Eduard Čech
Sur la connexité locale d'ordre supérieur

Compositio Math. 2 (1935), 1-25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501037

# Sur la connexité locale d'ordre supérieur

par

Eduard Čech

Brno

Ce Mémoire est divisé en deux chapitres. Dans le premier je donne un bref exposé de la théorie de l'homologie dans un espace quelconque, en supposant que les coefficients appartiennent à un *groupe abélien additif complètement arbitraire* [1]. Je me sers beaucoup de mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque* [Fund. Math. **19** (1932), 149—183], cité: HOMOLOGIE. Je voudrais attirer l'attention du lecteur sur le théorème du n° 11 qui exprime en toute généralité le lien entre homologie et homotopie. On pourrait utiliser ce théorème (et ceux donnés dans HOMOLOGIE) pour démontrer les propriétés combinatoires de l'espace euclidien *sans faire usage de polyèdres.*

Dans le second chapitre je m'occupe de la connexité locale d'ordre supérieur, définie moyennant l'homologie [2]. La connexité locale d'ordre 0 ne diffère guère (v. n°. 15) de la connexité locale au sens classique. Après avoir donné la définition (n°. 13), j'expose une série de critères pour la connexité locale d'ordre supérieur. Les corollaires des n^os^. 35 et 37, ne contenant explicitement aucune notion combinatoire, sont intéressants parce qu'ils donnent une *localisation des deux théorèmes classiques de* JANISZEWSKI [3].

Dans un Mémoire qui fera suite à celui-ci, j'étudierai en particulier les espaces bicompacts partout localement connexes d'ordres $0, 1, \ldots, n$. En ce qui concerne les cycles de dimension $n$, ces espaces sont une généralisation naturelle des polyèdres.

---

[1]) Cf. P. ALEXANDROFF, Über die Urysohnschen Konstanten [Fundamenta **20** (1933), 144—150 (141)].

[2]) Cette notion n'est pas nouvelle (voir P. ALEXANDROFF [Annals of Math. **30** (1929), note 63 au bas de la page 181]); néanmoins elle ne semble pas avoir été étudiée jusqu'à présent.

[3]) Sur les coupures du plan faites par les continus. [Prace Matem. Fiz. **26** (1913)]. Il existe une autre localisation de ces théorèmes, que je publierai ailleurs.

# I.

**1.** Soit $R$ un espace topologique (Homologie, III, 1). Nous aurons souvent l'occasion de supposer que $R$ satisfasse à l'un des *axiomes de séparation* que voici:

1.1. (*Axiome de M. Hausdorff*): $a$ et $b$ étant deux points de $R$ distincts l'un de l'autre, il existe des ensembles ouverts $U$ et $V$ tels que $a \in U$, $b \in V$, $UV = 0$.

1.2. (*Régularité de* $R$): $U$ étant un entourage[4]) de $a \in R$, il existe un entourage $V$ de $a$ tel que $\overline{V} \subset U$.

1.3. (*Normalité de* $R$): $F$ et $\Phi$ étant deux ensembles fermés tels que $F\Phi = 0$, il existe des ensembles ouverts $U$ et $V$ tels que $F \subset U$, $\Phi \subset V$, $UV = 0$.

1.4. (*Normalité complète de* $R$): Soit $S$ un sous-ensemble arbitraire de $R$; soient $P$ et $Q$ deux ensembles ouverts dans $S$ et tels que $PQ = 0$: alors il existe des ensembles $U$ et $V$ ouverts dans $R$ et tels que $P \subset U$, $Q \subset V$, $UV = 0$.

Chacun de ces axiomes est plus fort que les précédents. Chaque espace *métrique* satisfait à l'axiome 1.4. Les exiomes 1.1, 1.2 et 1.4 sont *héréditaires*: chaque sous-ensemble $S$ d'un espace $R$ satisfaisant à ces axiomes les vérifie lui-même. L'espace $R$ satisfait à 1.4 si et seulement si cet espace satisfait *héréditairement* à 1.3.

**2.** *Soit $R$ un espace complètement normal. Soit $S$ un sous-ensemble arbitraire de $R$. Soit $V_0$ un sous-ensemble ouvert de $S$; soit $U$ un sous-ensemble ouvert de $R$; soit $V_0 \subset U$. Il existe un sous-ensemble $V$ ouvert de $R$ tel que $V \subset U$, $V_0 = SV$, $S\overline{V}_0 = S\overline{V}$.*

*Démonstration.* Les ensembles $V_0$ et $S - \overline{V}_0$ sont ouverts dans $S$ et $V_0(S - \overline{V}_0) = 0$. D'après 1.4 il existe des ensembles $G$ et $H$ ouverts dans $R$ et tels que $V_0 \subset G$, $S - \overline{V}_0 \subset H$, $GH = 0$. $H$ étant ouvert, on a $\overline{G}H = 0$. L'ensemble $V_0$ étant ouvert dans $S$, il existe un ensemble $K$ ouvert dans $R$ et tel que $V_0 = SK$. Posons $V = UGK$. Alors $SV = SK$. $UG = V_0$. $UG = V_0$. Comme $V_0 \subset V$, on a $S\overline{V}_0 \subset S\overline{V}$. Comme $S - \overline{V}_0 \subset H$, $\overline{G}H = 0$, $\overline{V} \subset \overline{G}$, on a $(S - \overline{V}_0)\overline{V} = 0$, d'où $S\overline{V} \subset S\overline{V}_0$. Donc $S\overline{V}_0 = S\overline{V}$.

**3.** L'espace $R$ s'appelle *bicompact* s'il satisfait à 1.1 et si de chaque famille d'ensembles ouverts recouvrant $R$ on peut extraire une famille *finie* recouvrant $R$.

---

[4]) Un *entourage* d'un point ou d'un sous-ensemble est un ensemble *ouvert* contenant le point ou le sous-ensemble considéré.

Chaque espace bicompact est normal. Un sous-ensemble $S$ d'un espace bicompact $R$ est bicompact si et seulement s'il est fermé dans $R$. Un espace *métrique* $R$ est bicompact si et seulement s'il est *compact*, c'est-à-dire si chaque suite de points de $R$ contient une suite partielle convergente.

**4.** Soit $R$ un espace topologique *quelconque*. Soit $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Nous dirons[5]) que dim $R \leqq n$, si chaque réseau[6]) $\mathfrak{U}$ dans $R$ possède un affinement (Homologie II, 9) $\mathfrak{B}$ d'ordre[7]) $\leqq n$.

**5.** $A$ et $B$ étant deux ensembles quelconques, on désigne par $A \times B$ l'ensemble de tous les couples ordonnés $(a, b)$, où $a \epsilon A$, $b \epsilon B$. Supposons que $A$ et $B$ soient des espaces topologiques. $M$ étant un sous-ensemble arbitraire de $A \times B$, on dit que $M$ est ouvert dans $A \times B$ si, $(a, b)$ étant un point quelconque de $M$, il existe un entourage $U$ de $a$ dans $A$ et un entourage $V$ de $b$ dans $B$ tels que $U \times V \subset M$. On voit sans peine que $A \times B$ est en vertu de cette définition un espace topologique.

Si $\mathfrak{U}$ est un réseau dans $A$ et si $\mathfrak{B}$ est un réseau dans $B$, l'ensemble $\mathfrak{U} \times \mathfrak{B}$ de tous les $U \times V$, où $U$ et $V$ parcourent respectivement tous les sommets de $\mathfrak{U}$ et de $\mathfrak{B}$, est évidemment un réseau dans $A \times B$.

**6.** *Soient $A$ et $B$ deux espaces bicompacts. Soit $\mathfrak{Z}$ un réseau dans $A \times B$. Il existe un réseau $\mathfrak{U}$ dans $A$ et un réseau $\mathfrak{B}$ dans $B$ tels que $\mathfrak{U} \times \mathfrak{B}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$.*

*Démonstration.* Soit $a$ un point de $A$. Pour chaque $b \epsilon B$ il existe un sommet $Z(a, b)$ de $\mathfrak{Z}$ tel que $(a, b) \epsilon Z(a, b)$. L'ensemble $Z(a, b)$ étant ouvert dans $A \times B$, il existe un entourage $P(a, b)$ de $a$ dans $A$ et un entourage $Q(a, b)$ de $b$ dans $B$ tels que $P(a, b) \times Q(a, b) \subset Z(a, b)$. Les ensembles $Q(a, b)$ sont ouverts dans $B$ et $\sum\limits_{b \epsilon B} Q(a, b) = B$. L'espace $B$ étant bicompact, il existe des points $b_{a,1}, b_{a,2}, \ldots, b_{a,k(a)}$ de $B$ en nombre fini tels que $\mathfrak{G}(a) = \{Q(a, b_{a,1}), Q(a, b_{a,2}), \ldots, Q(a, b_{a,k(a)})\}$ est un réseau dans $B$. Posons

$$U(a) = \prod_{j=1}^{k(a)} P(a, b_{a,j}).$$

---

[5]) Cf. Časopis pro pěst. mat. a fys. **62** (1933), 277—291.

[6]) Les réseaux considérés dans ce Mémoire sont tous de réseaux *ouverts* (Homologie III, 2).

[7]) L'*ordre* du réseau $\mathfrak{B}$ est la dimension maxima d'un $\mathfrak{B}$-simplexe (Homologie II, 2).

Les ensembles $U(a)$ sont ouverts dans $A$ et $\sum_{a \epsilon A} U(a) = A$. L'espace $A$ étant bicompact, il existe des points $a_1, a_2, \ldots, a_h$ de $A$ en nombre fini tels que $\mathfrak{U} = \{U(a_1), U(a_2), \ldots, U(a_h)\}$ est un réseau dans $A$. Soit $\mathfrak{V}$ un réseau dans $B$ qui soit un affinement simultané de tous les réseaux $\mathfrak{S}(a_i)$ $(1 \leqq i \leqq h)$. Alors $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ est un réseau dans $A \times B$. Soit $U(a_i) \times V$ un sommet arbitraire de $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$. Il suffit de prouver qu'il existe un point $b \epsilon B$ tel que $U(a_i) \times V \subset Z(a, b)$. Le réseau $\mathfrak{V}$ étant un affinement de $\mathfrak{S}(a_i)$, il existe un indice $j$ $(1 \leqq j \leqq k(a_i))$ tel que $V \subset Q(a_i, b_{a_i, j})$. Or on a $U(a_i) \subset P(a_i, b_{a_i, j})$. Donc

$$U(a_i) \times V \subset P(a_i, b_{a_i, j}) \times Q(a_i, b_{a_i, j}) \subset Z(a_i, b_{a_i, j}).$$

**7.** Un espace topologique $R$ est dit *connexe* si une décomposition $R = U + V$,· où $U$ et $V$ sont des sous-ensembles ouverts et non vides, ne peut avoir lieu que si $UV \neq 0$

Un sous-ensemble *connexe maximé* d'un espace $R$ s'appelle une *composante* de $R$. Chaque point $a \epsilon R$ appartient à une et à une seule composante de $R$.

Deux points $a$ et $b$ de l'espace $R$ sont dits *séparés dans* $R$, s'il existe une décomposition $R = U + V$, où $U$ et $V$ sont des sous-ensembles ouverts de $R$ tels que $a \epsilon U$, $b \epsilon V$, $UV = 0$. Un sous-ensemble $Q$ de $R$ s'appelle une *quasicomposante* de $R$, s'il est maximé (saturé) relativement à la propriété suivante: deux de ses points ne sont jamais séparés dans $R$. Chaque point $a \epsilon R$ appartient à une quasicomposante de $R$ et à une seule.

