Eduard Čech

Étude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 36 (1924), 24 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500886

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1924 Čís. 36

ÉTUDE ANALYTIQUE DE L'ÉLÉMENT LINÉAIRE PROJECTIF D'UNE SURFACE

PAR

EDOUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 59

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

ÉTUDE ANALYTIQUE DE L'ÉLÉMENT LINÉAIRE PROJECTIF D'UNE SURFACE.

Introduction.

On connaît le rôle important de l'élément linéaire $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ dans la géométrie infinitésimale *métrique* des surfaces. Y a-t-il quelque chose d'analogue dans la géométrie infinitésimale projective? On doit a *M. Fubini*[1] la réponse affirmative. *Voici le procédé de M. Fubini.* Désignons par la lettre x les quatre coordonnées homogènes du point mobile sur une surface S non développable, que nous supposons données en fonction de deux paramètres u_1 et u_2. Soit $\Sigma\, g_{ik}\, du_i\, du_k = g_{11}\, du_1^2 + 2g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2$ une forme différentielle quadratique arbitraire, à discriminant $G = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2$ différent de zéro. Posons

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{|G|}}(x,\, x_1,\, x_2,\, d^2x) = \Sigma\, a_{ik}\, du_i\, du_k,$$

où la parenthèse désigne un déterminant dont on obtient les lignes en remplaçant x par les quatre coordonnées,[2] et

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{|G|}}(x,\, x_1,\, x_2,\, d^3x) - \tfrac{3}{2}\, d F_2 + \tfrac{3}{8}\, F_2\, d \log \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}{G} =$$
$$= \Sigma\, a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l.$$

Les formes F_2 et F_3 sont liées par les identités

$$a_{22}\, a_{111} - 2a_{12}\, a_{112} + a_{11}\, a_{122} = 0$$
$$a_{22}\, a_{112} - 2a_{12}\, a_{122} + a_{11}\, a_{222} = 0.$$

Si l'on remplace $\Sigma\, g_{ik}\, du_i\, du_k$ par une autre forme quadratique à discriminant G', les formes F_2 et F_3 sont multipliées par $\sqrt{\left|\frac{G}{G'}\right|}$.

J'ai donné une autre définition de F_2 et F_3.[3] Laissant à la lettre x sa signification, indiquons par ξ les quatre coordonnées homogènes du plan tangent de S, et précisément choisissons le facteur arbitraire commun des quatre ξ de manière que, si X e Ξ sont respectivement les coor-

---

[1] *Applicabilità proiettiva di due superficie*, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 41 (1916), § 2. Cfr. Fubini, *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, ibid. 43 (1919), § 1.

[2] Les indices 1 et 2 signifiont les dérivées par rapport à u_1 et u_2,

[3] *I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo di Fubini*, Annali di Matematica, 31 (3), 1923.

données d'un point et d'un plan arbitraire, on ait

$$\left(x\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}X\right):S\xi X=\left(\xi\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\Xi\right):Sx\Xi.$$ [4]

Alors on peut poser

$$F_2=-Sdxd\xi,\quad F_3=\tfrac{1}{2}S(dxd^2\xi-d^2xd\xi).$$

En multipliant les x par un facteur ϱ, on voit aisément que les formes F_2 et F_3 viennent multipliées par le même facteur ϱ^2.

Quelle définition que l'on choisisse, il est clair que les équations $F_2=0, F_3=0$, et la forme fractionnaire $\frac{F_3}{F_2}$ sont parfaitement déterminées par la surface S, ne dépendant point de sa représentation analytique; il est clair aussi qu'elles ne changent non plus, si l'on soumet la surface S à une transformation homografique. Or on voit immédiatement que $F_2=0$ est l'équation différentielle des lignes asymptotiques de S. Quant à $F_3=0$, M. Fubini a démontré que c'est l'équation différentielle des lignes que l'on nomme maintenant les *courbes de Darboux.*[5] Enfin, j'ai donné aussi une interprétation géométrique simple de l'intégrale $\int\frac{F_3}{F_2}$ étendue à une courbe quelconque de S.[6] On donne le nom *d'élément linéaire projectif* de la surface S à la forme fractionnaire $\frac{F_3}{F_2}$. Si S est une quadrique, et alors seulement, l'élément linéaire projectif s'évanouit identiquement. Si S est une surface réglée, F_3 et F_2 ont un facteur linéaire commun. En dehors de ces cas exceptionnels,[7] on peut *normaliser*[8] les formes F_2 et F_3 qui n'étaient jusqu'ici déterminées qu'à un facteur arbitraire commun près. A ce but, considérons l'invariant simultané absolu des formes F_2 et F_3

