Eduard Čech

Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois

Fundam. Math. 17 (1931), 32-39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500990

Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois.

Par

Eduard Čech (Brno).

I. Introduction.

Considérons une fonction réelle $f(x)$ définie dans un intervalle J. Désignons par M l'ensemble des points $x \in J$ qui possèdent un voisinage O tel que $f(x)$ est monotone dans $O \cdot J$. Posons $N = J - M$. Evidemment l'ensemble $M(N)$ est ouvert (fermé) dans J. Désignons par A l'ensemble des points isolés de l'ensemble N. Evidemment A est l'ensemble des points $x \in J$ tels que, δ étant un nombre positif convenable, $f(x)$ est monotone dans [1]) $(x - \delta, x)$ et dans $(x, x + \delta)$, mais non dans $J \cdot (x - \delta, x + \delta)$. Posons $S = N - A$. L'ensemble A étant ouvert dans N, l'ensemble S est fermé dans J. Désignons par Γ la classe de ceux des intervalles (u, v) contigus à S qui contiennent un nombre *fint* et *impair* de points de A.

Je dirai, pour abréger, que *la fonction $f(x)$ jouit de la propriété P, si*: 1⁰ *$f(x)$ est continue dans J*; 2⁰ *pour chaque nombre réel c l'équation $f(x) = c$ possède un nombre fini* ($\geqq 0$) *de solutions $x \in J$.*

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ jouit de la propriété P, alors: 1⁰ $\overline{M} \supset J$ [2]); 2⁰ $S = J \cdot A'$; 3⁰ *Δ étant une partie quelconque non vide de la classe Γ, l'ensemble D des extrémités des intervalles $(u, v) \in \Delta$ n'est pas dense en soi. Inversement, si les conditions* 1⁰, 2⁰, 3⁰ *sont remplies, il existe une fonction $f(x)$ correspondante qui jouit de la propriété P.*

[1]) (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ désigne l'intervalle fermé, ouvert, demiouvert aux extrémités a, b.

[2]) $\overline{M}$ est la fermeture, M' l'ensemble dérivé de l'ensemble M.

II. Démonstration que la condition est nécessaire.

Supposons que $f(x)$ jouisse de la propriété P. Soit K l'intervalle des valeurs prises par $f(x)$. Pour $n = 1, 2, 3, \dots$ soit E_n l'ensemble des nombres c tels que l'équation $f(x) = c$ possède exactement n solutions $x \in J$. De l'équation $K = \sum_1^\infty E_n$ résulte[1]) qu'un au moins des ensembles E_n n'est pas non dense dans K. Donc il existe un nombre naturel n et un intervalle ouvert $K_1 \subset K$ tels que $\overline{E}_n \supset K_1$. Soit $J_1 \subset J$ un intervalle tel que $x \in J_1$ entraîne $f(x) \in K_1$.

Je dis que pour aucune valeur réelle c l'équation $f(x) = c$ n'a plus de $n+1$ solutions $x \in J_1$. En effet supposons que

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$$

soient des nombres de J_1 tels que $f(x_\nu) = c$. Evidemment $c \in K_1$. Pour $1 \leqq \nu \leqq n+1$ il existe (en vertu de la propriété P) un nombre $y_\nu \in (x_\nu, x_{\nu-1})$ tel que $f(y_\nu) \neq c$. Soit $\delta\,(>0)$ le plus petit des $n+1$ nombres $|f(y_\nu) - c|$. Puisque $c \in K_1 \subset \overline{E}_n$, l'intervalle K_1 étant ouvert, il existe des nombres $c_1, c_2 \in E_n$ tels que $c - \delta < c_1 < < c < c_2 < c + \delta$. On voit sans peine que pour chaque $\nu\,(1 \leqq \nu \leqq n+1)$ la fonction $f(x)$ prend dans l'intervalle $(x_\nu, x_{\nu+1})$ deux fois au moins une des deux valeurs c_1, c_2. Donc le nombre total des solutions des deux équations $f(x) = c_1$, $f(x) = c_2$ est au moins égal à $2(n+1)$, ce qui contredit à l'hypothèse $c_1, c_2 \in E_n$.