Chaque composante de $R$ fait partie d'une quasicomposante de $R$. Si le nombre total de quasicomposantes de $R$ est fini, ou bien si l'espace $R$ est bicompact, les quasicomposantes son' identiques avec les composantes.

**8.** Soient $A$ et $B$ deux espaces topologiques. Soit $f$ une fonction (univoque) définie dans $A$, dont les valeurs soient des points de $B$. On dit que la fonction $f$ est *continue* si, $U$ étant un sous-ensemble ouvert de $f(A) \subset B$, l'ensemble $f^{-1}(U)$ de tous les $x \epsilon A$ tels que $f(x) \epsilon U$ est ouvert dans $A$.

Si l'espace $A$ est bicompact, l'espace $f(A)$ l'est aussi pourvu que $B$ satisfasse à l'axiome de M. Hausdorff (1.1).

**9.** $\mathfrak{E}$ désigne l'ensemble de tous les nombres entiers. $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble de tous les nombres rationnels.

Un groupe abélien additif contenant au moins deux éléments sera appelé un *domaine*. $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{R}$ sont donc des domaines particuliers.

**10.** Soit $R$ un espace topologique. Soit $Z$ la famille de tous les réseaux ouverts dans $R$. Dans HOMOLOGIE II j'ai développé une théorie de l'homologie dans $R$ [8]) en supposant que les coefficients dans les cycles et dans les homologies appartiennent au domaine $\mathfrak{R}$. Toute la théorie reste d'ailleurs valable quand on remplace $\mathfrak{R}$ par le domaine des entiers réduits mod $m$, où $m = 2, 3, \ldots$; v. HOMOLOGIE V, 1.

Or soit $\mathfrak{D}$ un domaine complètement arbitraire. On voit sans peine que tout le contenu de HOMOLOGIE II, 1—15 se transporte *textuellement* au cas où on remplace $\mathfrak{R}$ par $\mathfrak{D}$. Pour plus de charté, j'introduirai les termes: $(n, \mathfrak{U})$-chaîne *du domaine* $\mathfrak{D}$ (HOMOLOGIE II, 3) et $(n, \mathfrak{U})$-cycle (absolu ou relatif [9])) *du domaine* $\mathfrak{D}$ (HOMOLOGIE II, 7) pour indiquer que les coefficients appartiennent à $\mathfrak{D}$.

Ajoutons les deux remarques suivantes:

10.1. $C^n(\mathfrak{U})$ étant une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne du domaine $\mathfrak{E}$ et $r$ étant un élément de $\mathfrak{D}$, on peut former la chaîne $rC^n(\mathfrak{U})$ du domaine $\mathfrak{D}$. Si $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$ (HOMOLOGIE II, 5), on a aussi $rC^n(\mathfrak{U}) \subset A$. Si $C^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ (HOMOLOGIE II, 4), on a aussi $rC^n(\mathfrak{U}) \to r\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ etc.

10.2. $C^0(\mathfrak{U}) = \sum_1^k r_i U_i$ étant une $(0, \mathfrak{U})$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$, je pose $J[C^0(\mathfrak{U})] = \sum_1^k r_i \epsilon \mathfrak{D}$. Si $C^0(\mathfrak{U}) \backsim 0$, on a $J[C^0(\mathfrak{U})] = 0$. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$; soit $\pi = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ (HOMOLOGIE II, 10 et 11); soit $C^0(\mathfrak{V})$ une $(0, \mathfrak{V})$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$; alors $J[\pi C^0(\mathfrak{V})] = JC^0(\mathfrak{V})$.

Comme dans HOMOLOGIE II, 20, on définit les $(n, R)$-cycles (absolus ou relatifs [9])) du domaine $\mathfrak{D}$. Nous convenons d'écrire simplement $C^n$ (p. ex.) au lieu de $\{C^n(\mathfrak{U})\}$: donc $C^n$ est l'ensemble de tous les $C^n(\mathfrak{U})$ attachés aux réseaux $\mathfrak{U}$.

Si $\Gamma^0$ est un $(0, R)$-cycle absolu du domaine $\mathfrak{D}$, on voit sans peine que l'élément $r = J[\Gamma^0(\mathfrak{U})]$ de $\mathfrak{D}$ est indépendant du choix du réseau $\mathfrak{U}$; je pose $r = J(\Gamma^0)$.

**11.** *Prémisses*: $1^0$ *$R$ et $T$ sont des espaces bicompacts,*

$2^0$ *$\alpha$ et $\beta$ sont deux points de $T$ non séparés* (v. 7) *l'un de l'autre dans $T$,*

$3^0$ *$S$ est un sous-ensemble fermé de $R$,*

$4^0$ *$f$ est une fonction continue définie dans $S \times T$,*

---

[8]) La famille $Z$ y était beaucoup plus générale; mais nous avons déjà signalé que, dans ce Mémoire, nous nous servirons exclusivement de *réseaux ouverts*.

[9]) Tous les cycles considérés dans ce Mémoire sont absolus.

$5^0$ $f(S \times T) = M \subset R$,
$6^0$ $f(x, \alpha) = x$ *pour chaque* $x \epsilon S$,
$7^0$ $f(S, \beta) = S^*$,
$8^0$ $\mathfrak{U}$ *est un réseau dans* $R$.

*Conclusion: Il existe un affinement* $\mathfrak{V}$ *de* $\mathfrak{U}$ *jouissant de la propriété suivante: Soit* $k = 0, 1, 2, \ldots.$ *Soit* $\pi = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. *Soit* $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ *un* $(k, \mathfrak{V})$*-cycle dans* $S$ *d'un domaine* $\mathfrak{D}$ *quelconque. Il existe un* $(k, \mathfrak{U})$*-cycle* $\Delta^k(\mathfrak{U})$ *dans* $S^*$ *du domaine* $\mathfrak{D}$ *tel que* $\pi\Gamma^k(\mathfrak{U}) \sim \Delta^k(\mathfrak{U})$ *dans* $M$.

*Démonstration.* Considérons le réseau $M\mathfrak{U}$ dans $M$ (Homologie III, 4). $U$ étant un sommet de $\mathfrak{U}$ tel que $MU \neq 0$, l'ensemble $f^{-1}(MU)$ est (v. 8) un sous-ensemble ouvert de $S \times T$; tous les $f^{-1}(MU)$ $(U \epsilon \mathfrak{U}, MU \neq 0)$ constituent un réseau $\mathfrak{Z}$ dans $S \times T$. D'après 6, il existe un réseau $\mathfrak{W}$ dans $S$ et un réseau $\mathfrak{T}$ dans $T$ tels que $\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$; soit $\varphi = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}, \mathfrak{Z})$. Les points $\alpha, \beta \epsilon T$ n'étant pas séparés dans $T$, il existe (Homologie III, 13) des sommets $T_i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ de $\mathfrak{T}$ tels que $\alpha \epsilon T_0$, $\beta \epsilon T_n$, $T_{i-1}T_i \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Soit $W$ un sommet quelconque de $\mathfrak{W}$. Alors $Z = \varphi(W \times T_0)$ est un sommet de $\mathfrak{Z}$. D'après la définition de $\mathfrak{Z}$, il existe un sommet $U = \psi_1 W$ de $\mathfrak{U}$ tel que $f(W \times T_0) \subset f(Z) = MU$. Comme $\alpha \epsilon T_0$, d'après 11.6 on a $W = f(W \times \alpha) \subset f(W \times T_0) \subset MU$, d'où $W \subset SU$, car $W \subset S$. Il en résulte que le réseau $\mathfrak{W}$ est un affinement de $S\mathfrak{U}$ et qu'il existe une projection $\pi_1 = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{W}, S\mathfrak{U})$ telle que $\pi_1 W = S.\ \psi_1 W$, $M\psi_1 W = f(Z)$, où $Z = \varphi(W \times T_0)$.

Chaque $W \epsilon \mathfrak{W}$ étant un ensemble ouvert dans $S$ et contenu dans $\pi_1 W = SU$, où $U = \psi_1 W$, on peut y attacher un ensemble $V = \psi_2 W$ ouvert dans $R$ et tel que $W = SV$, $V \subset U$. L'ensemble $R - \sum_{W \epsilon \mathfrak{W}} \psi_2 W \subset R - S$ est fermé dans $R$ et par suite bicompact. Il en résulte qu'on peut le recouvrir par un nombre fini d'ensembles $V'$ ouverts dans $R$, chaque $V'$ étant contenu dans un ensemble de la forme $U - S$, où $U \epsilon \mathfrak{U}$. En ajoutant ces ensembles $V'$ aux ensembles $V = \psi_2 W$, où $W \epsilon \mathfrak{W}$, on obtient un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ tel que $S\mathfrak{V} = \mathfrak{W}$. On voit qu'il existe une projection $\pi = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ telle que $\pi\psi_2 W = \psi_1 W$ pour chaque $W \epsilon \mathfrak{W}$.

Ceci étant, rangeons tous les sommets de $\mathfrak{W}$ dans une suite finie bien déterminée

$$W_0,\ W_1,\ \ldots,\ W_m.$$

Soit $(W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots, W_{\nu_k})$ un $(k, \mathfrak{W})$-simplexe; on peut supposer que $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_k$. Pour $1 \leqq i \leqq n$ posons [10])

[10]) Cf. Homologie II, 12.

$$P_i^{k+1}(W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots, W_{\nu_k}) =$$
$$= \sum_{h=0}^{k} (-1)^h (W_{\nu_0} \times T_{i-1}, \ldots, W_{\nu_h} \times T_{i-1}, W_{\nu_h} \times T_i, \ldots, W_{\nu_k} \times T_i),$$

en convenant que chaque symbole dont les sommets ne sont pas tous distincts l'un de l'autre signifie zéro. Donc

$$P_i^{k+1}(W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots, W_{\nu_k})$$

est une $(k, \mathfrak{W} \times \mathfrak{T})$-chaîne. Si

$$C^k(\mathfrak{W}) = \sum b_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_k} (W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots, W_{\nu_k})$$

est une $(k, \mathfrak{W}_k)$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$, posons

$$P_i^{k+1}[C^k(\mathfrak{W})] = \sum b_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_k} P_i^{k+1}(W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots W_{\nu_k}).$$

Pour $0 \leqq i \leqq n$ posons

$$\Omega_i^k[C^k(\mathfrak{W})] = \sum b_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_k} (W_{\nu_0} \times T_i, \ldots, W_{\nu_k} \times T_i);$$

c'est donc une $(k, \mathfrak{W} \times \mathfrak{T})$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$. On démontre sans peine[11]) que pour $1 \leqq i \leqq n$

$$(1) \quad P_i^{k+1}[C^k(\mathfrak{W})] \to \Omega_i^k[C^k(\mathfrak{W})] - $$
$$- \Omega_{i-1}^k[C^k(\mathfrak{W})] - P_i^k[FC^k(\mathfrak{W})]\ ^{12)}.$$

Or soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans $S$ du domaine $\mathfrak{D}$. Comme $S\mathfrak{V} = \mathfrak{W}$, on a (Homologie III, 7)

$$S\Gamma^k(\mathfrak{V}) = \sum a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_k} (W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots, W_{\nu_k}),$$

$$(2) \qquad \Gamma^k(\mathfrak{V}) = \sum a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_k} (\psi_2 W_{\nu_0}, \psi_2 W_{\nu_1}, \ldots, \psi_2 W_{\nu_k}).$$

D'après (1) on a pour $1 \leqq i \leqq n$

$$P_i^{k+1}[S\Gamma^k(\mathfrak{V})] \to \Omega_i^k[S\Gamma^k(\mathfrak{V})] - \Omega_{i-1}^k[S\Gamma^k(\mathfrak{V})],$$

car $\Gamma^k(\mathfrak{V}) \to 0$, d'où $S\Gamma^k(\mathfrak{V}) \to 0$. Donc

$$\Omega_i^k[S\Gamma^k(\mathfrak{V})] \sim \Omega_{i+1}^k[S\Gamma^k(\mathfrak{V})],$$

d'où

$$(3) \qquad \varphi\Omega_0^k[S\Gamma^k(\mathfrak{V})] \sim \varphi\Omega_n^k[S\Gamma^k(\mathfrak{V})].$$

Posons $Z_\nu = \varphi(W_\nu \times T_0)$, $Z'_\nu = \varphi(W_\nu \times T_n)$. Alors (3) s'écrit

$$\sum a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_k} (Z_{\nu_0}, Z_{\nu_1}, \ldots, Z_{\nu_k}) \sim \sum a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_k} (Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}, \ldots, Z'_{\nu_k}).$$

---

11) V. S. Lefschetz [Topology, II, 8].

