Miloš Kössler
Ein Beitrag zur Theorie der schlichten Potenzreihen

Věstník Král. čes. spol. nauk 1932, No. 5, 8 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501251

V.

Ein Beitrag zur Theorie der schlichten Potenzreihen.

Von **M. KÖSSLER** in Prag.

(Vorgelegt am 11. April 1932.)

Es sei $$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \tag{1}$$
eine im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre und daselbst schlichte Funktion. Von den Koeffizienten ist bekannt, daß
$$|a_2| \leq 2 \qquad |a_2^2 - a_3| \leq 1 \tag{2}$$
Die Transformation von Nevanlinna
$$F(\xi) = \left\{ f\left(\frac{\xi + \alpha}{1 + \bar{\alpha}\xi}\right) - f(\alpha) \right\} : f'(\alpha)(1 - |\alpha|^2) = \xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \dots \tag{3}$$
wo $|\alpha| < 1$ definiert eine ebenfalls im Kreise $|\xi| < 1$ schlichte Funktion. Dabei ist
$$A_2 = \frac{f''(\alpha)(1 - |\alpha|^2)}{2f'(\alpha)} - \bar{\alpha} \tag{4}$$
$$A_3 = \frac{f'''(\alpha)(1 - |\alpha|^2)^2}{6f'(\alpha)} - \frac{f''^2(\alpha)(1 - |\alpha|^2)^2}{4f'^2(\alpha)} \tag{5}$$
Die Zahlen A_2, A_3 erfüllen auch die Relationen (2). Die erste von ihnen führt nach dem Verfahren von R. Nevanlinna zu dem Verzerrungssatze von Koebe und zu dem Drehungssatze von Bieberbach. Die zweite wurde bisher, soweit mir bekannt ist, noch nicht systematisch untersucht. Die Schwierigkeiten können aber durch Betrachtung von Extremalwerten überwunden werden. Diese Untersuchung, welche den Inhalt von folgenden Seiten bildet, führt zu zwei neuen Ungleichungen
$$1 + R\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq \frac{1 - |a_2|r - 6r^2 - |a_2|r^3 + r^4}{(1 - r^2)(1 + |a_2|r + r^2)} \tag{A}$$

$$| \, arc \, f'(z) | \leq 2 \, |a_2| \, r + \frac{3}{2} \, r \log \frac{1+r}{1-r} \tag{B}$$

Die Ungleichung (A) ist scharf, denn die Grenze wird von der Funktion $z : (1 + |a_2| \, z + z^2)$ erreicht. Eine unmittelbare Folge von (A) ist die Tatsache, daß die Rundungsschranke von (1) größer oder gleich der Zahl $\varrho(a_2) = b - \sqrt{b^2 - 1}$ (6) ist, wobei $4b = |a_2| + \sqrt{|a_2|^2 + 32}$.

So ist z. B. die Rundungsschranke für ungerade Funktionen $\varrho(o) = \sqrt{2} - 1$, erreicht von der Funktion $z : (1 + z^2)$.

Die Ungleichung (B) drückt eine neue und schärfere Fassung des Bieberbachschen Drehungssatzes aus. Die Grenze ist scharf nur für $r = 0$. Für $r > 0$ gibt sie nur eine Annäherung, welche nichtsdestoweniger besser ist als alle bisher bekannte Abschätzungen, wenn $r > 0{\cdot}8$ ist.

---

§ 1. Die grundlegenden Ungleichungen.

Wir benützen die zweite Ungleichung (2) auf die Koeffizienten A_2, A_3, die durch (4) und (5) definiert sind. Wir schreiben dabei z anstatt α und bezeichnen $z = re^{i\varphi}$, $|z| = r < 1$.

$$\left| 2 z^2 \frac{f'''(z)}{f'(z)} - 3 z^2 \frac{f''^2(z)}{f'^2(z)} \right| \leq \frac{12 r^2}{(1 - r^2)^2} \tag{7}$$