La fonction $f(x)$ prend donc dans J_1 chaque sa valeur $(n+1)$ fois au plus. Si $f(x)$ n'est pas monotone dans J_1, on a $f(x_1) = = f(x_2) = c$, les points $x_1 < x_2$ appartenant à J_1. La fonction $f(x)$ n'étant pas constante dans aucun intervalle, il existe un nombre $x_0 \in (x_1, x_2)$ tel que $f(x_0) \neq c$ est le maximum ou le minimum des nombres $f(x)$ pour $x \in [x_1, x_2]$. Soit x_3 la plus grande solution $< x_0$ de l'équation $f(x) = c$ $(x \geqq x_1$, d'où $x_0 \in J_1)$. On voit sans peine que chaque valeur prise par $f(x)$ dans l'intervalle $(x_3, x_0) \subset J_1$ en est prise aussi dans l'intervalle $[x_0, x_2] \subset J_1$ disjoint à (x_3, x_0). On en conclut sans peine que $f(x)$ prend dans l'intervalle $J_2 = (x_0, x_1)$ chaque sa valeur $(n+1) - 1 = n$ fois au plus. On arrive ainsi finalement à un intervalle J_k tel que $f(x)$ prend chaque sa valeur dans J_k une fois seulement.

[1]) Un intervalle étant de 2[de] catégorie.

Donc il existe un intervalle $J^* \subset J$ dans lequel la fonction $f(x)$ est monotone. Par la même raison chaque intervalle $J_0 \subset J$ contient un intervalle J_0^* de monotonie de $f(x)$. L'ensemble M est par suite dense dans J de manière que les ensembles N et S sont non denses dans J.

De la définition des ensembles A et S il résulte tout de suite que $A' \subset S$. On en déduit sans peine que si l'égalité à démontrer $J \cdot A' = S$ n'est pas vraie, il existe un intervalle $J_1 \subset J$ tel que l'ensemble $N \cdot J$ est parfait [1]. Démontrons d'abord que, J_1 étant un tel intervalle, $f(x)$ ne peut pas être monotone dans $N \cdot J$. En effet si, p. ex., $f(x)$ y est non décroissante, et si (u, v) est un intervalle contigu à $N \cdot J_1$, on a $(u, v) \subset M$; $f(u) \leqq f(v)$, d'où il résulte aussitôt que $f(x)$ est non décroissante dans (u, v). On en déduit sans peine que $f(x)$ est non décroissante dans $[\alpha, \beta]$ — le plus petit intervalle contenant $N \cdot J_1$, — d'où $(\alpha, \beta) \subset M$ de manière qu'on arrive au résultat absurde que l'ensemble parfait $N \cdot J_1 \subset [\alpha, \beta] \cdot (J - M)$ ne contient que les deux points α, β au plus.

Continuons à supposer que $J_1 \subset J$ soit un intervalle tel que l'ensemble $N \cdot J_1$ soit parfait. Or, nous verrons que ceci est incompatible avec la propriété P; cette contradiction prouve, comme nous savons, que $A' = S$. Soit (u_1, v_1) un intervalle contigu à $N \cdot J_1$. On voit sans peine qu'il existe à droite du point v_1 un intervalle fermé $J_1^* \subset J_1$ tel que l'ensemble $N \cdot J_1^*$ est parfait. La fonction $f(x)$ n'est donc pas monotone dans $N \cdot J_1^*$, d'où il résulte sans peine l'existence de trois points $s_2, t_2, v_2 \in N \cdot J_1^*$ tels que 1° $s_2 < t_2 < v_2$ ou bien $s_2 > t_2 > v_2$; 2° $f(v_2) \in K_1 = (f(s_2), f(t_2))$. Posons encore $J_1^0 = [s_2, t_2]$ de manière que $f(x)$ prend dans J_1^0 chaque valeur $y \in \overline{K}_1$. L'ensemble des extrémités droites des intervalles contigus à $N \cdot J_1^*$ étant dense dans $N \cdot J_1^*$ on voit sans peine que l'on peut supposer que le point v_2 soit l'extrémité droite d'un intervalle (u_2, v_2) contigu à $N \cdot J_1^*$. Maintenant on répète la construction en remplaçant (u_1, v_1) par (u_2, v_2). On commence donc par trouver un intervalle fermé $J_2^* \subset J_1^*$ tel que l'ensemble $N \cdot J_2^*$ soit parfait. En tenant compte de ce que $v_2 \in J_1^* - J_1^0$ et $f(v_2) \in K_1$, où K_1 est un intervalle ouvert, on voit sans peine que l'on peut choisir J_2^* de manière que $J_2^* \cdot J_1^0 = 0$ et que $x \in J_2^*$ entraîne $f(x) \in K_1$. En procédant ainsi, on arrive à former trois suites infinies d'intervalles J_n^0, J_n^*, K_n de manière que:

[1]) Non dense, parce que M est dense dans J.

