Miloš Kössler

O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru, Část II

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 26 (1916), No. 54, 38 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501279

O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru.

(Část druhá.)

Napsal

MILOŠ KÖSSLER.

(Předloženo dne 11. listopadu 1916.)

V prvé části tohoto pojednání [1]) zabýval jsem se vyhledáváním rozvojů platných pro funkce analytické uvnitř nebo vně různých křivek speciálních, hlavně pak racionálných a odůvodnil jsem i obecnější větu, vztahující se k regulárním křivkám.

Obsah druhé části tvoří úvahy zcela obecné, založené na přesné definici ohraničující křivky. Hlavní výsledky shrnuty jsou ve větách I. až VI. a v důsledcích I. až III. připojených k větě poslední.

Zvláště vytýkám *obecnou rozvojovou větu* I. Podkladem jejím jest obecné zobrazení okolí křivky na okolí dané jednotkové kružnice, které nemusí býti ani vzájemně jednoznačné ani všude konformní. Takové zobrazení vyplývá na př. z každé parametrické rovnice dané křivky. Užijeme-li tohoto zobrazení v Cauchy-ově integrálu, dospějeme ke *čtyřem* rozvojům I. věty. Mezi nimi dva se vztahují k vnitřku a dva k vnějšku křivky. Existuje tedy vzájemná souvislost mezi vnitřním a vnějším problémem rozvojovým.

Podobného postupu použil poprvé G. F a b e r ve dvou pojednáních „O polynomických rozvojích" uveřejněných v *Mathem. Ann.* 1903, p. 389 a 1907 p. 116. Uvažuje však jen o problému *vnitřním* a to pro zcela speciální případ zobrazující funkce jak jest to blíže vyloženo v odd. II., § 2 našeho pojednání. Ve větě VI. a v důsledcích k ní připojených objevují se *nullové rozvoje polynomické* v zcela novém světle, čehož příčina spočívá právě v tom, že uvažujeme současně o problému vnitřním i vnějším.

---

[1]) Rozpravy Č. A. II. tř., roč. XXIV., čís. 41.

Věty IV. a V. jednají o rozšíření oboru konvergence odvozených řad; mají snad význam pro theorii analytického pokračování. Věc ta bude vyžadovati hlubšího propracování.

V celém předloženém pojednání máme na mysli jen obory jednoduše souvislé. Jednoduchým obratem, na který jsem upozornil již v prvé části p. 33, dají se všechny výsledky přenésti na obory mnohonásobně souvislé; z toho důvodu se jimi zde vůbec nezabývám.

I. **Obecný rozvoj.**

§ 1. **Definice hranic a odvození rozvojů.**

Rovina komplexní proměnné z budiž rozdělena uzavřenou anebo do nekonečna sahající křivkou C na dva jednoduše souvislé obory K_1 a K_2. Aspoň jeden z těchto oborů obsahuje pak bod nekonečný. Písmenou k_ν budeme označovati každý konečný a uzavřený obor, který leží celý v oboru K_ν a jehož hranice se nikde nedotýkají hranic oboru K_ν.

Křivku C definujme následujícím způsobem.

Nechť má jednoznačná funkce

$$z = g(\tau), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

analytická v celém mezikruží

$$1 > r \leqq |\tau| \leqq R > 1$$

a také v okolí každého bodu na jeho hranici[1]) následující vlastnosti.

1. Probíhá-li τ body jednotkové kružnice, to jest, je-li

$$\tau = e^{i\varphi}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

nechť probíhá z ve své rovině buď jeden nebo postupně několik regulárních oblouků Jordanových, které ve svém úhrnu utvoří křivku C. Při tom mohou se části anebo i celé oblouky úplně pokrývati, takže dvěma anebo i více bodům na jednotkové kružnici v rovině τ může odpovídati *jediný* bod křivky C. Body, v nichž spolu hraničí jednotlivé oblouky Jordanovy, rozdělí celou křivku C na několik *kusů.*

2. Oběhne-li τ jednotkovou kružnici ve směru kladném, nechť oběhne z k-tý kus křivky C n_k-kráte ve směru kladném vzhledem k oboru K_1 a (n_k-1)-nou ve směru záporném. Integrace podél všech oblouků Jordanových jest potom ekvivalentní s *jednoduchou* integrací podél celé křivky C v kladném směru.

Jest patrno, že počet oblouků Jordanových bude od jedné různý

[1]) Z toho vyplývá, že R a r musí býti zvoleno menší respektive větší než příslušné poloměry konvergence pro Laurentovu řadu $g(\tau)$.

jen tenkráte, když aspoň pro jeden bod kružnice jednotkové τ_1 bude splněna rovnice [1])

$$g'(\tau_1) = 0$$

V takovém bodě budou pak hraničiti dva oblouky, o nichž předpokládáme dále, že každý má tam svou tangentu. Kdyby totiž bylo všude na jednotkové kružnici

$$|g'(\tau)| > 0,$$

představovala by rovnice (1) podle definice křivek Jordanových jediný oblouk regularní křivky Jordanovy.

Tato definice křivky C rovnicí (1) jest velmi všeobecná. Tak na př. každá regulární křivka má takových rovnic neomezený počet (viz II., § 1). Rovněž všechny speciální křivky, které jsme zkoumali v prvé části tohoto pojednání — tak na př. všechny křivky racionální — jsou zahrnuty v definici právě uvedené.

Opírajíce se o Cauchyův integrál dokážeme nyní následující všeobecnou větu rozvojovou.

Věta I. Nechť značí γ jednotkovou kružnici v rovině τ a $h(\tau)$ libovolnou funkci, která jest od nully různou a analytickou v okolí každého bodu na kružnici γ.

Integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(\tau) \cdot g'(\tau) \cdot \tau^{-(k+1)}}{g(\tau) - z}\, d\tau = b_k(z)$$

definuje funkci $b_k(z)$ analytickou pro všechna z ležící v oboru K_1 hranice vyjímaje.

Týž integrál definuje jinou funkci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(\tau)\, g'(\tau) \cdot \tau^{-(k+1)}}{g(\tau) - z}\, d\tau = c_k(z)$$

analytickou pro všechna z v oboru K_2 hranice vyjímaje.

1. Každá funkce $F_1(z)$ analytická v celém oboru K_1 [2]) i v okolí každého bodu na křivce C dává vznik dvěma rozvojům

$$\left.\begin{aligned} \text{I.}\quad F_1(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, b_k(z), \\ \text{II.}\quad 0 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, c_k(z), \\ A_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_1[g(\tau)]\, \tau^k\, d\tau}{h(\tau)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

[1]) Z toho vyplývá, že zobrazení dané rovnicí

$$z = g(\tau)$$

nemusí býti všude konformní a vzájemně jednoznačné.

[2]) Obsahuje-li K_1 bod nekonečný, musí býti

$$\lim_{|z| \to \infty} z \cdot F_1(z) = \text{konečné konstantě.}$$

Rozvoj I. jest absolutně a stejnoměrně konvergentní v každém oboru k_1; rozvoj II. jest absolutně a stejnoměrně konvergentní v každém oboru k_2.

2. Každá funkce $F_2(z)$ analytická v celém oboru K_2 i v okolí každého bodu na křivce C dává vznik rozvojům

$$\left.\begin{aligned} &\text{III.}\quad F_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k\, c_k(z), \\ &\text{IV.}\quad 0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k\, b_k(z), \\ &B_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_2[g(\tau)]\,\tau^k\, d\tau}{h(\tau)}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (2a)$$

Rozvoj III. jest absolutně a stejnoměrně konvergentním v každém oboru k_2, rozvoj IV. v každém oboru k_1.

Funkce $b_k(z)$ a $c_k(z)$, podle nichž jsou rozvoje provedeny, nezávisí na tvaru funkce $F_1(z)$ po případě $F_2(z)$; na těchto funkcích jsou závislé jedině koeficienty A_k a B_k.

Důkaz. Představme si nejprve křivku C v konečnu a uzavřenou; vnitřek její pokládejme za obor K_1.

Podle Cauchyovy věty integrální jest pak

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_1(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_1[g(\tau)]\,h(\tau)\,g'(\tau)\,d\tau}{h(\tau)\,.\,[g(\tau)-z]} \quad \ldots . (3)$$

Funkce $g(\tau)$ jest analytická a tedy spojitá v okolí jednotkové kružnice. Z toho plyne, že rovnice

$$z = g(\tau)$$

zobrazuje blízké okolí této kružnice na blízké okolí křivky C v rovině z.[1]) Mysleme si na př. v rovině τ úzké mezikruží δ se středem v počátku, které jest tak položeno, že celá jednotková kružnice γ v něm probíhá. Zobrazíme-li toto mezikruží pomocí funkce $g(\tau)$ na rovinu z, obdržíme patrně v této rovině jistý obor d, který jest tak položen, že celá křivka C v něm probíhá.

Úžíme-li nyní stále mezikruží δ tak, že jeho hranice se z *obou* stran blíží jednotkové kružnici γ, bude se patrně úžiti také obor d. V limitě splynou obě hranice mezikruží δ s kružnicí γ a tedy hranice oboru d s křivkou C.

Vytkněme si nyní uvnitř křivky C libovolný obor k_1. Podle předešlého můžeme vždy zvoliti mezikruží δ tak úzké, že obraz jeho v rovině z — to jest obor d — nedotkne se nikde hranic oboru k_1, takže pro všechny body mezikruží δ a pro všechna z v oboru k_1 bude splněna nerovnina

[1]) Zobrazení to nemusí býti ovšem ani vzájemně jednoznačné ani všude konformní.

$$| g(\tau) - z | > 0.$$

Značí-li dále $h(\tau)$ libovolnou funkci analytickou v oboru ϑ, definuje zlomek

$$\frac{h(\tau)\, g'(\tau)}{g(\tau) - z}$$

analytickou funkci proměnné τ v celém mezikruží ϑ. Jest tedy možno utvořiti Laurentův rozvoj platný v oboru ϑ a pro všechna z oboru k_1

$$\left.\begin{aligned} \frac{h(\tau)\, g'(\tau)}{g(\tau) - z} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z) \,.\, \tau^k, \\ b_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\tau)\, g'(\tau)\, \tau^{-(k+1)}}{g(\tau) - z}\, d\tau. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Rozvoj tento jest jak známo stejnoměrně konvergentní pro všechna τ ležící na jednotkové kružnici γ, pokud ovšem z pokládáme za konstantu. Z toho vyplývá, že smíme jej dosaditi do integrálu (3) a integrovati člen za členem. Je-li dále jinak libovolná funkce $h(\tau)$ tak volena, že se od nully různí pro všechna τ na kružnici γ, obdržíme rozvoj (2) I. Rozvoj ten platí pro každé z našeho oboru k_1. Obor tento můžeme si mysliti omezený jistou křivkou, která se z vnitřku libovolně přibližuje ke křivce C. Jest tedy rozvoj (2) I. platný pro všechna z oboru K_1 hranice vyjímaje.

