Eduard Čech

Sur la décomposition d'une pseudovariété par un sous-ensemble fermé

C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), 1342-1345

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501029

avec celle du sulfure pris en masse semble donc provenir de la constitution même du voile. Elle est peut-être imputable à l'orientation propre des molécules puisque cette orientation est démontrée par d'autres phénomènes, en particulier par la différence de mouillabilité des deux faces [1]

M. LÉON GUILLET fait hommage à l'Académie d'un Ouvrage de M. MAURICE BONZEL : *Le Tréfilage de l'acier*, dont il a écrit la *Préface*.

En se basant sur les méthodes scientifiques les plus modernes d'essais des produits métallurgiques, l'auteur a décrit une fabrication très ancienne et qui s'est d'ailleurs singulièrement modifiée.

ÉLECTIONS.

M. ÉMILE PICARD, par l'unanimité de 34 suffrages, est désigné au choix de l'Institut pour occuper, dans le Conseil supérieur de l'Instruction publique, la place vacante par l'expiration de ses pouvoirs.

CORRESPONDANCE.

TOPOLOGIE. — *Sur la décomposition d'une pseudovariété par un ensemble fermé*. Note de M. E. ČECH, présentée par M. Élie Cartan.

Dans cette Note, les notions combinatoires sont entendues au sens de mon Mémoire [2]. Les coefficients des cycles sont des nombres rationnels. Au lieu de $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ j'écris C^n.

Φ étant une famille de sous-ensembles d'un espace métrique R, le *nombre réduit* d'éléments de Φ est : 1° o si la famille Φ est vide; 2° le nombre d'éléments de Φ diminué d'une unité si Φ est finie et non vide; 3° le symbole ω si Φ, tout en étant infinie, ne contient pour chaque $\varepsilon > 0$ qu'un nombre fini d'éléments à diamètre $> \varepsilon$; 4° le symbole ∞ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que Φ contienne une infinité d'éléments à diamètre $> \varepsilon$.

(1) H. DEVAUX, *Bull. Soc. franç. de Phys.*, n° 182, 1923, p. 1845.
(2) *Fund Math.*, 19, 1932, p. 149-183.

Soit S un espace métrique. Soit $\mathfrak{M}$ un module dont les éléments sont des (p, S)-cycles absolus. Soit $\mathfrak{N}$ un sous-module de $\mathfrak{M}$ contenant tous les (p, S)-cycles absolus qui sont ~ 0. Le symbole $\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ signifie : 1° le rang du module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ si ce rang est fini ; 2° ω ou ∞ dans le cas contraire, l'égalité $\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \omega$ signifiant que, pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, il existe des éléments Γ_i^p de $\mathfrak{M}$ en nombre fini jouissant de la propriété suivante : à chaque $\Delta^p \in \mathfrak{M}$ on peut attacher des nombres r_i, des sous-ensembles fermés A_h de S (en nombre fini) dont les diamètres soient $< \varepsilon$, enfin des cycles $\Theta_h^p \in \mathfrak{M}$, $\Theta_h^p \subset A_h$ de manière que $\Delta^p - \Sigma r_i \Gamma_i^p - \Sigma \Theta_h^p \in \mathfrak{N}$.

THÉORÈME I. — *Soit* R *un espace métrique et compact à* n $(=1, 2, 3, \ldots)$ *dimensions. Soit* $m = 1, 2, 3, \ldots$ *ou bien* $m = \infty$. *Supposons qu'il existe des* (n, R)-*cycles absolus* Γ_i^n $(0 \leqq i < m)$ *jouissant de la propriété suivante :* F_h $(h = 1, 2)$ *étant deux sous-ensembles fermés de* R *tels que* $F_h \neq R$ *et* Δ_h^n *étant un* (n, R)-*cycle absolu dans* F_h, *l'homologie* $\Sigma r_i \Gamma_i^n \sim \Delta_1^n + \Delta_2^n$ *entraîne que* $r_i = 0$. *Soit* S *un sous-ensemble fermé de* R. *Soit* p *le nombre réduit de toutes les composantes de* $R - S$. *Soit* $\mathfrak{M}$ *le module de tous les* $(n-1, R)$-*cycles absolus dans* S, ~ 0 *dans* R ; *soit* $\mathfrak{N}$ *le module de tous* $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ *qui sont* ~ 0 *dans* S. *Alors* $\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \geqq pm$.