1° $J_n^* \supset J_n^0$; 2° $J_n^* \supset J_{n+1}^*$; 3° $J_n^0 \cdot J_{n+1}^* = 0$; 4° la fonction $f(x)$ prend dans J_n^0 chaque valeur $y \epsilon K_n$; 5° $x \epsilon J_{n+1}^*$ entraîne $f(x) \epsilon K_n$. Or soit $y \epsilon K_{n+1}$; d'après 4°, il existe un point $x \epsilon J_n^0$ tel que $f(x) = y$; d'après 1° on a $x \epsilon J_n^*$, d'où selon 5°, $y \epsilon K_n$. On arrive ainsi à l'inclusion $K_{n+1} \subset K_n$ de manière qu'il existe un point $c \epsilon \prod_1^\infty \overline{K}_n$. D'après 4°, il existe pour chaque valeur de n un point $x_n \epsilon J_n^0$ tel que $f(x_n) = c$. Pour $m < n$ on a d'après 1° et 2° $x_n \epsilon J_n^* \subset J_{m+1}^*$, tandis que $x_m \epsilon J_m^0$, d'où $x_m \neq x_n$ selon 3°. Or ceci contredit à la propriété P.

Soit enfin $\Delta \subset \Gamma$, $\Delta \neq 0$: Partageons Δ en trois classes Δ, Δ_2, Δ_3 conformément à la règle suivante. Soit $(u, v) \epsilon \Delta$. Si $f(u) \neq f(v)$, posons $(u, v) \epsilon \Delta_1$. Si au contraire $f(u) = f(v)$, on déduit sans peine de la propriété P qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que la fonction $f(x) - f(u) = f(x) - f(v)$ garde un signe constant ($\neq 0$) dans chacun des deux intervalles $(u - \delta, u)$ et $(v, v + \delta)$. Si ces deux signes sont contraires, soit $(u, v) \epsilon \Delta_2$; s'ils sont égaux, soit $(u, v) \epsilon \Delta_3$. Désignons encore par D, D_1, D_2, D_3, l'ensemble des éxtrémités des intervalles formant respectivement la classe $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Evidemment $D = D_1 + D_2 + D_3$. Supposons que l'ensemble D soit dense en soi. L'un au moins des ensembles D_1, D_2, D_3 est dense sur une portion D' de D. On peut supposer évidemment que la portion D' ne contienne aucune de ses bornes, et, parsuite, on peut supposer encore qu'elle coïncide avec l'ensemble D tout entier [1]), donc, que l'un au moins des trois ensembles D_1, D_2, D_3 soit dense en soi. Or nous allons voir que ceci contredit à la propriété P.

En premier lieu, supposons que l'ensemble D_1 soit $\neq 0$ et dense en soi. Choisissons un intervalle $(u_1, v_1) \epsilon \Delta_1$. Puisque $\Delta_1 \subset \Gamma$, on a $(u_1, v_1) \subset M + A$ et l'ensemble (u_1, v_1). A contient un nombre fini et impair de points; en outre, on a $f(u_1) \neq f(v_1)$ d'après la définition de Δ_1. On en déduit sans peine qu'un des deux nombres u_1 et v_1 — désignons le par w_1 — possède la propriété suivante: il existe un intervalle ouvert K_1 tel que $f(w_1) \epsilon K_1$ et que la fonction $f(x)$ prenne dans l'intervalle (u_1, v_1) chaque valeur $y \epsilon K_1$. Le point w_1 appartenant à l'ensemble dense en soi D_1, il existe un intervalle (u_2, v_2) contenu dans une telle proximité du point w_1 que $x \epsilon [u_2, v_2]$

[1]) Car, on peut évidemment remplacer dans notre raisonnement l'ensemble D par sa portion D', cette portion étant dense en soi en même temps que D et étant formée aussi des extrémités d'une famille d'intervalles appartenant à I.