12) Pour $k = 0$ on doit poser $P_i^0[FC^0(\mathfrak{W})] = 0$.

Comme $f(\mathfrak{Z}) = M\,\mathfrak{U}$, on en déduit sans peine que

$$\sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}[f(Z_{\nu_0}), f(Z_{\nu_1}), \ldots, f(Z_{\nu_k})]$$
$$\text{et } \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}[f(Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}, \ldots, Z'_{\nu_k})]$$

sont des $(k, M\,\mathfrak{U}_k)$-cycles du domaine $\mathfrak{D}$ homologues l'un à l'autre. En posant $f(Z_\nu) = MU_\nu$, $f(Z'_\nu) = MU'_\nu$, $U_\nu \epsilon \mathfrak{U}$, $U'_\nu \epsilon \mathfrak{U}$, on voit que

$$(4) \quad \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_k}) \sim \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_k}) \text{ dans } M,$$

les deux membres étant des $(k, \mathfrak{U})$-cycles du domaine $\mathfrak{D}$ dans $M$. Comme $Z_\nu = \varphi(W_\nu \times T_0)$, on a $f(Z_\nu) = M\,\psi_1 W_\nu$, d'où $U_\nu = \psi_1 W_\nu = \pi\psi_2 W_\nu$. On en déduit en vertu de (2) que

$$(5) \qquad \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_k}) = \pi\Gamma^k(\mathfrak{B}).$$

Comme $\beta \epsilon T_n$, $Z'_\nu \supset W_\nu \times T_n$, on a

$$(S \times \beta) \cdot \prod_{h=0}^{k} Z'_{\nu_h} \supset \prod_{h=0}^{k} W_{\nu_h} \times \beta \neq 0,$$

d'où $S^* \cdot \prod_{h=0}^{k} U'_\nu \neq 0$ d'après 11.7, car $U'_\nu \supset f(Z'_\nu)$. Donc

$$(6) \qquad \Delta^k(\mathfrak{U}) = \sum a'_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_k})$$

est situé dans $S^*$. Or il résulte de (4), (5) et (6) que $\pi\Gamma^k(\mathfrak{B}) \sim \Delta^k(\mathfrak{U})$ dans $M$, c. q. f. d.

**12.** *Soit $R$ un espace complètement normal. Soient $\varphi$ et $\psi$ deux sous-ensembles fermés de $R$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné dans $R$. Il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ jouissant de la propriété suivante: Si une $(k, \mathfrak{B})$-chaine $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ d'un domaine $\mathfrak{D}$ arbitraire est située dans $\varphi$ et dans $\psi$, elle est aussi située dans $\varphi\psi$.*

*Démonstration.* Soit (Homologie III, 23) $\mathfrak{W}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $\varphi\psi$. Soit $\mathfrak{B}$ le réseau déduit de $\mathfrak{W}$ de la manière suivante: Chaque sommet $W$ de $\mathfrak{W}$ tel que $W\varphi\psi \neq 0$ passe inaltéré du réseau $\mathfrak{W}$ dans le réseau $\mathfrak{B}$; au contraire, au lieu de chaque sommet $W$ de $\mathfrak{W}$ tel que $W\varphi\psi = 0$, $\mathfrak{W}$ possède les *deux* sommets $W - \varphi$ et $W - \psi$.

Ceci étant, soit $C^k(\mathfrak{B}) \subset \varphi$, $C^k(\mathfrak{B}) \subset \psi$ et soit $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$ un simplexe de $C^k(\mathfrak{B})$, on a $\varphi \prod_{i=0}^{k} V_i \neq 0 \neq \psi \prod_{i=0}^{k} V_i$, d'où $\varphi V_i \neq 0 \neq \psi V_i$. D'après la définition même de $\mathfrak{B}$, il en résulte que $\varphi\psi V_i \neq 0$

et que $V_i \in \mathfrak{W}$. Le réseau $\mathfrak{W}$ étant régulier par rapport à $\varphi\psi$, on a $\varphi\psi \prod_{i=0}^{k} V_i \neq 0$, c. q. f. d.

## II.

**13.** Soit $a$ un point donné d'un espace $R$. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots.$ Soit $\mathfrak{D}$ un domaine donné. Nous dirons que $R$ est *localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a*, si chaque entourage $P$ de $a$ contient un entourage $Q$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ tel que, si $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ est un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (et si $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$ dans le cas $k = 0$), on a $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$.

Le choix de la projection $\pi$ est indifférent d'après Homologie II, 12. On voit sans peine que, $\mathfrak{W}$ étant un affinement arbitraire de $\mathfrak{V}$ et $\Gamma^k(\mathfrak{W})$ étant un $(k, \mathfrak{W})$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{W})] = 0$ si $k = 0$), on a $\pi'\Gamma^k(\mathfrak{W}) \sim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi' = \mathrm{Pr}(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$.

**14.** *Soit $R$ un espace complètement normal. Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $R$. Soit $a \in S$. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots.$ Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque. Pour que $S$ soit localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a, il faut et il suffit que chaque entourage $P$ de a dans $R$ contienne un entourage $Q$ de a dans $R$ jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans $R$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ tel que, si $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ est un $(k, \mathfrak{V})$-cycle du domaine $\mathfrak{D}$ dans $S\overline{Q}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$ si $k = 0$), on a $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $S\overline{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr}\ (\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$.*

*Démonstration.* I. La condition est nécessaire. Soit $P$ un entourage de $a$ dans $R$, de manière que $P_0 = SP$ est un entourage de $a$ dans $S$. $S$ étant localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$, il existe un entourage $Q_0 \subset P_0$ de $a$ dans $S$ jouissant de la propriété indiquée au no. 13. D'après 2 il existe un entourage $Q \subset P$ de $a$ dans $R$ tel que $SQ = Q_0$, $S\overline{Q} = \overline{Q}_0$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans $R$, de manière que $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$ (Homologie III, 4) est un réseau dans $S$. Déterminons un affinement $\mathfrak{V}_0$ de $\mathfrak{U}_0$ d'après 13. On voit sans peine qu'il existe un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ tel que $S\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$. Soit $\pi = \mathrm{Pr}\ (\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. On en déduit d'une manière évidente la projection $\pi_0 = \mathrm{Pr}\ (\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. Or soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans $S\overline{Q} = \overline{Q}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$. Evidemment $\gamma^k(\mathfrak{V}_0) = S\,.\,\Gamma^k(\mathfrak{V})$ (Homologie III, 7) est un $(k, \mathfrak{V}_0)$-cycle dans $\overline{Q}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$ (et $J[\gamma^0(\mathfrak{V}_0)] = 0$ si $k = 0$). D'après la définition de $\mathfrak{V}_0$ il existe une $(k+1, \mathfrak{U}_0)$-chaîne $c^{k+1}(\mathfrak{V}_0)$ du domaine $\mathfrak{D}$

dans $\overline{P}_0 \subset S\overline{P}$ telle que $c^{k+1}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_0\gamma^k(\mathfrak{V}_0) = S \cdot \pi\Gamma^k(\mathfrak{V})$. Il existe evidemment une $(k+1, \mathfrak{U})$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U})$ du domaine $\mathfrak{D}$ dans $S\overline{P}$ telle que $c^{k+1}(\mathfrak{U}_0) = S \cdot C^{k+1}(\mathfrak{U})$, d'où $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi\Gamma^k(\mathfrak{V})$.

II. La condition est suffisante. Supposons la remplie. Soit $P_0$ un entourage de $a$ dans $S$. D'après 2, il existe un entourage $P$ de $a$ dans $R$ tel que $SP = P_0$, $S\overline{P} = \overline{P}_0$. Déterminons l'entourage $Q \subset P$ de $a$ dans $R$ d'après notre condition et posons $Q_0 = SQ$, de manière que $Q_0$ est un entourage de $a$ dans $S$ contenu dans $P_0$. Or soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau dans $S$. Il existe un réseau $\mathfrak{U}$ dans $R$ tel que $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$. Déterminons un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ d'après notre condition et posons $\mathfrak{V}_0 = S\mathfrak{V}$. Soit $\pi = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, ce qui détermine la projection $\pi_0 = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. Soit $\gamma^k(\mathfrak{V}_0)$ un $(r, \mathfrak{V}_0)$-cycle dans $\overline{Q}_0 \subset S\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\gamma^0(\mathfrak{V}_0)] = 0$ si $k = 0$). Il existe évidemment un $(k, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ dans $S\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\gamma^k(\mathfrak{V}_0) = S \cdot \Gamma^k(\mathfrak{V})$; si $k = 0$ on a $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$. D'après notre condition, il existe une $(k+1, \mathfrak{U}')$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \subset S\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi\Gamma^k(\mathfrak{V})$. Evidemment $S \cdot C^{k+1}(\mathfrak{U})$ est une $(k+1, \mathfrak{U}_0)$-chaîne dans $S\overline{P} = \overline{P}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$ et $S \cdot C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to S \cdot \pi\Gamma^k(\mathfrak{V}) = \pi_0\gamma^k(\mathfrak{V}_0)$.

**15.** *La connexité locale d'ordre* 0 *est indépendante du domaine* $\mathfrak{D}$ en vertu du théorème suivant, valable pour chaque domaine $\mathfrak{D}$:

*L'espace $R$ est localement connexe d'ordre* 0 *relativement* à $\mathfrak{D}$ *au point $a$ si et seulement si chaque entourage $P$ de $a$ contient un entourage $Q$ de $a$ tel que l'ensemble $\overline{Q}$ fait partie d'une seule quasicomposante de $P$.*

*Démonstration.* Soient $P$ et $Q$ des entourages de a tels que $Q \subset P$. Il suffit de prouver que, si $\overline{Q}$ fait partie d'une seule quasicomposante de $\overline{P}$ et dans ce cas seulement, chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ tel que $\pi\Gamma^0(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(0, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^0(\mathfrak{V})$ dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$.

