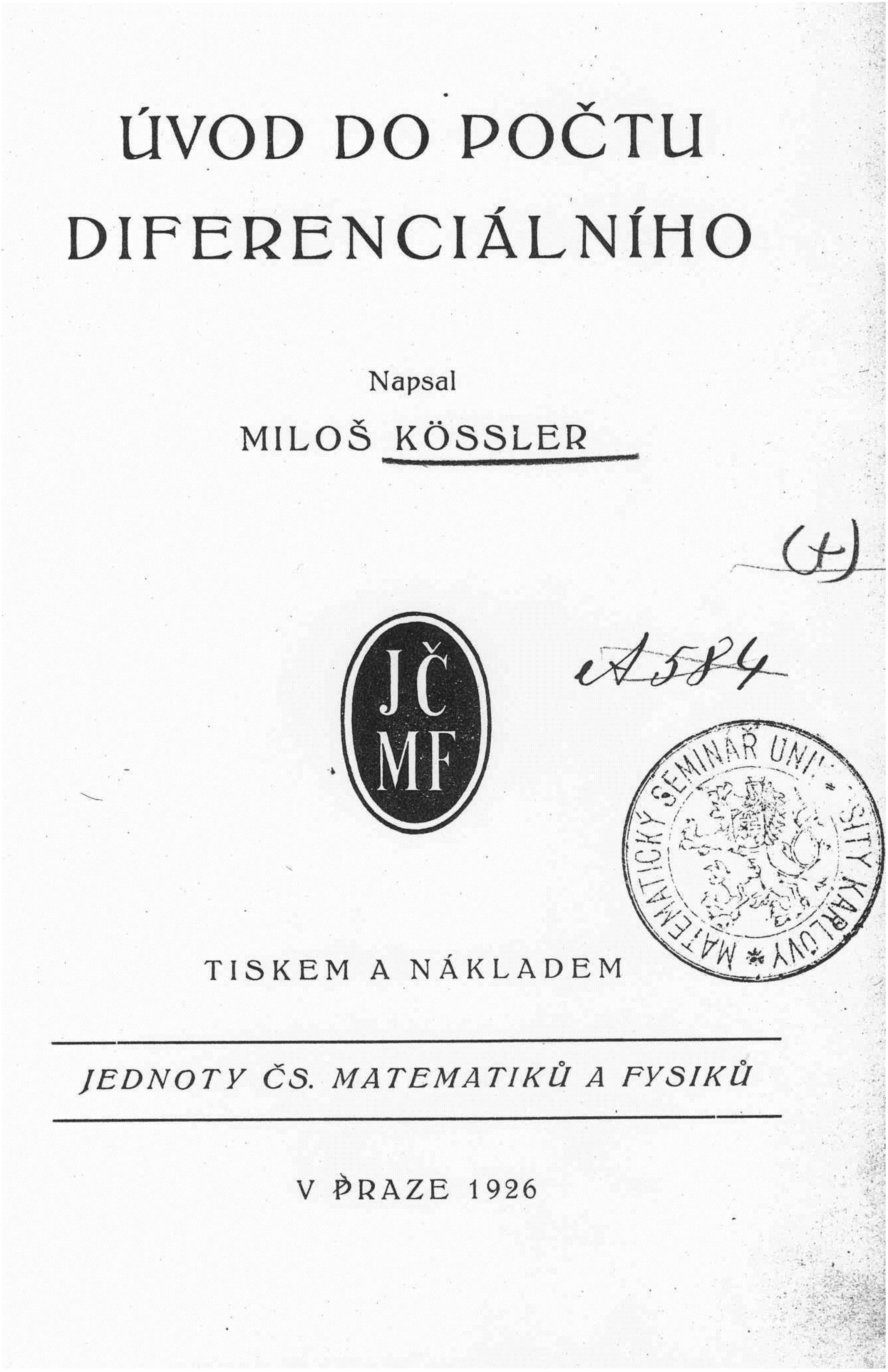
·Ph.Dr Miloš Kössler·

ZVOLEN ČLENEM ·MIMOŘÁDNÝM·

PŘEDSEDA

HLAVNÍ TAJEMNÍK

Obr. č. 6 – Jmenování mimořádným členem Královské české společnosti nauk



ÚVOD DO POČTU DIFERENCIÁLNÍHO

Napsal

MILOŠ KÖSSLER

TISKEM A NÁKLADEM

JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

V PRAZE 1926

Obr. č. 7 – Titulní list Kösslerova *Úvodu do počtu diferenciálního*

V P r a z e , dne 31. prosince 1927.

Panu

ministrovi školství a národní osvěty

v P r a z e .

Jmenuji mimořádného profesora na Karlově universitě v Praze Phil. Dra Miloše K ö s s l e r a řádným profesorem matematiky na přírodovědecké fakultě téže university, a to s účinností od 20. prosince 1927.

T. G. Masaryk

M. Hodža

Obr. č. 8 – Jmenovací dekret od prezidenta republiky

DR. MILOŠ KÖSSLER

V Praze dne 20. června 1934

Spectabilis pane děkane,

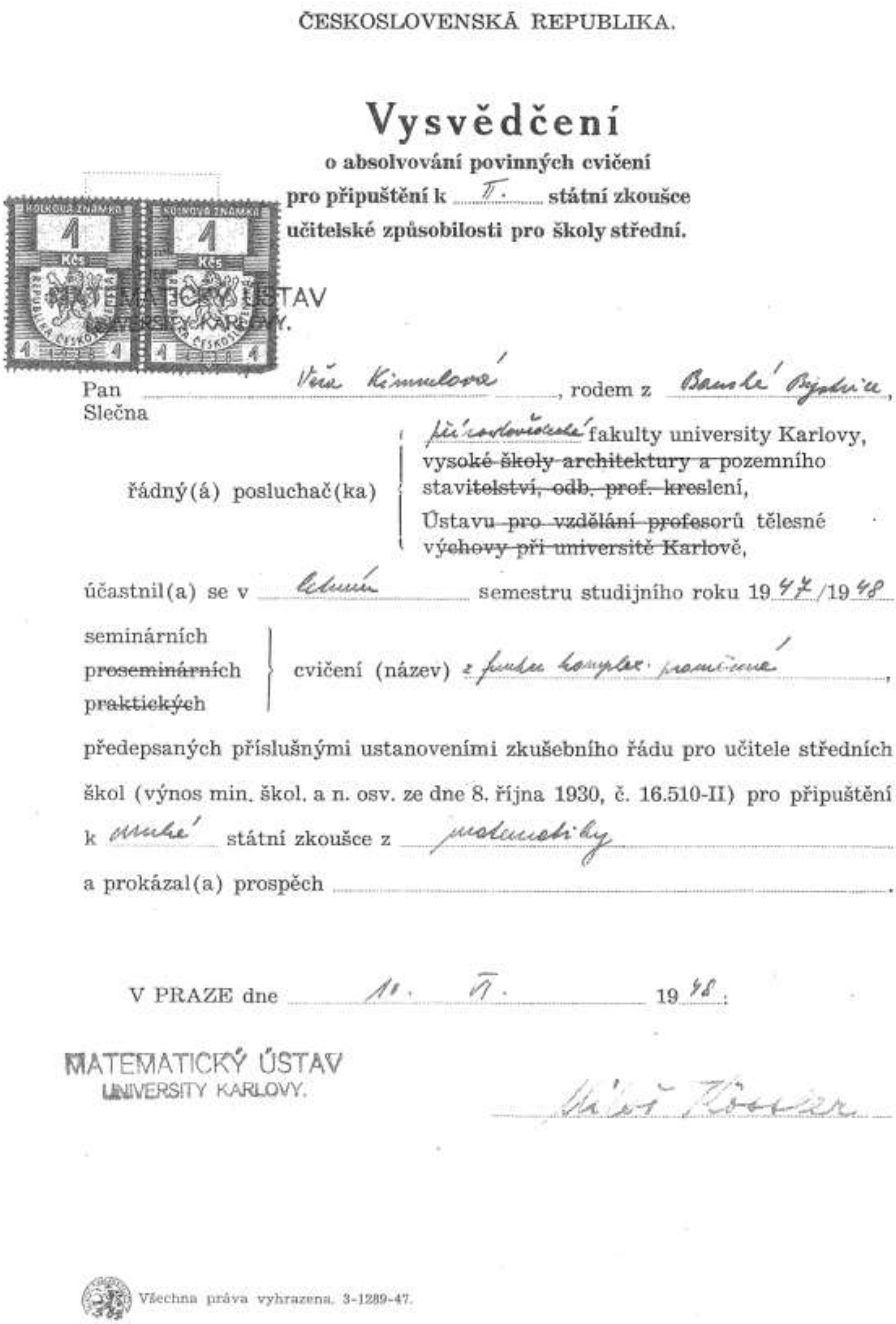
děkuji Vám i sboru profesorskému za milé blahopřání k mé padesátce. Pokusím se tuto padesátku, která ke mně přišla nepozvána, překonati tím, že budu pracovati jako by byla vůbec nepřišla.

