Eduard Čech

Sulla differenziabilita del triedro di Frenet

Ann. Mat. Pura Appl. 49 (1960), 91-96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501104

Sulla differenziabilità del triedro di Frenet.

Memoria di EDUARD ČECH (a Praga)

A Giovanni Sansone nel suo 70^mo compleanno

Sunto. - *Lo studio della differenziabilità del punto corrente, della tangente e del piano osculatore di una curva regolare dello spazio euclideo che l'autore pubblicò altrove vien qui esteso a tutti gli spigoli del triedro di Frenet.*

Nello spazio ordinario consideriamo dapprima una curva C riferita ad un parametro t fisso. C (ed il parametro t) sia regolare nel senso che valgano formole di FRENET

$$\frac{dX}{dt} = K_0 e_1, \tag{1}$$

$$\frac{de_1}{dt} = K_1 e_2, \qquad \frac{de_2}{dt} = - K_1 e_1 + K_2 e_3, \qquad \frac{de_3}{dt} = - K_2 e_2 \tag{2}$$

con K_i funzioni continue *diverse da zero per ogni valore di* t; dove X è il punto mobile di C ed e_i sono tre vettori ortonormali. Poniamo

$$\text{cl}\, K_i = r_i, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

ove $\text{cl}\, f \geqq 0$ indica la continuità di $f(t)$, $\text{cl}\, f \geqq s$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ indica l'esistenza e continuità della derivata s-ma di $f(t)$; per un ente geometrico G s'indica con $\text{cl}\, G$ il minimo valore di $\text{cl}\, G_\lambda$, G_λ percorrendo le coordinate non omogenee di G. Indichiamo con E_i gli spigoli del triedro di FRENET che sono le rette determinate dal punto X e dai vettori unità e_i; F_i sia il piano perpendicolare ad E_i che passa per X. Il nostro scopo è di esprimere i numeri

$$\text{cl}\, X, \qquad \text{cl}\, E_i, \qquad \text{cl}\, F_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

mediante i numeri (3); il caso banale $r_0 = r_1 = r_2 = \infty$ può escludersi. Il problema è stato *parzialmente* risoluto nella mia Memoria *Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions*, « Czechoslovak Journal of Mathematics », 7 (82), 1957, 599-631 (qui citato Dét.)

dove però non ho esaminato che i numeri $\mathrm{cl}\, X$, $\mathrm{cl}\, E_1$, $\mathrm{cl}\, F_3$; si osservi che E_1 è la tangente e F_3 il piano osculatore a C nel punto X. Ricordiamo [Dét. (3.2)] che

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3 = r_1 + 1 \quad \text{per} \quad r_1 = r_2, \\
&\mathrm{cl}\, e_1 = r_2 + 2, \quad \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3 = r_2 + 1 \quad \text{per} \quad r_1 > r_2, \\
&\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = r_1 + 1, \quad \mathrm{cl}\, e_3 = r_1 + 2 \quad \text{per} \quad r_1 < r_2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Ponendo

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{6}$$

si deduce dalle (1) e (2) che

$$\frac{dx_1}{dt} = K_0 + K_1 x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -K_1 x_1 + K_2 x_3, \qquad \frac{dx_3}{dt} = -K_2 x_2. \tag{7}$$

Ponendo poi

$$[Xe_1] = -x_2 e_3 + x_3 e_2, \qquad [Xe_2] = -x_3 e_1 + x_1 e_3, \qquad [Xe_3] = x_2 e_1 - x_1 e_2 \tag{8}$$

si deduce dalle (2) e (7) che

$$
\begin{aligned}
&\frac{d[Xe_1]}{dt} = K_1[Xe_2], \qquad \frac{d[Xe_2]}{dt} = K_0 e_3 - K_1[Xe_2] + K_2[Xe_3], \\
&\frac{d[Xe_3]}{dt} = -K_0 e_2 - K_2[Xe_2].
\end{aligned} \tag{9}
$$