Supposons *en premier lieu* que $\overline{Q}$ fasse partie d'une seule quasicomposante de $\overline{P}$. Soit $\Gamma^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i U_i$, où $r_i \epsilon \mathfrak{D}$, $\sum_{i=1}^{\alpha} r_i = 0$, $U_i \epsilon \mathfrak{U}$, $U_i\overline{Q} \neq 0$. Il suffit de prouver que $\Gamma^0(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{P}$. Désignons par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de tous les sommets $U$ de $\mathfrak{U}$ tels qu'il existe une suite $U'_1, \ldots, U'_h$ de sommets de $\mathfrak{U}$ satisfaisant aux conditions $U'_1 = U_1$, $U'_h = U$, $U'_{i-1}U'_i \neq 0$ $(2 \leqq i \leqq h)$, $U'_i\overline{P} \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq h)$. Désignons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les sommets $U$ de $\mathfrak{U}$ pour lesquels $U\overline{P} \neq 0$, mais *non* $U \epsilon \mathfrak{U}$. Soient respectivement $A$ et $B$ la somme de tous les éléments de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$.

Alors $\overline{P} = A\overline{P} + B\overline{P}$, les deux termes de la somme étant sans point commun et ouverts dans $\overline{P}$. Comme $\overline{Q}$ fait partie d'une seule quasicomposante de $\overline{P}$, on a $A\overline{Q} = 0$ ou bien $B\overline{Q} = 0$. Or $0 \neq U_1\overline{Q} \subset A\overline{Q}$; donc $B\overline{Q} = 0$. Cela signifie que $U \in \mathfrak{U}$, $U\overline{Q} \neq 0$ entraîne $U \in \mathfrak{U}$, d'où $\sum_{i=2}^{h} (U'_{i-1}, U'_i) \to \sum_{i=2}^{h} (U'_i - U'_{i-1}) = U'_h - U'_1 = U - U_1$, donc $U \sim U_1$ dans $\overline{P}$ pour $U \in \mathfrak{U}$, $U\overline{Q} \neq 0$. Donc on a pour $1 \leqq i \leqq \alpha : U_i - U_1 \sim 0$ dans $\overline{P}$, d'où $r_i(U_i - U_1) \sim 0$ dans $\overline{P}$ et $\Gamma^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i U_i = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i(U_i - U_1) \sim 0$ dans $\overline{P}$, c. q. f. d.

Supposons *en second lieu* que chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ tel que $\pi\Gamma^0(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(0, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^0(\mathfrak{V})$ dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{T}$ tel que $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$. On doit prouver que $\overline{Q}$ fait partie d'une seule quasicomposante de $\overline{P}$. Supposons le contraire. Alors $\overline{P} = A + B$, où $A$ et $B$ sont des ensembles ouverts dans $\overline{P}$ et tels que $A\overline{Q} \neq 0 \neq BQ$, $AB = 0$. Soient $U_1$ et $U_2$ des ensembles ouverts dans $R$ et tels que $A = U_1\overline{P}$, $B = U_2\overline{P}$. Les trois ensembles $U_1, U_2$ et $R - \overline{P}$ constituent un réseau $\mathfrak{U}$ dans $R$. Soit $\mathfrak{V}$ l'affinement de $\mathfrak{U}$ jouissant de la propriété énoncée plus haut. Comme $A\overline{Q} \neq 0 \neq B\overline{Q}$, il existe deux sommets $V_1$ et $V_2$ de $\mathfrak{V}$ tels que $V_1 A\overline{Q} \neq 0 \neq V_2 B\overline{Q}$. Soit $r \in \mathfrak{D}$, $r \neq 0$. Alors $\Gamma^0(\mathfrak{V}) = r\mathfrak{V}_1 - r\mathfrak{V}_2$ est un $(0, \mathfrak{V})$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ et $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$. Donc $\pi\Gamma^0(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Or $V_1 A \neq 0$, $U_2 A = 0 = (R - \overline{P})A$. Donc $\pi V_1 = U_1$ et on voit pareillement que $\pi V_2 = U_2$. Donc $\pi\Gamma^0(\mathfrak{V}) = rU_1 - rU_2 \neq 0$. D'autre part $\pi\Gamma^0(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\overline{P}$, donc il existe une $(1, \mathfrak{U})$-chaîne $C^1(\mathfrak{U})$ dans $\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^1(\mathfrak{U}) \to \pi\Gamma^0(\mathfrak{V})$, d'où $C^1(\mathfrak{U}) \neq 0$. C'est une contradiction, car on voit sans peine qu'il n'existe aucune $(1, \mathfrak{U})$-chaîne $\neq 0$ dans $\overline{P}$.

**16.** *Si $R$ est localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{C}$ au point $a$, $R$ l'est aussi relativement a $\mathfrak{R}$.*

*Démonstration.* Soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$ si $k = 0$). Il existe un nombre $n \in \mathfrak{C}$, $n \neq 0$ tel que $n\Gamma^k(\mathfrak{V})$ est un $(k, \mathfrak{V})$-cycle du domaine $\mathfrak{C}$. Donc il existe une $(k+1, \mathfrak{U})$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{C}$ telle que $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi n \Gamma^k(\mathfrak{V})$. Alors $\frac{1}{n} C^{k+1}(\mathfrak{U})$ est une $(k+1, \mathfrak{U})$-chaîne dans $\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{R}$ telle que $\frac{1}{n} C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi\Gamma^k(\mathfrak{V})$.

**17.** *Soit $k = 1, 2, 3, \ldots$. Si $R$ est au point $a$ localement connexe d'ordres $k$ et $k-1$ relativement a $\mathfrak{C}$, alors $R$ est au point $a$ localement connexe d'ordre $k$ relativement à un domaine $\mathfrak{D}$ arbitraire.*

*Démonstration.* Soit $P_1$ un entourage donné de $a$. Comme $R$ est localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{G}$ au point $a$, il existe un entourage $P_2 \subset P_1$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}_1$ possède un affinement $\mathfrak{U}_2$ tel que, si $\Gamma^k(\mathfrak{U}_2)$ est un $(k, \mathfrak{U}_2)$-cycle dans $\overline{P}_2$ du domaine $\mathfrak{G}$ on a $\pi_{21}\Gamma^k(\mathfrak{U}_2) \backsim 0$ dans $\overline{P}_1$, où $\pi_{21} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. Comme $R$ est localement connexe d'ordre $k-1$ relativement à $\mathfrak{G}$ au point $a$, il existe un entourage $P_3 \subset P_2$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}_2$ possède un affinement $\mathfrak{U}_3$ tel que, si $\Gamma^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k-1, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\overline{P}_3$ du domaine $\mathfrak{G}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_3)=0]$ si $k=1$), on a $\pi_{32}\Gamma^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \backsim 0$ dans $\overline{P}_2$, où $\pi_{32} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Il suffit de prouver que, si $\Delta^k(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\overline{P}_3$ du domaine $\mathfrak{D}$, on a $\pi_{21}\pi_{32}\Delta^k(\mathfrak{U}_3) \backsim 0$ dans $\overline{P}_1$.

Pour $h = k$ et pour $h = k-1$ soit $\Omega_h$ l'ensemble de toutes les $(h, \mathfrak{U}_3)$-chaînes dans $\overline{P}_3$ du domaine $\mathfrak{G}$. $\Omega_h$ possède une *base*, c'est-à-dire qu'il existe des éléments $C_1^h(\mathfrak{U}_3), C_2^h(\mathfrak{U}_3), \ldots, C_{\alpha_h}^h(\mathfrak{U}_3)$ de $\Omega_h$ en nombre fini tels qu'à chaque élément $C^h(\mathfrak{U}_3)$ de $\Omega_h$ on puisse faire correspondre biunivoquement des entiers $a_1, \ldots, a_{\alpha_h}$ tels que $C^h(\mathfrak{U}_3) = \sum_{i=1}^{\alpha_h} a_i C_i^h(\mathfrak{U}_3)$ [13]. La base $C_i^h(\mathfrak{U}_3)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ n'est déterminée qu'à une substitution linéaire unimodulaire [14] près. Il existe des entiers $\eta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_k$, $1 \leqq j \leqq \alpha_{k-1})$ tels que $C_i^k(\mathfrak{U}_3) \rightarrow \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}} \eta_{ij} C_j^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_k$. On sait [15] qu'il est possible de choisir les deux bases $C_i^k(\mathfrak{U}_3)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_k)$ et $C_j^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$ $(1 \leqq j \leqq \alpha_{k-1})$ de manière que tous les éléments de la matrice $(\eta_{ij})$ soient nuls, excepté les $\beta$ $[0 \leqq \beta \leqq \min\,(a_k, \alpha_{k-1})]$ éléments $\eta_{11} = \eta_1, \eta_{22} = \eta_2, \ldots, \eta_{\beta\beta} = \eta_\beta$ [16]. On aura donc

$$C_i^k(\mathfrak{U}_3) \rightarrow \eta_i C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \text{ pour } 1 \leqq i \leqq \beta \quad (\eta_i \epsilon \mathfrak{G},\ \eta_i \neq 0)$$

et

$$C_i^k(\mathfrak{U}_3) \rightarrow 0 \text{ pour } \beta + 1 \leqq i \leqq \alpha_k.$$

On voit sans peine que $C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \rightarrow 0$ $(1 \leqq i \leqq \beta)$ et, si $k = 1$, aussi $J[C_i^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$ $(1 \leqq i \leqq \beta)$.

---

[13]) P. ex. tous les $(h, \mathfrak{U}_3)$-simplexes dont le noyau rencontre $\overline{P}_3$ constituent une telle base.

[14]) C'est-à-dire une substitution linéaire dont les coefficients sont des entiers et dont le déterminant est égal à $\pm 1$.

[15]) V. p. ex. S. Lefschetz [Topology, 27 et 37].

[16]) On peut supposer que chacun des entiers $\eta_1, \ldots, \eta_\beta$ est un diviseur des précédants, mais cela est ici sans importance.

Or soit $\varDelta^k(\mathfrak{U}_3)$ un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\overline{P}_3$ du domaine $\mathfrak{D}$. On voit sans peine qu'il existe des éléments $r_i$ de $\mathfrak{D}$ tels que $\varDelta^k(\mathfrak{U}_3)=\sum\limits_{i=1}^{\alpha_k} r_i C_i^k(\mathfrak{U}_3)$. Comme $\varDelta^k(\mathfrak{U}_3)\to 0$, on a $\sum\limits_{i=1}^{\beta}\eta_i r_i C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3)=0$. On en déduit aisément que

$$(1) \qquad \eta_i r_i = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq \beta.$$

Pour $\beta+1\leqq i\leqq \alpha_k$, on a $C_i^k(\mathfrak{U}_3)\subset \overline{P}_3$, $C_i^k(\mathfrak{U}_3)\to 0$. Donc il existe des $(k+1, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{P}_1$ du domaine $\mathfrak{E}$ telles que

$$(2) \qquad H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)\to \pi_{21}\pi_{32}C_i^k(\mathfrak{U}_3) \quad (\beta+1\leqq i\leqq \alpha_k).$$

Pour $1\leqq i\leqq\beta$, on a $C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3)\subset \overline{P}_3$, $C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3)\to 0$; si $k=1$, on a encore $J[C_i^0(\mathfrak{U}_3)]=0$. Donc il existe des $(k, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_i^k(\mathfrak{U}_2)$ dans $\overline{P}_2$ du domaine $\mathfrak{E}$ telles que $D_i^k(\mathfrak{U}_2)\to\pi_{32}C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$. Donc $\pi_{32}C_i^k(\mathfrak{U}_3)-\eta_i D_i^k(\mathfrak{U}_2)$ sont des $(k, \mathfrak{U}_2)$-cycles dans $\overline{P}_2$ du domaine $\mathfrak{E}$. Donc il existe des $(k+1, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{P}_1$ du domaine $\mathfrak{E}$ telles que

$$(3) \qquad H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)\to\pi_{21}\pi_{32}C_i^k(\mathfrak{U}_3)-\eta_i\pi_{21}D_i^k(\mathfrak{U}_2) \quad (1\leqq i\leqq\beta).$$

D'après (1), (2) et (3) on a

$$\sum_{i=1}^{\alpha_k} r_i H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)\to\pi_{21}\pi_{32}\sum_{i=1}^{\alpha_k} r_i C_i^k(\mathfrak{U}_3)=\pi_{21}\pi_{32}\varDelta^k(\mathfrak{U}_3).$$

Donc $\pi_{21}\pi_{32}\varDelta^k(\mathfrak{U}_3)\backsim 0$ dans $\overline{P}$, c. q. f. d.