Vám zcela oddaný!

Kössler

Obr. č. 9 – Děkovný dopis děkanovi z roku 1934

Obr. č. 10 - Miloš Kössler (nahoře uprostřed) spolu s rektorem UK Gustavem Friedrichem a ostatními děkany, akademický rok 1935/1936



ČESKOSLOVENSKÁ REPUBLIKA.

Vysvědčení

o absolvování povinných cvičení
pro připuštění k II. **státní zkoušce**
učitelské způsobilosti pro školy střední.

MATEMATICKÝ ÚSTAV
UNIVERSITY KARLOVY.

Pan
Slečna ......Věra Kimmelová......, rodem z ......Banská Bystrica......,

řádný(á) posluchač(ka) ......přírodovědecké fakulty university Karlovy,
~~vysoké školy architektury a pozemního stavitelství, odb. prof. kreslení,~~
~~Ústavu pro vzdělání profesorů tělesné výchovy při universitě Karlově,~~

účastnil(a) se v ......letním...... semestru studijního roku 19 47 /19 48

seminárních
~~proseminárních~~
~~praktických~~ cvičení (název) z funkcí komplex. proměnné,

předepsaných příslušnými ustanoveními zkušebního řádu pro učitele středních škol (výnos min. škol. a n. osv. ze dne 8. října 1930, č. 16.510-II) pro připuštění k ......druhé...... státní zkoušce z ......matematiky......

a prokázal(a) prospěch ....

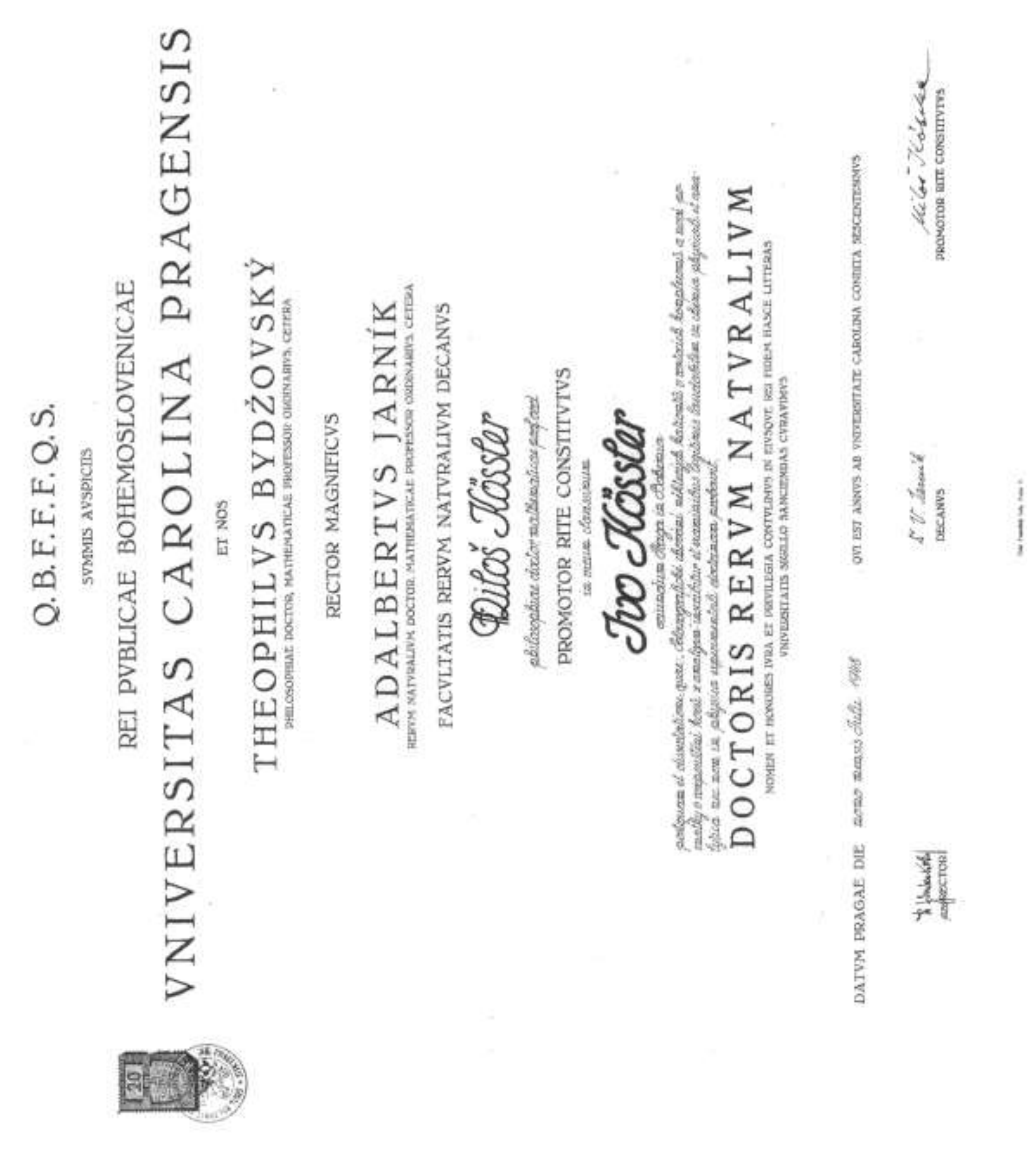
V PRAZE dne ......10. VI. ...... 19 48.

MATEMATICKÝ ÚSTAV
UNIVERSITY KARLOVY.

Miloš Kössler

Všechna práva vyhrazena. 3-1289-47.

Obr. č. 11 – Vysvědčení ze seminárních cvičení Miloše Kösslera



Q.B.F.F.F.Q.S.