Anstatt $f(z)$ führen wir eine neue Funktion

$$v(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = R(v) + i J(v) \tag{8}$$

an, welche wegen $|f'(z)| > 0$ im Einheitskreise regulär ist. Es ist

$$R(v) = 1 + R\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right), \quad I(v) = I\left(z \frac{f''}{f'}\right),$$

$$z \frac{f''(z)}{f'(z)} = z \frac{d}{dz} \log f'(z) = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \log f'(z),$$

$$\log f'(z) = \log |f'| + i \, arc \, f'(z)$$

Es ist also

$$R(v) = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \, arc \, f'(z); \quad I(v) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f'(z)| \tag{9}$$

Die Derivation von (8) gibt

$$zv'(z) = z\frac{f''}{f'} + z^2\frac{f'''}{f'} - z^2\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

was in Verbindung mit (8) die Ungleichung (7) auf die Form

$$|2\,zv'(z) - v^2(z) + 1| \leq \frac{12r^2}{(1-r^2)^2} \tag{7a}$$

zurückführt. Es ist weiter $zv'(z) = -i\frac{\partial}{\partial \varphi} v(z)$, also nach (8) und (7a)

$$\left|2\frac{\partial I}{\partial \varphi} - 2i\frac{\partial R}{\partial \varphi} + I^2 + 1 - R^2 - 2iRI\right| \leq \frac{12r^2}{(1-r^2)^2} \tag{10}$$

$$\left|2\frac{\partial I}{\partial \varphi} + I^2 + 1 - R^2\right| \leq \frac{12r^2}{(1-r^2)^2}, \tag{10a}$$

$$\left|\frac{\partial R}{\partial \varphi} + R\,I\right| \leq \frac{6r^2}{(1-r^2)^2} \tag{10b}$$

Wir werden auch die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen für den Realteil und den Imaginarteil einer regulären Funktion

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial I}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial I}{\partial r} \tag{11}$$

benützen.

---

§ 2. Beweis der Ungleichung A.

Wir wollen jetzt die Funktion $I(v)$ aus der Beziehung (9) betrachten. Auf dem Kreise $z = re^{i\varphi}$ mit festem r und veränderlichem φ erreicht $\log|f'(z)|:r$ in gewissen Punkten seine Extremalwerte. In diesen Punkten wird $I(v):r = 0$ und also nach (10a) und 11

$$\left|2r\frac{\partial R}{\partial r} + 1 - R^2\right| \leq \frac{12r^2}{(1-r^2)^2}$$

Wir führen die Bezeichnung

$$R(v) = 1 + r\,\psi\,(r,\varphi); \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \psi' \tag{12}$$

ein, wodurch die vorherstehende Ungleichung folgende Form annimmt

$$-\frac{12r^2}{(1-r^2)^2} \leq 2\psi' - \psi^2 \leq + \frac{12r^2}{(1-r^2)^2} \tag{13}$$

Dabei ist $\psi(r,\varphi)$ eine stetige, stückweise analytische Funktion von r. Um Anfangswerte für ψ zu bekommen, müssen wir diejenige Werte von φ bestimmen, für welche $\left(\frac{I(v)}{r}\right)_{r=0} = 0.$

Nach (1) ist

$$|f'(re^{i\varphi})|^2 = 1 + 2r(a_2 e^{i\varphi} + \bar{a}_2 e^{-i\varphi}) + (r^2)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \log |f'|^2 = 2i(a_2 e^{i\varphi} - \bar{a}_2 e^{-i\varphi}) + (r)\,,$$

wobei (r^k) Glieder von der Ordnung r^k bedeutet. Für $r = o$ ist also

$$a_2 e^{i\varphi} = \bar{a}_2 e^{-i\varphi}; \quad \varphi_1 = \pi - arc\, a_2, \quad \varphi_2 = - arc\, a_2\,.$$