Podle své definice integrálem (4) jest funkce $b_k(z)$ analytickou v oboru K_1. Integrál onen můžeme totiž schematisovati na tvar

$$b_k(z) = \int_\gamma S(\tau, z)\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5_1)$$

Funkce $S(\tau, z)$ jest spojitou funkcí obou neodvisle proměnných τ a z, zůstává-li ovšem τ stále na kružnici γ a z stále v oboru k_1. Mimo to jest patrně $S(\tau, z)$ pro pevné τ na kružnici γ, považováno jsouc za funkci jenom proměnné z, funkcí analytickou v oboru k_1. Z toho vyplývá, že $b_k(z)$ jest funkcí analytickou v oboru k_1.[1]) Z rovnic (4) jest také zřetelně viděti, že rozvojové funkce $b_k(z)$ jsou závislé jedině na tvaru křivky C a na volbě funkce $h(\tau)$, nikterak však na tvaru funkce $F_1(z)$.

Téměř doslovně stejně utváří se důkaz rozvoje (2) II. Zvolíme-li totiž bod z v oboru K_2, to jest vně křivky C, obdržíme místo rovnice (3)

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F_1[g(\tau)]\, h(\tau)\, g'(\tau)}{g(\tau) \,.\, [g(\tau) - z]}\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3\,a)$$

Další důkaz zůstává zcela nezměněn, jenom že místo rozvoje (4) nastoupí

---

[1]) Viz na př. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I. B. II. Aufl. p. 307, 7. Satz.

$$\left.\begin{aligned} \frac{h(\tau)\, g'(\tau)}{g(\tau) - z} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z) \,.\, \tau^k, \\ c_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\tau)\, g'(\tau) \,.\, \tau^{-(k+1)}\, d\tau}{g(\tau) - z}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4\,a)$$

a místo oboru k_1 všude obor k_2 pro veličinu z.

Na první pohled se zdá, že funkce $b_k(z)$ a $c_k(z)$ jsou identické, protože jsou definovány zdánlivě totožným způsobem. Tomu však není tak, protože ve vzorci (4) značí z bod v oboru K_1 a ve vzorci (4a) bod v oboru K_2. Abychom si onu různost objasnili, zvolme co nejjednodušeji

$$h(\tau) \equiv 1, \quad g(\tau) \equiv \tau.$$

Křivka C definovaná zde rovnicí (1)

$$z = \tau$$

jest patrně jednotková kružnice roviny z. Obor K_1 jest její vnitřek, obor K_2 její vnějšek.

Funkce $b_k(z)$ jsou definovány rozvojem (4)

$$\frac{1}{\tau - z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z)\, \tau^k, \quad |z| < |\tau|,$$

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau} + \frac{z}{\tau^2} + \frac{z^2}{\tau^3} + \ldots,$$

a tedy

$$b_0(z) = 0, \quad b_k(z) = 0.$$

$$b_{-k}(z) = z^{k-1}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Funkce $c_k(z)$ definuje rozvoj

$$\frac{1}{\tau - z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z)\, \tau_k, \quad |z| > |\tau|$$

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \frac{\tau^2}{z^3} - \ldots.$$

Tedy

$$c_0(z) = -\frac{1}{z}, \quad c_k(z) = -\frac{1}{z^{k+1}},$$

$$c_{-k}(z) = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Tím jest zřetelně ukázána různost funkcí $b_k(z)$ a $c_k(z)$.

Dosud jsme předpokládali, že křivka C jest uzavřená a celá v konečnu. Budiž nyní neuzavřená, to jest sahající na obou svých koncích do nekonečna. V tom případě myslíme si obor K_1 omezený jednak křivkou C a za druhé kruhovým obloukem k o velmi velikém poloměru se středem na př. v počátku. Tak si sjednáme obor uzavřený. Funkce $F_1(z)$ nechť splňuje v tom případě podmínku

$$\lim_{|z|=\infty} z \,.\, F_1(z) = \text{konečné konstantě.}$$

Pak nastoupí místo rovnice (3)

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F_1(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_k \frac{F_1(t)\,dt}{t-z} \,.$$

První integrál vztahuje se k příslušné části křivky C a druhý integrál k oblouku k. Při nekonečně rostoucím poloměru tohoto oblouku vypadne druhý integrál, protože konverguje k nulle. První integrál vztahuje se pak k celé křivce C.

Zůstávají tedy v platnosti rovnice (3) a také rozvoje (2) I. II.

Obdobně si počínáme, je-li sice křivka C uzavřená a celá v konečnu, avšak hledáme-li rozvoje (2a) pro funkci $F_2(z)$ analytickou v oboru K_2, to jest všude vně křivky C. Kruhový oblouk k nahradíme zde celou velmi velikou kružnicí. S rostoucím poloměrem této kružnice konverguje Cauchyův integrál podél ní k nulle, takže místo rovnice (3) zde obdržíme

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F_2(t)\,dt}{t-z} \,.$$

Záporné znaménko při integrálu odůvodněno jest takto. Chceme-li obíhati obor K_2 ve směru kladném, musíme po křivce C postupovati v *opačném* směru, nežli se to dálo při kladném oběhu oboru K_1. Tato změna znaménková platí ovšem pro obor K_2 i tenkráte, když křivka C jest neuzavřená.

K úplnému důkazu věty I. zbývá ještě dokázati absolutní a stejnoměrnou konvergenci rozvojů (2) a (2a).

Mysleme si v oboru K_1 uzavřený menší obor k_1; hranice obou oborů nechť se nikde nedotýkají. Při odvozování rozvoje (4) jsme dokázali, že dá se vždy sestrojiti v rovině τ mezikruží ϑ tak, že jest v něm zlomek

$$\frac{h(\tau)\,g'(\tau)}{g(\tau) - z}$$

analytickou funkcí proměnné τ, ať jest z zvoleno kdekoliv v oboru k_1 Jedna z kružnic, jimiž jest omezeno mezikruží ϑ, má patrně poloměr větší než 1 a druhá menší než 1.

Zvolme si nyní nové mezikruží ϑ_1, které jest položeno *úplně* i se svými hranicemi v oboru ϑ. Definujme je takto

$$1 < \lambda \geqq |\tau| \geqq \mu < 1.$$

V tomto mezikruží i v každém bodě jeho hranic konverguje jak známo *absolutně* Laurentova řada (4), jestliže z jest *pevně* zvoleno v oboru k_1. Podle Cauchyova kriteria konvergence jsou tedy od určitého konečného a kladného n počínaje splněny nerovniny

$$\sqrt[n]{|b_n(z)|} \cdot |\tau| \leqq 1,$$

$$\sqrt[n]{|b_{-n}(z)|} \cdot \frac{1}{|\tau|} \leqq 1.$$

Spojíme-li tento výsledek s předcházející nerovninou pro (τ), obdržíme

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{|b_n(z)|} &\leqq \frac{1}{\lambda} < 1; \\ \sqrt[n]{|b_{-n}(z)|} &\leqq \mu < 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Ono konečné a kladné číslo n, od něhož počínaje splněny jsou tyto nerovniny, jest patrně závislé na volbě bodu z v oboru k_1. Proběhne-li z postupně všechny body oboru k_1, prodělá ono n různé změny; bude však vždy *konečné*. Označíme-li tedy písmenou N konečnou a kladnou horní mez těchto hodnot, budou nerovniny (5) splněny pro každé n splňující nerovninu

$$n \geqq N$$

a pro každé z oboru k_1. Čísla λ, μ a N jsou pak na poloze bodu z nezávislá.

Podobně uvažujme o funkci

$$\frac{\tau \cdot F_1[g(\tau)]}{h(\tau)},$$

která jest analytickou v okolí každého bodu na jednotkové kružnici v rovině τ. Dá se tedy zvoliti vždy mezikruží

$$1 < l \geqq |\tau| \geqq m < 1,$$

takže v něm i na jeho hranicích konverguje absolutně Laurentův rozvoj

$$\frac{\tau \cdot F_1[g(\tau)]}{h(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \tau^k,$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F_1[g(\tau)]\, \tau^{-k}\, d\tau}{h(\tau)}.$$

Zcela obdobně jako při nerovninách (5) dokážeme zde

$$\sqrt[n]{|E_n|} \leqq \frac{1}{l} < 1$$

$$\sqrt[n]{|E_{-n}|} \leqq m < 1.$$

Nerovniny tyto platí opět od jistého konečného a kladného $n = N_1$ počínaje. Porovnáme-li integrální výraz pro E_k s rozvojem (2), vidíme že

$$E_{-k} = A_k.$$

Jest tedy

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{|A_{-n}|} &\leqq \frac{1}{l} < 1 \\ \sqrt[n]{|A_n|} &\leqq m < 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(5a)}$$

Kombinací nerovnin těchto s (5) získáme

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{|A_n b_n(z)|} &< m < 1 \\ \sqrt[n]{|A_{-n} b_{-n}(z)|} &< \frac{1}{l} < 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(6)}$$

To platí pro všechna z oboru k_1 a pro všechna n, která jsou větší nežli jest větší z čísel N a N_1. Při tom jsou l, m, N a N_1 konstanty na z nezávislé.

Porovnáme-li tedy členy absolutně konvergentní řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} m^k$$

se stejnolehlými členy řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k b_k(z),$$

vidíme, že od jistého konečného n počínaje jest stále

$$|A_n b_n(z)| < m^n.$$

Podobně vyplývá z porovnání řad

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} A_k b_k(z), \quad \sum_{k=-1}^{-\infty} l^k,$$

že od jistého konečného n jest stále

$$|A_{-n} b_{-n}(z)| < \frac{1}{l^n}.$$

Tím jsou splněny podmínky Weierstrassova kriteria pro stejnoměrnou a absolutní konvergenci [1]) řady

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k b_k(z)$$

v oboru k_1.

[1]) Viz na př. Osgood l. c. p. 96.

Úvahou téměř doslovně stejnou dokáže se absolutní a stejnoměrná konvergence ostatních řad ve vzorcích (2) a (2a). Věta I. jest tím v celém rozsahu dokázána.

Funkce $b_k(z)$ a $c_k(z)$, podle nichž rozvoje jsou provedeny, definovali jsme ve větě I. křivkovými integrály. V mnohých případech podaří se nám nalézti *jiným* způsobem [1]) Laurentův rozvoj pro funkci

$$\frac{h(\tau)\, g'(\tau)}{g(\tau) - z}$$

platný v celém okolí jednotkové kružnice γ; pak můžeme ovšem definovati ony funkce jako příslušné koeficienty řad (4) nebo (4a). Tento postup užili jsme také v prvé části tohoto pojednání při rozvojích platných pro křivky racionálné.

Věta první dá se následovně obrátiti:

Věta II. Splňuje-li řada jinak libovolných konstant A_k nerovniny

$$\sqrt[k]{|A_k|} \leqq 1, \qquad \sqrt[k]{|A_{-k}|} \leqq 1$$

pro všechny kladné indexy k počínaje od jistého konečného $k = N$, konvergují absolutně a stejnoměrně řady

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, b_k(z), \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, c_k(z),$$

a to první v každém oboru k_1 a druhá v každém oboru k_2. První řada definuje funkci analytickou v oboru K_1, druhá funkci analytickou v oboru K_2 vždy hranice vyjímaje.

