Eduard Čech

Sur les continus Péaniens unicohérents

Fund. Math. 20 (1933), 232-243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501013

Sur les continus Péaniens unicohérents.

Par

Eduard Čech (Brno).

1. Un espace topologique R s'appelle unicohérent [1] [2] [3] [4] si, pour chaque décomposition $R = R_1 + R_2$ en deux sous-ensembles fermés et connexes, le produit $R_1 R_2$ est connexe.

2. **Théorème A.** *Si le premier nombre de Betti* [5] *d'un espace topologique R connexe et complètement normal est égal à zéro, l'espace R est unicohérent.*

Démonstration [6]. Soient p et q deux points de $R_3 = R_1 R_2$. Il s'agit de prouver (cf. Homologie, III, n°s 13—18) que $\{p\} \sim \{q\}$ dans R_3. Or les ensembles R_1 et R_2 étant connexes, on a $\{p\} \sim \{q\}$ et dans R_1 et dans R_2. Dans les notations de *Homologie*, IV, n° 15 (où on pose $n = 0$ et $\alpha = 0$) on doit donc démontrer que $\pi_0(R_3; 0) = 0$, ce qui est une conséquence immédiate de la formule (1), l. c., car $P_1(R; 0) = 0$.

[1] L. Vietoris, *Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. XXIX, 1926, 443—453.

[2] C. Kuratowski, *Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer*, Fund. Math. VIII, 1926, 137—150.

[3] C. Kuratowski, *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII, 1929, 307—318.

[4] K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XVII, 1931, 171—209.

[5] Pour la définition des nombres de Betti, v. mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Math. XIX, 1932, 149—183. Je citerai ce Mémoire: *Homologie*.

[6] Une autre démonstration (valable dans les espaces métriques et compacts) m'a été communiquée par M. Vietoris.

3. Le théorème inverse du théorème A est faux même si l'espace R est métrique et compact. Exemple: l. c. sub [2]), p. 148, remarque. Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème B [6a]). *R étant un continu Péanien (= espace métrique, compact, connexe et localement connexe) unicohérent, le premier nombre de Betti de R est égal à zéro.*

Pour la validité du théorème B, il est essentiel que les coefficients des cycles et des homologies soient des *nombres rationnels*. Le théorème B est faux pour les cycles mod $m = 2, 3, \ldots$; exemple: plan projectif.

4. Dans le cas où la dimension de R est égale à *un*, le théorème B a été démontré par M. Vietoris (l. c. sub [1]), p. 446, (5)). Dans le cas où R est immergé dans le *plan euclidien*, le théorème B est une conséquence d'un résultat de M. Kuratowski (l. c. sub [2]), p. 145, théorème II). Le théorème B peut être aussi regardé comme connu dans le cas où R est un *polyèdre*. En effet, on l'obtient dans ce cas en rapprochant un théorème de M. Borsuk (l. c. sub [4]) p. 190) d'un théorème de M. H. Hopf [7]). Or la démonstration de M. Hopf fait usage essentiel de la supposition que R soit un polyèdre; d'autre part, dans ce qui suit je ne m'appuie nullement sur les résultats de MM. Borsuk et Hopf [8]).

5. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau ouvert [9]) dans un espace R; soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les sommets de $\mathfrak{U}$. Un réseau $\mathfrak{V}$ dans R soit appelé un *affinement* [10]) *barycentrique* [11]) de $\mathfrak{U}$, si on peut indiquer les sommets de $\mathfrak{V}$ par des symboles $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$, où $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ parcourt des combinaisons (sans répétition) des indices $1, 2, \ldots, m$ de manière

[6a]) Le même théorème a été démontré simultanément et indépendamment mais par une méthode complètement différente, par M. Borsuk. Voir, sa note publiée dans ce volume, p. 230, corollaire 1.

[7]) Math. Annalen CIV, 1931, p. 641, théorème V a.

[8]) Il serait aisé de déduire de ce qui suit une nouvelle démonstration du théorème cité de M. Borsuk (limité au continus péaniens) et par suite aussi du théorème cité de M. Hopf (étendu au continus péaniens).

[9]) V. *Homologie*, III, 2. Dans ce qui suit, chaque réseau est ouvert, sauf avis contraire.

[10]) V. *Homologie*, II, 9.

[11]) Cf. la notion d'une sous-division barycentrique (régulière) d'un complexe, v. p. ex. E. R. v. Kampen, *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze*, (Dissertation Leiden, 1929), I, § 2, n$^{\text{os}}$ 2 et 7.

que 1° $V_{i_0, i_1, \dots, i_k} \subset U_{i_0} U_{i_1} \dots U_{i_k}$; 2° si les sommets $V_{i_0, i_1, \dots, i_k}$, $V_{j_0, j_1, \dots, j_h}$ de $\mathfrak{V}$ ont un point commun, une des deux combinaisons $(i_0, i_1, \dots, i_k)$, $(j_0, j_1, \dots, j_h)$ fait partie de l'autre.

Ceci étant, je démontrerai le

Lemme. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans un espace complètement normal [12]) R. Il existe un affinement barycentrique $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$.

