Eduard Čech

Osservazioni sulle quadriche di Darboux

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) 8_2 (1928), 371-372

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500901

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. VIII, serie 6ª, 2º sem., fasc. 9 — Roma, novembre, 1928.

Geometria. — *Osservazioni sulle quadriche di Darboux.* Nota[1] di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. In una Memoria presentata all'Accademia delle Scienze di Praga il 23 aprile 1926[2], I. Klobouček ha dimostrato il teorema seguente: *Sia* O *un punto generico di una superficie* S *non rigata riferita alle asintotiche* u_1 , u_2; *per* $i = 1, 2$, *siano* C_i $(i = 1, 2)$ *due curve tracciate su* S. *La* C_i *tocchi in* O *l'asintotica* u_i; *il rapporto delle curvature in* O *di* C_i *e dell'asintotica* u_i *abbia, tanto per* $i = 1$ *quanto per* $i = 2$, *lo stesso valore* k; *sia* R_i *la rigata delle tangenti asintotiche, lungo* C_i, *di quel sistema cui non appartengono le tangenti a* u_i; *sia infine* P_i *il regolo osculatore in* O *della rigata* R_i. *Allora,* P_1 *e* P_2 *sono i due regoli complementari di una quadrica* Q. Q *appartiene al fascio* F *delle quadriche di Darboux e la posizione di* Q *in* F *dipende soltanto dal valore di* k[3].

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1928.

(2) « Rozpravy II. třídy české akademie », vol. 35, n. 15.

(3) Il caso particolare $k = 0$ di questa proposizione è stato ritrovato da E. BOMPIANI (questi « Rendiconti », 10 ottobre 1927); poco dopo (questi « Rendiconti », 8 gennaio 1928), G. FUBINI ha ritrovato il teorema generale. Il Bompiani studia le curve, tracciate su S,

2. Una quadrica Q del fascio F è determinata dal numero k, che è noto essere un parametro *proiettivo* nel fascio k; dirò che k è l'*indice* della quadrica Q; il teorema di Kloboužek ne dà il significato geometrico.

In particolare, la quadrica d'indice 1 è la quadrica di Lie; per $k = \infty$ si ottiene il piano tangente contato due volte.

3. Al capitolo X della *Geometria proiettiva differenziale* di G. Fubini e mia, ho dato (§§ 85-88) una costruzione molto complicata delle *quadriche di Montard*. Al § 90 invece, ho indicato un'altra costruzione ben più semplice di queste quadriche; soltanto, nella seconda soluzione ho fatto uso di una quadrica, là indicata con M_0, di cui ignoravo il significato geometrico. Orbene, M_0 *non è che la quadrica di Darboux d'indice* $\frac{4}{9}$.

4. Siano[1] ρ_1, ρ_2 i raggi proiettivi di curvatura di S; sia K la curvatura della forma normale φ_2 di Fubini. Allora

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = K - 1. \tag{1}$$

Questo teorema di Fubini è l'analogo proiettivo del *teorema egregium* di Gauss. Però, un significato geometrico soddisfacente di ρ_1 e ρ_2 mancava finora. Orbene, siano k_1, k_2 gli indici delle due quadriche di Darboux passanti per i fuochi della congruenza Γ generata dalle normali proiettive; allora

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{K - k_i}{2} \qquad (i = 1, 2)$$

sicchè (1) si scrive

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = K - 2. \tag{2}$$

Quindi $K - 2$ *è l'indice di quella quadrica di Darboux, rispetto cui sono coniugati i due fuochi di* Γ.

tangenti a un'asintotica; il Fubini studia anche le curve, tangenti tracciate su S, tangenti a un'asintotica, per cui il piano tangente ad S è piano osculatore stazionario, determinando in tale caso il valore corrispondente di k.

(1) *Geometria proiettiva differenziale*, § 25 A.

Roma, 1928 — Dott. G. Bardi, Tip. della R. Accad. dei Lincei.