Podmínky tyto jsou postačující pro stejnoměrnou a absolutní konvergenci řad, nejsou však nutné.

Důkaz. Podle nerovnin předpokládaných pro konstanty A_k a podle nerovnin (5) jest totiž

$$|A_n\, b_n(z)| \leqq \frac{1}{\lambda^n},$$

$$|A_{-n}\, b_{-n}(z)| \leqq \mu^n,$$

od jistého konečného a kladného n počínaje nezávisle na poloze bodu z v oboru k_1. Při tom jest λ a μ jednak nezávislé na z a za druhé

$$\lambda > 1, \quad \mu < 1.$$

Z toho vyplývá podle Weierstrassova kriteria stejnoměrná konvergence řady

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, b_k(z)$$

[1]) Viz dále oddíl II. § 2.

v oboru k_1, která tedy definuje v oboru tom funkci analytickou. Protože pak obor k_1 jest libovolně zvolen v oboru K_1 tak, že hranice se nedotýkají, jest funkce řadou definovaná analytickou v celém oboru K_1 hranice vyjímaje.

Zcela obdobně se dokáže věta ona pro řadu podle funkcí $c_k(z)$.

Podmínky pro konstanty A_k uvedené ve větě II. nejsou *nutné.* Stačilo by patrně místo nich zvoliti

$$\sqrt[k]{|A_k|} < \lambda', \quad \sqrt[k]{|A_{-k}|} < \frac{1}{\mu'}, \quad \lambda' < \lambda, \quad \mu' > \mu.$$

V tomto případě konverguje absolutně a stejnoměrně řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k b_k(z)$$

v onom *určitém* oboru k_1, k němuž přísluší konstanty λ, μ, nemusí však již konvergovati v celém oboru K_1.

Ukážeme na specielním příkladě, jak jednotlivé Jordanovy oblouky, jimiž křivka C jest definována, mohou se překrývati.

Definujme křivku C v rovině z rovnicí

$$x + i y = \frac{1 - i\, tg \frac{\varphi}{2}\left(\cos\varphi + \frac{1}{4}\right)}{1 + i\, tg \frac{\varphi}{2}\left(\cos\varphi + \frac{1}{4}\right)}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \quad \ldots\ldots (7a)$$

Klademe-li zde

$$e^{i\varphi} = \tau,$$

obdržíme po jednoduché redukci

$$x + i y = z = \frac{2 + 3\tau + 5\tau^2 - 2\tau^3}{-2 + 5\tau + 3\tau^2 + 2\tau^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

To jest zobrazující funkce typu (1), neboť jednotkové kružnici v rovině τ odpovídá křivka C v rovině z. Tato křivka se skládá patrně ze samých kruhových oblouků o poloměru rovném jedné se středem v počátku roviny z, neboť

$$| x + i y | = 1,$$

pokud $\tau = e^{i\varphi}$.

Jednotlivé Jordanovy oblouky křivky C stanovíme takto. Rovnice

$$g'(\tau) = 0$$

má zde čtyři kořeny

$$\tau_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad \tau_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

První dva leží na jednotkové kružnici γ. Těm odpovídají styčné body Jordanových oblouků v rovině z. Patrně jest

$$\tau_1 = e^{\frac{\pi i}{8}} \qquad \tau_2 = e^{\frac{5\pi i}{8}}.$$

Parametrické rovnice jednotlivých oblouků vzniknou separací reálné a imaginárné části v (7*a*). Necháme-li v těchto rovnicích φ probíhati intervall

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3},$$

shledáme, že z opisuje ve své rovině část jednotkové kružnice stále týmž směrem. Přejdeme-li dále k intervallu

$$\frac{\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \pi - arccos\frac{1}{4},$$

uvidíme, že směr pohybu se obrátí. Podrobným rozborem ještě dalších tří intervallů

$$\left(\pi - arccos\frac{1}{4}, \quad \pi + arccos\frac{1}{4}\right), \quad \left(\pi + arccos\frac{1}{4}, \quad \frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{3}, \quad 2\pi\right)$$

shledáme toto. První a poslední z našich pěti intervallů definují dohromady *jediný* regularní oblouk jednotkové kružnice v rovině z; druhý a předposlední intervall definují *týž* oblouk v rovině z probíhaný v *opačném* směru; třetí intervall pak definuje celý oblouk jednotkové kružnice v rovině z probíhaný ve směru kladném. Integrace podél všech těchto oblouků s ohledem na jich směr jest tedy ekvivalentní s jednoduchou kladnou integrací podél jednotkové kružnice v rovině z.

Pomocí zobrazující funkce (7) obdrželi bychom tedy rozvoje (2) a (2*a*) pro funkce $F_1(z)$ analytické uvnitř jednotkové kružnice v rovině z po případě pro funkce $F_2(z)$ analytické vně této kružnice. K skutečnému provedení rozvojů užije se methoda podrobně vyložená v prvé části tohoto pojednání na str. 3—8 při křivkách racionálných; proto od něho zde upouštíme.

§ 2. **Rozvoje hlavní a rozvoje nullové.**

Rozvineme-li funkci $f(z)$ analytickou v okolí bodu $z = a$ v řadu Taylorovu

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k$$

a platí-li současně nějakým jiným způsobem získaný rozvoj

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k (z - a)^k,$$

víme, že musí býti pro všechny indexy k

$$D_k = C_k.$$

Zcela jinak jest tomu při rozvojích (2) a (2*a*). Funkce $F_1(z)$ analytická v oboru K_1 má vždy rozvoj tvaru (2) I., který nazveme ***hlavním rozvojem*** příslušným k funkci $g(\tau)$ a $h(\tau)$. Jeho koeficienty A_k jsou jednoznačně určeny křivkovými integrály ve vzorci (2).

Zvolme si nyní libovolnou funkci $F_2(z)$ a sestrojme z ní rozvoj (2*a*) IV., konvergentní v oboru K_1. Sečteme-li tento rozvoj násobený libovolnou konstantou $\varkappa$ s hlavním rozvojem funkce $F_1(z)$, obdržíme

$$F_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k + \varkappa B_k)\, b_k(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Rozvoj tento nazveme *vedlejším rozvojem* funkce $F_1(z)$. Jest patrno, že rozvoj hlavní i vedlejší jsou provedeny podle *týchž* funkcí $b_k(z)$, že se však liší svými koeficienty. Vedlejších rozvojů jest patrně neomezený počet.

Analogicky bychom obdrželi pro pevně zvolenou funkci $F_2(z)$ rozvoj *hlavní* tvaru (2*a*) III. a rozvoje *vedlejší*

$$F_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (B_k + \lambda A_k)\, c_k(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8a)$$

Vidíme tedy, že platí věta následující.

Věta III. Kdykoliv se dá sestrojiti aspoň jeden rozvoj pro nullu

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k\, b_k(z),$$

který *nemá* všechny členy identicky rovné nulle, pak má každá funkce $F_1(z)$ vedle hlavního rozvoje tvaru (2) I. neomezený počet rozvojů vedlejších typu (8).

Táž věta platí mutatis mutandis pro každou funkci $F_2(z)$.

Existence rozvojů vedlejších jest tedy závislá na jsoucnosti aspoň jednoho nullového rozvoje tvaru (2a) IV. Takový rozvoj není *vždy* možným; v určitých případech jsou totiž všechny příslušné koeficienty B_k nebo zase rozvojové funkce $b_k(z)$ identicky rovny nulle, takže rozvoj nullový se redukuje na pouhou identitu $0 = 0$. Případ ten nastává na př. při Taylorově řadě anebo obecněji při určitých polynomických rozvojích Faberových (viz dále II., § 3).

Všimněme si zde dvou zvláštních případů, v nichž nulové rozvoje dají se vskutku odvoditi.

1. První takový případ nastává, když *žádná* z funkcí $b_k(z)$ pro kladný nebo záporný index k není identicky rovna nulle. K libovolné funkci $F_2(z)$ přísluší pak vždy nullový rozvoj (2*a*) IV.

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k\, b_k(z),$$

který není pouhou identitou $0 = 0$.

Koeficienty tohoto rozvoje jsou totiž podle své definice křivkovým integrálem identické s koeficienty Laurentova rozvoje

$$\frac{\tau \, . \, F_2 [g(\tau)]}{h(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{-k} \, \tau^k \, .$$

Při pevně zvolené funkci $h(\tau)$ dá se pak vždy zvoliti $F_2(z)$ tak, že rozvoj Laurentův má aspoň několik koeficientů od nully různých.

2. Druhý speciální případ, v němž dá se nullový rozvoj přímo z funkcí $b_k(z)$ odvoditi jest následující.

Volme libovolnou funkci $h(\tau) = 1$. Budiž dále a pevný bod v oboru K_1. Funkce

$$F_2(z) = \frac{1}{z - a}$$

jest pak analytickou v celém oboru K_2 i na jeho hranici. Příslušný nullový rozvoj (2a) IV. má koeficienty B_k určeny vzorcem

$$B_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F_2 [g(\tau)] \, \tau^k \, d\tau \, .$$

Tytéž koeficienty, nehledě k znaménku, má patrně Laurentova řada

$$\tau \, . \, F_2 [g(\tau)] = \frac{\tau}{g(\tau) - a} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{-k} \, \tau^k \, .$$

Derivací této stejnoměrně kouvergentní řady podle τ obdržíme

$$\frac{1}{g(\tau) - a} - \frac{\tau \, g'(\tau)}{[g(\tau) - a]^2} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \, B_{-k} \, \tau^{k-1} \, .$$

Znásobíme-li obě strany číslem τ obdržíme z posledních dvou rovnic

$$\frac{\tau^2 \, g'(\tau)}{[g(\tau) - a]^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k - 1) \, B_{-k} \, \tau^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Pro levou stranu této rovnice dovedeme si však sjednati Laurentův rozvoj ještě jiným způsobem.

Funkce $b_k(z)$ jsou totiž definovány rozvojem

$$\frac{g'(\tau)}{g(\tau) - z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z) \, \tau^k \, .$$

Jednoduchá úvaha opřená o nerovniny (5) ukazuje, že tato řada jest stejnoměrně konvergentní v každém oboru k_1, pokud τ jest pevně zvoleno v mezikruží ϑ_1. Smíme tedy řadu tuto derivovati podle z. Tak obdržíme:

$$\frac{g'(\tau)}{(g(\tau)-z)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k'(z) \, . \, \tau^k,$$

čili

$$\frac{\tau^2 g'(\tau)}{[g(\tau)-a]^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k'(a) \, . \, \tau^{k+2}$$

Porovnáme-li nyní tuto rovnici s rozvojem (9), získáme pro koeficienty vztah

$$B_k = -\frac{1}{k+1} b'_{-(k+2)}(a), \quad k \neq -1.$$

Pro $k = -1$ musíme počítati přímo

$$B_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\tau}{\tau [g(\tau) - a]} \, .$$

Hledaný nullový rozpoj jest tedy

$$O = -B_{-1} \, . \, b_{-1}(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{k+1} b'_{-(k+2)}(a) \, . \, b_k(z), \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Čárka u součtového znaménka značí, že má se vypustiti index $k = -1$. Rozvoj (10) existuje vždy, jsou-li derivace aspoň jednoho páru funkcí

$$b_k(z), \quad b_{-(k+2)}(z)$$

od nully různé.

