Eduard Čech

Eine Verallgemeinerung des Jordan-Brouwerschen Satzes

Erg. Koll. Wien 5 (1933), 29-31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501019

Es ist klar, welche Eigenschaften die Vektormenge V besitzen muß, damit der aus ihr eben abgeleitete halbmetrische Raum ein *vollständiger* metrischer Raum sei [die Giltigkeit der Dreiecksungleichung ist durch die Bedingung 2_2) gewährleistet]. Daß dieser metrische Raum *konvex und nach außen konvex* sei, ist damit gleichbedeutend, daß in der gegebenen Vektormenge zu je zwei Vektoren u und w ein Vektor v zwischen u und w existiert und ein Vektor x, so daß w zwischen u und x liegt, wobei wir sagen, der Vektor v liege *zwischen* u und w, wenn entweder $\Gamma(u, w) \neq 0$ und $\Gamma(u, v, w) = 0$, $\Gamma(u, v) + \Gamma(v, w) = \Gamma(u, w)$ gilt oder $\Gamma(u, w) = 0$ und $uv + vw = uw$. Dieser bloß auf den Begriff des inneren Produktes gestützte Aufbau der Vektoralgebra zeigt, *daß die Multiplikation mit Skalaren und die Vektoraddition durch das innere Produkt definierbar sind.* Sind v und w irgend zwei Elemente von V und λ eine reelle Zahl, so nennen wir λv jenen Vektor u, für den $\Gamma(u, v) = 0$ und $(u\,v) = \lambda . (v\,v)$ gilt und $v + w$ jenen Vektor z, für welchen $\Gamma(v, w, z) = 0$ und $\Gamma\left(v, \frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(w, \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma(v, w)$, bzw. $(z\,z) = (v\,z) + (w\,z)$ gilt, je nachdem ob $\Gamma(v, w) \neq 0$ oder $= 0$ ist. Dabei kann nämlich bewiesen werden, daß genau *ein* derartiger Vektor u bzw. z existiert. Bemerkenswert ist auch, daß durch die Existentialforderung der Konvexität die Bedingungen 2_k) für großes k entbehrlich werden.

Es sei noch erwähnt, daß in analoger Weise die Vektoralgebra in *unitären* Räumen aufgebaut werden kann, wobei die Symmetriebedingung $(u\,v) = (v\,u)$ durch die Hermitesche Symmetrie $(u\,v) = \overline{(v\,u)}$ zu ersetzen ist, sowie eine Vektoralgebra in *indefiniten* euklidischen Räumen (vgl. 60. Kolloquium) auf Grund der Resultate von Wald (dieses Heft S. 36 f.).

Wald: *Eine koordinatenlose Definition der Flächenkrümmung* wird durch Betrachtung der Abstände von gegen einen Punkt konvergenten Punktequadrupeln gewisser Art eingeführt und es wird für Flächen des R_3, die in Parameterdarstellung durch dreimal stetig differenzierbare Funktionen gegeben sind, in Punkten, in denen nicht alle Funktionaldeterminanten verschwinden, die Identität dieser metrisch-koordinatenlos eingeführten Krümmung mit der Gaußschen Krümmung bewiesen. (Erscheint in Heft 6 dieser Ergebnisse.)

66. Kolloquium (21. VI. 1933).

Wald: *Der* $R_{n.s.}$ (Vgl. dieses Heft S. 36 f.)

67. Kolloquium (4. VII. 1933).

Čech: *Eine Verallgemeinerung des Jordan-Brouwerschen Satzes.*

Sei R eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren $(n-1)^{\text{te}}$ Bettische Zahl verschwindet und S eine abgeschlossene Teilmenge von R $(0 \neq S \neq R)$. Dann besagt der einfachste und wichtigste Fall des Dualitätssatzes, daß die um eins verminderte Komponentenzahl von $R - S$ gleich der $(n-1)^{\text{ten}}$ Bettischen Zahl von S ist.