Démonstration. Soit n l'ordre [13]) du réseau $\mathfrak{U}$. Le théorème étant banal pour $n=0$, on peut le supposer vrai pour les ordres $< n$. Désignons par G la somme de tous les ensembles $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$, où $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ parcourt toutes les combinaisons n à n parmi les indices $1, 2, \dots, m$. Les ensembles $U'_i = U_i - G$ constituent un réseau $\mathfrak{U}'$ dans $R - G$ dont l'ordre est évidemment $< n$. Il existe donc des ensembles $W_{i_0, i_1, \dots, i_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ ouverts dans $R - G$ et constituant un affinement barycentrique de $\mathfrak{U}'$.

Il existe [14]) des ensembles $V_{i_0, i_1, \dots, i_k}$ ouverts dans R et tels que 1° $V_{i_0, i_1, \dots, i_k} \subset U_{i_0} U_{i_1} \dots U_{i_k}$; 2° $V_{i_0, i_1, \dots, i_k} \cdot V_{j_0, j_1, \dots, j_h} \neq 0$ entraîne que $W_{i_0, i_1, \dots, i_k} \cdot W_{j_0, j_1, \dots, j_h} \neq 0$. En ajoutant à ces ensembles $V_{i_0, i_1, \dots, i_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ tous les ensembles non vides de la forme $V_{i_0, i_1, \dots, i_n} = U_{i_0} \cdot U_{i_1} \cdot \ldots \cdot U_{i_n}$ on obtient un réseau $\mathfrak{V}$ dans R et on démontre sans peine que $\mathfrak{V}$ est un affinement barycentrique de $\mathfrak{U}$.

6. **Lemme.** Soit $\mathfrak{U}$ un réseau connexe [15]) [16]). Soit Γ_0 un $(1, \mathfrak{U})$-cycle [17]) qui n'est pas homologue à zéro. Soient σ_i^1 $(1 \leqslant i \leqslant \alpha_1)$ tous les $(1, \mathfrak{U})$-simplexes. On peut attacher à chaque σ_i^1 un nombre rationnel s_i et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma = \sum_1^m r_i \sigma_i^1$ le nombre $\varphi(\Gamma) = \sum_1^{\alpha_1} r_i s_i$ de manière que: 1° si Γ est un $(1, \mathfrak{U})$-cycle homologue à zéro, on a $\varphi(\Gamma) = 0$; 2° si Γ est un $(1, \mathfrak{U})$-cycle entier [18]), le nombre $\varphi(\Gamma)$ est entier; 3° $\varphi(\Gamma_0) = 0$.

Démonstration. Soit $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\mu$ une base du premier groupe de Betti de $\mathfrak{U}$, de manière qu'à chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle Γ il

[12]) Du reste, ce lemme est vrai dans chaque espace normal.
[13]) C'est-à-dire la dimension maxima d'un $\mathfrak{U}$-simplexe.
[14]) V. Homologie, III, 21.
[15]) Cela signifie que le 0ème nombre de Betti de $\mathfrak{U}$ égale à un.
[16]) L'hypothèse de connexité est d'ailleurs superflue.
[17]) Cf. Homologie, II, 2—8.
[18]) Cela signifie que tous les coefficients de Γ sont des entiers.

existe un et un seul groupe de nombres rationnels c_ν $(1 \leqslant \gamma \leqslant m)$ tel que $\Gamma \sim \sum_1^\mu c_\nu \gamma_\nu$. Il est bien connu qu'on peut s'arranger de façon que les nombres c_ν soient entiers si le cycle Γ est entier. En particulier, on a $\Gamma_0 \sim \sum_1^\mu c_\nu^0 \gamma_\nu$ et on peut supposer que $c_1^0 \neq 0$. Soient U_j $(1 \leqslant j \leqslant \alpha_0)$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$. Le réseau $\mathfrak{U}$ étant connexe, on peut attacher à chaque j $(1 \leqslant j \leqslant \alpha_0)$ une (1. $\mathfrak{U}$)-chaîne entière C_j telle que $C_j \to U_j - U_1$. Soit donnée une valeur de i $(1 \leqslant i \leqslant \alpha_1)$; soit $\sigma_i^1 = (U_j, U_k)$. On a $\sigma_i^1 \to U_k - U_l$, de manière que $\sigma_i^1 + C_j - C_k$ est un (1, $\mathfrak{U}$)-cycle entier. Il existe donc des entiers $c_{i\nu}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant \mu)$ tels que $\sigma_i^1 + C_j - C_k \sim \sum_{\nu=1}^\mu c_{i\nu} \gamma_\nu$. Posons $s_i = c_{i1}$. On voit sans peine que les nombres s_i possèdent les propriétés voulues.