**18.** *Soit $k=0, 1, 2, \ldots$. L'espace $R$ est localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{R}$ au point $a$ si et seulement si chaque entourage $P$ de $a$ contient un entourage $Q$ de $a$ tel que, si $\Gamma^k$ est un $(k, R)$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ [avec $J(\Gamma^0)=0$ dans le cas $k=0$], on a $\Gamma^k\backsim 0$ dans $\overline{P}$.*

*Démonstration.* I. La condition est suffisante. Supposons-la vérifiée. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux cycles absolus dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (HOMOLOGIE II, 15 et 16). Soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})]=0$ si $k=0$). On doit prouver que $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V})\backsim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi=\mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Or il existe (HOMOLOGIE II, 28) un $(k, R)$-cycle absolu $C^k$ dans $\overline{Q}$ tel que $C^k(\mathfrak{U})=\pi\Gamma^k(\mathfrak{V})$. (Dans le cas $k=0$ on a $J(C^0)=J[\Gamma^0(\mathfrak{V})]=0$.) D'après notre condition, on a $C^k\backsim 0$ dans $\overline{P}$, d'où $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V})=C^k(\mathfrak{U})\backsim 0$ dans $\overline{P}$.

II. La condition est nécessaire. Supposons que $R$ soit localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{R}$ au point $a$. Soit $P$

un entourage de $a$. Déterminons un entourage $Q \subset P$ de $a$ d'après **13.** Soit $\Gamma^k$ un $(k, R)$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$). Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire. On doit prouver que $\Gamma^k(\mathfrak{U}) \backsim 0$ dans $\overline{P}$. Or il existe un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ tel que $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V}) \backsim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Comme $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V}) \backsim \Gamma^k(\mathfrak{U})$ dans $\overline{Q} \subset \overline{P}$ (Homologie II, 20) il en résulte que $\Gamma^k(\mathfrak{U}) \backsim 0$ dans $\overline{P}$, c. q. f. d.

**19.** Soit $R$ un espace topologique. Soit $S \subset M \subset R$. Nous dirons [17]) que $S$ est *contractible dans* $M$, s'il existe: un espace bicompact $T$, deux points $\alpha$ et $\beta$ de $T$ non séparés dans $T$ et une fonction continue $f$ définie dans $S \times T$ et telle que

1⁰ $f(S \times T) \subset M$;

2⁰ $f(x, \alpha) = x$ pour chaque $x \epsilon S$;

3⁰ $f(x, \beta) = c$ pour chaque $x \epsilon S$, où $c$ est un point fixe de $M$.

Soit $a \epsilon R$. Nous dirons [18]) que $R$ est *localement contractible au point* $a$, si chaque entourage $P$ de $a$ contient un entourage $Q$ de $a$ tel que $\overline{Q}$ soit contractible dans $\overline{P}$.

Le cas le plus important est celui où $T$ est un intervalle de nombres réels.

**20.** Evidemment un *espace euclidien est partout localement contractible.* Plus généralement, soit $R$ un sous-ensemble d'un espace euclidien; soit $a \epsilon R$, $\delta > 0$; supposons que si $x$ est un point de $R$ distant de $a$ de moins de $\delta$, le segment $ax$ fasse partie de $R$; alors $R$ est évidemment localement connexe au point $a$. En particulier, un sous-ensemble convexe d'un espace euclidien est partout localement contractible.

**21.** *Soit $R$ un espace bicompact localement contractible au point $a$. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque. $R$ est localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$.*

*Démonstration.* Soit $P$ un entourage donné de $a$. Soit $Q \subset P$ un entourage de $a$ tel que $\overline{Q}$ soit contractible dans $\overline{P}$. Gardons les notations de 19 (en y posant $S = \overline{Q}$, $M = \overline{P}$). Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné. Déterminons en un affinement $\mathfrak{V}$ d'après **11**; soit $x = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans $S$ du domaine $\mathfrak{D}$; si $k = 0$, soit $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$. D'après **11**, il existe un $(k, \mathfrak{U})$-cycle $\Delta^k(\mathfrak{U})$ dans $S^*$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V}) \backsim \Delta^k(\mathfrak{U})$ dans $\overline{P}$ (d'où $J[\Delta^0(\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$). Or l'ensemble $S^*$ se réduisant au point $c$, on a $\Delta^k(\mathfrak{U}) \backsim 0$ dans $S^*$, d'où $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V}) \backsim 0$ dans $\overline{P}$.

---

[17]) Cf. K. Borsuk [Fund. Math. **19** (1932), 235 (no. 23)].

[18]) Cf. Borsuk [l.c., 236 (no. 26)].

**22.** *Soit* dim $R \leqq n$ $(=0, 1, 2, \ldots)$. *Soit* $k = n+1,\ n+2, \ldots.$ *Alors $R$ est partout localement connexe d'ordre $k$ relativement à un domaine $\mathfrak{D}$ quelconque.*

*Démonstration.* Soit $P$ un entourage de $a \in R$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné. Comme dim $R < k$, il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ d'ordre $< k$. Soit $\Gamma^k(\mathfrak{B})$ un $(k, \mathfrak{B})$-cycle dans $\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{D}$. Il suffit de prouver que $\Gamma^k(\mathfrak{B}) \backsim 0$ dans $\overline{P}$. Or on a même $\Gamma^k(\mathfrak{B}) = 0$, car l'ordre $\mathfrak{B}$ est $< k$.

**23.** *Prémisses*: $1^0$ *$a$ est un point de l'espace $R$,*

$2^0$ *$Z$ est un entourage de $a$,*

$3^0$ dim $R \leqq n (= 0, 1, 2, \ldots)$,

$4^0$ *$\mathfrak{D}$ est un domaine donné,*

$5^0$ *chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{B}$ tel que, si $\Gamma^n(\mathfrak{B})$ est un $(n, \mathfrak{B})$-cycle dans $\overline{Z}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^n(\mathfrak{B})] = 0$ si $n = 0$), on a $\pi\Gamma^n(\mathfrak{B}) \backsim 0$, où $\pi =$ Pr $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$.*

*Conclusion*: *$R$ est localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$.*

*Démonstration.* Soit $P$ un entourage donné de $a$. Posons $Q = PZ$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau donné. D'après $3^0$ et $4^0$ il existe un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ tel que l'ordre de $\mathfrak{U}_2$ soit $\leqq n$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après $5^0$. Soit $\pi_{21} =$ Pr $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} =$ Pr $(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$; si $n = 0$, soit $J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$. Il suffit de prouver que $\pi_{21}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \backsim 0$ dans $\overline{P}$. D'après $5^0$ il existe une $(n+1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2)$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) \rightarrow \pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Comme l'ordre de $\mathfrak{U}_2$ est $\leqq n$, on a $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) = 0$. Donc $\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$, d'où $\pi_{21}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$ et par suite $\pi_{21}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \backsim 0$ dans $\overline{P}$.

**24.** *Soit* dim $R \leqq n (= 0, 1, 2, \ldots)$. *Si $R$ est au point $a$ localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{R}$ l'est aussi relativement à $\mathfrak{E}$.*

*Démonstration.* Soit $P$ un entourage de $a$. Il existe un entourage $Q \subset P$ de $a$ jouissant de la propriété du n°. 13, où $k = n$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau donné. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ d'ordre $\leqq n$. Déterminons l'affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après 13. Soit $\pi_{21} =$ Pr $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} =$ Pr $(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{E}$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ peut aussi être considéré comme un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle du domaine $R$, il existe une $(n+1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2)$ du domaine $\mathfrak{R}$ telle que $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) \rightarrow \pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Comme l'ordre de $\mathfrak{U}_2$ est $\leqq n$, on a $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) = 0$, d'où $\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$ et par suite $\pi_{21}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \backsim 0$ dans $\overline{P}$.

**25.** *Prémisses*: $1^0$ *$R$ est un espace régulier,*

$2^0$ dim $R \leqq n(=0, 1, 2, \ldots)$,

$3^0$ *le $n^{ième}$ nombre de Betti*[19]) *de $R$ est fini.*

*Conclusion*: *$R$ est partout localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{C}$.*

*Démonstration.* D'après $3^0$ il existe des $(n, R)$-cycles $C_i^n (1 \leqq i \leqq m;$ $m = 0, 1, 2, \ldots)$ du domaine $\mathfrak{R}$ tels que chaque $(n, R)$-cycle du domaine $\mathfrak{R}$ soit $\sim \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n (r_i \in \mathfrak{R})$, tandis que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. On voit sans peine qu'il existe un réseau $\mathfrak{U}_0$ tel que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $a \in R$. D'après 24 il suffit de prouver que $R$ est localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{R}$ au point $a$. Soit $U_0$ un sommet de $\mathfrak{U}_0$ tel que $a \in U_0$. D'aprés $1^0$ il existe un entourage $Z$ de $a$ tel que $\overline{Z} \subset U_0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau arbitrairement donné. Les deux ensembles ouverts $U_0$ et $R - \overline{Z}$ constituent un réseau $\mathfrak{T}$. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{T}$. Soit (Homologie II, 16) $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal relativement aux cycles absolus. Soit $\pi_{32} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{21} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{20} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_0)$. Comme $\mathfrak{U}_2$ est un affinement de $\mathfrak{T}$, on voit sans peine que l'on peut choisir $\pi_{20}$ de manière que $\pi_{20} U_2 = U_0$ pour chaque sommet $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_2$ tel que $\overline{Z} U_2 \neq 0$. Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\overline{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$; soit $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$ si $n = 0$. D'après 23 il suffit de prouver que $\pi_{21}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$. D'après Homologie II, 28 il existe un $(n, R)$-cycle $C^n$ tel que $C^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Il existe des nombres $r_i \in \mathfrak{R}$ tels que $C^n \sim \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n$, d'où $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_0)$. Or on a $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim$ $\pi_{20} C^n(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{20}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{Z}$, on a $\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{Z}$. En tenant compte du choix de $\pi_{20}$, on voit sans peine que $\pi_{20}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$. Donc $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0$, d'où $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0$. D'après le choix de $\mathfrak{U}_0$, il en résulte que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, d'où $C^n \sim 0$ et par suite $C^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$. Or $C^n(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_{21} C^n(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{21}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$, d'où $\pi_{21}\pi_{32}\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$, c. q. f. d.

**26.** *Soit $R_n$ l'espace euclidien à $n$ dimensions $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $R_n$. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque. $S$ est partout localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{D}$.*

---

[19]) Défini dans Homologie II, 20.