$$J=\frac{1}{A^2}\begin{vmatrix}a_{111}&a_{112}&a_{122}\\a_{112}&a_{122}&a_{222}\\a_{11}&a_{12}&a_{22}\end{vmatrix};\quad(A=a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$$

on voit immédiatement que les *formes normales*

$$\varphi_2=-JF_2,\quad\varphi_3=-JF_3$$ [9]

restent inaltérées si l'on multiplie simultanément les F_2 et F_3 par le même facteur et, par suite, sont complètement déterminées si l'on connaît l'élément linéaire projectif.

---

[4] Le signe S indique la somme étendue aux quatre coordonnées homogènes.

[5] Cfr. les Mémoires cités sous [1].

[6] *Sur la géométrie d'une surface et sur le facteur arbitraire des coordonnées homogènes*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 31 (5) 2° sém., 1922.

[7] Dans le Mémoire présent, nous ne nous y occuperons point.

[8] Ce procédé de normalisation est dû à M. Fubini. Cfr. [1].

[9] Le cas $J=0$ est celui déjà exclu des surfaces réglées.

De ce qui précède il résulte qu'on peut choisir le facteur arbitraire des coordonnées x de façon que soit $F_2 = \varphi_2$, $F_3 = \varphi_3$; les coordonnées homogènes ainsi détermiées sont les *coordonnées normales* de M. Fubini.

L'élément linéaire ordinaire ds^2 possède la propriété fondamentale de ne changer pas par une *déformation* de la surface S au sens classique de ce mot. Ici encore, on a une propriété analogue. En effet, M. Fubini a montré[10] que l'élément linéaire projectif $\frac{F_3}{F_2}$ (et donc aussi les formes normales φ_3 et φ_2) ne change pas si l'on soumet la surface S à une *déformation projective*. Je renvoie le lecteur au Mémoire cité pour la démonstration de ce fait, et pour la définition de la déformation projective. D'ailleurs *M. Cartan* a montré[11] qu'une surface *générale* est projectivement indéformable, les surfaces déformables dépendant de six fonctions arbitraires d'un argument.

Le but de ce Mémoire est d'étudier la question de *reconnaître, deux éléments linéaires projectifs* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ *étant donnés, si l'on peut transformer l'un dans l'autre et, si cela a lieu, de déterminer toutes ces transformations.* Le problème ainsi posé a été déjà résolu, il est vrai, par M. Cartan dans le Mémoire cité[12]. Néanmoins, il me semble que la méthode qui suit est, à certains aspects, préférable à celle de M. Cartan. En effet, M. Cartan suppose résolue l'équation cubique $\varphi_3 = 0$; ici, au contraire, je n'introduis aucune autre irrationnalité outre la $\sqrt{|A|} = \sqrt{|a_{11} a^2 - a_{12}^2|}$. De plus, diverses expressions et formules qui vont suivre peuvent trouver des utiles applications dans la géométrie projective infinitésimale; par exemple, je montrerai à une autre occasion que les notations dont je fais usage ici permettent de donner une forme particulièrement remarquable aux *conditions d'intégrabilité de la théorie projective des surfaces.*

De ce qui précède il résulte que la résolution du problème principal énoncé plus haut permet de *reconnaître, deux surfaces S et $\overline{S}$ étant données, si elles sont projectivement déformables l'une dans l'autre et, si cela a lieu, de réaliser l'application projective de manière la plus générale.* On peut même supposer qu'on donne, au lieu des surfaces S et $\overline{S}$, deux variétés à deux dimensions composées *d'éléments* au sens de Lie, immergées dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Pour le voir, il suffit de lire la troisième partie de mon Mémoire cité sous[3].

---

[10] Dans le premier des Mémoires cités sous [1].