7. **Lemme.** Soit $\mathfrak{V}$ un affinement barycentrique d'un réseau $\mathfrak{U}$. Le réseau $\mathfrak{U}$ soit connexe [15)] [16)]. Soit $\pi = Pr. (\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ [19)]. Soit Δ_0 un (1, $\mathfrak{V}$)-cycle tel que le (1, $\mathfrak{U}$)-cycle $\Gamma_0 = \pi \Delta_0$ ne soit pas ~ 0 [20)]. Soient σ_i^1 et τ_j^1 $(1 \leqslant i \leqslant \alpha_1;\ 1 \leqslant j \leqslant \beta_1)$ tous les 1-simplexes resp. de $\mathfrak{U}$ et de $\mathfrak{V}$. Supposons que l'on ait attaché à chaque σ_i^1 un nombre rationnel s_i et par suite à chaque (1, $\mathfrak{U}$)-cycle $\Gamma = \Sigma r_i \sigma_i^1$ le nombre $\varphi(\Gamma) = \Sigma r_i s_i$ de manière que 1° $|s_i| < M$ pour $1 \leqslant i \leqslant \alpha_1$; 2° $\varphi(\Gamma) = 0$ pour chaque (1, $\mathfrak{U}$)-cycle $\Gamma \sim 0$; 3° $\varphi(\Gamma)$ est entier pour chaque (1, $\mathfrak{U}$)-cycle entier [18)] Γ; 4° $\varphi(\Gamma_0) \neq 0$. On peut attacher à chaque τ_j^1 un nombre rationnel t_j et par suite à chaque (1, $\mathfrak{U}$)-cycle $\Delta = \Sigma r_j \tau_j^1$ le nombre $\psi(\Delta) = \Sigma r_j t_j$ de manière que: 1° $|t_j| < M \frac{n}{n+1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant \beta_1$, où n désigne l'ordre [13)] de $\mathfrak{U}$; 2° $\psi(\Delta) = 0$ pour chaque (1, $\mathfrak{U}$)-cycle $\Delta \sim 0$; 3° $\psi(\Delta)$ est entier pour chaque (1, $\mathfrak{V}$)-cycle entier [18)] Δ; 4° $\psi(\Delta_0) = 0$.

Démonstration. Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$; pour $1 \leqslant i \leqslant \alpha_1$, $\sigma_i^1 = (U_\lambda, U_\mu)$ posons $[\lambda, \mu] = -[\mu, \lambda] = s_i$; posons aussi $[\lambda, \lambda] = 0$ pour $1 \leqslant \lambda \leqslant m$. D'après la définition d'un affinement barycentrique, chaque (1, $\mathfrak{V}$)-simplexe τ_j^1, convenablement orienté, a la forme $\tau_j^1 = (V_{i_0, i_1, \ldots, i_h}, V_{i_0, i_1, \ldots, i_k})$ $(0 \leqslant h < k \leqslant n)$, la com-

[19)] V. Homologie, II, 10.

[20)] Par suite Δ_0 n'est pas ~ 0 (v. Homologie, II, 11).

binaison $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ des indices $1, 2, \ldots, m$ étant telle que $(U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ est un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe. Posons

$$t_j = \frac{1}{(k+1)(h+1)} \sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{\mu=h+1}^{k} [i_\lambda, i_\mu] = \frac{1}{(k+1)(h+1)} \sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{\mu=0}^{k} [i_\lambda, i_\mu].$$

Il en résulte que

$$|t_j| < \frac{(h+1)(k-h)}{(h+1)(k+1)} M \leqslant \frac{k}{k+1} M \leqslant \frac{n}{n+1} M.$$

Pour démontrer que $\psi(\varDelta) = 0$ pour chaque $(1, \mathfrak{V})$-cycle $\varDelta \sim 0$, il suffit de prouver que $\psi(\varDelta) = 0$ si $\varDelta$ est la frontière d'un $(2, \mathfrak{V})$-simplexe. Or chaque $(2, \mathfrak{V})$-simplexe τ^2, convenablement orienté, a la forme

$$\tau^2 = (V_{i_0, i_1, \ldots, i_h},\ V_{i_0, i_1, \ldots, i_k},\ V_{i_0, i_1, \ldots, i_l})$$

avec $0 \leqslant h < k < 1 \leqslant n$, la combinaison $(i_0, i_1, \ldots, i_l)$ des indices $1, 2, \ldots, m$ étant telle que $(U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l})$ soit un $(l, \mathfrak{U})$-simplexe. Donc [21])

$$\psi(F\tau^2) = \frac{1}{(k+1)(l+1)} \sum_{\mu, \nu} [i_\mu, i_\nu] + \frac{1}{(l+1)(h+1)} \sum_{\nu, \lambda} [i_\nu, i_\lambda] + $$
$$+ \frac{1}{(h+1)(k+1)} \sum_{\lambda, \mu} [i_\lambda, i_\mu]$$

$$= \frac{1}{(h+1)(k+1)(l+1)} \sum_{\lambda, \mu, \nu} ([i_\mu, i_\nu] + [i_\nu, i_\lambda] + [i_\lambda, i_\mu]) = 0,$$

car si p. ex. $\lambda = \mu$, on a $[i_\lambda, i_\mu] = 0$, $[i_\mu, i_\nu] = -[i_\nu, i_\lambda]$ tandis que dans le cas où les indices λ, μ, ν sont différents entre eux on a

$$[i_\mu, i_\nu] + [i_\nu, i_\lambda] + [i_\lambda, i_\mu] = \varphi[F(U_{i_\lambda}, U_{i_\mu}, U_{i_\nu})] = 0$$

d'après la propriété 2⁰ des nombres s_l.