Si vede facilmente che per $i = 1, 2, 3$

$$\mathrm{cl}\, \mathcal{E}_i = \min(\mathrm{cl}\, [Xe_i],\ \mathrm{cl}\, e_i), \tag{10}$$

$$\mathrm{cl}\, \mathcal{F}_i = \min(\mathrm{cl}\, e_i,\ \mathrm{cl}\, x_i); \tag{11}$$

inoltre la (1) dà

$$\mathrm{cl}\, X = \min(r_0,\ \mathrm{cl}\, e_1) + 1. \tag{12}$$

Esaminiamo successivamente le tre possibilità registrate in (5), cominciando col caso $r_1 = r_2$ che dà $\mathrm{cl}\, e_i = r_1 + 1$ $(i = 1, 2, 3)$. Secondo la (12) si ha $\mathrm{cl}\, X = r_1 + 2$ per $r_0 \geqq r_1 + 1$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ per $r_0 \leqq r$. Sia $r_0 \geqq r_1 + 1$, allora $\mathrm{cl}\, x_i = \mathrm{cl}\, (X \cdot e_i) \geqq r_1 + 1$ sicchè la (11) dà $\mathrm{cl}\, \mathcal{F}_1 = x_1 + 1$ e la (8) dà $\mathrm{cl}\, [Xe_i] \geqq x_1 + 1$ sicchè $\mathrm{cl}\, \mathcal{E}_i = r_1 + 1$ secondo la (10). Se $r_0 = r_1$, concludiamo dalle (10) e (11) che $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_i = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_i = r_1 + 1$. Sia infine $r_0 < r$; allora le (7) mostrano che $\mathrm{cl}\,x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\,x_2 \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,x_3 \geqq r_0 + 2$ cosicchè la (11) dà $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = r_0 + 1$ mentre dalle (8) segue che $\mathrm{cl}\,[Xe_2] = \mathrm{cl}\,[Xe_3] = r_0 + 1$ e la (10) dà $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r_0 + 1$. Dalla ($9_1$) si deduce che $\mathrm{cl}\,[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ ed allora la (10) dà $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = r_0 + 2$. Resta a determinare $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_j$ ($j = 2, 3$) per $r_0 < r_1$. Dalle (7) si deduce facilmente che $\mathrm{cl}\,x_j \geqq r_0 + 2$; come $\mathrm{cl}\,e_j \geqq r_0 + 2$, si ha $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_j \geqq r_0 + 2$ secondo la (11). Se $r_0 = r_1 - 1$, le (5) danno $\mathrm{cl}\,e_j = r_0 + 2$, donde $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_j = r_0 + 2$. Sia dunque $\mathrm{cl}\,r_0 \leqq r_1 - 2$. Allora si deduce facilmente dalle (7) che $\mathrm{cl}\,x_0 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\,x_2 = r_0 + 2$ e $\mathrm{cl}\,x_3 \geqq r_0 + 3$, ma $\mathrm{cl}\,x_3 = r_0 + 3$ nel caso $r_0 \leqq r_1 - 3$; essendo $\mathrm{cl}\,e_2 = \mathrm{cl}\,e_3 = r_1 + 1$, si vede dalla (11) che $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r_0 + 3$.