[11] *Sur la déformation projective des surfaces*, Annales de l'École Normale Supérieure, 37 (3), 1920, pp. 280 et 290—293.

[12] pp. 307—311.

§ 1. Les différentielles conjuguées Du_i.

1. Je suppose qu'on ait deux formes différentielles *binaires*

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \Sigma a_{ik} du_i du_k, \\ \varphi_3 &= \Sigma a_{ikl} du_i du_k du_l, \end{aligned} \tag{1}$$

liées par les identités,

$$\Sigma a^{ik} a_{ikl} = 0 \quad (l = 1,2) \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + A^2 = 0. \tag{2 bis}$$

Ici

$$A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \; a^{11} = \frac{a_{22}}{A}, \; a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{A}, \; a^{22} = \frac{a_{11}}{A}.$$

Je fais usage des notations classiques du calcul absolu de *MM Ricci* et *Levi Cività.* En particulier, si b_{ikl} est un système covariant symmétrique, j'indique par $b_{ikl,r}$ le système covariant dérivé formé par rapport à φ_2, et je pose

$$b^i_{kl} = \Sigma a^{ir} b_{rkl}, \quad b^{ikl} = \Sigma a^{ir} a^{ks} a^{lt} b_{rst}.$$

Rappelons le fait bien connu que le système covariant dérivé du système a_{ik} s'évanouit identiquement et que la même propriété appartient au système *improprement covariant*[13] et *pseudosymmétrique* ϑ_{ik}, où

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 0, \; \vartheta_{12} = -\vartheta_{21} = \sqrt{|A|}.$$

Remarquons les identités

$$\Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} = \Sigma a^{ir} \vartheta_{rs} \tag{3}$$

$$\Sigma a^{ik} a_{il} = \begin{matrix} 1 \; si \; k = l \\ 0 \; si \; k \neq l \end{matrix}, \quad \Sigma a^{ik} a_{ik} = 2, \tag{4}$$

$$\Sigma \vartheta^{ik} \vartheta_{il} = \begin{matrix} -\varepsilon \; si \; k = l \\ 0 \; si \; k \neq l \end{matrix}, \quad \Sigma \vartheta^{ik} \vartheta_{ik} = -2\varepsilon, \tag{5}$$

où j'ai posé, comme dans tout ce Mémoire

$$\varepsilon = \frac{|A|}{A} = \operatorname{sgn} A.$$

2. Je pose

$$Du_i = \Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} du_s = \Sigma a^{ir} \vartheta_{rs} du_s, \tag{6}$$

---

[13] J'entend par ceci que c'est un système covariant par rapport à toute transformation à déterminant fonctionnel positif, mais qu'on doit en changer le signe en effectuant une transformation à dét. fonc. négatif.

l'équivalence des deux définitions résultant tout de suite de l'identité (3). On peut aussi écrire explicitement

$$\begin{aligned} Du_1 &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(a_{11}\,du_1 + a_{12}\,du_2), \\ Du_2 &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(a_{12}\,du_1 + a_{22}\,du_2). \end{aligned} \tag{6 bis}$$

Comme on pose, φ étant fonction quelconque de u_1 et u_2,

$$d\varphi = \varphi_1\,du_1 + \varphi_2\,du_2,$$

ainsi je poserai aussi

$$D\varphi = \varphi_1 Du_1 + \varphi_2 Du_2.$$

J'appelle les Du_i les *différentielles conjuguées.* La dénomination s'explique tout de suite; en effet, $\varphi_2 = 0$ définissant sur une surface les directions asymptotiques (voir l'introduction, p. 4), on voit tout de suite que la direction correspondante aux Du_i est conjuguée à celle qui correspond aux du_i. De cette remarque on conclut que $\Sigma\, a_{ik} Du_i Du_k$ ne peut différer que par un facteur fini de $\Sigma\, a_{ik}\, du_i\, du_k$; et de même pour une forme $\Sigma\, b_{ik} du_i du_k$ *conjuguée* à φ_2. Précisément on peut démontrer que

$$\Sigma\, a_{ik} Du_i Du_k = -\varepsilon\varphi_2, \tag{7}$$

$$\Sigma\, b_{ik} Du_i Du_k = \varepsilon\, \Sigma\, b_{ik} du_i du_k, \quad \text{si } \Sigma\, a^{ik} b_{ik} = 0. \tag{8}$$