Nach (9), (11) und (12) ist

$$2\psi(r,\varphi) = \frac{\partial}{\partial r} \log |f'|^2 = 2(a_2 e^{i\varphi} + \bar{a}_2 e^{-i\varphi}) + (r)$$

also

$$\psi(o, \varphi_1) = -2\,|a_2|; \quad \psi(o, \varphi_2) = 2\,|a_2| \tag{14}$$

Aus dem Verzerrungssatze ist bekannt, daß

$$\psi(r, \varphi) \leq \frac{4+2r}{1-r^2}, \tag{15}$$

wobei die Gleichheit nur für die Schlitzfunktionen mit $|a_2| = 2$ erfüllt ist. Aus diesem Grunde führen wir unter der Voraussetzung $|a_2| < 2$ eine neue Funktion $\lambda(r,\varphi)$ ein, die durch Beziehung

$$\psi(r,\varphi) = \frac{4+2r}{1-r^2} - \frac{1}{\lambda(r,\varphi)}\,, \quad 1 : \lambda(r,\varphi) > o \tag{16}$$

definiert ist. Die linke Seite von (13) bekommt dadurch die Form

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}+\lambda.\frac{4+2r}{1-r^2}\geq\frac{1}{2},$$

was mit

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\lambda.\frac{1+r}{(1-r)^3}\right\}\geq\frac{1}{2}\,\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

gleichbedeutend ist. Da $\lambda(r,\varphi)$ stetig und stückweise analytisch ist, so bekommen wir durch Integration

$$\lambda(r,\varphi)\,\frac{1+r}{(1-r)^3}-\lambda\,(o,\varphi_1)\geq\frac{1}{2}\,\frac{r}{(1-r)^2}$$

Nach (14) und (16) ist $\lambda(o,\varphi_1)=1:(4+2\,|\,a_2\,|)$, also

$$\frac{1}{\lambda(r,\varphi)}\leq\frac{2(2+|\,a_2\,|)\,(1+r)}{(1-r)(1+|\,a_2|\,r+r^2)} \tag{17}$$

Nach (16) ist also

$$\psi(r,\varphi)\geq\frac{4+2r}{1-r^2}-\frac{2(2+|\,a_2\,|)\,(1+r)}{(1-r)(\,1+|\,a_2\,|\,r+r^2)}$$

$$1+r\,\psi(\,r,\varphi\,)\geq\frac{1-|\,a_2\,|r-6\,r^2-|\,a_2\,|\,r^3+r^4}{(1-r^2)\,(1+|\,a_2\,|\,r+r^2)} \tag{18}$$

Da diese Beziehung für den Minimalwert von $\psi(r,\varphi)$ auf dem Kreise $|\,z\,|=r$ giltig ist, so ist sie auch für jedes r und jedes φ richtig. Da nun nach (12) und (9)

$$r\,\psi(r,\varphi)=R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right),$$

so ist die Ungleichung (A) bewiesen. Für $|\,a_2\,|=\alpha<2$ hat die besondere schlichte Funktion $f(z)=z:(1+\alpha z+z^2)$ die Eigenschaft

$$1+z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{1-\alpha z-6z^2-\alpha\,z^3+z^4}{(1-z^2)\,(1+\alpha z+z^2)}$$

Für $z=r$ übergeht also die Ungleichung (A) in eine Gleichung Es stellt also die Ungleichung (A) eine scharfe Abschätzung dar.

Die Betrachtung des zweiten Anfangswertes $\psi(o,\varphi_2)= =2\,|\,a_2\,|$ führt zu einer ähnlichen Ungleichung

$$\mathit{Max}\;\psi(r,\varphi)\geq\frac{2\,|\,a_2\,|-6r+2r^3}{(1-r^2)\,(1-|\,a_2\,|\,r+r^2)} \tag{18a}$$

Diese Abschätzung ist aber nicht scharf.

Die geometrische Deutung von (A) ist bekannt. Wenn der Ausdruck linker Hand für $|z| = r$ positiv ist, so bedeutet das, daß das Bild des Kreises konvex ist. Man rechnet aber sofort nach, daß für

$$|z| < \varrho\,(a_2)$$

$$\varrho(a_2) = b - \sqrt{b^2 - 1}\,; \quad 4b = |a_2| + \sqrt{|a_2|^2 + 32} \tag{6}$$

der Ausdruck rechts in (A) stets positiv ist, während er für größere $|z|$ negativ wird. Daher wird bei jeder schlichten Abbildung $f(z)$ von $|z| < 1$ der Kreis $|z| < \varrho(a_2)$ konvex abgebildet.

---

§ 3. Der Drehungssatz.