*Démonstration.* Soit $a \epsilon S$. Soit $P$ une sphère ouverte dans $R_n$ de centre $a$. Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau dans $S\overline{P}$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans $\overline{P}$ tel que $S\overline{P} \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$ (HOMOLOGIE III, 5). D'après 20 et 21, $\overline{P}$ est localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$. Donc il existe un entourage $Q \subset P$ de $a$ dans $R$ et un affinement $\mathfrak{V}$ des $\mathfrak{U}$ tels que $\pi\Gamma^n(\mathfrak{V}) \backsim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(n, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^n(\mathfrak{V})$ dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$. On peut supposer que l'ordre de $\mathfrak{V}$ soit $\leqq n$. Soit $\mathfrak{V}_0 = S\overline{P} \cdot \mathfrak{V}$, de manière que $\mathfrak{V}_0$ est un affinement de $\mathfrak{U}_0$. La projection $\pi$ définit une projection $\pi_0 = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$.

Ceci étant, soit $\gamma^n(\mathfrak{V}_0)$ un $(n, \mathfrak{V}_0)$-cycle dans $S\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$. Il existe (HOMOLOGIE III, 8) un $(n, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^n(\mathfrak{V})$ dans $S\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $S\overline{P} \cdot \Gamma^n(\mathfrak{V}) = \gamma^n(\mathfrak{V}_0)$. On a $\pi\Gamma^n(\mathfrak{V}) \backsim 0$ dans $\overline{P}$; l'ordre de $\mathfrak{V}$ étant $\leqq n$, on a donc $\pi\Gamma^n(\mathfrak{V}) = 0$, d'où $\pi_0\gamma^n(\mathfrak{V}_0) = S \cdot \pi\Gamma^n(\mathfrak{V}) = 0$. Donc $S\overline{P}$, et par suite aussi $S$, est localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$ en vertu de 23.

**27.** *Prémisses*: $1^0$ *R est un espace complètement normal,*

$2^0$ *S est un sous-ensemble fermé de R,*

$3^0$ *a est un point de S,*

$4^0$ $\dim R \leqq n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$5^0$ $\mathfrak{D}$ *est un domaine donné,*

$6^0$ *R est localement connexe d'ordre n relativement à* $\mathfrak{D}$ *au point a,*

$7^0$ *H est un entourage de a dans R,*

$8^0$ *chaque réseau* $\mathfrak{U}$ *dans R possède un affinement* $\mathfrak{V}$ *tel que* $\pi\Gamma^{n+1}(\mathfrak{V}) \backsim 0$, *où* $\pi = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, *pour chaque* $(n+1, \mathfrak{V})$-*cycle* $\Gamma^{n+1}(\mathfrak{V})$ *dans* $(S + \overline{H})$ *du domaine* $\mathfrak{D}$,

$9^0$ $Z_0$ *est un entourage de a dans S,*

$10^0$ *chaque réseau* $\mathfrak{U}_0$ *dans S possède un affinement* $\mathfrak{V}_0$ *tel que* $\pi_0\gamma^n(\mathfrak{V}_0) \backsim 0$, *où* $\pi_0 = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$, *pour chaque* $(n, \mathfrak{V}_0)$-*cycle* $\gamma^n(\mathfrak{V}_0)$ *dans* $\overline{Z}_0$ *du domaine* $\mathfrak{D}$ (*tel que* $J[\gamma^0(\mathfrak{V}_0)] = 0$ *si* $n = 0$).

*Conclusion*: *S est localement connexe d'ordre n relativement à* $\mathfrak{D}$ *au point a.*

*Démonstration.* Soit $P$ un entourage donné de $a$ dans $R$. D'après $6^0$ et $7^0$ il existe un entourage $Q \subset PH$ de $a$ dans $R$ jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans $R$ possède un affinement $f\mathfrak{U}$ tel que, si $\Gamma^n(f\mathfrak{U})$ est un $(n, f\mathfrak{U})$-cycle dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(f\mathfrak{U})] = 0$ si $n=0$), on a $\pi\Gamma^n(f\mathfrak{U}) \backsim 0$ dans $\overline{PH}$, où $\pi = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$.

Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau arbitraire dans $R$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ d'après 12, en $y$ posant $\varphi = S$, $\psi = \overline{P}$. D'après

$4^0$ il existe un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'ordre $\leqq n+1$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_4$ de $\mathfrak{U}_3$ d'après $8^0$. Posons $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}_4$ (Homologie III, 4). Déterminons un affinement $\mathfrak{V}_0$ de $\mathfrak{U}_0$ d'après $10^0$. On voit sans peine qu'il existe un affinement $\mathfrak{U}_5$ de $\mathfrak{U}_4$ tel que $S\mathfrak{U}_5 = \mathfrak{V}_0$. Posons $\mathfrak{U}_6 = f\mathfrak{U}_5$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots, \pi_{65} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_6, \mathfrak{U}_5)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}, \ldots$. La projection $\pi_{54}$ détermine d'une manière évidente une projection $\pi_0 = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0) = \mathrm{Pr}\,(S\mathfrak{U}_5, S\mathfrak{U}_4)$.

Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$ un $(n, \mathfrak{U}_6)$-cycle dans $S\overline{QZ}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (tel que $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_6)] = 0$ si $n = 0$). D'après 14 il suffit de prouver que $\pi_{61}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \backsim 0$ dans $S\overline{P}$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \subset S\overline{QZ} \subset \overline{Q}$ et comme $\mathfrak{U}_6 = f\mathfrak{U}_5$, on a $\pi_{65}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \backsim 0$ dans $\overline{PH}$. Donc il existe une $(n+1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5)$ dans $\overline{PH}$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \to \pi_{65}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \subset S\overline{QZ} \subset S\overline{Z} = \overline{Z}_0$ et comme $\mathfrak{V}_0 = S\mathfrak{U}_5$, $\gamma^n(\mathfrak{V}_0) = S \cdot \pi_{65}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$ (v. Homologie III, 7) est un $(n, \mathfrak{V}_0)$-cycle dans $\overline{Z}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$. D'après la définition de $\mathfrak{V}_0$, il existe donc une $(n+1, \mathfrak{U}_0)$-chaîne $d^{n+1}(\mathfrak{U}_0)$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $d^{n+1}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_0\gamma^n(\mathfrak{V}_0) = S \cdot \pi_{64}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Il existe évidemment une $(n+1, \mathfrak{U}_4)$-chaîne $D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ dans $S$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $D^{n+1}(\mathfrak{U}_4) \to \pi_{64}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Or on a aussi $\pi_{54}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \to$ $\to \pi_{64}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Donc $\pi_{54}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) - D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(n+1, \mathfrak{U}_4)$-cycle dans $S + \overline{PH} \subset S + \overline{H}$ du domaine $\mathfrak{D}$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_4$, on a $\pi_{53}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{43}D^{n+1}(\mathfrak{U}_4) \backsim 0$. Donc il existe une $(n+2, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3)$ telle que $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{53}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{43}D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$. Comme l'ordre de $\mathfrak{U}_3$ est $\leqq n+1$, on a $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3) = 0$, d'où $\pi_{53}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{43}D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ et par suite $\pi_{52}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{42}D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$. Or $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \subset \overline{PH} \subset \overline{P}$, $D^{n+1}(\mathfrak{U}_4) \subset S$, de manière que la $(n+1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $\pi_{52}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située et dans $\overline{P}$ et dans $S$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_2$, il en résulte que $\pi_{52}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \subset S\overline{P}$, d'où $\pi_{51}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \subset S\overline{P}$. Or $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5)^n \to \pi_{65}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$, d'où $\pi_{51}C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \to \pi_{61}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Donc $\pi_{61}\Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \backsim 0$ dans $S\overline{P}$, c. q. f. d.

**28.** *Prémisses*: $1^0$ *$R$ est un espace complètement normal,*
$2^0$ *$S$ est un sous-ensemble fermé de $R$,*
$3^0$ *$a$ est un point de $S$,*
$4^0$ $\dim R \leqq n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,
$5^0$ *$R$ est localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{E}$ au point $a$,*
$6^0$ *$H$ est un entourage de $a$ dans $R$,*
$7^0$ *chaque $(n+1, R)$-cycle dans $(S+\overline{H})$ du domaine $\mathfrak{R}$ est $\backsim 0$ dans $R$,*
$8^0$ *$Z_0$ est un entourage de $a$ dans $S$,*
$9^0$ *chaque $(n, S)$-cycle dans $\overline{Z}_0$ du domaine $\mathfrak{R}$ est $\backsim 0$ dans $S$.*
*Conclusion: $S$ est localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{E}$ au point $a$.*

*Démonstration.* $\mathfrak{U}$ étant un réseau arbitraire dans $R$, soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux cycles absolus dans $(S+\overline{H})$, soit $\pi = \text{Pr}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Si $\Gamma^{n+1}(\mathfrak{V})$ est un $(n+1, \mathfrak{V})$-cycle dans $(S+\overline{H})$ du domaine $\mathfrak{R}$, d'après HOMOLOGIE II, 28 il existe un $(n+1, R)$-cycle $C^{n+1}$ dans $(S+\overline{H})$ du domaine $\mathfrak{R}$ tel que $C^{n+1}(\mathfrak{U}) = \pi\Gamma^{n+1}(\mathfrak{V})$; d'après 7° on a $C^{n+1} \backsim 0$, d'où $\pi\Gamma^{n+1}(\mathfrak{V}) \backsim 0$. Il en résulte que la prémisse 8° du théorème 26 est vérifiée pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$. Pareillement on voit que la prémisse 10° du même théorème est vérifiée pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$. Donc toutes les prémisses du théorème 26 sont vérifiées pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$, et la prémisse 6° est vérifiée même pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$.

Ceci étant, la démonstration est presque la même que celle du théorème cité. $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$ et $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5)$ sont maintenant des chaînes du domaine $\mathfrak{E}$, tandis que $D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ et $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3)$ appartiennent au domaine $\mathfrak{R}$.

**29.** *Soit $R_{n+1}$ l'espace euclidien a $n+1$ dimensions* $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. *Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $R_{n+1}$. Soit $a$ un point de $S$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $S$ soit localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{E}$ (ou, ce qui est ici la même chose, relativement à $\mathfrak{R}$) au point $a$ est qu'il existe uu entourage $Z$ de $a$ dans $R_{n+1}$ tel qu'aucune composante de $R_{n+1} - S$ ne soit contenue dans $Z$.*

*Démonstration.* On voit sans peine que l'on peut supposer $S$ borné.

I. Supposons que $S$ soit au point $a$ localement connexe d'ordre $n$ relativement à $\mathfrak{R}$ (v. 16). D'après 18 il existe un entourage $Z$ de $a$ dans $R_{n+1}$ tel que chaque $(n, S)$-cycle dans $S\overline{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$ soit $\backsim 0$. Supposons par impossible qu'il existe une composante $K$ de $R_{n+1} - S$ telle que $K \subset Z$. Evidemment $K$ est aussi une composante de $R_{n+1} - S\overline{Z}$. Soit $b \epsilon K$, $c \epsilon R_{n+1} - (S + \overline{Z})$. Les points $b$ et $c$ appartenant à deux composantes différentes de $R_{n+1} - SZ$, il résulte du théorème de dualité qu'il existe un $(n, R)$-cycle $\Gamma^n$ dans $S\overline{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$ *enlacé* (verschlungen) avec le $(0, R)$-cycle $\{b\} - \{c\}$ (HOMOLOGIE III, 12). Donc, si $T$ est un sous-ensemble fermé et borné de $R_{n+1}$ tel que $\Gamma^n \backsim 0$ dans $T$, on a $b \epsilon T$ ou bien $c \epsilon T$. Il en résulte que $\Gamma^n$ n'est pas $\backsim 0$ dans $S$. Donc le $(n, S)$-cycle $S \cdot \Gamma^n$ (HOMOLOGIE III, 10) dans $S\overline{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$ n'est pas $\backsim 0$, ce qui est une contradiction.