Pour voir que nous avons choisi bien les facteurs finis dans les identités précédentes, nous démontrerons la proposition suivante qui est souvent utile: *dans chaque identité où entrent les du_i et les Du_i, valable pour toute valeur des du_i, on peut substituer respectivement. Du_i et $\varepsilon\, du_i$ aux du_i et Du_i.* C'est qu'on voit immédiatement en comparant les équations (6) aux suivantes

$$du_i = \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta^{ir} a_{rs} Du_s = \varepsilon\, \Sigma\, a^{ir} \vartheta_{rs} Du_s, \tag{9}$$

qui s'en déduisent sans difficulté.[14] Pour déduire de cette remarque l'équation (7), on remarquera l'identité

$$-\varepsilon \sqrt{|A|}\ (du_1 Du_2 - du_2 Du_1) = \varphi_2, \tag{10}$$

qui est conséquence immédiate des (6_{bis}), d'où on voit tout de suite que φ_2 se multiplie par $-\varepsilon$ si l'on substitue Du_i à du_i (et *donc* d'après la proposition démontrée, $\varepsilon\, du_i$ à Du_i); or c'est précisément ce qui affirme l'équation (7). Passons à la démonstration de (8). Nous savons déjà qu'on peut trouver un facteur fini α de manière qu'on ait

$$\Sigma\, b_{ik} Du_i Du_k = \alpha\, \Sigma\, b_{ik} du_i du_k, \quad \text{si } \Sigma\, a^{ik} b_{ik} = 0.$$

---

[14] On a $\Sigma\, \vartheta^{ir} a_{rs} Du_s = \Sigma\, \vartheta^{ir} a_{rs} a^{sp} \vartheta_{pq}\, du_q = \Sigma\, \vartheta^{ir} \vartheta_{rq}\, du_q = \varepsilon\, du_i$ (d'après (5), tenant compte de la pseudosymmetrie des ϑ_{rq}).

Or si l'on y substitue $du_i + \lambda Du_i$ à du_i et *donc* $Du_i + \varepsilon\lambda du_i$ à Du_i, et si l'on compare les coefficients de λ^1 on trouve

$$\Sigma\, b_{ik} du_i Du_k = \varepsilon\alpha\, \Sigma\, b_{ik} Du_i du_k,$$

d'où $\alpha = \varepsilon$, si l'on se rappelle que $b_{ik} = b_{ki}$.

§ 2. La forme improprement covariante φ'_3.

1. Je pose

$$\varphi'_3 = \Sigma\, a_{ikl} du_i du_k Du_l = \Sigma\, b_{ikl} du_i du_k du_l \tag{1}$$

en indiquant par b_{ikl} le système improprement covariant *symmétrique* des coefficients de φ'_3. Remarquons les formules

$$\varphi_3 = \varepsilon\, \Sigma\, a_{ikl} du_i Du_k Du_l, \tag{1bis}$$

$$\varphi'_3 = \varepsilon\, \Sigma\, a_{ikl} Du_i Du_k Du_l,\ ^{15} \tag{1ter}$$

$$\varphi'_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} a_{11} du_1 + a_{12} du_2, & a_{111} du_1^2 + 2a_{112} du_1 du_2 + a_{122} du_2^2 \\ a_{12} du_1 + a_{22} du_2, & a_{112} du_1^2 + 2a_{122} du_1 du_2 + a_{222} du_2^2 \end{vmatrix}^{16} \tag{1quater}$$

Je dis qu'on a les formules

$$\begin{gathered} b_{ikl} = \Sigma\, \vartheta_{ri}\, a^r_{kl}, \quad a_{ikl} = \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{ri}\, b^r_{kl}, \\ b^r_{kl} = \Sigma\, \vartheta^{ir} a_{ikl}, \quad a^r_{kl} = \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta^{ir} b_{ikl}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\Sigma\, a^{ik} b_{ikl} = 0. \tag{3}$$

Je me borne à démontrer que $b_{ikl} = \Sigma\, \vartheta_{ri}\, a^r_{kl}$, les autres formules écrites s'en déduisant par un procédé bien connu.[17]