Wir werden jetzt die Analyse der Beziehung (10 b) unter der Voraussetzung $R(v) = 1$ durchführen. Wir wollen wiederum diejenige z betrachten, welche auf einem festen Kreise $|z| = r$ liegen. Nach (9) wird $R(v) = 1$ für jene φ, für welche $arc\, f'(z) : r$ seine Extremalwerte besitzt. Aus (10 b) wird

$$-\frac{6r^2}{(1-r^2)^2} \leq r\frac{\partial I}{\partial r} - I \leq \frac{6r^2}{(1-r^2)^2} \tag{19}$$

Da

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{arc\, f'(z)}{r} = \frac{\partial}{\partial r} log\,|f'(z)| = 2(a_2 e^{i\varphi} + \bar{a} e^{-i\varphi}) + (r)\,,$$

so wird hier

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - arc\, a_2\,, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} - arc\, a_2\,.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} log\,|f'| = i(a_2 e^{i\varphi} - \bar{a}_2 e^{-i\varphi}) + (r)$$

Die Anfangswerte von $I(v) : r$ sind also nach (9) entweder $2|a_2|$ oder $-2|a_2|$. Durch die Substitution $I(v) = r.\, K(r, \varphi)$ übergehen die Ungleichungen (19) in

$$\frac{\partial K_2}{\partial r} \geq \frac{-6}{(1-r^2)^2}, \qquad \frac{\partial K_1}{\partial r} \leq \frac{6}{(1-r^2)^2} \tag{20}$$

mit den Anfangswerten $K_1(o) = 2\,|\,a_2\,|$, $K_2(o) = -2\,|\,a_2\,|$. Die Integration führt zu

$$K_1(r,\varphi) \leq 2\,|\,a_2\,| + \frac{3r}{1-r^2} + \frac{3}{2}\,log\,\frac{1+r}{1-r} \tag{21}$$

$$K_2(r,\varphi) \geq -2\,|\,a_2\,| - \frac{3r}{1-r^2} - \frac{3}{2}\,log\,\frac{1+r}{1-r}$$

Da nun $K(r.\varphi) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,log\,|\,f'\,| = \frac{\partial}{\partial r}\,arc\,f'$, so bekommen wir aus (21) durch neue Integration

$$Max\,arc\,f'(z) \leq 2\,|\,a_2\,|\,r + \frac{3}{2}\,r\,log\,\frac{1+r}{1-r}$$

$$min\,arc\,f'(z) \geq -2\,|\,a_2\,|\,r - \frac{3}{2}\,r\,log\,\frac{1+r}{1-r}$$

Es gilt also für jedes r und jedes φ die Ungleichung (B). Diese Abschätzung für $arc\,f'(z)$ ist augenscheinlich besser als die bisher bekannte schärfste Abschätzung

$$|\,arc\,f'(z)| \leq \int_o^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx\,, \tag{22}$$

welche ich im Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver. XLI 1931. p. 82. veröffentlicht habe, wenn $r > 0{\cdot}8$ ist.

Zusatz.

Aus der Ungleichung (18) berechnet man durch zweimalige Integration die Ungleichungen

$$|\,f'(z)\,| \geq \frac{1-r^2}{(1+|\,a_2|r+r^2)^2} \tag{23}$$

$$|\,f(z)\,| \geq \frac{r}{1+|a_2|\,r+r^2}, \tag{24}$$

von denen nur die letzte bekannt ist. Nach Polya—Szegö, Aufgaben und Lehrsätze, Bd. II., Berlin 1925 S. 203 wurde sie auf einem anderen Wege von T. H. Gronwall abgeleitet.

Sumary.

If $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ is regular and biuniform in $|z| < 1$,then

$$1 + R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq \frac{1 - |a_2| r - 6r^2 - |a_2| r^3 + r^4}{(1 - r^2)(1 + |a_2| r + r^2)}, |z| = r, \quad (A)$$

$$|arc f'(z)| \leq 2|a_2| r + \frac{3}{2} r \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right), \text{ (rotation formula)} \quad (B)$$

$$|f'(z)| \geq \frac{1 - r^2}{(1 + |a_2| r + r^2)^2}, \text{ (distortion formula)} \quad (C)$$

The bounds in (A) and (C) are attained by the function $z : (1 + |a_2| z + z^2)$.