Reste a prouver les propriétés 3⁰ et 4⁰ des nombres t_j. A cet effet il suffit évidemment de démontrer que $\psi(\varDelta) = \varphi(\pi\varDelta)$ pour chaque $(1, \mathfrak{V})$-cycle $\varDelta$. π_1 et π_2 étant deux projections de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{U}$, on a $\pi_1 \varDelta \sim \pi_2 \varDelta$ (v. *Homologie*, II, 12) et par suite $\varphi(\pi_1 \varDelta) = \varphi(\pi_2 \varDelta)$.

[21]) Les indices λ, μ, ν parcourent resp. les valeurs $0 \leqslant \lambda \leqslant h$, $0 \leqslant \mu \leqslant k$, $0 \leqslant \nu \leqslant l$.

On peut donc choisir π de manière que l'on ait pour chaque sommet $V_{i_0 i_1,\dots,i_k}$ de $\mathfrak{V}$: $\pi V_{i_0 i_1,\dots,i_k} = U_i$, l'indice i étant égal à un des indices $i_0, i_1, \dots, i_k$. Les sommets $V_{i_0 i_1,\dots,i_k}$ de $\mathfrak{V}$ étaient attachés à des combinaisons $(i_0, i_1, \dots, i_k)$ telles que $U_{i_0} \cdot U_{i_1} \cdot \dots \cdot U_{i_k} \neq 0$. Attachons plus généralement à chaque combinaison $(i_0, i_1, \dots, i_k)$ de ce genre un symbole $V_{i_0, i_1,\dots,i_k}$. Ces symboles $V_{i_0, i_1,\dots,i_k}$ peuvent être regardés comme les sommets d'un complexe abstrait Q, qui est une sous-division barycentrique (v. [11])) du complexe réalisé par le réseau $\mathfrak{U}$; et le réseau $\mathfrak{V}$ est un sous-complexe du complexe Q. On peut étendre la définition de $\psi(\varDelta)$ à chaque 1-cycle du complexe Q et on voit sans peine que l'égalité $\psi(\varDelta) = 0$ est vraie non seulement si $\varDelta \sim 0$ dans $\mathfrak{V}$. mais plus généralement si $\varDelta \sim 0$ dans Q. Or on sait [22]) que $\varDelta \sim \varDelta_1$ dans Q, $\varDelta_1$ étant la sous-division barycentrique d'un $(1, \mathfrak{U})$-cycle Γ. Par suite $\psi(\varDelta) = \psi(\varDelta_1)$ et $\varphi(\pi\varDelta) = \varphi(\Gamma)$ car $\pi\varDelta \sim \pi\varDelta_1 = \Gamma$. Il suffit donc de prouver que $\psi(\varDelta_1) = \varphi(\Gamma)$. Or soit

$$\Gamma = \sum r \cdot (U_\lambda U_\mu)$$

et par suite

$$\varDelta_1 = \sum r \cdot [(V_\lambda V_{\lambda\mu}) - (V_\mu V_{\lambda\mu})],$$

d'où

$$\varphi(\Gamma) = \sum r \cdot [\lambda, \mu]$$

$$\psi(\varDelta_1) = \sum r \left(\tfrac{1}{2}[\lambda, \mu] - \tfrac{1}{2}[\mu, \lambda]\right) = \varphi(\Gamma).$$

8. **Lemme.** Soit R un espace connexe et complèment normal. Soit ε un nombre positif donné. Soit $\{\Gamma_0(\mathfrak{U})\}$ un $(1, R)$-cycle [23]) qui n'est pas ~ 0. Il existe un réseau $\mathfrak{U}_0$ dans R jouissant de la propriété suivante: Soit $\mathfrak{V}$ un affinement [10]) de $\mathfrak{U}_0$. On peut attacher à chaque $(1, \mathfrak{V})$-simplexe τ_i^1 un nombre rationnel t_i et par suite à chaque $(1, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma = \Sigma r_i \tau_i^1$ le nombre $\varphi(\Gamma) = \Sigma r_i t_i$ de manière que: 1° $|t_i| < \varepsilon$; 2° $\varphi(\Gamma) = 0$ si le $(1, \mathfrak{V})$-cycle Γ est ~ 0; 3° $\varphi(\Gamma)$ est entier si le $(1, \mathfrak{V})$-cycle Γ est entier [18]); 4° $\varphi(\Gamma_0(\mathfrak{V})) \neq 0$.

[22]) L. c. sub [11]), I, § 4, n° 3 et 4 et II, § 3, n° 6.

[23]) V. Homologie, II, 20.