COROLLAIRE. — *Soit* R *une multiplicité cantorienne fermée à n dimensions* (¹) *et soit m son* $n^{\text{ième}}$ *nombre de Betti. Soit* S *un sous-ensemble fermé de* R ; *soit* q *le* $(n-1)^{\text{ième}}$ *nombre de Betti de* S. *Alors* $R - S$ *a au plus* $q : m + 1$ *composantes* (²).

DÉFINITION. — Soit $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. R est une *pseudovariété à n dimensions m fois ramifiée* (*simple* si $m = 1$) si : 1° R est un espace métrique et compact à n dimensions ; 2° il existe des (n, R)-cycles absolus Γ_i^n $(1 \leqq i \leqq m)$ jouissant des propriétés suivantes : a, F_h $(h = 1, 2)$ étant des sous-ensembles fermés de R tels que $F_h \neq R$ et Δ_h^n étant un (n, R)-cycle absolu dans F_h, l'homologie $\Sigma n_i \Gamma_i^n \sim \Delta_1^n + \Delta_2^n$ entraîne que $r_i = 0$; b, à chaque entourage U de chaque point x de R on peut attacher un entourage $V \subset U$ de x tel que chaque (n, R)-cycle mod $R - U$ soit $\sim \Sigma r_i \Gamma_i^n$ mod $R - V$.

THÉORÈME II. — *Chaque pseudovariété est un continu localement connexe.*

Une pseudovariété à une dimension est homéomorphe à une circonférence (donc simple). Or, pour $n \geqq 2$, il existe dans E_{n+1} euclidien des pseudo-

---

(¹) P. ALEXANDROFF, *Annals of Math.*, 30, 1929, p. 101-186 (déf. à la page 176).

(²) R. L. WILDER, *Math. Ann.*, 109, 1933, p. 273-306, théorème 6 ; au lieu de $q : m + 1$, une limite moins précise (pour $m \geqq 2$) y figure (à savoir q). Le théorème 5 du Mémoire cité peut être précisé de la même manière.

variétés à n dimensions m fois ramifiées pour chaque valeur de m. En effet, un sous-ensemble fermé et borné R de E_{n+1} est une telle variété, si $E_{n+1} - F$ est la somme de $m+1$ domaines connexes et uniformément localement connexes ayant F comme frontière commune. L'existence de telles frontières a été prouvée par M. Wilder (*loc. cit.*, théorème 8).

Notations. — Soit R une pseudovariété à n dimensions m fois ramifiée. Soient A et S deux sous-ensembles fermés de R; soit $A \subset S$. Soit $\mathfrak{M}$ le module de tous les $(n-1, R)$ cycles absolus dans S qui sont ~ 0 dans R. Soit $\mathfrak{L}$ le module de tous les $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ qui sont ~ 0 dans S. Soit $\mathfrak{N}$ le module de tous les $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ jouissant de la propriété suivante : il existe deux sous-ensembles fermés $F_h (h=1, 2)$ de S tels que $A - F_h \neq 0$ et des $\Delta_h^{n-1} \in \mathfrak{M}$, $\Delta_h^{n-1} \subset F_h$ tels que $\Delta^{n-1} \sim \Delta_1^{n-1} + \Delta_2^{n-1}$ dans S. Soit $\overline{\mathfrak{N}}$ le module de tous les $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ jouissant de la propriété suivante : à chaque réseau $\mathfrak{U}$ on peut attacher un $\Theta^{n-1} \in \mathfrak{N}$ tels que $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim \Theta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans S.

THÉORÈME III. — *Soit q le nombre réduit de composantes* Q *de* $R - S$ *telles que* $A - \mathrm{Fr.}\, Q \neq 0$; *soit $c = 1$ s'il existe une composante* P *de* $R - S$ *telle que* $A \subset \mathrm{Fr.}\, P$, *soit $c = 0$ dans le cas contraire. Alors* $\rho(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}) = m(q+c)$.

THÉORÈME IV. — *Soit p le nombre réduit de composantes* P *de* $R - S$ *telles que* $A \subset \mathrm{Fr.}\, P$. *Alors* $\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = mp$.

