Miloš Kössler

Sur les singularités des séries entières

Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. 32 (1923), No. 5, pp. 26–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501231

Così z^*, f^*, w^* sono puri numeri e c rappresenta la velocità di una corrente di portata q e di profondità h.

Applicando un noto procedimento, si perviene (1) alla seguente equazione nella incognita funzione $w^*(t;f^*)$:

$$(20)\quad 2\frac{dc}{dt}+c\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{c}{h}\frac{\partial}{\partial f^*}\right)W^{*2}-ig\left\{\frac{1}{w^*(t;f^*+i)}-\frac{1}{w^*(t;f^*-i)}\right\}=$$

$$=\frac{4\nu c}{h}W^*\cdot\frac{\partial^2 W^*}{\partial f^{*2}}+\frac{4\nu c}{h^2}\left(\frac{\partial W^*}{\partial f^*}\right)^2.$$

avendo posto, per brevità,

$$W^*=\sqrt{w^*(t;f^*+i)\cdot w^*(t;f^*-i)}\,.$$

Il problema dipende da una funzione reale c del tempo t e da una funzione $w^*(t;f^*)$ reale per f^* reale e qualunque t, regolare nella striscia $-\infty\leq\varphi\leq+\infty$, $-1\leq\psi^*\leq 1$, e soddisfacenti all'equazione (20) mista, cioè differenziale e alle differenze finite. Una volta determinati c e w^*, mediante la (18), tenuto conto delle (17), si può ricavare con una quadratura la funzione $f(t;z)$, dalla quale si possono poi dedurre tutti gli elementi che caratterizzano il movimento del liquido.

Se la viscosità può ritenersi trascurabile, allora, ponendo $\nu=0$, il secondo membro della (20) risulta nullo e la (20) coincide coll'equazione che ho stabilito nella Nota ultima citata.

Matematica. — *Sur les singularités des séries entières.* Nota di MILOŠ KÖSSLER, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

Pour étudier les singularités de la série entière

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\ ,\quad \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1\,,$$

situées sur la circonférence du cercle de convergence, nous allons employer, au lieu des transformations habituelles $z=\frac{x}{1+x}$ ou $z=x+\alpha$, la transformation quadratique $z=x+\varepsilon x^2$, choisissant convenablement ε. Des suites particulières de coefficients, celles pour lesquelles $\lim\limits_{q\to\infty}\sqrt[n_q]{a_{n_q}}=1$, y prennent un rôle remarquable. Dans la Communication présente, je montre la puissance de la méthode en généralisant essentiellement les théorèmes de

(1) Cisotti, *Sul moto variabile nei canali a fondo orizzontale* [questi Rendiconti, vol. XXVIII (1° semestre 1919), pag. 197].

MM. Vivanti, Dienes et Fatou-Polya [1] (Théorèmes II, III et IV). La généralisation consiste en ce que nos suppositions ne se rapportent qu'à certains groupes de coefficients et, de plus, que nous remplaçons les facteurs habituels $\varepsilon_n = \pm 1$ du théorème de M. Fatou par les facteurs plus généraux $\varepsilon_n = e^{i\varphi_n}$. La démonstration de ce théorème devient si élémentaire qu'une généralisation ultérieure ne semble guère possible.

1. Une considération toute élémentaire montre la relation suivante: Si le point $z_0 = e^{i\psi}$ est singulier pour la fonction (1), le point

$$x_0 = \frac{\sqrt{1+4\eta}-1}{2\eta} \cdot e^{i\psi}$$

est singulier pour la fonction

$$F(x) = f(z) \;,\; z = x + \eta e^{-i\psi} x^2 ,$$

où l'on suppose

$$0 < \eta \leqq 3/4 .$$

Le rayon de convergence de la série entière

$$\text{(2)} \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \;,\; A_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} a_{n-k} \eta^k e^{-ik\psi}$$

est égal à $|x_0|$. D'ailleurs, si l'on pose

$$\varkappa = |x^2 \eta e^{-i\psi} + x| ,$$

on a $\varkappa < 1$ pour $|x| < |x_0|$. Si $|x| = |x_0|$, $\varkappa \leqq 1$, où le signe inférieur a lieu seulement pour $x = x_0$. Pour $|x| > |x_0|$, la différence des deux membres étant petite, on n'aura donc $\varkappa > 1$ qu'à un petit domaine du point $x = x_0$. On en conclut: Si le point x_0 est régulier pour la fonction (1), le rayon de convergence de la série (2) est $> |x_0|$. On peut donc énoncer le théorème fondamental:

I. *Condition nécessaire et suffisante pour que $z_0 = e^{i\psi}$ soit un point singulier de la fonction* (1) *est*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{2\eta}{\sqrt{1+4\eta}-1} .$$

Si le point z_0 est régulier, le premier membre est mineur du second.

[1] Vivanti, Riv. di Matem., vol. 3, 1893, pp. 111-114; Dienes, Journ. de Math. (6) vol. 5, 1909, pp 327-413; Fatou, Acta Math., vol. 30, 1906, p. 400; Polya-Hurwitz, Acta Math., vol. 40, 1916, pp. 179-183.