SVMMIS AVSPICIIS

REI PVBLICAE BOHEMOSLOVENICAE

VNIVERSITAS CAROLINA PRAGENSIS

ET NOS

THEOPHILVS BYDŽOVSKÝ

PHILOSOPHIAE DOCTOR, MATHEMATICAE PROFESSOR ORDINARIVS, CETERA

RECTOR MAGNIFICVS

ADALBERTVS JARNÍK

RERVM NATVRALIVM DOCTOR, MATHEMATICAE PROFESSOR ORDINARIVS, CETERA

FACVLTATIS RERVM NATVRALIVM DECANVS

Miloš Kössler

PROMOTOR RITE CONSTITVTVS

Ivo Kössler

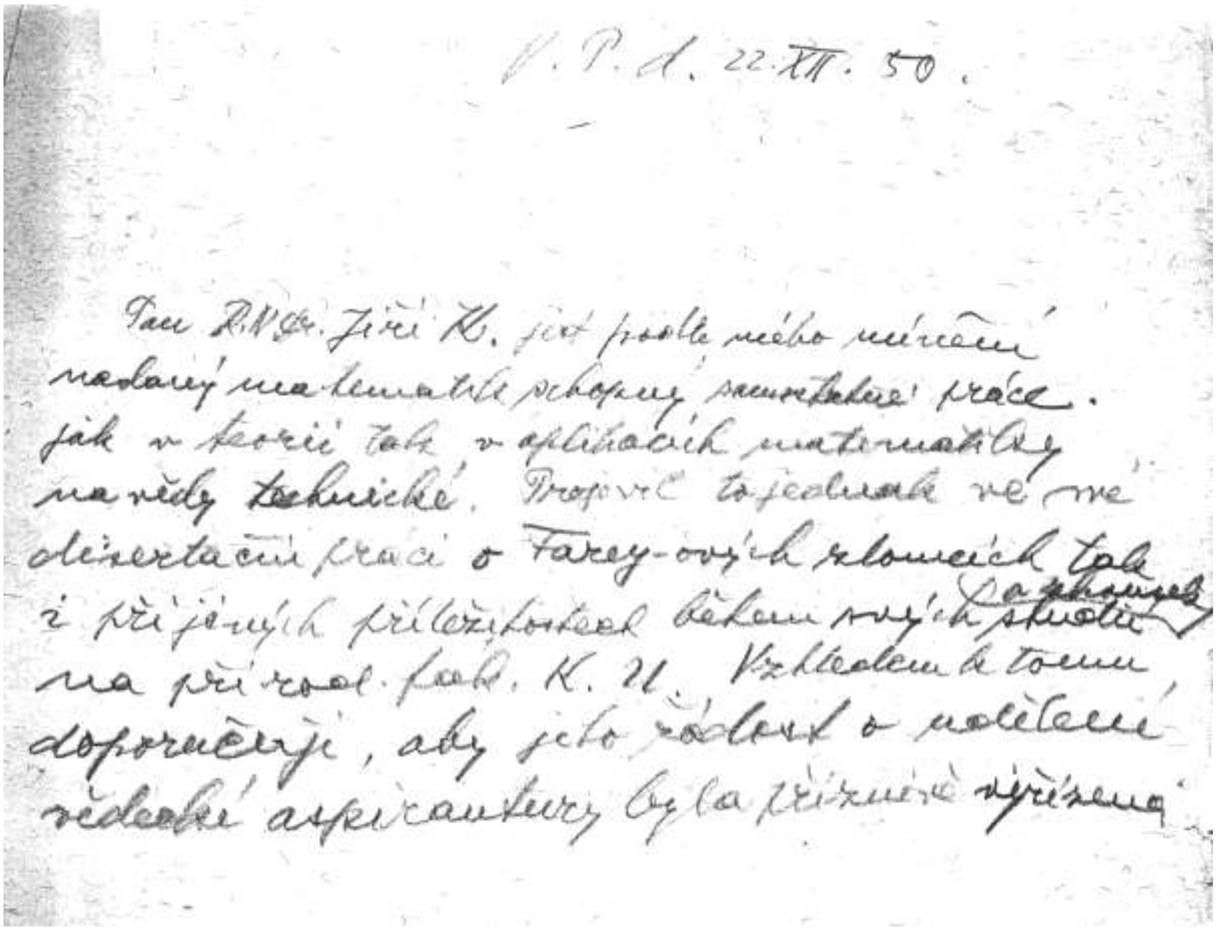
DOCTORIS RERVM NATVRALIVM

NOMEN ET HONORES IVRA ET PRIVILEGIA CONTVLIMVS IN EIVSQVE REI FIDEM HASCE LITTERAS VNIVERSITATIS SIGILLO SANCIENDAS CVRAVIMVS

DATVM PRAGAE DIE QVI EST ANNVS AB VNIVERSITATE CAROLINA CONDITA SEXCENTESIMVS

RECTOR DECANVS PROMOTOR RITE CONSTITVTVS

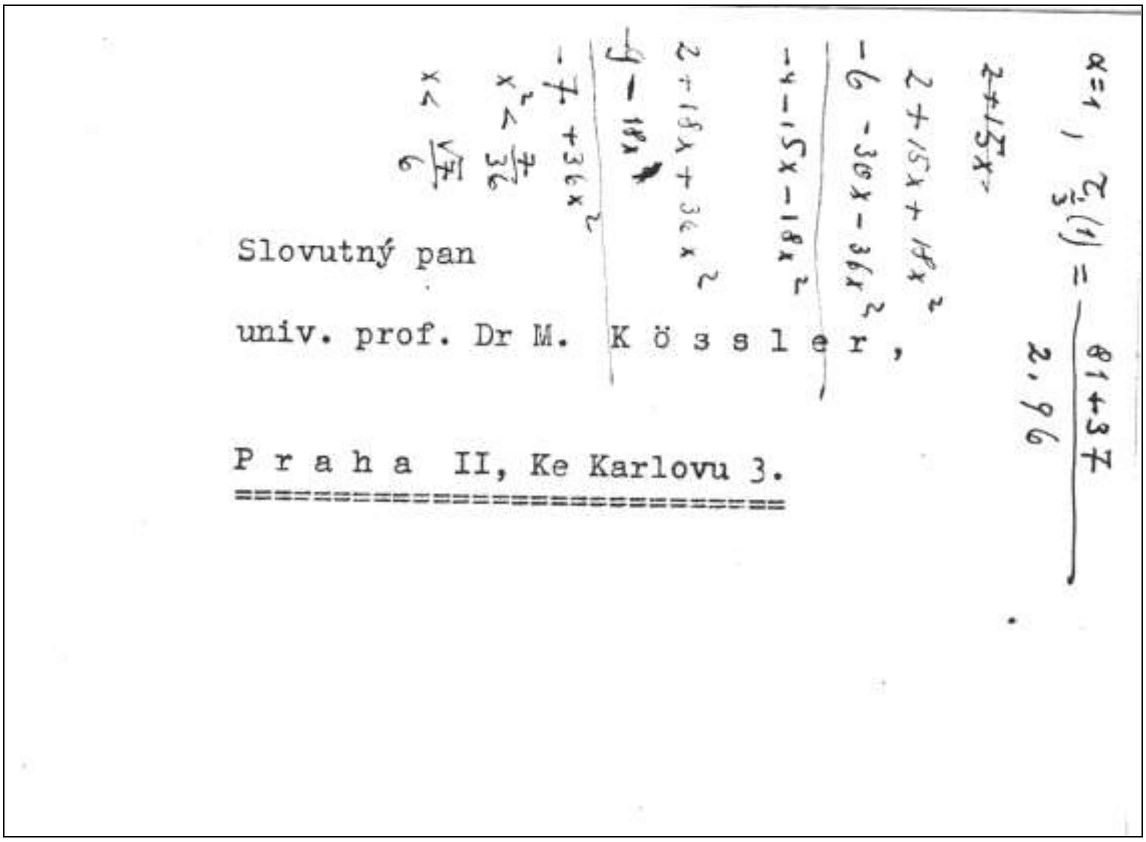
Obr. č. 12 - Diplom Ivo Kösslera, kde je Miloš Kössler podepsán jako promotor



V. P. d. 22. XII. 50.

Pan RNDr. Jiří K. jest podle mého mínění nadaný matematik schopný samostatné práce jak v teorii tak v aplikacích matematiky na vědy technické. Prokázal to jednak ve své disertační práci o Farey-ových zlomcích tak i při jiných příležitostech během svých [illegible] studií na přírod. fak. K. U. Vzhledem k tomu doporučuji, aby jeho žádost o udělení vědecké aspirantury byla příznivě vyřízena.