entraîne $f(x) \in K_1$. On répète alors la construction précédente en remplaçant l'intervalle (u_1, v_1) par (u_2, v_2). En désignant par w_2 un nombre choisi convenablement parmi les deux nombres u_2, v_2, il existe un intervalle ouvert K_2 tel que $\overline{K_2} \subset K_1$, $f(w_2) \in K_2$ et que la fonction $f(x)$ prenne dans l'intervalle (u_2, v_2) chaque valeur $y \in K_2$. On arrive ainsi à une suite d'intervalles $(u_n, v_n) \in \Delta_1$, différents l'un de l'autre et par suite disjoints, et à une autre suite d'intervalles K_n telle que 1° $K_{n+1} \subset \overline{K_n}$, 2° la fonction $f(x)$ prend dans l'intervalle (u_n, v_n) chaque valeur $y \in K_n$. D'après 1°, il existe un point $c \in \prod_1^\infty K_n$; d'après 2°, il existe pour chaque valeur de n un point $x_n \in (u_n, v_n)$ tel que $f(x_n) = c$. Or, ceci contredit à la propriété P, car les points x_n sont tous différents, les intervalles (u_n, v_n) étant disjoints.

En second lieu, supposons que l'ensemble D_2 soit $\neq 0$ et dense en soi. Choisissons un intervalle $(u_1, v_1) \in \Delta_2$. Désignons par K_1 l'ensemble des valeurs de $f(x)$ pour $x \in [u_1, v_1]$ de manière que $f(u_1) = f(v_1) \in K_1$. D'après la définition de Δ_2 il existe un nombre $\delta > 0$ tel que dans un au moins des deux intervalles $(u_1 - \delta, u_1)$, $(v_1, v_1 + \delta)$ la fonction $f(x)$ ne prenne que des valeurs appartenant à K_1. Si c'est l'intervalle $(u_1 - \delta, u_1)$, posons $w_1 = u_1 - \delta$; dans le cas contraire, posons $w_1 = v_1$. Puisque le point w_1 appartient à l'ensemble dense en soi D_2, il existe un intervalle $(u_2, v_2) \in \Delta_2$ contenu dans $(w_1, w_1 + \delta)$. Désignons par K_2 l'ensemble des valeurs de $f(x)$ pour $x \in [u_2, v_2]$. L'inclusion $(u_2, v_2) \subset (w_1, w_1 + \delta)$ entraîne $K_2 \subset K_1$. En procédant ainsi, on forme une suite d'intervalles disjoints $[u_n, v_n]$ telle que l'on a $K_{n+1} \subset K_n$, où K_n désigne l'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans $[u_n, v_n]$. Les K_n étant évidemment des intervalles fermés, il existe un point $c \in \prod_1^\infty K_n$ et des points $x_n \in [u_n, v_n]$, ce qui contredit à la propriété P.

En troisième lieu, supposons que l'ensemble D_3 soit $\neq 0$ et dense en soi. Choisissons $(u_1, v_1) \in \Delta_3$. D'après la définition de Δ_3, il existe un nombre $\delta_1 > 0$ tel que la fonction $f(x) - f(u_1) = f(x) - f(v_1)$ garde un signe constant $(\neq 0)$ dans l'ensemble $[u_1 - \delta_1, u_1) + (v_1, v_1 + \delta_1]$. Posons $K_1 = (f(u_1), f(u_1 - \delta_1))$ de manière que la fonction $f(x)$ prend chaque valeur $y \in K_1$ dans l'intervalle $(u_1 - \delta_1, u_1)$. On voit sans peine qu'il existe un nombre positif $\delta_1' < \delta_1$ tel que $x \in (v_1, v_1 + \delta_1')$ entraîne $f(x) \in K_1$. Puisque le point v_1 appartient à l'ensemble dense en soi D_3, il existe un intervalle $(u_2, v_2) \epsilon \Delta_3$ tel que $[u_2, v_2] \subset (v_1, v_1 + \delta_1')$ de manière que $f(u_2) = f(v_2) \epsilon K_1$. Alors il existe un nombre $\delta_2 > 0$ tel que la fonction $f(x) - f(u_2) = = f(x) - f(v_2)$ garde un signe constant ($\neq 0$) dans l'ensemble $[u_2 - \delta_2, u_2) \dot{+} (v_2, v_2 + \delta_2]$. Posons $K_2 = (f(u_2), f(u_2 - \delta_2))$. Le point $f(u_2)$ appartenant à l'intervalle ouvert K_1, on peut prendre δ_2 si petit que l'on ait $\overline{K_2} \subset K_1$. En procédant ainsi, on arrive à former deux suites infinies de nombres u_n, v_n et une suite infinie d'intervalles K_n telles que: 1° $u_n < v_n < u_{n+1} < v_{n+1}$; 2° $\overline{K_{n+1}} \subset K_n$; 3° la fonction $f(x)$ prend dans l'intervalle (v_{n-1}, u_n) $(v_0 = u_1 - \delta_1)$ chaque valeur $y \epsilon K_n$. D'après 2° il existe un point $c \epsilon \prod_1^\infty K_n$. D'après 3° il existe des points $x_n \epsilon (v_{n-1}, u_n)$ tels que $f(x_n) = c$. D'après 1° on a $x_m < x_n$ pour $m < n$. Or ceci contredit à la propriété P.