Démonstration. L'espace R étant connexe, chaque réseau dans R l'est aussi. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau tel que $\Gamma_0(\mathfrak{U}_1)$ n'est pas ~ 0. D'après le lemme du n° 6, on peut attacher à chaque $(1, \mathfrak{U}_1)$-simplexe σ^1_{1i} un nombre rationnel s_{1i} et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U}_1)$-cycle $\Gamma_1 = \Sigma r_i \sigma^1_{1i}$ le nombre $\varphi_1(\Gamma_1) = \Sigma r_i s_{1i}$ de manière que 1° si $\Gamma_1 \sim 0$, $\varphi_1(\Gamma_1) = 0$, 2° si le cycle Γ_1 est entier [18]), le nombre $\varphi_1(\Gamma_1)$ est entier, 3° $\varphi_1(\Gamma_0(\mathfrak{U}_1)) \neq 0$. Soit n l'ordre [18]) du réseau $\mathfrak{U}_1$. D'après le lemme du n° 5, il existe des réseaux $\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots$ tels que $\mathfrak{U}_{k+1}$ soit un affinement barycentrique de $\mathfrak{U}_k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$; évidemment, l'ordre de chaque réseau $\mathfrak{U}_k$ est $\leqq n$. Soit M un nombre positif tel que $|s_{1i}| < M$ pour chaque $(1, \mathfrak{U}_1)$-simplexe σ^1_{1i}. D'après le lemme du n° 7, on peut attacher, pour $k = 2, 3, \ldots$, à chaque $(1, \mathfrak{U}_k)$-simplexe σ^1_{ki} un nombre rationnel s_{ki} et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U}_k)$-cycle $\Gamma_k = \Sigma r_i \sigma^1_{ki}$ le nombre $\varphi_k(\Gamma_k) = \Sigma r_i s_{ki}$ de manière que 1° $|s_{ki}| < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1} M$ pour chaque $(1, \mathfrak{U}_k)$-simplexe σ^1_{ki}, 2° $\varphi_k(\Gamma_k) = 0$ pour $\Gamma_k \sim 0$, 3° $\varphi_k(\Gamma_k)$ est entier si le $(1, \mathfrak{U}_k)$-cycle Γ_k est entier [18]); 4° $\varphi_k(\Gamma(\mathfrak{U}_k)) \neq 0$. Choisissons une valeur de k si grande que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-} \cdot M < \varepsilon$ et posons $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_0$. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement [10]) de $\mathfrak{U}_k$; soit $\pi = Pr. (\mathfrak{V}, \mathfrak{U}_k)$ [19]). Pour chaque $(1, \mathfrak{V})$-simplexe τ^1_i on a [24]) ou $\pi \tau^1_i = 0$ ou bien il existe un $(1, \mathfrak{U}_k)$-simplexe σ^1_{kj} tel que $\pi \tau^1_i = \eta \cdot \sigma^1_{kj}$ $(\eta = \pm 1)$; posons $t_i = 0$ dans le premier cas, $t_i = \eta s_{kj}$ dans le second cas. On voit sans peine que les nombres t_i jouissent des propriétés demandées.

9. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau [25]) dans un espace R. Partageons les sommets U de $\mathfrak{U}$ en k $(= 2, 3, \ldots)$ groupes $T_1, T_2, \ldots, T_k$ sans éléments communs. Désignons par $R(T_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ la somme de tous les $U \in T_i$; les $U \in T_i$ sont alors les sommets d'un réseau dans $R(T_i)$ que nous désignerons par $\mathfrak{U}(T_i)$. Désignons par $R(T_i, T_j)$ le produit $R(T_i) \cdot R(T_j)$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$. Soit T_{ij} l'ensemble des noyaux [26]) $U_i \cdot U_j$ de tous les $(1, \mathfrak{U})$-simplexes (U_i, U_j) tels que $U_i \in T_i$, $U_j \in T_j$; alors les $U_i \cdot U_j \in T_{ij}$ sont les sommets d'un réseau dans $R(T_i, T_j)$ que nous désignerons par $\mathfrak{U}(T_i, T_j)$. Ceci étant je démontrerai deux lemmes.

[24]) V. Homologie, II, 11.

[25]) Tous les réseaux de ce n° sont supposés fermés (v. Homologie, V, 2)

[26]) V. Homologie, II. 2.

Lemme α. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau connexe[15]) dans un espace R. Partageons les sommets de $\mathfrak{U}$ en deux groupes T_1 et T_2. Supposons que le réseau $\mathfrak{U}(T_1, T_2)$ soit connexe[15]). Soit Γ un $(1, \mathfrak{U})$-cycle. Il existe un $[1, \mathfrak{U}(T_1)]$-cycle Γ_1 et un $[1, \mathfrak{U}(T_2)]$-cycle Γ_2 tels que $\Gamma \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathfrak{U}$.