Es ist bemerkenswert, daß in diesem Satze, der bekanntlich den Jordan-Brouwerschen Satz als Spezialfall enthält, die Voraussetzung, R sei eine Mannigfaltigkeit, wesentlich abgeschwächt werden darf. Es genügt nämlich, Folgendes über R anzunehmen (in der Theorie mod. 2, auf die ich mich hier beschränke; sonst kommt noch die Orientierbarkeitsannahme hinzu): R ist ein zusammenhängendes Polyeder, das Summe ist von einer endlichen Anzahl abgeschlossener (simplizialer) n-Zellen. Jede $(n-1)$-Zelle ist Randzelle von genau zwei n-Zellen. Sind σ_1 und σ_2 zwei beliebige n-Zellen mit gemeinsamem Eckpunkt p, so kann man σ_1 und σ_2 durch eine Kette von n-Zellen mit dem Eckpunkt p verbinden so, daß je zwei benachbarte Glieder der Kette eine gemeinsame $(n-1)$-Zelle haben. Außerdem wird, wie gesagt, vorausgesetzt, daß die $(n-1)^{\text{te}}$ Bettische Zahl von R gleich Null sei.

Der Beweis des angeführten Satzes möge in dem Falle hier durchgeführt werden, daß S ein Unterkomplex der gegebenen Zelleneinteilung von R ist. Sei Z^n die Summe sämtlicher n-Zellen von R. Dann ist Z^n der *einzige* n-Zyklus in R. Seien K_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ die Komponenten von $R-S$. Sei C_i^n die Summe derjenigen n-Zellen von R, deren Inneres in K_i liegt. Sei $C_i^n \rightarrow \Gamma_i^{n-1}$. Dann sind die Γ_i^{n-1} $(n-1)$-Zykeln in S. Da jeder $(n-1)$-Zyklus in $R \sim 0$ ist, schließt man leicht, daß jeder $(n-1)$-Zyklus in S von den Γ_i^{n-1} linear abhängt. Zu beweisen bleibt, daß zwischen den Γ_i^{n-1} genau eine lineare Abhängigkeit besteht. Sei $\Sigma a_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ in S $(a_i=0$ oder $1)$. Es gibt also einen n-Komplex D^n in S so, daß $D^n \rightarrow \Sigma a_i \Gamma_i^{n-1}$ ist. Dann ist $D^n + \Sigma a_i \Gamma_i^{n-1} \rightarrow 0$, folglich $D^n = \Sigma a_i C_i^n + a Z^n$ $(a=0$ oder $1)$. Der n-Komplex $\Sigma a_i C_i^n$ unterscheidet sich daher von $a Z^n$ nur in den Zellen $\subset S$. Dasselbe gilt aber auch für den n-Komplex $a \,.\, \Sigma C_i^n$; also ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = a$. Umgekehrt ist offenbar $\Sigma \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ in S.

Der Beweis für den Fall, daß S eine beliebige kompakte Teilmenge von R ist, ist gegenüber dem durchgeführten Fall nur insofern komplizierter, als es schon für den *Wortlaut* des Satzes (Begriff der $(n-1)^{\text{ten}}$ Bettischen Zahl von S!) der Fall ist. Indem man sich auf die von mir angegebene (Fund. Math., *19*) Definition der Bettischen Zahl stützt, führt man für beliebiges S den Beweis völlig analog und direkt (es wird also nicht etwa S polyedral approximiert!) durch. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man nicht mit der gegebenen Zelleneinteilung von R auskommt, sondern gleichzeitig deren sukzessive baryzentrische Unterteilungen (die eine „famille complète de réseaux dans R" definieren) in Betracht ziehen muß.

Wichtig ist nun, daß auch der polyedrale Charakter von R für den Beweis gar nicht wesentlich ist und leicht durch mengentheoretische (den Homologiecharakter von R betreffende) Annahmen ersetzt werden kann, wobei der Beweis noch ganz durchsichtig bleibt.

Die naheliegende Frage, ob auch in den höheren Fällen des Dualitätssatzes die Annahmen über R analog abgeschwächt werden dürfen, ist zu bejahen. Doch ist der allgemeine Fall ungemein komplizierter (Vgl. meine ausführliche Darstellung in den Annals of Math., Oktober 1932).

Čech: Neue Beweisanordnung für den Nöbelingschen Beweis des n-Bogensatzes.

68. Kolloquium (5. VII. 1933).

Čech: Definition lokaler Bettischer Zahlen. Lokalisierung der Dualitätssätze und der Additionssätze der Homologietheorie. Invarianz der lokalen Zerschneidungszahl. Externe Charakterisierung des Zusammenhanges im Kleinen.