Esaminiamo ora il secondo caso (5) cioè $r_1 > r_2$, che dà $\mathrm{cl}\,e_1 = r_2 + 2$, $\mathrm{cl}\,e_2 = \mathrm{cl}\,e_3 = r_2 + 1$. Secondo la (12) si ha $\mathrm{cl}\,X = r_2 + 3$ per $r_0 \geqq r_2 + 2$, $\mathrm{cl}\,X = r_0 + 1$ per $r_0 \leqq r_2 + 1$. Per $r_0 \geqq r_2 + 1$ si vede dalle (7) che $\mathrm{cl}\,x_1 \geqq r_2 + 2$, $\mathrm{cl}\,x_2 = \mathrm{cl}\,x_3 = r_2 + 1$, donde secondo la (11) $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = r_2 + 2$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = \mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r_2 + 1$ e secondo le (8) e (11) $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r_2 + 1$; inoltre la ($9_1$) dà $\mathrm{cl}\,[Xe_1] \geqq r_2 + 2$ sicchè $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = r_2 + 2$. Per $r_0 = r$ si ha $\mathrm{cl}\,x_1 = r_2 + 1$ secondo (7_1) e le (11) dànno $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = \mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = \mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r_2 + 1$; inoltre $\mathrm{cl}\,[Xe_i] \geqq r_2 + 1$ donde $\mathrm{cl}\,[Xe_1] \geqq r_2 + 2$ secondo (9_1) sicchè $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = r_2 + 2$, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r_2 + 1$. Se si ha $r_0 < r_2$, la (7_1) dà $\mathrm{cl}\,x_1 = r_0 + 1$. Nel caso $r_0 = r_2 - 1$ le (7) dànno $\mathrm{cl}\,x_2 \geqq r_2 + 1 = \mathrm{cl}\,x_3$, donde $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = \mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = \mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r_2 + 1$; inoltre si ha $\mathrm{cl}\,[Xe_2] = \mathrm{cl}\,[Xe_3] = r_2$ dalle (8) e $\mathrm{cl}\,[Xe_1] = r_2 + 1$ dalla (9_1) sicchè $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = r_2 + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r$. Per $r_0 \leqq r_2 - 2$ si ottiene $\mathrm{cl}\,x_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,x_3 \geqq r_0 + 3$ ($= r_0 + 3$ per $r_0 \leqq r_2 - 3$ sicchè $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r_0 + 3$ dalle (11); inoltre) $\mathrm{cl}\,[Xe_2] = \mathrm{cl}\,[Xe_3] = r_0 + 1$ secondo le (8) e $\mathrm{cl}\,[Xe_1] = r_0 + 2$ secondo la (9_1) sicchè $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r_0 + 1$.

Resta il caso $r_1 < r_2$ in cui $\mathrm{cl}\,e_1 = \mathrm{cl}\,e_2 = r_1 + 1$, $\mathrm{cl}\,e_3 = r_1 + 2$. Secondo (12) si ha $\mathrm{cl}\,X = r_1 + 2$ per $r_0 \geqq r_1 + 1$, $\mathrm{cl}\,X = r_0 + 1$ per $r_0 \leqq r$. Per $r_0 \geqq r_1$ si ha $\mathrm{cl}\,x_1 \geqq r_1 + 1 = \mathrm{cl}\,e_1$, $\mathrm{cl}\,x_2 \geqq r_1 + 1 = \mathrm{cl}\,e_2$, $\mathrm{cl}\,x_3 \geqq r_1 + 2 = \mathrm{cl}\,e_3$, donde $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = \mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = r_1 + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r_1 + 2$; inoltre $\mathrm{cl}\,[Xe_j] \geqq r_1 + 1 = \mathrm{cl}\,e_j$ ($j = 1, 2$) dalle (8) e $\mathrm{cl}\,[Xe_3] \geqq r_1 + 2 = \mathrm{cl}\,e_3$ dalla (9_3), donde $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = r_1 + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r_1 + 2$. Per $r_0 = r_1 - 1$ si vede dalle (5) che $\mathrm{cl}\,x_1 = r_1$, $\mathrm{cl}\,x_2 \geqq r_1 + 1$ $\mathrm{cl}\,x_3 \geqq r_1 + 2$ e secondo (11) si ottiene $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = r$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = r + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r + 2$; inoltre $\mathrm{cl}\,[Xe_j] = r_1$ ($j = 2, 3$) dalle (8) e $\mathrm{cl}\,[Xe_1] \geqq r_1 + 1 = \mathrm{cl}\,e_1$, donde $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = r_1 + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r_1$. Per $r_0 \leqq r_1 - 2$ si trova $\mathrm{cl}\,x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\,x_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,x_3 = r_0 + 3$, donde $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{F}_3 = r_0 + 3$; inoltre le (8) dànno $\mathrm{cl}\,[Xe_1] = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,[Xe_2] = \mathrm{cl}\,[Xe_3] = r_0 + 1$, sicchè $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_1 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_2 = \mathrm{cl}\,\mathcal{E}_3 = r_0 + 1$.