III. Démonstration que la condition est suffisante.

Soit J un intervalle donné. Soit $A \subset J$ un ensemble isolé. Posons $J \cdot A' = S$, $M = J - (A + S)$ de manière que M est un ensemble ouvert et dense dans J. Désignons par Γ la classe contenant ceux des intervalles (u, v) contigus à S pour lesquels le produit $(u, v) \cdot A$ contient un nombre fini et impair de points. [On peut avoir $\Gamma = 0$]. La classe Γ doit jouir de la propriété suivante: Si l'on a $\Delta \subset \Gamma$, $\Delta \neq 0$, l'ensemble D des extrémités des intervalles appartenant à Δ n'est pas dense en soi. On doit construire une fonction $f(x)$ jouissant de la propriété P et telle que les ensembles A, S, M aient relativement à $f(x)$ la signification expliquée dans l'introduction.

Nous commençons par définir l'*ordre* des intervalles formant la classe Γ; cet ordre sera un nombre ordinal $< \Omega = \omega_1$. L'ensemble D_0 des extrémités de tous les intervalles appartenant à Γ n'est pas dense en soi (si $\Gamma \neq 0$). Donc il existe des intervalles $(u, v) \epsilon \Gamma$ tels qu'un au moins des deux nombres u et v est isolé dans D_0. Ce seront, par définition, les intervalles d'ordre 0. Soit $\alpha > 0$ un nombre ordinal donné es supposons que l'on ait déjà défini les intervalles d'ordre β pour chaque nombre ordinal $\beta < \alpha$. Désignons par $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ la classe des intervalles restants et supposons que $\Gamma_\alpha \neq 0$. Soit D_α l'ensemble des extrémités de tous les intervalles appartenant à Γ_α. L'ensemble $D_\alpha \neq 0$ n'étant pas dense en soi, il existe des intervalles $(u, v) \epsilon \Gamma_\alpha$ tels qu'un au moins des deux nombres u et v est isolé dans D_α. Ce seront, par définition, les intervalles d'ordre α La classe Γ étant au plus dénombrable, on voit bien qu'il existe un nombre ordinal $\gamma < \Omega$ tel que chaque intervalle appartenant à Γ possède un ordre détérminé $\alpha < \gamma$. Soit encore $(u, v) \epsilon \Gamma$ un intervalle d'ordre α. Si le point u ist isolé dans l'ensemble D_α, appelons u l'extrémité *distinguée* de l'intervalle (u, v); dans le cas contraire, l'extrémité distinguée de (u, v) sera le point v. Donc, dans tous les cas, l'extrémité distinguée d'un intervalle (u, v) d'ordre α est un point isolé de l'ensemble D_α.

Désignons par C l'ensemble des extrémités distinguées de tous les intervalles formant la classe Γ. Je dis que l'ensemble C est *clairsémé*. Supposons le contraire. Alors il existe un ensemble dense en soi et non vide $C^* \subset C$. Désignons par Γ^* la classe de tous les intervalles $(u, v) \epsilon \Gamma$ dont l'extrémité distinguée appartient a C.

Soit Θ l'ensemble des ordres de tous les intervalles formant la classe Γ^*. C'est un ensemble non vide de nombres ordinaux de sorte qu'il existe Min. $\Theta = \alpha$. Evidemment $\Gamma^* \subset \Gamma_\alpha$ $(\Gamma_0 = \Gamma)$ de manière que $C^* \subset D_\alpha$. D'après la définition de Θ et de α, il existe un intervalle $(u, v) \epsilon \Gamma^*$ d'ordre α. En désignant par w l'extrémité distinguée de l'intervalle (u, v) on a $w \epsilon C^* \subset D_\alpha$. D'après la définition de l'extrémité distinguée, le point w est isolée dans D_α et donc, à plus forte raison, dans C^*. Or ceci contredit à l'hypothèse que l'ensemble C^* soit dense en soi.