Odvodili jsme řadu vět týkajících se rozvojů typu (2) a (2*a*). Další otázka, která by vyžadovala řešení jest následující.

Za jakých okolností konverguje řada (2) *i mimo obor* K_1 *anebo aspoň na jeho hranicích?*

Při pokusech o rozbor této otázky narážíme na překážky těžko překonatelné, jichž příčina spočívá v překrývání se oblouků jednotlivých křivek Jordanových. Proto omezíme se v dalším na speciální případ, v němž toto překrývání odpadá.

II. Rozvoje příslušné k zobrazení vzájemně jednoznačnému a konformnímu.

§ 1. Definice křivky a příslušné rozvoje.

Budiž křivka C dána jediným jednoduchým hladkým a uzavřeným obloukem Jordanovým. Vnitřek její budiž obor K_1 a vnějšek obor K_2.

Pak jest vždy možno definovati křivku C následujícím způsobem: Nechť rovnice

$$z = g(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

zobrazuje vnitřek a obě hranice mezikruží s v rovině τ

$$1 > r \leqq |\tau| \leqq R > 1$$

vzájemně jednoznačně, spojitě a nehledě k několika bodům na hranicích také konformně na okolí křivky C v rovině z. Při tom nechť odpovídají body jednotkové kružnice γ v rovině τ bodům křivky C v rovině z.

V každém bodě mezikruží s bude

$$g'(\tau) \neq 0$$

vyjímaje ony body hranice, v nichž zobrazení není konformní.

Každé kružnici v rovině τ se středem v počátku a s poloměrem ϱ_k splňujícím nerovninu

$$r \leqq \varrho_k \leqq R$$

odpovídá v rovině z jistá křivka C_k. Poloměr ϱ_k nazveme *parametrem* této křivky. Tak na př. má křivka C parametr 1. Křivky C_k mají následující vlastnosti, které vyplývají z té okolnosti, že zobrazení jest vzájemně jednoznačné, spojité a konformní.

1. Každá křivka C_k jest jediným hladkým a uzavřeným obloukem, který se nikde neprotíná. Navzájem se křivky C_k rovněž neprotínají.

2. Mezné křivky, odpovídající parametrům R, r mohou míti rohy v oněch bodech, v nichž jest

$$g'(\tau) = 0.$$

3. Parametrům menším než jedna odpovídají křivky v jednom oboru na př. K_1 a parametrům větším než jedna křivky v druhém oboru K_2.

Pro každou křivku definovanou prvními dvěma řádky tohoto paragrafu dá se vždy sestrojiti rovnice (11). Pro jednu a touž křivku C jest dokonce možno sestrojiti rovnic takových neomezený počet. To vyplývá z theorie konformního zobrazování takto:

Mysleme si v rovině z vedle křivky C *libovolnou* regulární křivku uzavřenou L, která jest položena celá buď uvnitř nebo vně křivky C. Takto vzniklý prstencový obor v rovině z dá se *vždy* konformně zobraziti na prstenec kruhový v rovině τ, který jest uvnitř omezen jednotkovou kružnicí γ a vně jistou s ní soustřednou kružnicí, jejíž poloměr jest určitým způsobem závislý na křivce L. Při tom odpovídají body jednotkové kružnice γ bodům křivky C a body vnější kružnice bodům křivky L. Příslušná zobrazující funkce má tvar (11). Zvolíme-li podruhé křivku L jiného tvaru, obdržíme pro křivku C *jinou* zobrazující funkci tvaru (11). Má tedy každá křivka C zobrazujících funkcí tvaru (11) neomezený počet.

Mějme nyní na mysli stále jen jednu pevně zvolenou zobrazující funkci tvaru (11).

Protože tato zobrazující funkce jest speciálním případem rovnice (1), podržují věty I., II. a III. svou platnost i pro křivku C. Hleďme nyní odpověděti na otázku vyřčenou na konci předešlého paragrafu.

Především musíme zjistiti, zda-li funkce $b_n(z)$ a $c_n(z)$ mají význam také *mimo* obor K_1 po případě K_2. K vůli zjednodušení předpokládejme nejprve, že libovolná funkce $h(\tau)$ jest analytickou v celém oboru s i na jeho hranicích a že v žádném bodě oboru toho nerovná se nulle.

Mysleme si vedenu křivku C_k příslušnou k parametru ϱ_k

$$R > \varrho_k > r.$$

Vnitřek této uzavřené křivky nazveme oborem $K_1^{(k)}$. Zvolíme-li nyní bod z pevně v oboru tomto a τ omezíme na mezikruží s_k

$$R \geqq |\tau| \geqq \varrho_k,$$

seznáme, že rozdíl

$$g(\tau) - z$$

nemůže se pro žádné takové τ státi roven nulle. Obraz mezikruží s_k padne totiž v rovině z *vně* oboru $K_1^{(k)}$.

Platí tedy rozvoj Laurentův

$$\frac{g'(\tau) \,.\, h(\tau)}{g(\tau) - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z) \,.\, \tau^n$$

v oboru s_k, neboť zlomek na levé straně definuje funkci analytickou v mezikruží s_k. Funkce $b_n(z)$ jest při tom určena křivkovým integrálem

$$b_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa} \frac{g'(\tau) \,.\, h(\tau) \,.\, \tau^{-(n+1)}\, d\tau}{g(\tau) - z};$$

$\varkappa$ značí *libovolnou* kružnici se středem v počátku, která celá probíhá v oboru s_k. Může to býti také mezná kružnice o poloměru ϱ_k nebo R.

Nechť tedy značí $\varkappa$ tuto kružnici o poloměru R a označme k tomuto maximálnímu parametru příslušnou křivku $C_\varkappa$. Integrál hořejší definuje pak podle vzorce (5_1) funkci proměnné z analytickou nejen v oboru $K_1^{(k)}$, ale i v celém oboru $K_1^{(\varkappa)}$ omezeném touto největší křivkou $C_\varkappa$ bez ohledu na to, jak jsme zvolili parametr ϱ_k. Jsou tedy rozvojové funkce $b_n(z)$ příslušné ke křivce C_k definovány také mimo obor $K_1^{(k)}$ to jest v celém větším oboru $K_1^{(\varkappa)}$.

O funkci $h(\tau)$ jsme dosud předpokládali, že jest analytickou a od nully různou v celém oboru s. Jestliže si nyní myslíme co nejobecněji $h(\tau)$ analytické a od nully různé ve všech bodech jiného mezikruží

$$1 < R_1 \geqq |\tau| \geqq r_1 < 1,$$

zůstanou veškeré vývody o funkcích $b_n(z)$ v platnosti s tím rozdílem, že úlohu největšího parametru převezme nyní *menší* z hodnot R a R_1, kdežto úlohu nejmenšího parametru *větší* z hodnot r a r_1. Také mezikruží s bude zde omezeno těmito novými hodnotami. *Všude v dalším* budeme tedy označovati písmeny bez indexu R, r, s tyto pozměněné pojmy. Tak na př. písmenou R *menší* z hodnot R a R_1 a t. d.

Budiž nyní $F_1^{(k)}(z)$ funkce analytická v oboru $K_1^{(k)}$ i v okolí každého bodu na křivce C_k. Funkce tato vyjádří se Cauchyovým integrálem

$$F_1^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{F_1^{(k)}(t)\,dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho_k} \frac{F_1^{(k)}[g(\tau)]}{h(\tau)} \cdot \frac{g'(\tau)\,h(\tau)\,d\tau}{g(\tau) - z}$$

Pravou stranu rozvineme již známým způsobem v řadu

$$F_1^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, b_n(z),$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho_k} \frac{F_1^{(k)}[g(\tau)]\,\tau^n\,d\tau}{h(\tau)}.$$

Podobnou úvahu můžeme provésti o rozvojových funkcích $c_n(z)$, které budou určeny integrálem

$$c_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda} \frac{g_1(\tau)\,h(\tau)\,\tau^{-(n+1)}\,d\tau}{g(\tau) - z}.$$

Místo maximálního parametru R, příslušné křivky $C_\varkappa$ s oborem $K_1^{(\varkappa)}$ nastoupí zde ovšem minimalní parametr r s příslušnou křivkou C_λ a oborem $K_2^{(\lambda)}$. Jinak zůstává vše nezměněno.

Tak dokázali jsme větu následující.

Věta IV. Křivka C_k příslušná k parametru ϱ_k rozděluje rovinu proměnné na z obory $K_1^{(k)}$ a $K_2^{(k)}$.

Každá funkce $F_1^{(k)}(z)$ analytická v oboru $K_1^{(k)}$ i v okolí každého bodu na křivce C_k dává vznik dvěma rozvojům

$$\left.\begin{aligned} \text{I.}\quad F_1^{(k)}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, b_n(z), \\ \text{II.}\quad 0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, c_n(z), \\ A_n &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho_k} \frac{F_1^{(k)}[g(\tau)]\,\tau^n\,d\tau}{h(\tau)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Každá funkce $F_2^{(k)}(z)$ analytická v celém oboru $K_2^{(k)}$ i v okolí každého bodu na křivce C_k dává vznik rovněž dvěma rozvojům

$$\left.\begin{aligned} \text{III.}\quad F_2^{(k)}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\, c_n(z), \\ \text{IV.}\quad 0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\, b_n(z), \\ B_n &= \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho_k} \frac{F_2^{(k)}[g(\tau)]\,\tau^n\,d\tau}{h(\tau)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12a)$$

Funkce $b_n(z)$ a $c_n(z)$, podle nichž jsou rozvoje provedeny zůstávají pro všechny křivky C_k *nezměněny*.

Jinak platí o rozvojích (12) a (12*a*) vše, co jest řečeno ve větě I. o rozvojích (2) a (2*a*) s tou změnou, že místo oborů K_1 a K_2 nastoupí zde obory $K_1^{(k)}$ a $K_2^{(k)}$.

Podstatný rozdíl mezi větou touto a větou I. jest tento:

Ve větě I. byly rozvojové funkce $b_k(z)$ a $c_k(z)$ příslušné k *jediné* křivce C, ve větě IV. přísluší tyto funkce celé *skupině* křivek C_k.

Jasnou odpověď na otázku vyslovenou ku konci předešlého paragrafu podá nám věta následující:

Věta V. 1. Splňuje-li řada jinak libovolných konstant A_n nerovniny

$$\sqrt[n]{|A_n|} < R, \qquad \sqrt[n]{|A_{-n}|} < \frac{1}{\varrho_k}$$

pro všechny kladné indexy n počínaje od jistého konečného $n = N$, konverguje absolutně a stejnoměrně řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n b_n(z)$$

v každém uzavřeném a konečném oboru k_1, který jest úplně obsažen v oboru $K_1^{(k)}$ tak, že hranice obou oborů se nikde nestýkají.