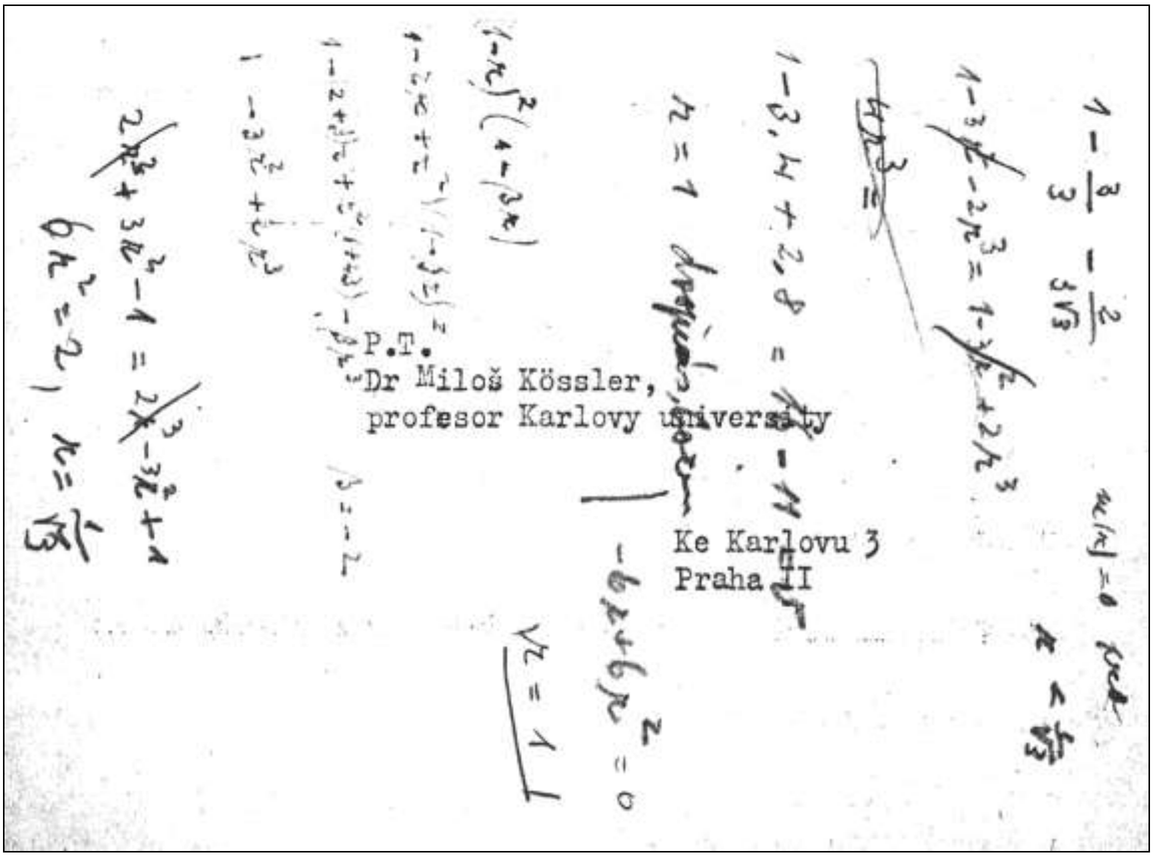
Obr. č. 13 – Koncept posudku k vědecké aspirantuře vlastnoručně psaný M. Kösslerem (1950)



Slovutný pan

univ. prof. Dr M. K ö s s l e r ,

P r a h a II, Ke Karlovu 3.



P.T.
Dr Miloš Kössler,
profesor Karlovy university

Ke Karlovu 3
Praha II

Obr. č. 14 – Pro své poznámky Kössler využil každé místo

Obr. č. 15 – Miloš Kössler dumající a sportující v údolí Bílého Labe

Obr. č. 16 – Miloš Kössler s dcerou Martou

Obr. č. 17 – Častým námětem Kösslerových snímků byl jeho automobil

Obr. č. 18 – Kösslerovy snímky z cest

Obr. č. 19 – Ukázky Kösslerových uměleckých fotografií

1.

7. listopadu 1942. Pokračování k deníku č. II.

Cituji první deník indexem I a druhý indexem II při straně. N. př. str. 59^{II} značí str. 59 v deníku II.

Protože čísla $\Theta_1(n), \Theta_2(n), \Theta_3(n), \dots$ jsou zobecněné Moeb. faktory se zápornými indexy, totiž $\Theta_2(n) = \mu_{-2}(n)$, $\Theta_3(n) = \mu_{-3}$ běží o vztahy mezi těmito faktory (viz. 90^{I}.)

$$\Theta_1(n) = 1 = \mu_{-1}(n), \quad \Theta_0(1) = 1, \quad \Theta_0(n) = 0 \quad n \geq 2.$$

Podle str $91.^{I}$ platí rekurrentní formule

$$\mu_{-\nu_1-\nu_2}(n) = \sum_{d/n} \mu_{-\nu_1}(d)\, \mu_{-\nu_2}\left(\frac{n}{d}\right) \quad \text{a speciálně}$$

$$\mu_{-\nu-1}(n) = \sum_{d/n} \mu_{-\nu}(d) . 1 \quad \text{čili} \quad \Theta_{\nu+1}(n) = \sum_{d/n} \Theta_{\nu}(d) \quad \dots (1,0)$$

z toho summací

$$\sum_{n=1}^{N} \Theta_{\nu+1}(n) = \sum_{n=1}^{N} \Theta_{\nu}(n)\left[\frac{N}{n}\right] . \quad \dots\dots\dots (1,1)$$

Zde vzniká velké množství zajímavých otázek, ve kterých se musíme nějak orientovati. Spočítat to bude jistě zcela nepřehledné. Jest podle dřívějšího

$$\Theta_{\nu_1+\nu_2}(n) = \sum_{d/n} \Theta_{\nu_1}(d)\, \Theta_{\nu_2}\left(\frac{n}{d}\right) . \quad \text{Tedy n. př.}$$

Sečtěme-li podle $n = 1, 2, \dots N$

$$\Theta_4(n) = \sum_{d/n} \Theta_2(d)\, \Theta_2\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_1^N \Theta_4(n) = \Theta_2(2)\left\{\Theta_2(1) + \Theta_2(2) + \Theta_2(3) + \dots + \Theta_2\left[\frac{N}{2}\right]\right\} + \Theta_3(3)\left\{\Theta_2(1) + \Theta_2(2) + \dots + \Theta_2\left[\frac{N}{3}\right]\right\}$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{N} \Theta_2(k) \cdot \sum_{\nu=1}^{[N/k]} \Theta_2(\nu) = \sum_{k=1}^{N} \Theta_2(k) \sum_{\nu=1}^{[N/k]} \Theta_2(\nu) + 1 - \sum_1^N \Theta_2 \quad \dots (1,2)$$

autotransformace (str $201.^{I}$)