Démonstration. On peut poser $\Gamma = C_1 + C_2 + C_{12}$, où C_1 est une $[1, \mathfrak{U}(T_1)]$-chaîne, C_2 est une $[1, \mathfrak{U}(T_2)]$-chaîne, tandis que

$$C_{12} = \sum r_i (U_i, V_i)$$

avec $U_i \in T_1$, $V_i \in T_2$. La frontière de C_ν $(\nu = 1, 2)$ a la forme $\Sigma s_{\nu i} U'_{\nu i}$, $U'_{\nu i} \in T_\nu$ avec $\sum\limits_i s_{\nu i} = 0$; la frontière de Γ étant égale à zéro, on en déduit que $\Sigma r_i = 0$. Le noyau $U_i \cdot V_i$ de (U_i, V_i) est un sommet du réseau $\mathfrak{U}(T_1, T_2)$. Puisque $\Sigma r_i = 0$, on a dans ce réseau

$$\sum r_i U_i V_i = \sum r_i (U_i V_i - U_1 V_1).$$

Or le réseau $\mathfrak{U}(T_1, T_2)$ étant connexe, il existe pour chaque i une $[1, \mathfrak{U}(T_1, T_2)]$-chaîne dont la frontière est égale à $U_i V_i - U_1 V_1$. Par suite il existe une $(1, \mathfrak{U}(T_1, T_2))$-chaîne

$$\sum a_{\lambda\mu} (U_\lambda V_\lambda, U_\mu V_\mu) \to \sum r_i U_i V_i. \tag{1}$$

Naturellement U_λ, $U_\mu \in T_1$; V_λ, $V_\mu \in T_2$. Puisque $(U_\lambda V_\lambda, U_\mu V_\mu)$ est un $(1, \mathfrak{U}(T_1, T_2))$-simplexe, on a $U_\lambda V_\lambda U_\mu V_\mu \neq 0$. Par suite $(U_\lambda, V_\lambda, V_\mu)$ et $(U_\lambda, U_\mu, V_\mu)$ sont des $(2, \mathfrak{U})$-simplexes et l'on a

$$\begin{aligned}(U_\lambda, U_\mu, V_\mu) - (U_\lambda, V_\lambda, V_\mu) \to (U_\mu, V_\mu) - (U_\lambda, V_\lambda) + \\ + (U_\lambda, U_\mu) - (V_\lambda, V_\mu).\end{aligned} \tag{2}$$

Or on déduit de (1) que

$$\sum r_i U_i V_i = \sum a_{\lambda\mu} (U_\mu V_\mu - U_\lambda V_\lambda)$$

ce qui donne

$$C_{12} = \sum r_i (U_i, V_i) = \sum a_{\lambda\mu} [(U_\mu, V_\mu) - (U_\lambda, V_\lambda)].$$

D'après (2), il en résulte qu'il existe une $(1, \mathfrak{U}(T_1))$-chaîne D_1 et une $(1, \mathfrak{U}(T_2))$-chaîne D_2 telles que

$$\sum a_{\lambda\mu}[U_\lambda U_\mu V_\mu) - (U_\lambda V_\lambda V_\mu)] \to C_{12} + D_1 + D_2$$

où $C_{12} + D_1 + D_2 \sim 0$ et donc $\Gamma = C_1 + C_2 + C_{12} \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$, où

$$\Gamma_1 = C_1 - D_1, \quad \Gamma_2 = C_2 - D_2;$$

Γ_ν ($\nu = 1, 2$) est une $(1, \mathfrak{U}(T_\nu))$-chaîne. Il suffit donc de prouver que Γ_1 et Γ_2 sont des cycles. Or $F(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 0$, d'où $F(\Gamma_1) = - F(\Gamma_2) = 0$, car $F(\Gamma_\nu)$ est une $[0, \mathfrak{U}(T_\nu)]$-chaîne et les deux réseaux $\mathfrak{U}(T_1)$ et $\mathfrak{U}(T_2)$ n'ont aucun sommet commun.

Lemme β. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau connexe [15]) dans un espace R. Partageons les sommets de $\mathfrak{U}$ en deux groupes T_1 et T_2 de manière que le réseau $\mathfrak{U}(T_1)$ soit connexe [15]). Supposons qu'il existe un $(1, \mathfrak{U})$-cycle Γ tel qu'il soit impossible d'indiquer un 1-cycle Γ_1 dans $\mathfrak{U}(T_1)$ et un 1-cycle Γ_2 dans $\mathfrak{U}(T_2)$ de manière que $\Gamma \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathfrak{U}$. On peut alors partager les sommets de $\mathfrak{U}$ en deux groupes T'_1 et T'_2 de manière que 1^0 les deux réseaux $\mathfrak{U}(T'_1)$ et $\mathfrak{U}(T'_2)$ soient connexes; 2^0 le réseau $\mathfrak{U}(T'_1, T'_2)$ ne soit ni vide ni connexe.

D é m o n s t r a t i o n [27]). Le réseau $\mathfrak{U}(T_2)$ n'est pas nécessairement connexe; or on peut évidemment partager les sommets de T_2 en un nombre fini de groupes $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2k}$ sans éléments communs de manière que chaque réseau $\mathfrak{U}(T_{2i})$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ soit connexe. On voit sans peine que les réseaux $\mathfrak{U}(T_{2i}, T_{2j})$ $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$ sont vides. Le réseau $\mathfrak{U}$ étant connexe, on voit sans peine que les réseaux $\mathfrak{U}(T_1, T_{2i})$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ ne sont pas vides.

