Miloš Kössler

Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile

Věstník Král. čes. spol. nauk 1935, No. 2, 8 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501211

II.

Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginarteile.

(*Sur les fonctions holomorphes dont la partie imaginaire reste bornée.*)

Vom **M. KÖSSLER** in Prag.

(Vorgelegt am 21. November 1934.)

Es sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \tag{1}$$

eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion, deren Imaginarteil $If(z)$ daselbst die Eigenschaft

$$-b \leq If(z) \leq \pi - b \tag{1a}$$

besitzt. Dabei sei $0 < b < \pi$. Solche Funktionen wollen wir als Funktionen der Klasse C bezeichnen. So entsteht die Frage: Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zugehörigkeit einer Reihe zur Klasse C?

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der folgende Satz I: [1])

Es sei $\psi(\varphi)$ eine beliebige reelle Funktion der ersten Baireschen Klasse, welche in $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ bis auf eine Menge von Maß Null definiert ist und die Eigenschaften

$$0 \leq \psi(\varphi) \leq \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) d\varphi = 2\pi b$$

besitzt. Dann gehört die Funktion $f(z)$ zu der Klasse C, wenn und nur wenn

$$f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\varphi) d\varphi}{e^{i\varphi} - z},$$

d. h. wenn und nur wenn

[1]) Alle Integrale in dieser Abhandlung sind Lebesguesche Integrale.

$$A_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) e^{-ni\varphi} d\varphi, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{2}$$

Dadurch ist der Variabilitätsbereich der Koeffizienten bestimmt. Diese Integralbedingungen können durch einfache arithmetische Bedingungen ersetzt werden (siehe Satz II). Das geschieht mit Hilfe der Carathéodory-schen[2]) Ergebnisse für Funktionen mit positivem Realteile. Als Nebenergebnis bekommen wir so die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten der Fourierschen Reihe einer harmonischen Funktion

$$u(r, \varphi) = b + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi)\, r^n, \ \ r < 1, \ \ 0 < b < \pi,$$

für welche

$$0 \leq u(r, \varphi) \leq \pi.$$

1. Der Beweis des **Satzes I** ist sehr einfach. Es sei $0 < \varrho < 1$, $|z| = r < 1$. Nach Cauchy ist

$$f(z\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho e^{i\varphi}) \varrho e^{i\varphi}}{\varrho e^{i\varphi} - \varrho z}\, d\varphi, \quad 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\varphi})\, d\varphi \tag{3}$$

Durch Subtraktion bekommen wir

$$f(z\varrho) = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho e^{i\varphi}) d\varphi}{e^{i\varphi} - z} \tag{4}$$

Anderseits ist, wie man leicht berechnen kann,

$$0 = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{f}(\varrho e^{-i\varphi}) d\varphi}{z - e^{i\varphi}} \tag{5}$$

Summation von (4) und 5 gibt

$$f(z\varrho) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{If(\varrho e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi$$

Da

$$\frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b d\varphi}{e^{i\varphi} - z} = 0,$$

[2]) C. Carathéodory: Math. Ann. B. 64. 1907. S. 95—115. W. Rogosinski: Math. Zeitschr. B. 35. 1932. S. 93—121.

so können wir auch schreiben

$$f(z\varrho) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{If(\varrho e^{i\varphi}) + b}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi \tag{6}$$

Da die Funktion $f(z)$ in $|z| < 1$ keinen Wert, dessen Imaginarteil größer als $\pi - b$ ist, annehmen kann, so gilt für $f(z)$ der folgende Satz von Fatou:

$\lim\limits_{\varrho \to 1} f(\varrho e^{i\varphi})$ existiert für alle φ des Intervalls $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ mit Ausnahme einer Menge von Maß Null. Es existiert also auch fast überall

$$\lim_{\varrho \to 1} \left\{ If(\varrho e^{i\varphi}) + b \right\} = \psi(\varphi).$$

In der Menge vom Maß Null, wo dieser Grenzwert nicht existiert, wollen wir $\psi(\varphi)$ gleich π setzen Diese Funktion $\psi(\varphi)$ ist also fast überall eine Grenzfunktion von beschränkten stetigen Funktionen, denn nach Voraussetzungen ist

$$0 \leq If(\varrho e^{i\varphi}) + b \leq \pi$$

solange $\varrho < 1$ ist. Es ist also $\psi(\varphi)$ eine reele Funktion, welche in $0 \leq \varphi \leq \pi$ definiert ist. Dabei ist

$$0 \leq \psi(\varphi) \leq \pi \tag{7}$$

Auf Grund bekannter Eigenschaften von Lebesgue-schen Integralen bekommt man aus der letzten Formel und aus (6) durch den Grenzübergang $\varrho \to 1$

$$\int_0^{2\pi} \psi(\varphi) d\varphi = 2\pi b \tag{7a}$$

$$f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\varphi) d\varphi}{e^{i\varphi} - z} \tag{8}$$