To jest zřejmé, pokud $n > 1$, dále $\mu_{\nu-1}(1) = 1$

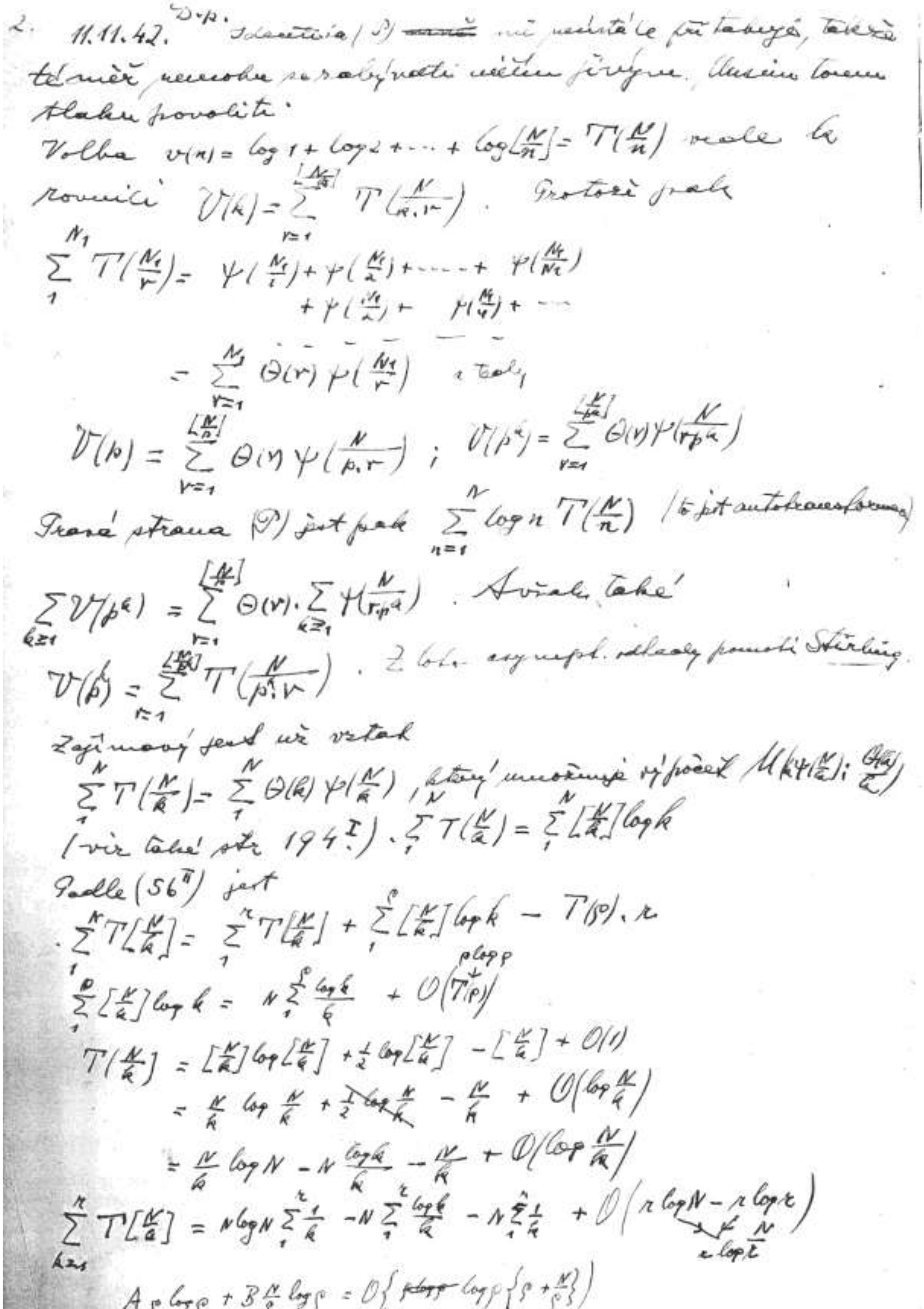
Relace (1,0) platí ověřen i pro záporná ν, pokud $n > 1$,

Tedy n. př. $\mu_1(n) = \mu(n) = \sum_{d/n} \mu_2(n)$; následkem toho

$$\sum_1^N \mu(n) = \sum_1^N \mu_2(n)\left[\frac{N}{n}\right] \quad \text{a obecně}$$

$$\sum_1^N \mu_\nu(n) = \sum_1^N \mu_{\nu+1}(n)\left[\frac{N}{n}\right] \quad \dots\dots (1,3)$$

Obr. č. 20a – Úryvek z deníku č. III – poznámky k práci [K26], str. 1



2. 11.11.42. D.p. Identita (P) ~~...~~ mi neustále při taluzích, takže téměř nemohu se zabývati něčím jiným. Musím tomu tlaku povoliti.

Volba $v(n) = \log 1 + \log 2 + \dots + \log\left[\frac{N}{n}\right] = T\left(\frac{N}{n}\right)$ vede k rovnici $V(k) = \sum_{r=1}^{[N/k]} T\left(\frac{N}{k\cdot r}\right)$. Protože pak

$$\sum_{1}^{N_1} T\left(\frac{N_1}{r}\right) = \psi\left(\frac{N_1}{1}\right) + \psi\left(\frac{N_1}{2}\right) + \dots + \psi\left(\frac{N_1}{N_1}\right) + \psi\left(\frac{N_1}{2}\right) + \psi\left(\frac{N_1}{4}\right) + \dots$$

$$= \sum_{r=1}^{N_1} \Theta(r)\, \psi\left(\frac{N_1}{r}\right)$$ a tedy

$$V(p) = \sum_{r=1}^{[N/p]} \Theta(r)\, \psi\left(\frac{N}{p\cdot r}\right) ; \quad V(p^a) = \sum_{r=1}^{[N/p^a]} \Theta(r)\, \psi\left(\frac{N}{r p^a}\right)$$

Pravá strana (P) jest pak $\sum_{n=1}^{N} \log n\, T\left(\frac{N}{n}\right)$ (to jest autotransformace)

$$\sum_{k\geq 1} V(p^k) = \sum_{r=1}^{[N/p]} \Theta(r) \cdot \sum_{k\geq 1} \psi\left(\frac{N}{r p^k}\right)$$. Avšak také

$$V(p) = \sum_{r=1}^{[N/p]} T\left(\frac{N}{p\cdot r}\right)$$. Z toho asympt. odhady pomocí Stirling.

Zajímavý jest už vztah

$$\sum_{1}^{N} T\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{1}^{N} \Theta(k)\, \psi\left(\frac{N}{k}\right)$$, který umožňuje výpočet $M\left(k\psi\left(\frac{N}{k}\right); \frac{\Theta(k)}{k}\right)$

(viz také str. 194^{I}). $\sum_{1}^{N} T\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{1}^{N} \left[\frac{N}{k}\right] \log k$

Podle (56^{II}) jest

$$\sum_{1}^{N} T\left[\frac{N}{k}\right] = \sum_{1}^{r} T\left[\frac{N}{k}\right] + \sum_{1}^{\rho} \left[\frac{N}{k}\right] \log k - T(\rho)\cdot r$$

$$\sum_{1}^{\rho} \left[\frac{N}{k}\right] \log k = N \sum_{1}^{\rho} \frac{\log k}{k} + O\left(\overset{\rho \log \rho}{T(\rho)}\right)$$

$$T\left(\frac{N}{k}\right) = \left[\frac{N}{k}\right] \log\left[\frac{N}{k}\right] + \frac{1}{2} \log\left[\frac{N}{k}\right] - \left[\frac{N}{k}\right] + O(1)$$

$$= \frac{N}{k} \log \frac{N}{k} + \cancel{\frac{1}{2} \log \frac{N}{k}} - \frac{N}{k} + O\left(\log \frac{N}{k}\right)$$

$$= \frac{N}{k} \log N - N \frac{\log k}{k} - \frac{N}{k} + O\left(\log \frac{N}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{r} T\left[\frac{N}{k}\right] = N \log N \sum_{1}^{r} \frac{1}{k} - N \sum_{1}^{r} \frac{\log k}{k} - N \sum_{1}^{r} \frac{1}{k} + O\left(r \log N - r \log r\right)$$ $r \log \frac{N}{r}$

$$A \rho \log \rho + B \frac{N}{\rho} \log \rho = O\left\{ \cancel{\rho \log \rho} \log \rho \left\{ \rho + \frac{N}{\rho} \right\} \right)$$