2. Splňuje-li řada jinak libovolných konstant B_n nerovniny

$$\sqrt[n]{|B_n|} < \varrho_k, \qquad \sqrt[n]{|B_{-n}|} < \frac{1}{r}$$

pro všechny kladné indexy n počínaje od konečného $n = N$, konverguje absolutně a stejnoměrně řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n c_n(z)$$

v každém uzavřeném a konečném oboru k_2, který jest úplně obsažen v oboru $K_2^{(k)}$ tak, že hranice obou nikde se nestýkají.

3. Splňuje-li řada konstant D_n nerovniny

$$\sqrt[n]{|D_n|} < \varrho_k, \qquad \sqrt[n]{|D_{-n}|} < \frac{1}{\varrho_k}$$

opět od jistého konečného a kladného n počínaje, konvergují stejnoměrně a absolutně obě řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n b_n(z), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n c_n(z),$$

první v každém oboru k_1 a druhá v každém oboru k_2.

Podmínky pro absolutní a stejnoměrnou konvergenci v této větě uvedené jsou postačující, nejsou však nutné.

Důkaz. Křivka C_k příslušná k parametru ϱ_k tvoří rozhraní oborů $K_1^{(k)}$ a $K_2^{(k)}$. V prvém z těchto oborů zvolme si uzavřený konečný obor k_1, jehož hranice se nikde nestýkají s křivkou C_k. Omezíme-li z na obor k_1, budou rozvojové funkce $b_n(z)$ definovány Laurentovou řadou

$$\frac{g'(\tau) \cdot h(\tau)}{g(\tau) - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z) \cdot \tau^n,$$

která konverguje absolutně v celém mezikruží s_k

$$R \geqq |\tau| \leqq \varrho_k.$$

Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z) \cdot \tau^n$$

konverguje tedy absolutně uvnitř a na obvodu kruhu

$$|\tau| \leqq R.$$

Z toho vyplývá podle Cauchyova kriteria konvergence, že musí býti od jistého konečného $n = N_1$ počínaje splněna nerovnina

$$|\tau| \cdot \sqrt[n]{|b_n(z)|} \leqq 1,$$

a tedy

$$\sqrt[n]{|b_n(z)|} \leqq \frac{1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Řada

$$\sum_{n=-1}^{n=-\infty} b_n(z) \cdot \tau^n$$

konverguje, absolutně pokud

$$|\tau| \geqq \varrho_k.$$

Podle téhož kriteria jest tedy

$$\sqrt[n]{|b_{-n}(z)|} \leqq \varrho_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13a)$$

počínaje od jistého konečného a kladného $n = N_2$.

Čísla N_1 a N_2 mohou býti závislá na poloze bodu z v oboru k_1; při tom však jsou obě ta čísla *konečná*. Dá se tedy nalézti vždy konečná horní hranice všech hodnot, které nabývají postupně čísla N_1 a N_2, když z probíhá postupně všechny body oboru k_1. Tuto horní hranici označme písmenem N_3.

Nerovniny (13) a (13*a*) jsou tedy splněny pro každé

$$n \geqq N_3$$

a pro každé z oboru k_1.

Zkoumejme nyní konvergenci řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \, b_n(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Postačující podmínkou pro absolutní konvergenci řady této jsou podle Cauchyova kriteria nerovniny

$$\sqrt[n]{|A_n b_n(z)|} < 1, \qquad \sqrt[n]{|A_{-n} b_{-n}(z)|} < 1, \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

které musí býti splněny od jistého konečného a kladného $n = N$ počínaje. Toto číslo N můžeme si vždy mysliti větši nežli číslo N_3.

Porovnáme-li nyní nerovniny poslední se vzorci (13) a (13*a*), vidíme, že (15) bude vždy splněno, platí-li od $n = N$ počínaje

$$\sqrt[n]{|A_n|} < R, \qquad \sqrt[n]{|A_{-n}|} < \frac{1}{\varrho_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Z toho vyplývá dále

$$\lim\sup \sqrt[n]{|A_n|} = \lambda \,.\, R, \qquad \lim\sup \sqrt[n]{|A_{-n}|} = \mu \,.\, \frac{1}{\varrho_k},$$

kdež λ, μ jsou čísla kladná a menší než jedna.

Jest tedy patrně opět podle (13) a (13a)[1])

$$|A_n b_n(z)| \leqq \lambda^n, \qquad |A_{-n} b_{-n}(z)| \leqq \mu^n.$$

Řada (14) konverguje tedy nejen absolutně, nýbrž i stejnoměrně v celém oboru k_1.

Obraťme se nyní k řadě postupující podle funkcí $c_n(z)$. V oboru $K_2^{(k)}$ zvolme opět uzavřený a konečný obor k_2, jehož hranice se nikde nedotýkají hranice oboru prvého. Omezíme-li z na obor k_2, budou rozvojové funkce $c_n(z)$ definovány Laurentovou řadou

$$\frac{g'(\tau) \,.\, h(\tau)}{g(\tau) - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z) \,.\, \tau^n,$$

která konverguje absolutně v celém mezikruží

$$r \leqq \tau \leqq \varrho_k.$$

Podobně jako jsme obdrželi (13) a (13a) sestrojíme zde nerovniny

$$\sqrt[n]{|c_n(z)|} \leqq \frac{1}{\varrho_k}, \qquad \sqrt[n]{|c_{-n}(z)|} \leqq r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n c_n(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17a)$$

konverguje jistě absolutně, je-li

$$\sqrt[n]{|B_n c_n(z)|} < 1, \qquad \sqrt[n]{|B_{-n} c_{-n}(z)|} < 1.$$

Spojíme-li nerovniny tyto se (17), obdržíme podmínky

$$\sqrt[n]{|B_n|} < \varrho_k, \qquad \sqrt[n]{|B_{-n}|} < \frac{1}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

[1]) Viz obdobný důkaz při vzorcích (6).

Obdobně jako při (16) vyplývá zde z podmínek (18) absolutní a stejnoměrná konvergence řady (17a) v oboru k_2.

Konečně z nerovnin (16) a (18) jest patrno, že jistě *současně* konvergují řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n b_n(z), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n c_n(z),$$

první v oboru k_1 a druhá v oboru k_2, jsou-li splněny nerovniny

$$\sqrt[n]{|D_n|} < \varrho_k, \qquad \sqrt[n]{|D_{-n}|} < \frac{1}{\varrho_k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

od jistého konečného n počínaje.

Podmínky (16), (18 a (19) jsou, jak jsme dokázali, *postačující* pro stejnoměrnou konvergenci příslušných řad; nejsou však *nutné*, neboť nerovniny (15), z nichž jsme při důkazu vyšli, nejsou nutnými podmínkami pro absolutní konvergenci řady (14).

Tím jest věta V. úplně dokázána.

Z ní vidíme, že obor konvergence řad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n b_n(z), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n c_n(z)$$

určen jest některou z křivek C_k; která z těchto křivek to jest, o tom rozhodují *koeficienty* A_n po případě B_n prostřednictvím nerovnin uvedených ve větě V.

Analogie s řadami potenčními jest patrna. Obor konvergence potenční řady ohraničuje totiž kružnice závislá na jediném parametru, to jest na poloměru konvergence; obor konvergence našich řad určuje křivka C_k závislá rovněž na jediném parametru ϱ_k.

§ 2. **Polynomické rozvoje Faberovy.**

Nejjednodušší tvar, který může nabýti rovnice křivky C vznikne tenkráte, když vztah (11) zobrazuje konformně celý *vnějšek* křivky C v rovině z na celý *vnějšek* jednotkové kružnice v rovině τ anebo celý *vnitřek* křivky C na *vnitřek* jednotkové kružnice. V případech těchto dají se rozvojové funkce $b_n(z)$ a $c_n(z)$ vyjádřiti explicitně bez užití křivkového integrálu.

Přihlédněme nejdříve k prvému případu.

Podle pravidel konformního zobrazování jest zde zobrazující funkce $g(\tau)$ dána tvarem

$$z = \alpha \cdot \tau + P\left(\frac{1}{\tau}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Potenční řada

$$P\left(\frac{1}{\tau}\right) = a_0 + a_1 \tau^{-1} + a_2 \tau^{-2} + \dots$$

konverguje při tom absolutně a stejnoměrně pro

$$|\tau| > 1 - \eta,$$

kdež η jest jisté malé kladné číslo. Nekonečný bod v rovině τ odpovídá nekonečnému bodu v rovině z. Kružnici

$$|\tau| = \varrho_k > 1$$

bude patrně odpovídati křivka C_k větší než křivka C.

Zvolme nejdříve libovolnou funkci $h(\tau) \equiv 1$. Rozvojové funkce $b_n(z)$ jsou zde podle věty IV. stejné pro všechny křivky C_k a jsou určeny Laurentovou řadou

$$\frac{g'(\tau)}{g(\tau) - z} \equiv \frac{\alpha - P'\left(\frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\tau^2}}{\alpha\tau + P\left(\frac{1}{\tau}\right) - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z)\, \tau^n \quad \dots\dots\dots (21)$$

Při odvozování musíme ovšem omeziti z na vnitřek některé z křivek C_k a τ na obvod a vnějšek kružnice o poloměru ϱ_k. V tom případě jest z rovnice (21) patrno, že

$$\lim_{\tau=\infty} \frac{g'(\tau)}{g(\tau) - z} = 0.$$

Má tedy Laurentova řada na pravé straně rovnice (21) jenom členy se *zápornou* mocninou veličiny τ. Z toho vyplývá

$$b_n(z) \equiv 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots\dots (22a)$$

Znásobíme-li nyní rovnici (22) po obou stranách jmenovatelem levé strany a porovnáme-li koeficienty stejných mocnin τ, obdržíme rekurentní formule:

$$\left.\begin{aligned} b_{-1}(z) = 1, \quad \alpha\, b_{-2}(z) = z - a_0, \\ \alpha \,.\, b_{-n}(z) = b_{-n+1}(z) \,.\, (z - a_0) - a_1 b_{-n+2}(z) - a_2 b_{-n+3}(z) - \dots \\ - a_{n-3} \,.\, b_{-2}(z) - (n-1)\, a_{n-2} \end{aligned}\right\} (22)$$

Z vzorců těch jest patrno, že $b_{-n}(z)$ jest polynom $(n-1)$vého stupně veličiny $\frac{z - a_0}{\alpha}$, jehož první člen jest

$$\left(\frac{z - a_0}{\alpha}\right)^{n-1}.$$

Tak jsme si sjednali pro každou funkci $F_1^{(k)}(z)$ analytickou uvnitř a na obvodu křivky C_k rozvoj tvaru (12) I.

$$F_1^{(k)}(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n\, b_n(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Tento polynomický rozvoj jest — jak jednoduchá úvaha ukazuje — identický s rozvojem, který odvolil G. Faber [1]) vycházeje z konformního zobrazení vnějšku křivky C na vnitřek jednotkové kružnice. Z toho vyplývá, že Faberovy polynomické rozvoje jsou zcela specielním případem našich rozvojů (12) a tedy tím spíše rozvojů (2). V druhém citovaném pojednání dokazuje G. Faber existenci jistých rozvojů pro nullu. Odvodíme v dalším všeobecnou větu, která obsahuje nutné a postačující podmínky pro existenci takových rozvojů.[2])

Zvolili jsme libovolnou funkci $h(\tau) \equiv 1$.