Die im Satze I. ausgesprochene Bedingung ist also für die Funktionen der Klasse C notwendig. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn es sei $\psi(\varphi)$ eine Funktion der oben erwähnten Klasse, welche die Bedingungen (7) und (7a) erfüllt. Das Integral

$$\frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\varphi) d\varphi}{e^{i\varphi} - z} = F(z)$$

definiert eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion. Es ist

$$IF(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\varphi)d\varphi \left\{\frac{z}{e^{i\varphi}-z} + \frac{\bar{z}}{e^{-i\varphi}-\bar{z}}\right\}$$

$$b = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\varphi)d\varphi$$

Bezeichnen wir $z = re^{i\vartheta}$, so bekommen wir durch Addition

$$IF(z) + b = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\varphi)d\varphi \, \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}$$

Aber es ist $0 \leq \psi(\varphi) \leq \pi$ und $\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2} > 0$. Also

$$0 \leq IF(z) + b \leq \frac{\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\, d\varphi = \pi$$

was zu beweisen war.

2. Die Integralbedingungen (2) können durch arithmetische Relationen ersetzt werden. Es gilt der **Satz II:**

Die Funktion

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

gehört zur Klasse C, wenn und nur wenn bei jedem gegebenen n die Koeffizienten in folgender Form dargestellt werden können

$$A_k = \frac{e^{ik\vartheta_n}}{k}\sum_{j=0}^{y}\left(e^{-ki\varphi_{2j}^{(n)}} - e^{-ki\varphi_{2j+1}^{(n)}}\right),$$

$$1 \leq k \leq n, \qquad 0 \leq y \leq n,$$

$$0 = \varphi_0^{(n)} < \varphi_1^{(n)} < \varphi_2^{(n)} < \dots < \varphi_{2y+1}^{(n)} < 2\pi$$

$$(\varphi_1^{(n)} - \varphi_0^{n}) + (\varphi_3^{(n)} - \varphi_2^{(n)}) + \dots + (\varphi_{2y+1}^{(n)} - \varphi_{2y}^{(n)}) = 2b$$

ϑ_n ist eine feste reelle Zahl.

Um diesen Satz zu beweisen, bilden wir zuerst eine besondere Funktion der Klasse C, welche durch folgende besondere Funktion $\psi(\varphi)$ definiert ist. Es seien $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{2k+1}$ reelle Zahlen. Es sei

$$0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2k+1} < 2\pi,$$

$$(\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \dots + (\varphi_{2k+1} - \varphi_{2k}) = 2b < 2\pi \qquad (9)$$

In den Intervallen $<\varphi_1, \varphi_2)$, $<\varphi_3 - \varphi_4)$, $\dots$, $<\varphi_{2k+1}, 2\pi)$ sei

$\psi(\varphi)=0$. In den Intervallen $<\varphi_0, \varphi_1), <\varphi_2, \varphi_3), \ldots, <\varphi_{2k}, \varphi_{2k+1})$ sei $\psi(\varphi)=\pi$. Diese Funktion gehört zu der ersten Klasse von Baire und erfüllt die Bedingungen (7) und (7a). Die dazugehörige Funktion der Klasse C ist nach (8)

$$\Phi^*(z)=iz\left\{\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{e^{i\varphi}-z}+\int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\frac{d\varphi}{e^{i\varphi}-z}+\cdots+\int_{\varphi_{2k}}^{\varphi_{2k+1}}\frac{d\varphi}{e^{i\varphi}-z}\right\},$$

also

$$\Phi^*(z)=\sum_{\lambda=0}^{k}\log\frac{1-ze^{-i\varphi_{2\lambda+1}}}{1-ze^{-i\varphi_{2\lambda}}}=\sum_{n=1}^{\infty}A'_n z^n,$$

$$A'_n=\frac{1}{n}\sum_{\lambda=0}^{k}\left(e^{-ni\varphi_{2\lambda}}-e^{-ni\varphi_{2\lambda+1}}\right).$$

Es gehört also auch die Funktion

$$\left.\begin{aligned}\Phi_k(z)&=\Phi^*(ze^{i\vartheta})=\sum_{n=1}^{\infty}A_n z^n,\\ A_n&=\frac{e^{ni\vartheta}}{n}\sum_{\lambda=0}^{k}\left(e^{-ni\varphi_{2\lambda}}-e^{-ni\varphi_{2\lambda+1}}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

zur Klasse C. Dabei ist ϑ eine beliebige reelle Zahl.