Obr. č. 20b – Úryvek z deníku č. III – poznámky k práci [K26], str. 2

účelná volba ρ jest tedy

$$\frac{1}{\rho}\left\{\rho + \frac{N}{\rho}\right\} + \log\rho\left(1-\frac{N}{\rho^2}\right) = 0 \qquad \rho^2 \sim N \qquad \rho = [\sqrt{N}] = r$$

Tedy

$$\sum_1^N T\left[\frac{N}{k}\right] = N\log N \sum_1^{\rho} \frac{1}{k} - N\sum_1^{\rho} \frac{1}{k} + O(\sqrt{N}\,.\log N)$$
$$-\rho(\rho\log\rho - \rho)$$
$$= (N\log N - N)\left(\frac{1}{2}\log N + C\right) - \frac{1}{2}N\log N + N + O(\sqrt{N}\log N)$$

Jest ovšem zřejmo, že dalším sčítáním dostaneme

$$\sum_1^N T\left[\frac{N}{k}\right] + \sum_1^{\left[\frac{N}{2}\right]} T\left[\frac{N}{2k}\right] + \sum_1^{\left[\frac{N}{3}\right]} T\left[\frac{N}{3k}\right] + \dots = \sum_1^N \Theta_3(k)\,\psi\left(\frac{N}{k}\right)$$

$$\sum_1^N \Theta_2(n)\,T\left[\frac{N}{n}\right] = \sum_1^N \Theta_3(k)\,\psi\left(\frac{N}{k}\right)$$ a obecně

$$\sum_1^N \Theta_r(n)\,T\left[\frac{N}{n}\right] = \sum_1^N \Theta_{r+1}(k)\,\psi\left(\frac{N}{k}\right)$$

To bude zřejmě platiti i pro záporné r. Např. $r=-1$

$$\sum_1^N \Theta_{-1}(n)\,T\left[\frac{N}{n}\right] = \underline{\sum_1^N \mu(n)\,T\left(\frac{N}{n}\right)} = \sum_1^N \Theta_0(k)\,\psi\left(\frac{N}{k}\right) = \underline{\psi(N)}$$

Mohu tak tvořiti rozmanité lineární kombinace funkcí

$\sum_{k=1}^N a_k\,\psi\left(\frac{N}{k}\right)$. Tak např.

$$\alpha_1\left(\psi\left(\frac{N}{1}\right) + \psi\left(\frac{N}{2}\right) + \dots + \psi\left(\frac{N}{n}\right)\right) = \alpha_1 T\left(\frac{N}{1}\right)$$
$$\alpha_2\left(\qquad \psi\left(\frac{N}{2}\right) + \psi\left(\frac{N}{4}\right) + \dots\right) = \alpha_2 T\left(\frac{N}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k\,T\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{k=1}^N \psi\left(\frac{N}{k}\right)\cdot\sum_{d|k}\alpha_d$$ Např. $\alpha_k = k$

$$\sum_{k=1}^N S(k)\,\psi\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_1^N k\,T\left(\frac{N}{k}\right)$$. Zde $S(k)$ = součet dělitelů čísla k

Volba $\alpha_k = \log k$ dává $\sum_{d|k}\log d = \frac{1}{2}\theta(k)\log k$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \theta(k)\log k\,\psi\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_1^N \log k\,T\left(\frac{N}{k}\right)$$ (To jest výklad prvního vzorce na str. 2.)

To umožňuje výpočet $M\left(k\psi\left(\frac{N}{a}\right);\ \frac{\theta(k)\log k}{k}\right)$.

volba $\alpha_k = -\mu(k)\log k$, $-\sum_{d|k}\mu(d)\log d = 0, \log p$

$$+\sum \log p\cdot\psi\left(\frac{N}{pk}\right) = -\sum \mu(k)\log k\,T\left(\frac{N}{k}\right)$$

Obr. č. 20c – Úryvek z deníku č. III – poznámky k práci [K26], str. 3

4. $\sum_1^N \log k\, T\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_1^r \log k\, T\left[\frac{N}{k}\right] + \sum_1^\rho \log k\, T\left(\frac{N}{k}\right) - T(r)\cdot T(\rho)$

při tom jest $r = \left[\frac{N}{\rho+1}\right]$ a ρ libovolné. Je-li na př. $N=\rho(\rho+1)$

jest $\underline{r=\rho}$.

$$\sum_1^N \log k\, T\left[\frac{N}{k}\right] = 2\sum_1^\rho \log k\, T\left(\frac{N}{k}\right) - T^2(\rho) \quad \dots$$

Nežli půjdeme dále vypočtu vztahy mezi r a ρ při různých tvarech čísla $\underline{N}$.

1.) Budiž $\rho(\rho+1) \le N < (\rho+1)^2$. Pak $\rho \le \frac{N}{\rho+1} < \rho+1$ a tedy $\underline{r=\rho}$. Při tom jest patrně $\rho < \sqrt{N} < \rho+1$ a tedy

$$\rho = [\sqrt{N}].$$

2.) Budiž $\rho^2 \le N < \rho(\rho+1)$, $\frac{\rho^2}{\rho+1} \le \frac{N}{\rho+1} < \rho$

$\rho - 1 + \frac{1}{\rho+1} \le \frac{N}{\rho+1} < \rho$, $r = \rho-1$

v tomto případě jest $\left(f(n) = g(1)+g(2)+\dots+g(n)\right)$

$$\sum_1^N g(k)\sum_{\nu=1}^{[N/k]} g(\nu) = \sum_1^{\rho-1} g(k)\cdot f\left[\frac{N}{k}\right] + \sum_1^\rho g(k) f\left[\frac{N}{k}\right] - f(\rho)\cdot f(\rho-1)$$

$$= 2\sum_1^{\rho} g(k) f\left[\frac{N}{k}\right] - g(\rho) f\left[\frac{N}{\rho}\right] - f^2(\rho) + g(\rho) f(\rho)$$

$\rho \le \frac{N}{\rho} < \rho+1$, $\left[\frac{N}{\rho}\right] = \rho$

$$\sum_1^N g(k)\sum_1^{[N/k]} g(\nu) = 2\sum_1^\rho g(k) f\left[\frac{N}{k}\right] - f^2(\rho)$$

Při tom jest $\rho \le \sqrt{N} < \sqrt{\rho(\rho+1)} < \rho+1$ a tedy opět $\rho = [\sqrt{N}]$.