Il n'est pas possible que tous les réseaux $\mathfrak{U}(T_1, T_{2i})$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ soient connexes. En effet, si cet énoncé n'était pas vrai, puisque $\mathfrak{U}(T_1, T_{2i}) = \mathfrak{U}(T_1 + T_{21} + \dots + T_{2,i-1}, T_{2i})$, on déduirait par une application successive du lemme α qu'il existe pour $1 \leqslant i \leqslant k$, un 1-cycle Γ_{2i} dans $\mathfrak{U}(T_{2i})$ et un 1-cycle Γ_1 dans $\mathfrak{U}(T_1)$ tels que $\Gamma \sim \Gamma_1 + (\Gamma_{21} + \dots + \Gamma_{2k})$ dans $\mathfrak{U}$, ce qui présente une contradiction. On peut donc supposer que le réseau $\mathfrak{U}(T_{2k})$ ne soit pas connexe. On voit sans peine qu'il suffit de poser

$$T'_1 = T_{2k}, \quad T'_2 = T_1 + T_{21} + \dots + T_{2,k-1}.$$

[27]) Cf. la démonstration de M. Kuratowski du théorème II, l. c. sub [2]), p. 145.

10. Passons à la démonstration du théorème B. Soit donc R un continu Péanien et supposons qu'il existe un $(1, R)$-cycle $\{\Gamma_0(\mathfrak{U})\}$ qui n'est pas homologue à zéro. Il s'agit de prouver que le continu R n'est pas unicohérent.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et déterminons le réseau ouvert $\mathfrak{U}_0$ d'après le lemme du n° 8. Selon un théorème de M. Sierpiński[28]), il existe un réseau fermé $\mathfrak{K}$ qui est un affinement de $\mathfrak{U}_0$ et dont les sommets $K_1, K_2, \dots, K_m$ sont des continus. R étant un continu, le réseau $\mathfrak{K}$ est connexe. D'après le lemme du n° 8, on peut[29]) attacher à chaque $(1, \mathfrak{K})$-simplexe (K_i, K_j) un nombre rationnel s_{ij} et par suite à chaque $(1, \mathfrak{K})$-cycle $\Gamma = \Sigma r_{ij}(K_i, K_j)$ le nombre $\Sigma r_{ij} \cdot s_{ij} = \varphi(\Gamma)$ de manière que 1° $|s_{ij}| < \frac{1}{2}$ pour chaque $(1, \mathfrak{K})$-simplexe (K_i, K_j); 2° $\varphi(\Gamma) = 0$ si le $(1, \mathfrak{K})$-cycle Γ est ~ 0; 3° $\varphi(\Gamma)$ est entier si Γ est entier; 4° $\varphi(\Gamma_0(\mathfrak{K})) \neq 0$.

Soit S la circonférence $e^{2\pi i x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ i = \sqrt{-1})$. Attachons à chaque sommet K_ν de $\mathfrak{K}$ un point $f(K_\nu)$ de S de la manière suivante: Le réseau $\mathfrak{K}$ étant connexe, il existe une $(1, \mathfrak{K})$-chaîne entière[18])

$$C_\nu = \sum a_{\lambda\mu}(K_\lambda, K_\mu) \rightarrow K_\nu - K_1.$$

Posons

$$f(K_\nu) = e^{2\pi i \Sigma a_{\lambda\mu} s_{\lambda\mu}}.$$

La chaîne C_ν n'est pas déterminée sans ambiguité; or, C'_ν étant une autre valeur de C_ν, $C'_\nu - C_\nu$ est un $(1, \mathfrak{K})$-cycle entier[18]); les deux coefficients de $2\pi i$ différant l'un de l'autre par le nombre entier $\varphi(C_\nu - C_\nu)$, le point $f(K_\nu)$ est bien déterminé.

Pour $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$, on a

$$C_\mu - C_\nu + (K_\mu, K_\nu) \rightarrow 0.$$

D'après la propriété 3° des nombres $s_{\mu\nu}$, on en déduit que

$$s_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{f(K_\nu)}{f(K_\mu)}, \tag{1}$$

[28]) *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*, Fund. Math. I, 1920, pp. 44—60.

[29]) On peut appliquer ce lemme bien que le réseau $\mathfrak{K}$ soit fermé, cf. Homologie, V, 4.

la partie imaginaire du logarithme étant comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ en vertu de la propriété 1° des nombres $s_{\mu\nu}$.