Položme co nejobecněji

$$h(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=m} d_n\, \tau^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Zde budiž m konečné nebo nekonečné číslo kladné anebo konečné číslo záporné. Funkce $h(\tau)$ budiž při tom analytickou v oboru

$$\lambda \leqq |\tau| \leqq \varkappa > 1.$$

Příslušné rozvojové funkce označme znakem

$$\beta_n(z).$$

Z rovnice definitorické

$$\frac{h(\tau)\,.\,g'(\tau)}{g(\tau) - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(z)\, \tau^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24a)$$

a z rovnice (21) nalezáme vztah

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(z)\,.\,\tau^n = h(\tau) \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n(z)\, \tau_n.$$

Násobením na pravé straně a porovnáním koeficientů obdržíme pro *konečné m*

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_m(z) \equiv 0; \quad \beta_{m+k}(z) \equiv 0;\\
&\beta_{m-k}(z) = d_m\, b_{-k}(z) + d_{m-1}\, b_{-k+1}(z) + \ldots + d_{m-k+1}\,.\, b_{-1}(z)\\
&(k = 1, 2, 3, \ldots).\\
&\text{Pro nekonečné } m \text{ jest}\\
&\beta_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+k}\,.\, b_{-k}(z)
\end{aligned}\right\} \ldots (25)$$

[1]) M. A. 1903, p. 389, 1907 p. 116.

[2]) Viz dále § 3 tohoto oddílu.

Pro konečné m jest patrně funkce $\beta_n(z)$ polynomem veličiny $\frac{z - a_0}{\alpha}$ stupně $(m - 1 - n)$-tého.

Funkce $F_1^{(k)}(z)$ analytická uvnitř a na obvodě jisté křivky C_k má tedy rozvoj tvaru (12) I.

$$\left.\begin{aligned} F_1^{(k)}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} A_n\,\beta_n(z), \\ A_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_k} \frac{F_1^{(k)}[g(\tau)]\,\tau^n\,d\tau}{h(\tau)}\,. \end{aligned}\right|\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

Parametr ϱ_k jest při tom omezen jednak nerovninou ze vzorce (20).

$$\varrho_k > 1 - \eta$$

a za druhé ovšem také oborem, v němž $h(\tau)$ jest definováno, což vyjádří se nerovninou

$$\lambda \leqq \varrho_k \leqq \varkappa.$$

Kružnice o poloměru ϱ_k nesmí ovšem procházeti nullovým bodem funkce $h(\tau)$, aby A_n neztratilo význam.

Uvažme nyní, co nastane, má-li funkce $h(\tau)$ ve svém oboru jediný nullový bod $\varkappa_1$ omezený nerovninou

$$1 - \eta < |\varkappa_1| < \varkappa.$$

Rovnice (25) a (26) zůstanou patrně v platnosti, pokud $h(\tau)$ omezíme na obor

$$\lambda \leqq |\tau| < |\varkappa_1|$$

a tedy parametr ϱ_k zvolíme tak, že

$$\lambda \leqq \varrho_k < |\varkappa_1|\,.$$

Kdybychom však kladli

$$\varrho_k = |\varkappa_1|\,,$$

nemůžeme vždy podržeti rozvoj (26), protože křivkový integrál, jímž koeficienty A_n jsou definovány, může pro $h(\varkappa_1) = 0$ ztratiti význam.

Avšak funkce $h(\tau)$ jest také definována v oboru

$$|\varkappa_1| < |\tau| \leqq \varkappa$$

a vyhovuje v něm všem podmínkám, které omezují platnost rozvoje (26). Tento rozvoj můžeme tedy utvořiti pro křivku C_k, jejíž parametr ϱ_k zůstává v mezích

$$|\varkappa_1| < \varrho_k \leqq \varkappa.$$

Rozumí se samo sebou, že rozvojové funkce jsou stále definovány vzorci (25), neboť funkce $\beta_n(z)$ nejsou nijak závislé na nullovém bodě funkce $h(\tau)$ nýbrž jedině na konvergenčních poloměrech Laurentovy řady (24).

Všimněme si nyní blíže rozvoje pro nějakou funkci $F_1(z)$ analytickou uvnitř a na obvodě křivky C_2, která přísluší k parametru ϱ_2

$$|\varkappa_1| < \varrho_2 < \varkappa.$$

Tato funkce jest patrně také analytickou všude uvnitř a na obvodě křivky C_1, která přísluší k parametru ϱ_1

$$|\varkappa_1| > \varrho_1 > \lambda,$$

neboť křivka C_1 leží zcela uvnitř křivky C_2.

Pro vnitřek křivky C_2 má tedy funkce $F_1(z)$ rozvoj (26) s koeficienty

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varrho_1} \frac{F_1[g(\tau)]\, \tau^n\, d\tau}{h(\tau)},$$

kdežto pro vnitřek křivky C_1 má táž funkce opět rozvoj (26) s koeficienty

$$A_n' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varrho_2} \frac{F_1[g(\tau)]\, \tau^n\, d\tau}{h(\tau)}.$$

Koeficienty A_n a A_n' se stejným indexem n jsou jistě od sebe různé, protože při prvém má $h(\tau)$ uvnitř integračního oboru nullový bod, čemuž tak není při integrálu druhém.

První rozvoj s koeficienty A_n bude platným uvnitř C_2 a tedy také uvnitř C_1; druhý rozvoj pro touž funkci $F_1(z)$ platí jen uvnitř křivky C_1. Rozdíl obou rozvojů jest tedy konvergentním uvnitř křivky C_1 a představuje tam platný rozvoj nullový

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{m-1} (A_n - A_n')\, \beta_n(z).$$

O nullových rozvojích promluvíme podrobněji v následujícím paragrafu.

Druhý jednoduchý tvar zobrazující funkce (11) dán jest konformním zobrazením *vnitřku* jednotkové kružnice na *vnitřek* křivky C.

Rovnice (11) má pak tvar

$$z = P(\tau); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

potenční řada

$$P(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots,$$

konverguje absolutně a stejnoměrně v kruhu

$$|\tau| < 1 + \eta,$$

kdež η jest jisté malé kladně číslo. Bod $\tau = 0$ leží uvnitř kružnice jednotkové a tedy odpovídá mu v rovině z bod $z = a_0$, ležící *uvnitř* křivky C. Body jednotkové kružnice v rovině τ odpovídají bodům křivky C v rovině z.

Zvolme opět nejdříve $h(\tau) \equiv 1$. Pro rozvojové funkce $c_n(z)$ obdržíme rovnici

$$\frac{P'(\tau)}{P(\tau) - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z)\,\tau^n \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (28)$$

Protože z značí zde bod ležící *vně* křivky C, jest zlomek na levé straně analytickou funkcí veličiny τ uvnitř a na obvodě jednotkové kružnice v rovině τ. Laurentova řada na pravé straně změní se tedy na pouhou řadu Taylorovu. Z toho plyne především

$$c_n(z) \equiv 0, \quad (n = -1, -2, -3, \dots) \dots\dots\dots\dots (29a)$$

Násobíme-li v (28) obě strany jmenovatelem levé strany a porovnáme-li pak koeficienty, shledáme

$$\left.\begin{aligned} c_0(z) &= \frac{a_1}{a_0 - z}; \\ c_n(z)\,.\,(a_0 - z) + c_{n-1}(z)\,.\,a_1 + \dots + c_0(z)\,.\,a_n &= (n+1)\,a_{n+1} \end{aligned}\right\} (29)$$

Z těchto rekurrentních vzorců vysvítá, že $c_n(z)$ jest mnohočlenem veličiny $\frac{a_1}{a_0 - z}$ stupně $(n+1)$-ho, jehož první člen jest

$$-\left(\frac{a_1}{z - a_0}\right)^{n+1}.$$

Podle vzorců (12a) obdržíme tedy pro každou funkci $F_2^{(k)}(z)$ analytickou všude *vně* a na obvodu křivky C_k rozvoj ve tvaru

$$F_2^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\, c_n(z) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (30)$$

Tento polynomický rozvoj pro funkce analytické *vně* křivky C_k tvoří protějšek k Faberovu rozvoji (23).

Zvolme nyní co nejobecněji libovolnou funkci $h(\tau)$ ve tvaru

$$h(\tau) = \sum_{n=-m}^{n=\infty} d_n\,\tau^n;$$

číslo m budiž konečné kladné nebo záporné anebo nekonečné kladné; řada na pravé straně budiž absolutně a stejnoměrně konvergentní v mezikruží

$$1 > \lambda \leqq |\tau| \leqq \varkappa.$$

Místo rozvojových funkcí $c_n(z)$ obdržíme funkce $\gamma_n(z)$ definované vztahem

$$\frac{h(\tau)\,g'(\tau)}{g(\tau) - z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(z)\,.\,\tau^n.$$

Pomocí (28) a (29a) přejde tato rovnice v novou

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(z) \, . \, \tau^n = h(\tau) \, . \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) \, . \, \tau^n .$$

Dosadíme za $h(\tau)$ příslušný rozvoj, roznásobíme a porovnáme koeficienty. Z toho jde pro *konečné* m

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{-m}(z) \equiv 0 ; \quad \gamma_{-m-n}(z) \equiv 0 ; \\ &\gamma_{-m+n}(z) = d_{-m} c_n(z) + d_{-m+1} \, . \, c_{n-1}(z) + \ldots + d_{-m+n} \, . \, c_0(z) ; \\ &(n = 1, 2, \ldots). \\ &\text{Pro nekonečné } m \text{ jest} \\ &\gamma_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n-k} \, . \, c_k(z). \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Při tom jsou funkce $c_n(z)$ definovány formulemi (29).

Pro funkci $F_2^{(k)}(z)$ analytickou všude *vně* a na obvodě křivky C_k dostáváme tedy rozvoj (12*a*) III.

$$\left.\begin{aligned} F_2^{(k)}(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} B_n \gamma_n(z) \\ B_n &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho k} \frac{F_2^{(k)}[g(\tau)] \, \tau^n \, d\tau}{h(\tau)} . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Kružnice o poloměru ϱ_k nesmí při tom procházeti nullovým bodem funkce $h(\tau)$.

Má-li funkce $h(\tau)$ v oboru své definice nullový bod, platí mutatis mutandis úvahy připojené k vzorci (26).

§ 3. Stejnoměrně konvergentní rozvoje podle polynomů $\beta_n(z)$ nebo $\gamma_n(z)$ a rozvoje nullové.