Die in $|z|<1$ reguläre Funktion

$$\psi_k(z)=e^{\Phi_k(z)}=1+B_1z+B_2z^2+\cdots\qquad(11)$$

hat also die Eigenschaft

$$-b\leq\operatorname{arc}\psi_k(z)\leq\pi-b,\ |z|<1\qquad(11a)$$

Die Relationen (9) bilden also eine hinreichende Bedingung dafür, damit die Funktion (11)

$$\psi_k(z)=\prod_{\lambda=0}^{k}\frac{1-ze^{-i(\varphi_{2\lambda+1}-\vartheta)}}{1-ze^{-i(\varphi_{2\lambda}-\vartheta)}}$$

die Eigenschaft (11a) besitze.

Es seien nun $1+\gamma_1z+\gamma_2z^2+\cdots+\gamma_nz^n$, $1+\vartheta_1z+\vartheta_2z^2+\cdots+\vartheta_n{}^{2n}$, $\gamma_n\neq0$, $\vartheta_n\neq0$ zwei Teilerfremde Polynome, deren Wurzeln sämtlich auf dem Einheitskreise liegen. Wir werden untersuchen, unter welchen Bedingungen die rationale Funktion

$$R_n(z)=\frac{1+\gamma_1z+\gamma_2z^2+\cdots+\gamma_nz^n}{1+\vartheta_1z+\vartheta_2z^2+\cdots+\vartheta_nz^n}$$

zur Klasse $-b\leq\operatorname{arc}R_n(z)\leq\pi-b$, $|z|<1$ gehört. Es wird sich zeigen, daß $R_n(z)$ die Form (11) besitzen muß.

Der Bereich der Ebene w, welcher durch
$$-b \leq \operatorname{arc} w \leq \pi - b$$
definiert ist, wird durch die Funktion
$$w = \frac{1 - e^{i\alpha}\zeta}{1 + \zeta}, \quad \alpha = \pi - 2b \tag{12}$$
konform auf den Kreis $|\zeta| \leq 1$ so abgebildet, daß dem Punkte $w = 1$ der Punkt $\zeta = 0$ entspricht.

Nach der Lindelöf-schen Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemma ist also
$$R_n(z) = \frac{1 - e^{i\alpha}\varrho(z)}{1 + \varrho(z)}$$
wo $|\varrho(z)| \leq |z|$ in $|z| < 1$ regulär ist. $\varrho(z)$ ist also eine Funktion, welche nach den Untersuchungen von I. Schurr[3]) die Form
$$\varrho(z) = e^{ik_1} z \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - \alpha_k}{1 - z\bar{\alpha}_k} = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{13}$$
haben muß, wobei $|\alpha_k| < 1$ und k_1 reel ist. Nach der eben zitierten Abhandlung haben die Gleichungen
$$Q(z) + P(z) = 0 \tag{α}$$
$$Q(z) - e^{-i\alpha} P(z) = 0 \tag{β}$$
nur einfache Wurzeln, welche sämtlich auf dem Einheitskreise liegen. Dabei sind die Polynome (α) und (β) teilerfremd und zwischen zwei benachbarten Wurzeln der Gleichung (α) liegt immer nur eine einzige Wurzel von (β) und auch umgekehrt. $R_n(z)$ hat also die Form
$$R_n(z) = \frac{Q(z) - e^{i\alpha} P(z)}{Q(z) + P(z)}.$$
Bezeichnen wir mit ϑ eine noch unbestimmte reelle Zahl, so wird
$$R_n(ze^{-i\vartheta}) = e^{(\pi+\alpha)i} \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z - e^{i(\lambda - \alpha + n\vartheta)}}{z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + e^{i(\lambda + n\vartheta)}}.$$
Jetzt wählen wir ϑ so, daß der Nenner die Wurzel $e^{i\varphi_0} = 1$ besitzt, was immer möglich ist. Es seien $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_2}, \ldots\ldots, e^{i\varphi_{2n-2}}$ die Wurzeln des Nenners und $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_3}, \ldots\ldots\ldots, e^{i\varphi_{2n-1}}$ die Wurzeln des Zählers. Dabei ist
$$0 = \varphi_0 < \varphi_2 < \ldots\ldots < \varphi_{2n-2} < 2\pi$$
$$0 < \varphi_1 < \varphi_3 < \ldots\ldots < \varphi_{2n-1} < 2\pi$$

[3]) Crelle Journal, Bd. 147, S. 230.