Soient A et B deux points diamétralement opposés de la circonférence S et différents de tous les points $f(K_\nu)$. Les points A et B partagent S en deux arcs I_1 et I_2; choisissons la notation de manière que, conformément à l'orientation positive de S, le point A soit le point initial de I_1. Partageons les sommets K_ν de $\mathfrak{K}$ en deux groupes T_1 et T_2 en posant $K_\nu \in T_1$ (T_2) si le point $f(K_\nu)$ est situé dans I_1 (I_2). Partageons T_1 et T_2 resp. en groupes $T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1u_1}$; $T_{21}, T_{22}, \ldots, T_{2u_2}$ sans éléments communs de manière que (dans les notations du n° 9) les réseaux $\mathfrak{U}(T_{r\nu})$ $(1 \leqslant r \leqslant 2,\ 1 \leqslant \nu \leqslant u_r)$ soient connexes. Chaque sommet de $\mathfrak{K}(T_1, T_2)$ (la notation étant la même que celle du n° 9) a la forme $K_\mu \cdot K_\nu$ avec $K_\mu \in T_1$, $K_\nu \in T_2$. Partageons les sommets de $\mathfrak{K}(T_1, T_2)$ en deux groupes P, Q en posant $K_\mu \cdot K_\nu \in P(Q)$ si le plus court chemin sur S du point $f(K_\mu)$ au point $f(K_\nu)$ passe par le point A (B). Partageons de plus P en groupes $P_{\mu\nu}$ $(1 \leqslant \mu \leqslant u_1,\ 1 \leqslant \nu \leqslant u_2)$ en posant (pour $K_\mu K_\nu \in P$) $K_\mu K_\nu \in P_{\mu\nu}$ si $K_\mu \in T_{1\mu}$ et $K_\nu \in T_{2\nu}$.

Ceci étant, soit

$$\Gamma = \sum a_{\alpha\beta}(K_\beta, K_\alpha)$$

un $(1, \mathfrak{K})$-cycle; on peut choisir l'orientation des $(1, \mathfrak{K})$-simplexes de manière que $K_\alpha K_\beta \in \mathfrak{K}(T_1, T_2)$ entraîne que $K_\alpha \in T_1$ et $K_\beta \in T_2$. De (1) on déduit sans peine que le nombre $\varphi(\Gamma)$ est égal à la somme $\Sigma\, a_{\alpha\beta}$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs telles que $K_\alpha K_\beta \in P$. Pour $1 \leqslant \mu \leqslant u_1$, $1 \leqslant \nu \leqslant u_2$, posons $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma) = \Sigma\, a_{\alpha\beta}$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs telles que $K_\alpha K_\beta \in P_{\mu\nu}$. Donc

$$\varphi(\Gamma) = \sum_{\mu=1}^{u_1} \sum_{\nu=1}^{u_2} \varphi_{\mu\nu}(\Gamma). \tag{2}$$

Soit $(K_\alpha, K_\beta, K_\gamma)$ un $(2, \mathfrak{K})$-simplexe. On reconnait sans peine que $\varphi_{\mu\nu}[F(K_\alpha, K_\beta, K_\gamma)] = 0$ pour $1 \leqslant \mu \leqslant u_1$, $1 \leqslant \nu \leqslant u_2$. Il en résulte que $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma) = 0$ pour chaque $(1, \mathfrak{K})$-cycle $\Gamma \sim 0$, d'où $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma_1) = \varphi_{\mu\nu}(\Gamma_2)$ si $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ dans $\mathfrak{K}$.

D'après la propriété 4° des nombres s_{ij}, il existe un $(1, \mathfrak{K})$-cycle Γ tel que $\varphi(\Gamma) \neq 0$. D'après (2), il existe des valeurs de μ, ν telles que $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma) \neq 0$. Soit p. ex. $\varphi_{11}(\Gamma) \neq 0$, d'où $\varphi_{11}(\Gamma') \neq 0$ pour

$\Gamma' \sim \Gamma$ dans $\mathfrak{K}$. Or posons $U_1 = T_{11}$ et désignons par U_2 l'ensemble de tous les sommets de $\mathfrak{K}$ qui n'appartiennent pas à U_1. Si Γ_1 est un 1-cycle dans $\mathfrak{K}(U_1)$ et si Γ_2 est un 1-cycle dans $\mathfrak{K}(U_2)$ (notations du n° 9), on a évidemment $\varphi_{11}(\Gamma_1) = \varphi_{11}(\Gamma_2) = 0$, d'où $\varphi_{11}(\Gamma_1 + + \Gamma_2) = 0$. Par suite on ne peut pas avoir $\Gamma \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathfrak{K}$. Le réseau $\mathfrak{K}(U_1) = \mathfrak{K}(T_{11})$ étant connexe, il résulte du lemme β (n° 9) que l'on peut partager les sommets de $\mathfrak{K}$ en deux groupes U_1' et U' de manière que 1° les deux réseaux $\mathfrak{K}(U_1')$ et $\mathfrak{K}(U_2')$ soient connexes, le réseau $\mathfrak{K}(U_1', U_2')$ ne soit ni vide ni connexe.

Soit R_i $(i = 1, 2)$ la somme de tous les sommets de $\mathfrak{K}(U_i')$; soit R_3 la somme de tous les sommets de $\mathfrak{K}(U_1', U_2')$; évidemment $R_1 + R_2 = R$, $R_1 \cdot R_2 = R_3 \neq 0$. Les sommets de $\mathfrak{K}$ étant des continus et les réseaux $\mathfrak{K}(U_1')$ et $\mathfrak{K}(U_2')$ étant connexes, on voit que R_1 et R_2 sont des continus; le réseau $\mathfrak{K}(U_1', U_2')$ n'étant pas connexe, on voit que R_3 n'est pas un continu. Donc le continu R n'est pas unicohérent.