II. Supposons qu'il existe un entourage $Z$ de $a$ dans $R_{n+1}$ tel qu'aucune composante de $R_{n+1} - S$ ne soit contenue dans $Z$. Soient $Q$, $H$ des sphères ouvertes de centre $a$ telles que $\overline{Q} \subset Z$, $S \subset H$. Posons $Z_0 = SQ$. On voit sans peine que les prémisses du théorème 28, sauf peut-être $9^0$, sont toutes vérifiées [20]); il reste à prouver que la prémisse $9^0$ l'est aussi. Supposons le contraire. Alors il existe (cf. Homologie III, 11) un $(n, R)$-cycle $\Gamma^n$ du domaine $\mathfrak{R}$ dans $S\overline{Q}$, qui n'est pas $\sim 0$ dans $S$. Comme $\Gamma^n$ n'est pas $\sim 0$ dans $S$, il résulte du théorème de dualité qu'il existe deux points $b_1$ et $b_2$ dans $R_{n+1} - S$ tels que $\Gamma^n$ soit enlacé avec $\{b_1\} - \{b_2\}$. Soient $K_1$ et $K_2$ les composantes de $R_{n+1} - S$ telles que $b_1 \epsilon K_1$, $b_2 \epsilon K_2$. D'après notre supposition, il existe des points $c_1 \epsilon K_1 - Z_1$, $c_2 \epsilon K_2 - Z$. Comme les deux points $b_1$ et $c_1$ appartiennent à la même composante $K_1$ de $R_{n+1} - S$, le cycle $\Gamma^n \subset S$ n'est pas enlacé avec $\{b_1\} - \{c_1\}$. De même on voit que $\Gamma^n$ n'est pas enlacé avec $\{b_2\} - \{c_2\}$. Donc $\Gamma^n$ est enlacé avec

$$\{b_1\} - \{b_2\} + \{c_1\} - \{b_1\} + \{b_2\} - \{c_2\} = \{c_1\} - \{c_2\}.$$

Donc si $\Gamma^n \sim 0$ dans $T$, $T$ étant un sous-ensemble fermé et borné de $R_{n+1}$, on a $c_1 \epsilon T$ ou $c_2 \epsilon T$. Il y a contradiction, car $\Gamma^n \sim 0$ dans $\overline{Q} \subset Z$, tandis que ni $c_1$ ni $c_2$ n'appartiennent à $Z$.

**30.** *Soit $R_n$ l'espace euclidien à n dimensions ($n = 1, 2, 3, \ldots$) complété par le point à l'infini. Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $R_n$. Soit $0 \leqq k \leqq n-1$, $h = n - k - 1$. Soit $a \epsilon S$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $S$ soit localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{R}$ au point $a$ est que chaque entourage $P$ de $a$ dans $R_n$ contienne un entourage $Q$ de $a$ dans $R_n$ jouissant de la propriété suivante: si $\gamma^h$ est un $h$-cycle polyédral du domaine $\mathfrak{R}$ dans $R_n - S\overline{P}$ (avec $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$), on a $\gamma^h \sim 0$ dans $R_n - S\overline{Q}$.* [21])

*Démonstration.* On peut supposer $S$ borné.

I. Supposons que $S$ soit localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{R}$ au point $a$. Soit $P$ un entourage de $a$ dans $\mathfrak{R}_n$. Il existe (v. 18 et Homologie III, 11) un entourage $Q \subset P$ de $a$ dans $R_n$ jouissant de la propriété suivante: Si $\Gamma^k$ est un $(k, R_n)$-cycle dans $S\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$), on a $\Gamma^k \sim 0$ dans $S\overline{P}$. Supposons par impossible qu'il existe un $h$-cycle polyédral $\gamma^h$ du domaine $\mathfrak{R}$ dans $R_n - S\overline{P}$ (avec $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$) tel que $\gamma^h$ ne soit pas $\sim 0$ dans $R_n - S\overline{Q}$. Comme $\gamma^h \subset R_n - S\overline{Q}$ et $\gamma^h$ n'est pas $\sim 0$ dans $R_n - S\overline{Q}$, il résulte du théorème de dualité qu'il existe un $(k, R_n)$-cycle $\Gamma^k$ dans $S\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (tel que $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$) enlacé avec $\gamma^h$. C'est une contradiction, car $\Gamma^k \sim 0$ dans $S\overline{P}$, $\gamma^h \subset R_n - S\overline{P}$.

---

[20]) Pour démontrer la prémisse $7^0$, on peut se servir de 11 (cf. 20). De la même manière on peut démontrer l'homologie $\Gamma^n \sim 0$ dans $\overline{Q}$, utilisée plus tard.

[21]) La $(h+1)$-chaîne polyédrale $c^{h+1} \to \gamma^h$, $c^{h+1} \subset R_n - S\overline{Q}$ peut passer par le point à l'infini de $R_n$.

II. Supposons que chaque entourage $P$ de $a$ contienne un entourage $Q$ tel que $\gamma^h \sim 0$ dans $R_n - S\overline{Q}$ pour chaque $h$-cycle polyédral $\gamma^h \subset R_n - S\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$). Soit $\Gamma^k$ un $(k, R_n)$-cycle dans $S\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$). On doit prouver que $\Gamma^k \sim 0$ dans $S\overline{P}$. Dans le cas contraire, il résulte du théorème de dualité qu'il existe un $h$-cycle polyédral $\gamma^h \subset R_n - S\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (tel que $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$) enlacé avec $\Gamma^k$. C'est une contradiction, car $\gamma^h \sim 0$ dans $R_n - S\overline{Q}$, $\Gamma^k \subset S\overline{Q}$.

**31.** *Soit $S$ un sous-ensemble fermé du plan. Soit $a \in S$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $S$ soit localement connexe d'ordre 0 (v. 15) au point $a$ est que chaque entourage $P$ de $a$ (dans le plan) contienne un entourage $Q$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: Si $\Pi$ est un polygone qui ne rencontre pas $S\overline{P}$, $S\overline{Q}$ est contenu entièrement dans l'intérieur ou entièrement dans l'extérieur de $\Pi$.*

C'est un cas particulier de 30.

**32.** *Soit $R$ un espace complètement normal. Soit $R = A + B$, les ensembles $A$ et $B$ étant fermés dans $R$. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque. Soit $a \in AB$. Si $R$ et $AB$ sont localement connexes d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$, $A$ et $B$ le sont aussi* [22]).

*Démonstration.* Il suffit de prouver que $A$ est localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$. Soit $P_1$ un entourage donné de $a$ (dans $R$). Comme $AB$ est localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$, d'après 14 il existe un entourage $P_2 \subset P_1$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ (dans $R$) possède un affinement $f\mathfrak{U}$ tel que $\pi\Gamma^k(f\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $AB\overline{P}_1$, où $\pi = \mathrm{Pr}\,(f\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f\mathfrak{U})$ dans $AB\overline{P}_2$ (avec $J[\Gamma^0(f\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$). Comme $R$ est localement connexe d'ordre $k$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point $a$, il existe un entourage $P_3 \subset P_2$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $g\mathfrak{U}$ tel que $\pi\Gamma^k(g\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{P}_2$, où $\pi = \mathrm{Pr}\,(g\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, g\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(g\mathfrak{U})$ dans $\overline{P}_3$ (avec $J[\Gamma^0(g\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$).

Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau arbitrairement donné (dans $R$). Soit $\mathfrak{U}_2 = f\mathfrak{U}_1$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après 12, en y posant $\varphi = A\overline{P}_2$, $\psi = B\overline{P}_2$. Soit $\mathfrak{U}_4 = g\mathfrak{U}_3$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots,$ $\pi_{43} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}, \ldots$.

[22]) Un cas particulier de ce théorème a été établi par M^me^ St. Nikodym [Fund. Math. 12 (1928), 240–243].

Ceci étant, soit $\Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$ un $(k, \mathfrak{U}_4)$-cycle dans $A\overline{P}_3$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_4)] = 0$ si $k = 0$). D'après 14, il suffit de prouver que $\pi_{41}\Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \backsim 0$ dans $A\overline{P}_1$. Comme $\Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \subset A\overline{P}_3 \subset \overline{P}_3$ et comme $\mathfrak{U}_4 = g\mathfrak{U}_3$, on a $\pi_{43}\Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \backsim 0$ dans $\overline{P}_2$. Donc il existe une $(k+1, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ dans $\overline{P}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43}\Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$. Comme $\overline{P}_2 = A\overline{P}_2 + B\overline{P}_2$, on peut poser $C^{k+1}(\mathfrak{U}_3) = C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$, où $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A\overline{P}_2$, $C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B\overline{P}_2$. Posons $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) = FC_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$, de manière que $\Delta^k(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $B\overline{P}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Delta^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$ si $k = 0$). Comme $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) = FC_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43}\Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$, $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A\overline{P}_2$, $\Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \subset A\overline{P}_3 \subset A\overline{P}_2$, on a aussi $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) \subset A\overline{P}_2$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, il en résulte que $\pi_{32}\Delta^k(\mathfrak{U}_3) \subset AB\overline{P}_2$. Comme $\mathfrak{U}_2 = f\mathfrak{U}_1$, on a $\pi_{31}\Delta^k(\mathfrak{U}_3) \backsim 0$ dans $AB\overline{P}_1$. Donc il existe une $(k+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $\mathfrak{D}^{k+1}(\mathfrak{U}_1)$ dans $AB\overline{P}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $\mathfrak{D}^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{31}\Delta^k(\mathfrak{U}_3) = F\pi_{31}C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$. Comme $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43}\Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$, on a $\pi_{31}C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - D^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{41}\Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$. Or $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A\overline{P}_2 \subset A\overline{P}_1$, $D^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset AB\overline{P}_1 \subset A\overline{P}_1$. Donc $\pi_{41}\Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \backsim 0$ dans $A\overline{P}_1$, c. q. f. d.

**33.** *Soit $R_n$ l'espace euclidien à n dimensions ($n = 1, 2., 3, \ldots$). Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles fermés de $R_n$. Soit $a \in AB$. S'il existe un entourage de a ne contenant aucune composante ni de $R_n - (A+B)$ ni de $R_n - AB$, alors il existe un entourage de a ne contenant aucune composante de $R_n - A$ ni de $R_n - B$.*

En vertu de 29, c'est un cas particulier de 32.