L'ensemble C étant évidemment au plus dénombrable, on peut ranger ses points en une suite (finie ou infinie)

$$(*) \qquad w_1, w_2, w_3, \ldots$$

Or l'ensemble C étant clairsemé, c'est un G_δ [1]). Donc $C = \prod_1^\infty G_n$, les G_n étant des ensembles ouverts; on peut évidemment supposer que $G_n \supset G_{n+1}$. Pour chaque valeur de n [2]) il existe un intervalle $j_n = [w_n - \delta_n, w_n + \delta_n]$ tel que: 1° $j_n \subset G_n$; 2° j_n ne contient aucun des points $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$; 3° $0 < \delta_n < \frac{1}{n^2}$. Je dis qu'il n'existe aucun point qui appartienne simultanément à une infinité des intervalles j_n. Supposons par impossible, que l'on ait $c \epsilon \prod_1^\infty j_{p_n}$ $(p_1 <$

[1]) V. Hausdorff, Mengenlehre, p. 169 et 170 (ensemble clairsemé = separierte Menge).

[2]) Pour laquelle existe le point w_n; d'ailleurs la considération qui suit est banale dans le cas où l'ensemble C est fini.

$< p_1 < p_2 < \ldots$). D'après 1°, on a $c \in \prod_1^\infty G_{p_n} = C$ (en vertu de l'inclusion $G_{n+1} \subset G_n$), donc $c = w_m$ pour une valeur convenable de m. Mais alors $w_m \in j_{p_n}$ pour chaque valeur de n, ce qui contredit à l'hypothèse 2°.

Nous sommes maintenant en état de construire la fonction cherchée $f(x)$. Il suffit évidemment de faire la construction dans le cas où J est le plus petit intervalle contenant S. Pour $x \in S$ posons $f(x) = x$; il reste à définir $f(x)$ dans les intervalles contigus à S. Soit (u, v) un tel intervalle; commençons par le cas où (u, v) n'appartient pas à Γ. L'intervalle (u, v) contient donc un nombre fini et pair ($\geqq 0$) ou bien infini de points $x \in A$; dans le second cas, l'ensemble dérivé de (u, v). A ne peut évidemment contenir que tout au plus les points u, v. On voit sans peine qu'on peut définir $f(x)$ dans $[u, v]$ de manière que les conditions suivantes soient réalisées: 1° $f(u) = u, f(v) = v$; 2° $f(x)$ est continue dans $[u, v]$; 3° l'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans $[u, v]$ coïncide avec l'intervalle $[u, v]$ lui même; 4° la fonction $f(x)$ est linéaire (non constante) dans chaque intervalle contenu dans $(u, v) - A$; 5° la fonction $f(x)$ n'est pas monotone dans aucun voisinage d'aucun point $x \in (u, v) \cdot A$; 6° pour chaque valeur réelle de c, l'équation $f(x) = c$ possède au plus trois racines $x \in (u, v)$. Passons au cas $(u, v) \in \Gamma$, où l'ensemble $(u, v) \cdot A$ contient un nombre fini et impair des points. On voit sans peine qu'on peut définir $f(x)$ dans $[u, v]$ de manière que toutes les conditions 1°—7° soient réalisées, à l'exception de la condition 3° que l'on remplacera par la suivante: Soit n le nombre naturel tel que l'extrémité distinguée de l'intervalle (u, v) soit égale au terme w_n de la suite (*) et soit $j_n = [w_n - \delta_n, w_n + \delta_n]$ correspondant. L'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans $[u, v]$ doit coïncider avec l'intervalle $[u, v] + j_n$; l'oscillation de $f(x)$ dans $[u_n, v_n]$ est donc $\leqq v - u + 2\delta_n < v - u + \frac{2}{n^2}$. On vérifie sans difficulté que $f(x)$ est la fonction cherchée.

Je terminerai par la remarque suivante: Nous n'avons pas demandé que le nombre des solutions de l'équation $f(x) = c$ soit *borné*; on peut démontrer que ceci est réalisable si et seulement si l'ordre (précédemment défini) d'aucun intervalle appartenant à Γ ne surpasse un nombre naturel fixe k.