Jestliže tedy volíme $\rho = [\sqrt{N}]$, jest při autotransformaci

$$\sum_1^N g(k)\sum_1^{[N/k]} g(\nu) = 2\sum_1^\rho g(k)\sum_1^{[N/k]} g(\nu) - \left(\sum_1^\rho g(\nu)\right)^2$$

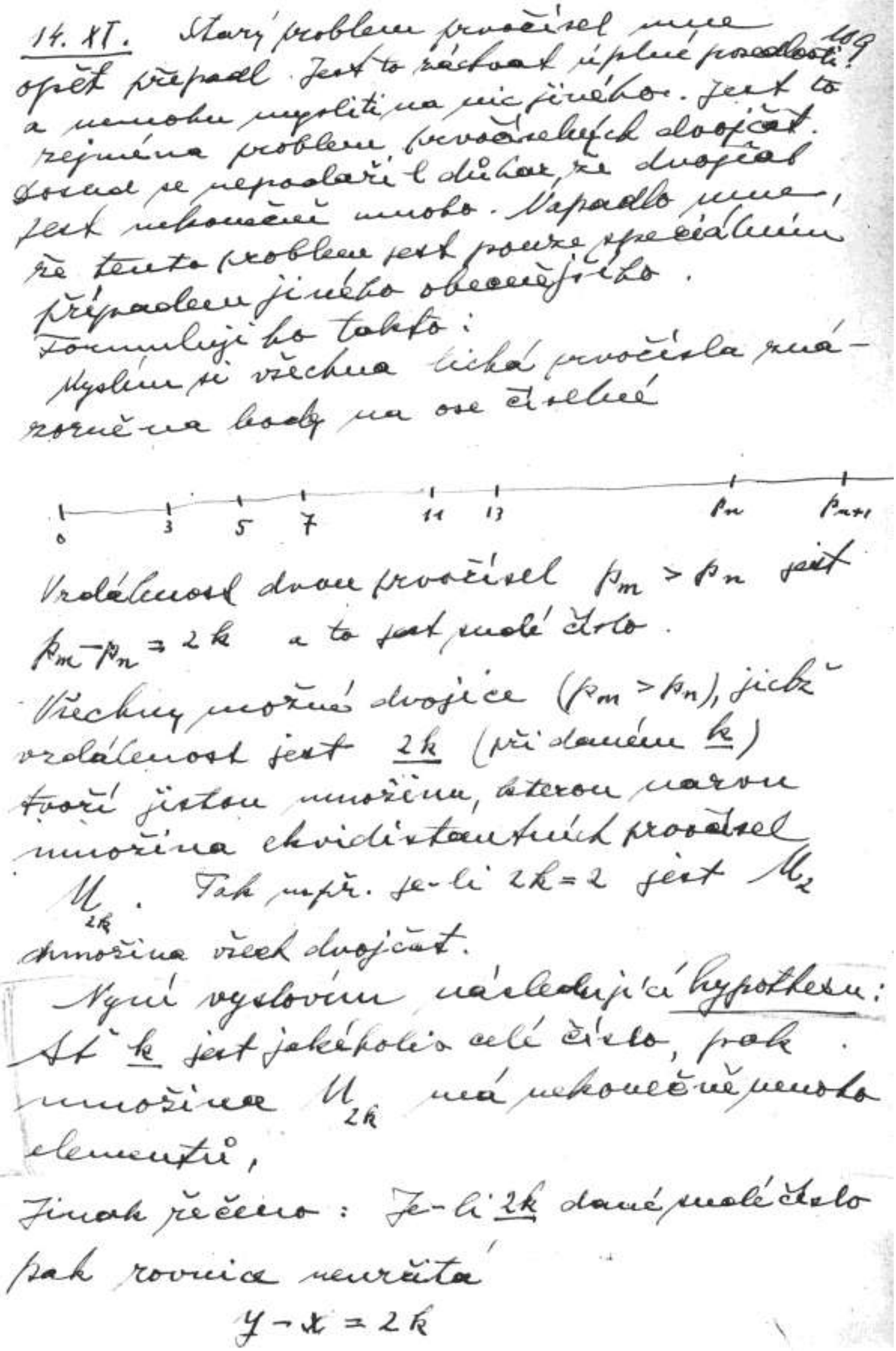
Nyní tedy mohu počítati $\sum_1^N \log k\, T\left(\frac{N}{k}\right)$.

Jest $\log k\, T\left(\frac{N}{k}\right) = \log k\left\{\left(\left[\frac{N}{k}\right]+\frac12\right)\log\left[\frac{N}{k}\right] - \left[\frac{N}{k}\right] + O(1)\right\}$

$$= \log k\left\{\frac{N}{k}\log\frac{N}{k} - \frac{N}{k} + O\log\frac{N}{k}\right\}$$

$$= N\log N\frac{\log k}{k} - N\frac{\log^2 k}{k} - N\frac{\log k}{k} + O\{\log N\log k - \log^2 k\}$$

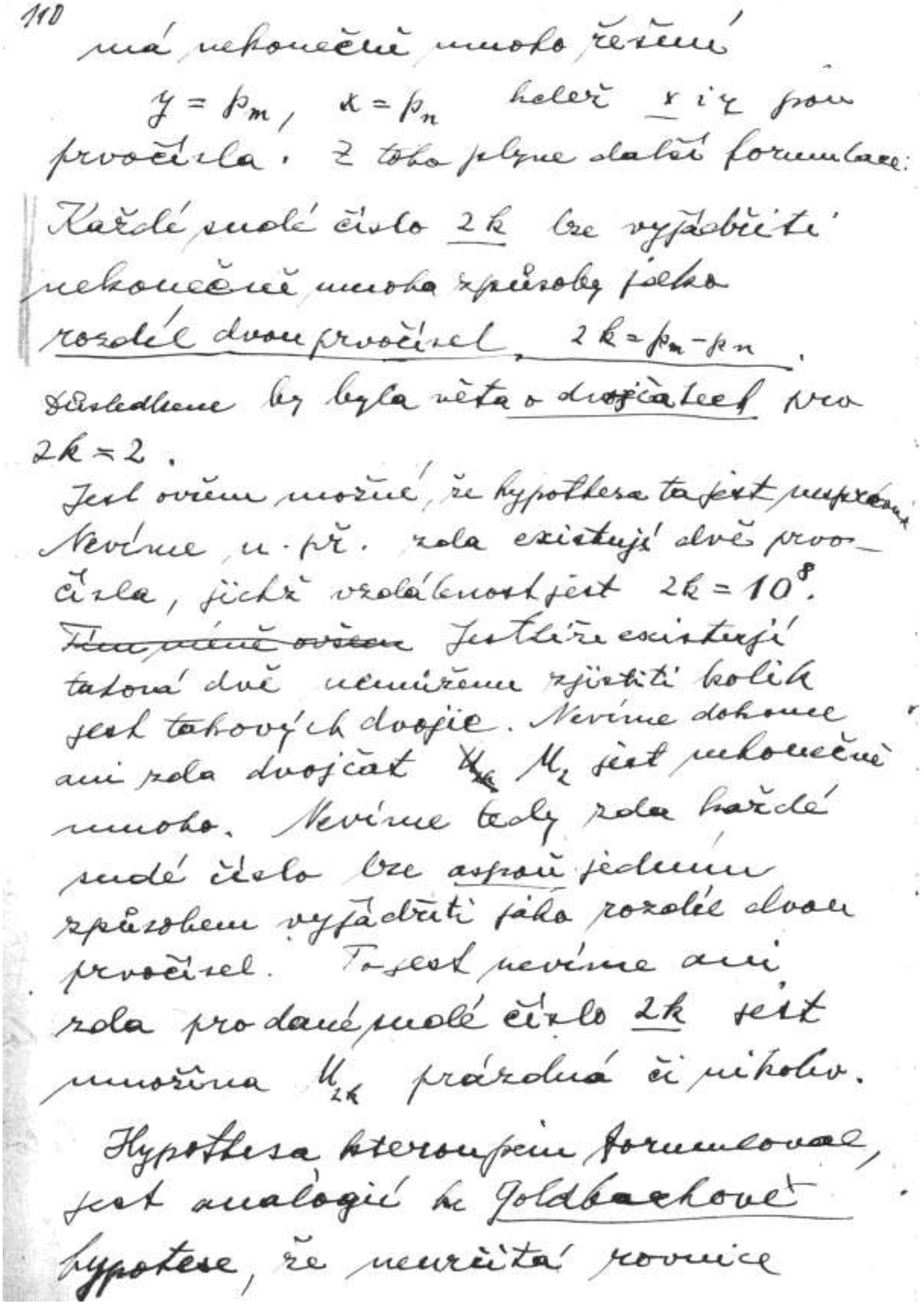
Obr. č. 20d – Úryvek z deníku č. III – poznámky k práci [K26], str. 4