**34.** *Prémisses*: $1^0$ *$R$ est un espace complètement normal;*

$2^0$ *$A$ et $B$ sont des sous-ensembles fermés de $R$;*

$3^0$ *$R = A + B$,*

$4^0$ *a est un point de $AB$,*

$5^0$ *$\mathfrak{D}$ est un domaine donné,*

$6^0$ *$k = 0, 1, 2, \ldots,$*

$7^0$ *$R$ est localement connexe d'ordre $k+1$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point a,*

$8^0$ *$A$ et $B$ sont localement connexes d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

*Conclusion*: *$AB$ est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

*Démonstration.* Supposons le contraire. D'après 14 il existe un entourage (dans $R$) $P$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: $Q \subset P$ étant un entourage de $a$, il existe un réseau $\mathfrak{U}(Q)$ (dans $R$) tel qu'on puisse attacher à chaque affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}(Q)$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$ si $k = 0$) dans $AB\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi\Gamma^k(\mathfrak{V})$, où $\pi = \Pr[\mathfrak{V}, \mathfrak{U}(Q)]$, ne soit pas $\sim 0$ dans $AB\overline{P}$. D'après 7⁰ il existe un entourage $G \subset P$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $f_0\mathfrak{U}$ tel que, si $\Delta^{k+1}(f_0\mathfrak{U})$ est un $(k+1, f_0\mathfrak{U})$-cycle dans $\overline{G}$ du domaine $\mathfrak{D}$, on a $\pi\Delta^{k+1}(f_0\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{P}$, où $\pi = \Pr(f_0\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$. D'après 2⁰, 8⁰ et 14 il existe des entourages $Q_1$ et $Q_2$ contenus dans $G$ et jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède des affinements $f_1\mathfrak{U}$ et $f_2\mathfrak{U}$ tels que $\pi'\Gamma^k(f_1\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $A\overline{G}$, où $\pi' = \Pr(f_1\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f_1\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f_1\mathfrak{U})$ dans $A\overline{Q}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(f_1\mathfrak{U})]=0$ si $k=0$) et que $\pi''\Gamma^k(f_2\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $B\overline{G}$, où $\pi'' = \Pr(f_2\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f_2\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f_2\mathfrak{U})$ dans $B\overline{Q}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(f_2\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$).

Posons $Q = Q_1 Q_2$, $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_1$ de $\mathfrak{U}_0$ d'après 12, en y posant $\varphi = A\overline{P}$, $\psi = B\overline{P}$. Posons $\mathfrak{U}_2 = f_0\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_3 = f_1\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_4 = f_2\mathfrak{U}_2$. Soit $\mathfrak{U}_5$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_3$ et $\mathfrak{U}_4$. Soit $\pi_{10} = \Pr(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$, $\pi_{21} = \Pr(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{i2} = \Pr(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{U}_2)$ $(i=3, 4, 5)$, $\pi_{5j} = Pr(\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_j)$ $(j=3, 4)$.

Comme $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$, il existe un $(k, \mathfrak{U}_5)$-cycle $\Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$ dans $AB\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_5)] = 0$ si $k = 0$) tel que $\pi_{10}\pi_{21}\pi_{52}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$ n'est pas $\sim 0$ dans $AB\overline{P}$. Comme $AB\overline{Q} \subset A\overline{Q}_1$, $\pi_{53}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle)- dans $A\overline{Q}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\pi_{53}\Gamma^0(\mathfrak{U}_5)] = 0$ si $k = 0$). Comme $\mathfrak{U}_3 = f_1\mathfrak{U}_2$, on a $\pi_{32}\pi_{53}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $A\overline{G}$. Donc (Homologie II, 12) $\pi_{52}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $A\overline{G}$. Pareillement on voit que $\pi_{52}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $B\overline{G}$. Donc il existe des $(k+1, \mathfrak{U}_2)$-chaînes $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A\overline{G}$ et $C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_2) \subset B\overline{G}$ telles que $FC_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) = FC_2^{k+1}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{52}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$. Donc $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_2)$ est un $(k+1, \mathfrak{U}_2)$-cycle dans $\overline{G}$ du domaine $\mathfrak{D}$. Comme $\mathfrak{U}_2 = f_0\mathfrak{U}_1$, il existe une $(k+2, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $\mathfrak{D}^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset \overline{P}$ telle que

$$(*) \qquad \mathfrak{D}^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \rightarrow \pi_{21} C_1^{k+2}(\mathfrak{U}_2) - \pi_{21} C_2^{k+2}(\mathfrak{U}_2).$$

Comme $R = A + B$, on peut poser $D^{k+2}(\mathfrak{U}_1) = D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1)$, où $D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A\overline{P}$, $D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset B\overline{P}$. D'après (*) on peut poser

$$E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{21} C_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - FD_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{21} C_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - FD_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1).$$

Comme $C_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A\overline{G} \subset A\overline{P}$, $D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A\overline{P}$, on a $E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset A\overline{P}$. On voit de même que $E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset B\overline{P}$. D'après 12 on a donc $E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset AB\overline{P}$. Or $FE^{k+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{21} FC_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{21}\pi_{52}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$; donc $\pi_{21}\pi_{52}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $AB\overline{P}$, d'où $\pi_{10}\pi_{21}\pi_{52}\Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $AB\overline{P}$, ce qui est une contradiction.

**35.** *Prémisses:* 1⁰ $R_n$ *est l'espace euclidien à* $n$ *dimensions* $(n=1, 2, 3, \ldots)$,

2⁰ $A$ *et* $B$ *sont des sous-ensembles fermés de* $R_n$, 3⁰ *a est un point de* $AB$,

4⁰ *il existe un entourage de a ne contenant aucune composante ni de* $R_n - A$ *ni de* $R_n - B$.

*Conclusion: Il existe un entourage de a ne contenant aucune composante de* $R_n - AB$.

En vertu de 26 et 29, c'est un cas particulier de 34.

**36.** *Prémisses*: 1⁰ *A et B sont des sous-ensembles fermés du plan* $R_2$,

2⁰ *a est un point de* $AB$,

3⁰ *il existe un entourage de a ne contenant aucune composante de* $R_2 - (A+B)$,

4⁰ *les ensembles A et B sont localement connexes d'ordre* 0 (v. 15) *au point a.*

*Conclusion: L'ensemble AB est localement connexe d'ordre* 0 *au point a.*

En vertu de 29, c'est un cas particulier de 34.

**37.** *Prémisses*: 1⁰ *R est un espace complètement normal,*

2⁰ *A et B sont des sous-ensembles fermés de R,*

3⁰ $R = A + B$,

4⁰ *a est un point de* $AB$,

5⁰ $\mathfrak{D}$ *est un domaine donné,*

6⁰ $k = 0, 1, 2, \ldots$,

7⁰ *A et B sont localement connexes d'ordre* $k+1$ *relativement à* $\mathfrak{D}$ *au point a,*

8⁰ *AB est localement connexe d'ordre k relativement à* $\mathfrak{D}$ *au point a.*

*Conclusion: R est localement connexe d'ordre* $k+1$ *relativement à* $\mathfrak{D}$ *au point a.*

*Démonstration.* Supposons le contraire. Alors il existe un entourage $P$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: $Q \subset P$ étant un entourage de $a$, il existe un réseau $\mathfrak{U}(Q)$ tel qu'on puisse attacher à chaque affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}(Q)$ un $(k+1, \mathfrak{B})$-cycle $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{B})$ dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi\Gamma^{k+1}(\mathfrak{B})$, où $\pi = \mathrm{Pr}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{U}(Q)]$, ne soit pas $\sim 0$ dans $\overline{P}$. D'après 1⁰, 2⁰, 7⁰ et 14 il existe des entourages $G_1 \subset P$ et $G_2 \subset P$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède des affinements $f_1\mathfrak{U}$ et $f_2\mathfrak{U}$ tels que $\pi'\Gamma^{k+1}(f_1\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $A\overline{P}$, où $\pi' = \mathrm{Pr}\,(f_1\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k+1, f_1\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^{k+1}(f_1\mathfrak{U})$ dans $A\overline{G}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$, et que $\pi''\Gamma^{k+1}(f_2\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $B\overline{P}$, où $\pi'' = \mathrm{Pr}\,(f_2\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k+1, f_2\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^{k+1}(f_2\mathfrak{U})$ dans $B\overline{G}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$. Posons $G_0 = G_1G_2$. D'après 8⁰ et 14 il existe un entourage $Q \subset G_0$ de $a$ jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $f_3\mathfrak{U}$ tel que $\pi\Gamma^k(f_3\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $AB\overline{G}_0$, où $\pi = \mathrm{Pr}\,(f_3\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f_3\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f_3\mathfrak{U})$ dans $AB\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (tel que $J[\Gamma^0(f_3\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$).

Posons $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$, $\mathfrak{U}_1 = f_1\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_2 = f_2\mathfrak{U}_0$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$. Posons $\mathfrak{U}_4 = f_3\mathfrak{U}_3$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_5$ de $\mathfrak{U}_4$ d'après **12**, où nous posons $\varphi = A\overline{Q}$, $\psi = B\overline{Q}$. Soit $\pi_{5i} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, $\pi_{3j} = \mathrm{Pr}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_j)$ $(j = 0, 1, 2)$.

Comme $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$, il existe un $(k+1, \mathfrak{U}_5)$-cycle $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ dans $\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi_{50}\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ ne soit pas $\sim 0$ dans $\overline{P}$. D'après $3^0$ peut poser $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$, où $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset A\overline{Q}$, $C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset B\overline{Q}$. Comme $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \to 0$, on peut poser

$$FC_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = FC_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = \Delta^k(\mathfrak{U}_5).$$

On a $\Delta^k(\mathfrak{U}_5) \subset A\overline{Q}$, $\Delta^k(\mathfrak{U}_5) \subset B\overline{Q}$, d'où $\Delta^k(\mathfrak{U}_5) \subset AB\overline{Q}$ d'après **12**. Donc $\pi_{54}\Delta^k(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k, \mathfrak{U}_4)$-cycle dans $AB\overline{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (et $J[\pi_{54}\Delta^0(\mathfrak{U}_5)] = 0$ si $k = 0$). Comme $\mathfrak{U}_4 = f_3\mathfrak{U}_3$, il existe une $(k+1, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ dans $AB\overline{G}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $D^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{53}\Delta^k(\mathfrak{U}_5)$. Alors $\pi_{51}C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{31}D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k+1, \mathfrak{U}_1)$-cycle dans $A\overline{G}_0 \subset A\overline{G}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ et $\pi_{52}C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{32}D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k+1, \mathfrak{U}_2)$-cycle dans $B\overline{G}_0 \subset B\overline{G}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$. Comme $\mathfrak{U}_1 = f_1\mathfrak{U}_0$ et $\mathfrak{U}_2 = f_2\mathfrak{U}_0$, il existe des $(k+2, \mathfrak{U}_0)$-chaînes $E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \subset A\overline{P}$ et $E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \subset B\overline{P}$ du domaine $\mathfrak{D}$ telles que

$$E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_{50}C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{30}D^{k+1}(\mathfrak{U}_3),$$
$$E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_{50}C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{30}D^{k+1}(\mathfrak{U}_3),$$

d'où

$$E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_0) - E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_{50}C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{50}C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{50}\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5).$$

Donc $\pi_{50}\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $\overline{P}$, ce qui est une contradiction.

**38.** *Prémisses:* $1^0$ *$A$ et $B$ sont des sous-ensembles fermés du plan $R_2$,*

$2^0$ *$a$ est un point de $AB$,*

$3^0$ *il existe un entourage de $a$ ne contenant aucune composante ni de $R_2 - A$ ni de $R_2 - B$,*

$4^0$ *$AB$ est localement connexe d'ordre* 0 (v. 15) *au point $a$.*

*Conclusion: Il existe un entourage de $a$ ne contenant aucune composante de $R_2 - (A + B)$.*

En vertu de 29, c'est un cas particulier de 37.

(Reçu, le 6 septembre 1933.)