Budiž dána řada libovolných konstant A_n a sestrojen k nim zcela formálně rozvoj

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Otázka konvergence i oboru jejího byla už rozřešena větou V. Připomínám pouze, že jest nutno tam klásti $R = \infty$, $A_n = 0$, $(n = m, m+1, \ldots\ldots)$.

Položme si problem jiný, který pro *nullové* rozvoje má význam fundamentální.

Nechť jsou konstanty rozvoje (33) takové, že rozvoj onen konverguje stejnoměrně a absolutně uvnitř křivky C_k i v okolí každého bodu na této křivce. To můžeme vyložiti také tak, že konvergence jest zachována také v úzkém proužku lemujícím *vně* křivku C_k. Rozvoj (33) definuje tedy jistou funkci $F_1(z)$ analytickou v oboru K_1 ohraničeném křivkou C_k.

Funkce $h(\tau)$ daná vzorcem (24) nechť má *m konečné.* [1]) Obor konvergence Laurentovy řady (24) si stanovme nerovninou

$$|\tau| \geqq \lambda.$$

Číslo λ jest jistá konstanta o něco větší než poloměr konvergence. Křivku C_k musíme přirozeně omeziti tak, že parametr její ϱ_k vyhovuje podmínce $\varrho_k > \lambda$, neboť jenom tenkráte jsou rozvojové funkce $\beta_n(z)$ definovány vzorcem (24*a*) a tedy i vzorci (25).

Konstanty A_n jsou zcela libovolné; musí jenom vyhověti příslušným nerovninám z věty V. Jest otázkou, zda tyto *libovolné* konstanty dají se vždy vyjádřiti *společným* vzorcem

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_e} \frac{G[g(\tau)]\,\tau^n\,d\tau}{h(\tau)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

či není-li to možno.

Podle nerovniny (13*a*) jest

$$\sqrt[n]{|\beta_{-n}(z)|} \leqq \varrho_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

počínaje od jistého konečného a na z nezávislého n pro všechna z ležící v oboru k_1. Tento obor k_1 musí býti obsažen úplně *uvnitř* oboru K_1 čili uvnitř křivky C_k.

Užijeme-li Cauchyova kriteria konvergence na řadu (33), obdržíme *nutnou* podmínku

$$\sqrt[n]{|A_{-n}\,\beta_{-n}(z)|} \leqq 1;$$

to vespojení s (35) dává

$$\sqrt[n]{|A_{-n}|} \leqq \frac{1}{\varrho_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Tuto nerovninu musí *nutně* splňovati konstanty A_n, má-li řada (33) absolutně konvergovati.

Definujme nyní funkci $f(\tau)$ následující Laurentovou řadou

$$\tau \,.\, f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n\,\tau^{-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Postačující podmínkou pro absolutní konvergenci této řady jest

$$|\tau| > 0, \quad \sqrt[n]{|A_{-n}\,\tau^n|} < 1.$$

Vzhledem k (36) obdržíme tedy postačující podmínku

[1]) Totéž konečné *m* vystupuje v řadě (33).

$$0 < |\tau| < \varrho_k \text{......................} (38)$$

V tomto mezikruží jest analytickou funkce $\tau \,.\, f(\tau)$ a tedy také funkce $f(\tau)$ sama. O funkci $h(\tau)$ jsme řekli, že jest analytickou, pokud

$$|\tau| \geqq \lambda.$$

Z toho vyplývá, že součin

$$f(\tau) \,.\, h(\tau)$$

jest funkcí analytickou v mezikruží

$$\lambda \leqq |\tau| < \varrho_k.$$

Definujme nyní funkci $G(z)$ vztahem

$$G[g(\tau)] = f(\tau) \,.\, h(\tau) \text{....................} (39)$$

a proveďme transformaci pomocí rovnice (20)

$$z = g(\tau)$$

která má podle své definice jednoznačnou inveresní funkci

$$\tau = \gamma(z) \text{.........................} (40)$$

Funkce $\gamma(z)$ jest při tom analytickou v celém oboru své definice a tedy i v okolí *kterékoliv* křivky C_k.

Značí-li tedy ϱ_e parametr hovící nerovnině

$$\lambda < \varrho_e < \varrho_k,$$

bude křivka C_e probíhati celá uvnitř křivky C_k a funkce

$$G(z) = f[\gamma(z)] \,.\, h[\gamma(z)] \text{..................} (41)$$

bude analytickou v okolí každého bodu na křivce C_k.

Z rovnic (37) a (38) vyplývá dále

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_e} f(\tau)\, \tau^n \, d\tau$$

a tedy podle (39)

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_e} \frac{G[g(\tau)]\, \tau^n \, d\tau}{h(\tau)} \text{................} (42)$$

Jest samozřejmo, že křivka C_e může býti zvolena libovolně blízko u křivky C_k; o řadě (33) můžeme tedy tvrditi, že konverguje absolutně a stejnoměrně uvnitř křivky C_e a v okolí každého bodu na této křivce.

Všimneme-li si dále rovnice (42) a řady (33), vidíme, že

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_e} \frac{G[g(\tau)]\, d\tau}{h(\tau)} \,.\, \sum_{n=-\infty}^{m-1} \beta_n(z) \,.\, \tau^n ,$$

a tedy podle (24*a*)

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_e} \frac{G[g(\tau)]}{h(\tau)} \cdot \frac{h(\tau) \cdot g'(\tau)}{g(\tau) - z}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_e} \frac{G(t)\, dt}{t - z}.$$

Tak jsme dokázali následující větu.

Věta VI. Konverguje-li řada

$$\sum_{n=-\infty}^{n=m-1} A_n \beta_n(z)$$

absolutně a stejnoměrně uvnitř křivky C_e i v okolí každého bodu na této křivce, dá se vždy sestrojiti funkce

$$G(z) = h[\gamma(z)] \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} A_n \cdot \gamma^n(z)$$

analytická v okolí každého bodu na křivce C_e tak, že platí

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_e} \frac{G[g(\tau)]\, \tau^n\, d\tau}{h(\tau)}.$$

Při tom jest $\gamma(z)$ inversní funkcí k rovnici (20)

$$z = g(\tau)$$

a součet řady dá se pro vnitřek křivky C_e vyjádřiti Cauchyovým integrálem

$$\sum_{n=-\infty}^{n=m-1} A_n \beta_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_e} \frac{G(t)\, dt}{t - z}.$$

Číslo m v řadě této, vyskytující se také v definici (24) funkce $h(\tau)$, musí býti *konečné.*

Z této věty vyplývají tři důležité důsledky pro nullové a vedlejší rozvoje.

Důsledek I. Existuje-li vůbec nějaký nullový rozvoj

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z),$$

který konverguje absolutně a stejnoměrně uvnitř křivky C_e a v okolí každého bodu na této křivce, dají se jeho koeficienty vždy vyjádřiti společným vzorcem

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_e} \frac{G[g(\tau)]\, \tau^n\, d\tau}{h(\tau)};$$

při tom jest $G(z)$ funkce analytická všude *vně* křivky C_e a v okolí každého bodu na této křivce.

Důkaz. Podle věty VI. jest integrální výraz pro koeficienty A_n důsledkem stejnoměrné konvergence rozvoje. Podle téže věty jest funkce $G(z)$ analytická v okolí každého bodu na křivce C_e Zbývá nám tedy dokázati, že $G(z)$ jest analytické *všude vně* křivdy C_e. Tu okolnost, že $G(z)$ jest analytická v okolí každého bodu na křivce C_e, můžeme vyjádřiti také takto: Funkce $G(z)$ jest analytická v jistém po případě velmi úzkém prstencovém oboru, který jest omezen vně jistou křivkou L_1 a uvnitř jinou křivkou L_2; křivka C_e probíhá v tomto oboru žádné z křivek L_1 nebo L_2 se nedotýkajíc.

Podle věty Laurentovy [1]) dá se tedy funkce $G(z)$ rozštěpiti na dva sčítance

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z)$$

tak, že $G_1(z)$ značí funkci analytickou všude *uvnitř* křivky L_1 a $G_2(z)$ funkci analytickou všude *vně* křivky L_2 s vlastností $\lim\limits_{z=\infty} z \,.\, G_2(z) =$ konečné konstantě.

Značí-li tedy z bod uvnitř křivky C_e, bude

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_e}\frac{G(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_e}\frac{G_1(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_e}\frac{G_2(t)\,dt}{t-z}\,.$$

Protože z leží uvnitř křivky C_e a $G_1(t)$ jest tam i na křivce C_e analytické, jest první integrál na pravé straně roven $G_1(z)$, kdežto druhý integrál jest roven nulle, protože $G_2(z)$ jest analytické všude vně křivky C_e.[2])

Jest tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_e}\frac{G(t)\,dt}{t-z} = G_1(z)$$

a podle konce věty VI. a první rovnice v důsledku I. musíme usoudit

$$G_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n\,\beta_n(z) = 0$$

---

[1]) Viz na př. Osgood l. c. p. 346.

[2]) Mysleme si obor ohraničený křivkou C_e uvnitř a nekonečnou kružnicí k vně. Protože $G_2(z)$ jest analytické v tomto oboru, bude

$$G_2(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{C_e}\frac{G_2(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k}\frac{G_2(t)\,dt}{t-z}$$

pokud v integrálech značí z bod *vně* křivky C_e. Jestliže však zvolíme z mimo tento obor, tedy *uvnitř* křivky C_e, bude na levé straně místo $G_2(z)$ *nulla*. Druhý integrál na pravé straně vypadne, protože $\lim\limits_{z=\infty} z\,G_2(z) =$ konečné konstantě.

a tedy

$$G(z) = G_2(z).$$

Tím jest důkaz důsledku I. úplně proveden.

Další důsledek vztahuje se k oněm funkcím $\beta_n(z)$, podle nichž se *nedají* sestrojiti nullové rozvoje.

Důsledek II. Z polynomů (22) a (25) při ***konečném m*** nedá se utvořiti žádný rozvoj pro nullu, který by absolutně a stejnoměrně konvergoval uvnitř křivky C_ε a v okolí každého bodu na této křivce, pokud funkce $h(\tau)$ ***nemá vně*** kružnice o poloměru $|\tau| = \varrho_\varepsilon$ nullového bodu.

Každý rozvoj z polynomů jmenovaných v oboru tom absolutně a stejnoměrně konvergentní jest ***hlavním*** rozvojem pro nějakou od nully různou funkci analytickou v onom oboru. ***Vedlejší*** rozvoje neexistují.