Weiter ist

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_3+\cdots+\varphi_{2n-1})} = -e^{i(\lambda-\alpha+n\vartheta)}$$

$$e^{i(\varphi_0+\varphi_2+\cdots+\varphi_{2n-2})} = e^{i(\lambda+n\vartheta)}$$

also

$S = (\varphi_1-\varphi_0) + (\varphi_3-\varphi_2) + \cdots + (\varphi_{2n-1}-\varphi_{2n-2}) = \pm(2k_1+1)\pi - \alpha$, wo k_1 eine positive ganze Zahl oder Null ist. Nach (12) ist also diese Summe gleich $\pm 2k\pi + 2b$, wo k wieder eine positive ganze Zahl oder Null ist. Da $0 < b < \pi$ ist und S positiv und kleiner als 2π sein muß, so muß $k = 0$. Daraus folgt, daß

$$R_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - ze^{-i(\varphi_{2k+1}-\vartheta)}}{1 - ze^{-i(\varphi_{2k}-\vartheta)}}$$

was zu beweisen war.

Es sei nun

$$\psi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$$

eine beliebige Reihe, welche in $|z| < 1$ konvergiert und bei welcher

$$-b \leq \operatorname{arc} \psi(z) \leq \pi - b$$

Nach den Untersuchungen von Carathéodory ist es immer möglich eine solche Folge von Funktionen des oben betrachtenen Typus (11)

$$\psi_k(z), \ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

so zu konstruiren, daß sie in jedem Kreise $|z| \leq \varrho < 1$ gleichmäßig zu $\psi(z)$ konvergiert. Dabei sind die k ersten Koeffizienten von $\psi_k(z)$ den k ersten Koeffizienten $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_k$ von $\psi(z)$ gleich. Außerdem jede Funktion $f(z)$ der Klasse C kann in der Form

$$f(z) = \log \psi(z)$$

dargestellt werden. Infolgedessen existiert für jede Funktion $f(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$ eine Folge von Funktionen

$$f_k(z) = \log \psi_k(z), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

welche in jedem Kreise $|z| \leq \varrho < 1$ gleichmäßig zu $f(z)$ konvergiert und dabei stimmen die k ersten Koeffizienten von $f_k(z)$ mit den k ersten Koeffizienten von $f(z)$ überein. Dadurch ist der **Satz II** bewiesen.

Daraus folgt der **Satz III.**

Es sei $0 < b < \pi$. Eine in $0 \leq r < 1$ harmonische Funktion

$$u(r, \varphi) = b + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\, r^n$$

hat die Eigenschaft

$$0 \leq w(r, \varphi) \leq \pi,$$

wenn und nur wenn

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) d\vartheta \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \vartheta) + r^2}$$

wobei $\psi(\vartheta)$ eine im Satze I. definierte Baire-sche Funktion ist.

Nach dem Satze II. kann daß dann und nur dann eintreten, wenn bei jedem gegebenen n die Koeffizienten der Fourierschen Reihe in folgender parametrischen Form darstellbar sind:

$$\alpha_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{(y)} \left\{ \sin k(\vartheta_n - \varphi_{2j}^{(n)}) - \sin k(\vartheta_n - \varphi_{2j+1}^{(n)}) \right\},$$

$$\beta_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{y} \left\{ \cos k(\vartheta_n - \varphi_{2j}^{(n)}) - \cos k(\vartheta_n - \varphi_{2j+1}^{(n)}) \right\},$$

$$1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq y \leq n,$$

$$0 \leq \varphi_0^{(n)} < \varphi_1^{(n)} < \varphi_2^{(n)} < \ldots\ldots < \varphi_{2y+1}^{(n)} < 2\pi,$$

$$(\varphi_1^{(n)} - \varphi_0^{(n)}) + (\varphi_3^{(n)} - \varphi_2^{(n)}) + \ldots\ldots + (\varphi_{2y+1}^{(n)} - \varphi_{2y}) = 2b$$

ϑ_n ist eine reelle Zahl.

Résumé.

Soit $0 < b < \pi$; soit alors C la classe de toutes les fonctions

$$f(z) = \sum_1^{\infty} A_n z^n,$$

holomorphes pour $|z| < 1$ et telles que

$$-b \leq If(z) \leq \pi - b, \quad \text{pour } |z| < 1.$$

On alors a le résultat suivant:

Pour qu'une fonction $f(z)$ appartienne à la classe C, il faut et il suffit que l'on ait[1])

$$f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\varphi) d\varphi}{e^{i\varphi} - z},$$

où $\psi(\varphi)$ (définie presque partout pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) est une fonction réelle de la 1[ère] classe de Baire au plus et telle que

$$0 \leq \psi(\varphi) \leq \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) d\varphi = 2\pi b.$$

---

[1]) L'intégrale étant dans le sens de M. Lebesgue.