2. Posons maintenant en particulier $\eta = \frac{3}{4}$. Pour un point singulier, on a dans ce cas $\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{3}{2}$. En posant $k = \varrho n$ et employant la formule de Stirling, on calcule

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k \binom{n-k}{k} = \left(\frac{3}{4\varrho}\right)^{\varrho n} \left[\frac{(1-\varrho)^{1-\varrho}}{(1-2\varrho)^{1-2\varrho}}\right]^n \left(\frac{1-\varrho}{2\pi n \varrho(1-2\varrho)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{O\left(\frac{1}{\varrho n}\right)},$$

en supposant k très grand. On a donc

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k \binom{n-k}{k}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{3}{4\varrho}\right)^{\varrho} \frac{(1-\varrho)^{1-\varrho}}{(1-2\varrho)^{1-2\varrho}}.$$

La dernière expression atteint sa valeur maximum $\frac{3}{2}$ pour $\varrho = \frac{1}{4}$. Nous allons examiner les valeurs prochaines à la valeur maximum, c'est-à-dire nous posons

(2^a) $$k = \nu \pm l\ ,\ \nu = \left[\frac{n}{4}\right]\ ;\ l \leq \gamma \cdot \nu^{\frac{2}{3}-\vartheta},$$

où γ et ϑ sont des constantes finies, $\vartheta > 0$.

Un calcul facile conduit à écrire

(3) $$\left(\frac{3}{4}\right)^k \binom{n-k}{k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4\nu} e^{-\frac{4\lambda^2}{\nu}} \left(\frac{3}{4\pi\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} e^{O(\nu^{-\vartheta})};$$

on a donc, sous les conditions (2^a),

(4) $$\lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k \binom{n-k}{k}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Nous dirons que les coefficients a_{n-k}, contenus dans l'expression A_n, forment le $n^{\text{ième}}$ groupe de coefficients; ceux d'entre eux pour lesquels k satisfait à la condition (2^a) seront appelés coefficients *distingués*. Cela étant, nous choisissons, dans l'ensemble des a_n, une suite

(5) $$a_{n_1}\ ,\ a_{n_2}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n_q} = |a_{n_q}|\, e^{i\varphi_{n_q}}\ ,\ \ldots$$

satisfaisante à la condition $\lim\limits_{q \to \infty} \sqrt[n_q]{|a_{n_q}|} = 1$, ce qu'on peut faire toujours d'une infinité de manières. Nous démontrerons le théorème

II. *Si l'on peut associer à chaque coefficient* a_{n_q}, *appartenant à la suite* (5), *un* A_{N_q}, *pris entre les coefficients de la série* (2), *de façon que*

1°) a_{n_q} *soit un coefficient distingué du groupe correspondant,* 2°) *tous les coefficients* $a_N = |a_N| e^{i\varphi_N}$ *remplissent la condition*

$$\cos(\varphi_{n_q} - \varphi_N) \geqq 0,$$

la fonction $f(z)$ *a une singularité au point* $z = 1$.

Sous les conditions de l'énoncé, on a

$$\text{partie réelle de } \frac{a_N}{a_{m_q}} \geqq 0$$

et donc

$$|A_{N_q}| \geqq |a_{n_q}| \left(\frac{3}{4}\right)^{N_q - n_q} \binom{n_q}{N_q - n_q}.$$

Si l'on tient présent que $N_q > n_q > \frac{N_q}{2}$ et que a_{n_q} est distingué, on voit, d'après (4) et (5), que

$$\overline{\lim_{q \to \infty}} |A_{N_q}|^{\frac{1}{N_q}} \geqq \frac{3}{2}.$$

Puisque, d'après la seconde partie du théorème I, on ne peut avoir le signe $>$, le théorème en vue est démontré. Il généralise le théorème de M. Vivanti. Si l'on veut examiner le point $z = e^{i\psi}$, on n'a évidemment qu'à écrire dans l'énoncé

$$\cos\left[\varphi_N - \varphi_{n_q} + (n_q - N)\psi\right] \geqq 0. \tag{6}$$

D'autres théorèmes seront donnés dans une autre Note.

Matematica. — *Nuove rappresentazioni intrinseche della curvatura gaussiana di una superficie.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Giova osservare subito come una rappresentazione di carattere intrinseco [1] e di significato notabile (non però quanto quello della rappresentazione cui mira la presente Nota) della curvatura gaussiana di una superficie potrebbe ottenersi facilmente, sfruttando con opportuno intento la nota formula $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$, alla quale si perviene [2], con manifesto signi-

[1] Per una visione di alcune rappresentazioni intrinseche della curvatura gaussiana di una superficie vedasi Severi: *Sulla curvatura delle superficie e varietà* (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1917, tomo XLII, pag. 227). Vedasi anche Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bd. III_3, Heft 1, pag. 98.

[2] Vedasi, ad esempio, Bianchi: *Lezioni di geometria differenziale.*