Důkaz. Vezměme v úvahu ihned polynomy (25). Kdyby existoval nějaký nullový rozvoj z nich sestrojený při ***konečném m***, byly by koeficienty jeho určeny podle důsledku I. křivkovým integrálem

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_\varepsilon} \frac{G[g(\tau)]\,\tau^n \,.\, d\tau}{h(\tau)}.$$

Ježto $G(z)$ jest funkce analytická všude vně i na obvodě křivky C_ε toho druhu, že

$$\lim_{z=\infty} z \,.\, G(z) = \text{konečné konstantě},$$

bude podle (20) $G[g(\tau)]$ funkce analytická všude vně a na obvodu kružnice

$$|\tau| = \varrho_\varepsilon$$

toho druhu, že

$$\lim_{\tau=\infty} G[g(\tau)] \,.\, \tau = \text{konečné konstantě}.$$

Platí tedy Laurentův rozvoj

$$G[g(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \tau^{-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Při konečném m můžeme psáti pro funkci $h(\tau)$ místo (24) rovnici

$$h(\tau) = \tau^m \,.\, \sum_{k=0}^{-\infty} d_{m+k} \,.\, \tau^k, \qquad |d_m| > 0.$$

Podle předpokladů nemá Laurentova řada na pravé straně rovnice vně a na obvodu kružnice $|\tau| = \varrho_\varepsilon$ nullového bodu, takže převratná hodnota této řady jest v témž oboru analytickou a platí tedy rozvoj

$$\frac{1}{h(\tau)} = \frac{1}{\tau^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k \tau^{-k}, \qquad |\tau| \geqq \varrho_\varepsilon.$$

Podle tohoto rozvoje a rovnice (43) jest tedy

$$\frac{G[g(\tau)]}{h(\tau)} = \frac{1}{\tau^m} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \tau^{-k}.$$

Koeficient A_n příslušného nullového rozvoje jest tedy určen výrazem

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_e} \tau^{n-m} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} f_k \tau^{-k} \, d\tau.$$

Protože řada za integračním znaménkem jest v integračním intervallu stejnoměrně konvergentní, můžeme integrovati člen za členem. Vzhledem k rovnicím

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_e} \tau^p \, . \, d\tau = 0, \quad p \neq -1$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_e} \frac{d\tau}{\tau} = 1,$$

můžeme tedy psáti

$$A_n = f_{n-m+1}.$$

Tento výraz jest od nully různý jen tenkráte, když

$$n - m + 1 \geqq 1,$$

čili

$$n \geqq m,$$

kdežto pro

$$n < m$$

jest

$$A_n = 0.$$

Uvážíme-li dále, že podle (25) jest pro konečné m

$$\beta_n(z) \equiv 0, \quad n \geqq m,$$

vidíme, že součin

$$A_n \, . \, \beta_n(z)$$

jest pro každý index n identický roven nulle a že tedy nullový rozvoj

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z)$$

redukuje se na pouhou identitu $0 = 0$.

Totéž platí pro rozvojové polynomy (22), které vyplývají z (25) položením

$$m = 0, \quad d_0 = 1, \quad d_k = 0, \quad (k \neq 0).$$

Dokázali jsme tak, že nullové rozvoje podle polynomů (22) nebo (25) neexistují. Přímým důsledkem toho jest nemožnost rozvojů vedlejších. Každý rozvoj

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n (z),$$

který uvnitř a na obvodě křivky C_e absolutně a stejnoměrně konverguje a nemá všechny členy identicky rovny nulle, jest tedy *hlavním* rozvojem pro jistou funkci v tom oboru analytickou a od nully různou.

Tím jest důsledek II. dokázán.

Nullové rozvoje podle funkcí (25) mohou tedy existovati jen v těchto dvou případech.

1. Číslo m jest konečné a funkce $h(\tau)$ *má* vně kružnice $|\tau| \leqq \varrho_e$ nullový bod.

Číslo m jest nekonečné a kladné.

Dokážeme si:

Důsledek III. V obou právě jmenovaných případech existují vždy nullové rozvoje podle funkcí (25).

Důkaz rozdělíme také na dva případy.

1. Nechť má funkce

$$h(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{m} d_m \tau^m,$$

která jest při *konečném* m definována v oboru

$$|\tau| \geqq \lambda,$$

nullový bod s nejmenší absolutní hodnotou v místě $\tau = \varkappa$.

$$|\varkappa| > \lambda$$

a veďme podle předpokladů kružnici o poloměru ϱ_e tak, že

$$\lambda < \varrho_e < |\varkappa| .$$

Převratná hodnota funkce $h(\tau)$ jest pak analytickou v oboru

$$\lambda \leqq |\tau| < |\varkappa| .$$

V tomto oboru platí tedy Laurentova řada o nekonečném počtu členů s kladným indexem

$$\frac{1}{h(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k \cdot \tau^k .$$

Kdyby totiž tato řada měla jen *konečný* počet členů kladným indexem, konvergovala by také pro

$$|\tau| \overline{\overline{>}} |\varkappa|,$$

což by odporovalo té okolnosti, že $h(\tau)$ má v bodě $\tau = \varkappa$ nullový bod a tedy $\frac{1}{h(\tau)}$ pól.

Označíme-li nyní znakem $G(z)$ opět funkci analytickou všude vně křivky C_e a v okolí každého bodu na této křivce té vlastnosti, že

$$\lim_{z=\infty} z \,.\, G(z) = \text{konečné konstantě,}$$

bude platiti pro tuto funkci opět rovnice (43) všude vně kružnice $|\tau| = \varrho_e$ i v okolí každého bodu na této kružnici. Z této rovnice a z předcházejícího rozvoje pro $\frac{1}{h(\tau)}$ vyplývá, že zlomek

$$\frac{G[g(\tau)]}{h(\tau)}$$

jest funkcí analytickou v mezikruží

$$v < |\tau| < |\varkappa|;$$

při tom jest v o něco menší než ϱ_e. V tomto oboru platí tedy Laurentův rozvoj

$$\frac{G[g(\tau)]}{h(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \,.\, \tau^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

o neomezeném počtu od nully různých členů skladným indexem, jestliže jen funkce $G(z)$ jest tak volena, že čitatel zlomku na levé straně rovnice (44) *nemá* v místě $\tau = \varkappa$ nullového bodu. V tom případě totiž má zlomek onen v bodě $\tau = \varkappa$ pól.

K funkci $G(z)$ přísluší nullový rozvoj (12*a*) IV.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=-\infty}^{m-1} B_n \beta_n(z), \\ B_n &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_e} \frac{G[g(\tau)]\,\tau^n\, d\tau}{h(\tau)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (44a)$$

Užijeme-li zde rozvoje (44) vidíme,

$$B_n = -f_{-n-1}.$$

Z toho vyplývá předně, že od nully různých koeficientů B_n se *záporným* indexem jest neomezený počet. Za druhé seznáme snadno z formulí (25), že žádný polynom $\beta_n(z)$ pro *záporné* $n < m$ není identicky roven nulle; polynom ten obsahuje totiž jen *jediný* člen stupně $(m - n - 1)$-ho

$$d_m \left(\frac{z - a_0}{\alpha}\right)^{m-n-1},$$

který tedy nemůže vypadnouti.

Z obojího usuzujeme, že od jistého kladného k počínaje bude neomezený počet součinů

$$B_{-k} \,.\, \beta_{-k}(z)$$

od nully různý.

Existuje tedy nullový rozvoj (44a).

Důkaz tento jest ještě nutno doplniti v tom směru, že funkce $G(z)$ dá se vždy tak voliti, aby $G[g(\tau)]$ nemělo v místě $\tau = \varkappa$ nullového bodu; tento předpoklad jsme totiž udělali při odvození řady (44). Postačí dokázati, že existuje aspoň jedna taková funkce $G(z)$. Značí-li a bod ležící uvnitř křivky C_ε dosti daleko od okraje, jest takovou funkcí

$$G(z) = \frac{1}{z - a}.$$

Rozdíl $g(\tau) - a$ jest pak od nully různým pro všechna τ ležící vně anebo na obvodu kružnice

$$|\,\tau\,| = \varrho_\varepsilon.$$

Nekonečné hodnoty nabude tento rozdíl jen pro bod $\tau = \infty$. Z toho vyplývá, že

$$G[g(\tau)] = \frac{1}{g(\tau) - a}$$

má v oboru jmenovaném jediný nullový bod $\tau = \infty$. Nemá tedy nullového bodu $\tau = \varkappa$.

2. Máme dokázati existenci nullového rozvoje v tom případě, že funkce $h(\tau)$ definována jest Laurentovou řadou

$$h(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \tau^n$$

o nekonečně velkém počtu od nully různých členů s kladným indexem n. Nechť konverguje absolutně a stejnoměrně v oboru

$$\lambda \leqq |\,\tau\,| \leqq \varkappa > 1$$

a má v něm po případě i nullové body, což však není nutné.

Rozvojové funkce jsou zde dány rovnicí (25)

$$\beta_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+k} \,.\, b_{-k}(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Řada na pravé straně této rovnice nemůže míti za součet nullu, neboť to by odporovalo důsledku II., v kterém jsme dokázali, že takový nullový rozvoj jest jen tenkráte možný, když všechna d_{n+k} jsou rovna nulle. Není tedy *žádné* $\beta_n(z)$ identicky rovno nulle.

Jestliže nyní kružnice o poloměru ϱ_ε

$$\lambda \leqq \varrho_e \leqq \varkappa$$

neprochází žádným nullovým bodem funkce $h(\tau)$, bude zlomek

$$\frac{G[g(\tau)]}{h(\tau)}$$

analytickou funkcí proměnné τ v okolí každého bodu na kružnici ϱ_e. Při tom myslíme si pod $G(z)$ opět libovolnou funkci analytickou všude vně i v okolí každého bodu křivky C_e. Pro zlomek hořejší bude tedy platiti rozvoj (44) stejnoměrně konvergentní pro všechna τ na kružnici o poloměru ϱ_e a mající aspoň několik od nully různých členů.

Nullový rozvoj (12a) IV. bude tedy míti aspoň několik koeficientů od nully různých. To vyplývá z úvahy připojené k rovnici (44a). Je-li jeden z těchto koeficientů B_k, jest, podle toho, co jsme shora řekli o funkcích $\beta_n(z)$, součin

$$B_k \,.\, \beta_k(z)$$

od nully různý. Existuje tedy nullový rozvoj (12a) IV. určitě.

Při důkazu jsme předpokládali, že rozvoj (44) má aspoň několik členů od nully různých. Kdyby rozvoj ten měl jen jediný člen — označme jej $f_k \,.\, \tau^k$ — bylo by

$$G[g(\tau)] = h(\tau) \,.\, f_k \,.\, \tau^k = f_k \,.\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \,\tau^{n+k},$$

což jest v odporu s rovnicí (43).

Důsledek III. jest tedy dokázán.

Důsledek II. a III. vyjadřují *nutné a postačující podmínky pro existenci nullových rozvojů* podle polynomů (22) a (25).

V paragrafu tomto zabývali jsme se dosud rozvoji podle funkcí $\beta_n(z)$. Veškeré tyto úvahy dají se po výměně příslušných pojmů opakovati i pro rozvoje podle funkcí $\gamma_n(z)$. Došli bychom tak k úplné obdobě věty VI a všech důsledků I., II. a III.

Protože tím k žádnému věcně novému poznatku nedospějeme, upouštíme od podrobného provedení. Příslušné věty a důsledky rovněž vypisovati nebudeme, protože vzniknou z právě citovaných pouhou záměnou slov „vnitřek křivky C_e" za „vnějšek křivky C_e" a dále funkcí „$\beta_n(z)$" za funkce „$\gamma_n(z)$".