THÉORÈME V. — *L'égalité* $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$ *est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un* $\varepsilon > 0$ *jouissant de la propriété suivante : A chaque composante* P *de* $R - S$ *telle que* $A - \mathrm{Fr.}\, P \neq 0$ *on peut attacher un point x de* A *dont la distance de* Fr. P *soit* $> \varepsilon$.

Définitions. — Soit R une pseudovariété à m dimensions m fois ramifiée. Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit x un point donné de S. Soit U un entourage de x. Posons $\alpha(U)$ égal au nombre $(= 0, 1, 2$ ou bien $= \infty)$ des composantes P de $U - S$ tels qu'il existe un arc simple $C \subset P + (x)$ contenant x. Nous dirons que *l'ordre d'accessibilité de* S *en x* est égal à $\alpha(R)$. Nous dirons que *l'ordre local d'accessibilité de* S *en x* est égal à : 1° $p (= 0, 1, 2, \ldots)$ si $\alpha(U) = p$ pour chaque U suffisamment petit; 2° ω, si $\alpha(U)$ est toujours fini, mais tend vers l'infini si le diamètre de U tend vers zéro; 3° ∞, s'il existe un U tel que $\alpha(U) = \infty$.

THÉORÈME VI. — *Supposons que le* $(n-1)^{ième}$ *nombre de Betti de* R, *ainsi que le* $(n-1)^{ième}$ *nombre de Betti local* (1) *de* R *en x, soient égaux à* 0.

---

(1) La définition du nombre de Betti local se trouve au Mémoire de l'auteur : *Introduction à la théorie de l'homologie* (en tchèque), *Publications de la Fac. des Sc. de l'Univ. Mazaryk*, n° **184**, 1933, ainsi que (indépendamment) dans la Note de M. P. ALEXANDROFF, *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 227-229.

L'ordre d'accessibilité de S en x est un invariant topologique de S et de x, pourvu que cet ordre soit $\geqq 2$.

THÉORÈME VII. — *Supposons que le* $(n-1)^{ième}$ *nombre de Betti local de* R *en* x *soit égal à* o. *L'ordre local d'accessibilité de* S *en* x *est un invariant topologique de* S *et de* x, *pourvu que cet ordre soit* $\geqq 2$.

TOPOLOGIE. — *Sur les similitudes de l'espace.*

Note de M. B. DE KERÉKJÁRTÓ, présentée par M. Élie Cartan.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Soit t une transformation topologique (c'est-à-dire biunivoque et bicontinue) d'une variété ouverte à n dimensions en elle-même, conservant le sens d'orientation. Supposons que t admet un point invariant isolé $\mathcal{V}$. Supposons ensuite que pour un point quelconque P, qui n'est pas invariant dans t, la suite des images successives $t(\mathrm{P})$, $t^2(\mathrm{P})$, ... est divergente (c'est-à-dire que la suite n'admet aucun point d'accumulation dans la variété). Dans ces conditions, *la transformation t est équivalente à une similitude de l'espace cartésien*, dans le sens suivant : 1° les images d'un point quelconque par les transformations t^{-1}, t^{-2}, ... tendent vers $\mathcal{V}$, qui est alors le seul point invariant de t; 2° il y a une suite de surfaces fermées ..., S_{-n}, ..., S_0, ..., S_n, ..., telles que la surface S_n est transformée par t en la surface S_{n+1} ; S_n est intérieure à S_{n+1} ; les surfaces S_{-1}, S_{-2}, ... tendent vers le point $\mathcal{V}$; la suite des surfaces S_1, S_2, ... est divergente. La variété a un seul élément de frontière [1].

Nous démontrons d'abord qu'il existe au moins un domaine compact D contenant le point $\mathcal{V}$ tel que l'image D' de D par t contient D. Soit D un domaine compact quelconque contenant le point $\mathcal{V}$; son image D' ne peut pas être un sous-ensemble de D, car autrement les images $t(\mathrm{P})$, $t^2(\mathrm{P})$, ... d'un point non invariant P de D formeraient un ensemble compact, contrairement à notre hypothèse. Supposons qu'aucun domaine compact D contenant le point $\mathcal{V}$ ne soit contenu dans son image D'. La partie commune de D et D' consiste en un ensemble dénombrable de domaines; soit D'_1 celui parmi ces domaines qui contient le point $\mathcal{V}$. Son image inverse D_1 a

(1) B. DE KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, p. 164; H. FREUDENTHAL, *Math. Zeitschr.*, 33, 1931, p. 692-713.