14. XI. Starý problém prvočísel mne 109
opět přepadl. Jest to záchvat úplné posedlosti!
a nemohu myslit na nic jiného. Jest to
zejména problém prvočíselných dvojčat.
Dosud se nepodařil důkaz, že dvojčat
jest nekonečně mnoho. Napadlo mne,
že tento problém jest pouze speciálním
případem jiného obecnějšího.
Formuluji ho takto:
Myslím si všechna lichá prvočísla zná-
zorně na body na ose číselné

0 3 5 7 11 13 p_n p_{n+1}

Vzdálenost dvou prvočísel $p_m > p_n$ jest
$p_m - p_n = 2k$ a to jest sudé číslo.
Všechny možné dvojice ($p_m > p_n$), jichž
vzdálenost jest $2k$ (při daném k)
tvoří jistou množinu, kterou nazvu
množina ekvidistantních prvočísel
M_{2k}. Tak např. je-li $2k = 2$ jest M_2
množina všech dvojčat.
Nyní vyslovím následující hypothesu:
Ať k jest jakékoliv celé číslo, pak
množina M_{2k} má nekonečně mnoho
elementů.
Jinak řečeno: Je-li $2k$ dané sudé číslo
pak rovnice neurčitá
$y - x = 2k$

Obr. č. 21a – Úryvek z deníku č. XVIII – problém prvočíselných dvojčat, str. 109


110

má nekonečně mnoho řešení
$y = p_m$, $x = p_n$ kde x i y jsou
prvočísla. Z toho plyne další formulace:
Každé sudé číslo $2k$ lze vyjádřiti
nekonečně mnoha způsoby jako
rozdíl dvou prvočísel, $2k = p_m - p_n$.
Důsledkem by byla věta o dvojčatech pro
$2k = 2$.
Jest ovšem možné, že hypothesa ta jest nesprávná.
Nevíme např. zda existují dvě prvo-
čísla, jichž vzdálenost jest $2k = 10^8$.
~~Tím méně ovšem~~ Jestliže existují
taková dvě nemůžeme zjistiti kolik
jest takových dvojic. Nevíme dokonce
ani zda dvojčat M_2 jest nekonečně
mnoho. Nevíme tedy zda každé
sudé číslo lze aspoň jedním
způsobem vyjádřiti jako rozdíl dvou
prvočísel. To jest nevíme ani
zda pro dané sudé číslo $2k$ jest
množina M_{2k} prázdná či nikoliv.
Hypothesa kterou jsem formuloval,
jest analogií ke Goldbachově
hypotese, že neurčitá rovnice

Obr. č. 21b– Úryvek z deníku č. XVIII – problém prvočíselných dvojčat, str. 110

111

$x + y = 2k$ jest pro každé
dané $\underline{2k}$ řešitelna dvěma prvo-
čísly $x = p_n$, $y = p_m$.
Jestliže jest Gold. hypoth. správná, pak
ovšem takových řešení $p_n + p_m = 2k$
existuje pro dané $\underline{2k}$ pouze konečný
počet.
Podle hypothesy, kterou jsem vyslovil shora,
má míti rovnice

$$p_m - p_n = 2k$$

při daném $\underline{k}$ nekonečně mnoho prvo-
číselných řešení (p_m, p_n).

15.XI. Nemám ovšem pojetí o tom jak by
hypotesu bylo možno dokázati nebo
vyvrátiti. Pamatuji se, že jsem se zabýval
Goldbach. domněnkou už dříve asi v
deníku č. ~~XIV~~, který jsem někomu
půjčil a nemám ho po ruce. Musím
tedy počíti znovu od začátku.
Východiskem může býti nějaká
vhodná vytvořující funkce. Tak n. př.

Jest to deník XV (str. 9 dole)

$$F(\varphi) = \left(e^{3i\varphi} + e^{5i\varphi} + e^{7i\varphi} + \dots + e^{p_m i\varphi} + e^{p_n i\varphi}\right)\left(e^{-3i\varphi} + e^{-5i\varphi} + \dots + e^{-p_n i\varphi}\right)$$

kde v exponentech jsou lichá prvočísla až po p_n.
Provedu-li násobení dostanu zřejmě trigon.
kosinový polynom $(p_n = N)$

$$F(\varphi) = \pi(N) + 2\pi_2(N)\cos 2\varphi + 2\pi_4(N)\cos 4\varphi + \dots \qquad [I]$$
$$+ 2\pi_{2k}(N)\cos 2k\varphi + \dots + 2\pi_{(N-3)}(N)\cos(N-3)\varphi$$

Obr. č. 21c – Úryvek z deníku č. XVIII – problém prvočíselných dvojčat, str. 111

112 Zde značí $\pi_{2k}(N)$ počet těch prvočíselných dvojic $p_{m_1} > p_{m_2}$, jichž distance jest $p_{m_1} - p_{m_2} = 2k$ a při tom $p_{m_1} \le N \mp p_n$.

Tak n. př. $\pi_2(N)$ jest počet prvočíselných dvojčat menších než p_n. Dále $\pi(N)$ jest počet lichých prvočísel $\le N$.

Vhodnou volbou φ dostanu lineární relace mezi čísly $\pi_{2k}(N)$. Při tom jest nutno φ tak voliti, abych $F(\varphi)$ dovedl vypočítati přesně.

Tak n. př. pro $\varphi = 0$ dostanu

$$F(0) = \pi^2(N) = \pi(N) + 2 \sum_{2k=2}^{2k=N-3} \pi_{2k}(N) \qquad (II)$$

Totéž pro $\varphi = \pi$.

Položím-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dostanu

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(e^{\frac{3i\pi}{2}} + e^{\frac{5i\pi}{2}} + e^{\frac{7i\pi}{2}} + \dots + e^{\frac{p_{m_1} i\pi}{2}} + e^{\frac{p_n i\pi}{2}}\right)\left(e^{-\frac{3\pi i}{2}} + \dots + e^{-\frac{p_n \pi i}{2}}\right)$$

Je-li $p_m \equiv 3 \mod(4)$ bude $e^{\frac{p_m \pi i}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i$

Je-li $p_m \equiv 1 \mod(4)$ bude $e^{\frac{p_m \pi i}{2}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = +i$

Označím-li tedy $\pi^{(1)}(N)$ počet prvočísel $\le N$ shodných s 1 (mod 4) a $\pi^{(3)}(N)$ shodných s 3 (mod 4) bude

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\left(\pi^{(1)}(N) - \pi^{(3)}(N)\right)^2 = \qquad (III)$$

$$\pi(N) + 2\{\pi_4(N) + \pi_8(N) + \pi_{12}(N) + \dots\} - 2\left(\pi_2(N) + \pi_6(N) + \pi_{10}(N) + \dots\right)$$

Obr. č. 21d – Úryvek z deníku č. XVIII – problém prvočíselných dvojčat, str. 112