Posto

$$r = \min(r_0,\ r_1,\ r_2)$$

si è arrivato al quadro

$cl\,K_0$	$cl\,K_1$	$cl\,K_2$	$cl\,X$	$cl\,\mathcal{E}_1$	$cl\,\mathcal{E}_2$	$cl\,\mathcal{E}_3$	$cl\,\mathcal{F}_1$	$cl\,\mathcal{F}_2$	$cl\,\mathcal{F}_3$
r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$

In tale quadro le sole colonne nuove [v. Dét. (3.8)] son quelle che dànno cl $\mathcal{E}_2$, cl $\mathcal{E}_3$, cl $\mathcal{F}_1$, cl $\mathcal{F}_2$.

Finora la curva C si supponeva riferita ad un parametro regolare t qualunque. Passiamo a considerare i parametri notevoli

$s = \int K_0(t)dt$ (arco della curva C),

$\sigma_1 = \int K_1(t)dt$ (arco dell'indicatrice sferica delle tangenti a C),

$\sigma_2 = \int K_2(t)dt$ (arco dell'indicatrice sferica delle binormali a C) ed introduciamo la flessione

$$k_1 = \frac{K_1}{K_0}$$

e la torsione

$$k_2 = \frac{K_2}{K_0}$$

della curva C. Abbiamo visto (Dét. § 4) che per $r = 0, 1, 2, \ldots$ vi sono sei casi possibili.

Caso $A(r)$: $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} = r.$

Caso $B(r)$: $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) = r,\ \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_1) \geqq r + 1.$

Caso $C_1(r)$: $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) = r,\ \mathrm{cl}\, \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} = r + 1.$

Caso $C_2(r)$: $\mathrm{cl}\, k_2(\sigma_1) = r,\ \mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) = r + 1.$

Caso $D_1(r)$: $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) = r,\ \mathrm{cl}\, \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \geqq r + 2.$

Caso $D_2(r)$: $\mathrm{cl}\, k_2(\sigma_1) = r,\ \mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) \geqq r + 2.$

Applicando il quadro (13) si arriva successivamente nei seguenti casi al seguente risultato.

Caso $A(r)$	$cl\, X$	$cl\, \mathfrak{E}_1$	$cl\, \mathfrak{E}_2$	$cl\, \mathfrak{E}_3$	$cl\, \mathfrak{F}_1$	$cl\, \mathfrak{F}_2$	$cl\, \mathfrak{F}_3$
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

Caso $B(r)$	$cl\, X$	$cl\, \mathfrak{E}_1$	$cl\, \mathfrak{E}_2$	$cl\, \mathfrak{E}_3$	$cl\, \mathfrak{F}_1$	$cl\, \mathfrak{F}_2$	$cl\, \mathfrak{F}_3$
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

Caso $C_1(r)$	$cl\, X$	$cl\, \mathfrak{E}_1$	$cl\, \mathfrak{E}_2$	$cl\, \mathfrak{E}_3$	$cl\, \mathfrak{F}_1$	$cl\, \mathfrak{F}_2$	$cl\, \mathfrak{F}_3$
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

Caso $C_2(r)$	$cl\ X$	$cl\ \mathcal{E}_1$	$cl\ \mathcal{E}_2$	$cl\ \mathcal{E}_3$	$cl\ \mathcal{F}_1$	$cl\ \mathcal{F}_2$	$cl\ \mathcal{F}_3$
$t = s$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

Caso $D_1(r)$	$cl\ X$	$cl\ \mathcal{E}_1$	$cl\ \mathcal{E}_2$	$cl\ \mathcal{E}_3$	$cl\ \mathcal{F}_1$	$cl\ \mathcal{F}_2$	$cl\ \mathcal{F}_3$
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

Caso $D_2(r)$	$cl\ X$	$cl\ \mathcal{E}_1$	$cl\ \mathcal{E}_2$	$cl\ \mathcal{E}_3$	$cl\ \mathcal{F}_1$	$cl\ \mathcal{F}_2$	$cl\ \mathcal{F}_3$
$t = s$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$