A cet effet, *définissons* les b_{ikl} par l'équation que nous voulons démontrer. On a alors, par la définition même des Du_i

$$\begin{gathered} \Sigma\, b_{ikl} du_i du_k du_l = \Sigma\, \vartheta_{ri}\, a^r_{kl} du_i du_k du_l = \\ = \Sigma\, a_{kls} \,.\, a^{sr} \vartheta_{ri} du_i \,.\, du_k du_l = \Sigma\, a_{kls} du_k du_l Du_s = \varphi'_3, \end{gathered}$$

ainsi qu'il faut seulement démontrer que les b_{ikl} définies par l'équation $b_{ikl} = \Sigma\, \vartheta_{ri}\, a^r_{kl}$ forment un système *symmétrique*. Or on a évidemment $b_{ikl} = b_{ilk}$, ainsi que nous avons à démontrer encore que $b_{ikl} = b_{kil}$, ou que $b_{12l} - b_{21l} = 0$, on enfin que $\Sigma\, \vartheta^{ik} b_{ikl} = 0$.

Or, d'après (5) et (2) du § 1, $\Sigma\, \vartheta^{ik} b_{ikl} = \Sigma\, \vartheta^{ik} \vartheta_{ri}\, a^r_{kl} =$
$= \Sigma\, \vartheta^{ik} \vartheta_{ri}\, a^{rs} a_{kls} = -\, \varepsilon\, \Sigma\, a^{ks} a_{kls} = 0$, c. q. f. d.

---

[15] Pour les démontrer, il suffit d'observer que, en vertu de (2) du § 1, on déduit de la formule (8) que

$$\Sigma\, a_{ikl} Du_k Du_l = \varepsilon\, \Sigma\, a_{ikl} du_k du_l.$$

L'équation (1ter) montre que, sur une surface sur laquelle $\varphi_2 = 0$ définisse les asymptotiques, $\varphi'_3 = 0$ définit les courbes conjuguées aux courbes de Darboux, qu'on appelle les *courbes de Segre*.

[16] Cette équation se déduit de (1) en substituant pour Du_i les valeurs (6bis) § 1.

[17] Pour les (3), il faut tenir compte des (2) du § 1.

2. La forme de l'équation (2_{bis}) du § 1 est peu convenable au calcul absolu. Je montrerai qu'on peut y substituer l'autre

$$\Sigma\, a^{ikl} a_{ikl} = 2 \tag{4}$$

A cet effet, développons le déterminant qui y apparait suivant la dernière ligne. On voit sans difficulté qu'on peut écrire le résultat sous la forme

$$2 = \varepsilon \Sigma \frac{a^{ik}}{|A|} (a_{i11} a_{k22} - 2a_{i12} a_{k12} + a_{i22} a_{k11}).$$

Or le second membre peut s'écrire, d'après la définition du système contravariant ϑ^{ik} [18]

$$\varepsilon \Sigma\, \vartheta^{rp} \vartheta^{sq} a^{ik} a_{irs} a_{kpq} = \varepsilon \Sigma\, \vartheta^{rp} \vartheta^{sq} a_{iks} a^{i}_{pq}.$$

Or des équations (2) on déduit que $\Sigma\, \vartheta^{rp} a_{irs} = b^{p}_{is}$, ainsi qu'on obtient

$$2 = \varepsilon \Sigma\, \vartheta^{sq} b^{p}_{is} a^{i}_{pq}.$$

On en déduit tout de suite la formule cherchée (4) si l'on remarque que des (2) on peut déduire que $\Sigma\, \vartheta^{sq} b^{p}_{is} = \varepsilon_i a^{pq}$. Mais on peut aussi déduire des (2) que $\Sigma\, \vartheta^{sq} a^{i}_{pq} = - b^{is}_{p}$, d'où la formule équivalente à (4)

$$\Sigma\, b^{ikl} b_{ikl} = -2\varepsilon. \tag{4_{bis}}$$

Remarquons encore que

$$\Sigma\, a^{ikl} b_{ikl} = \Sigma\, b^{ikl} a_{ikl} = 0.\,^{[19]} \tag{4_{ter}}$$

3. Pour donner tout de suite une application des formules que nous venons de trouver, nous démontrerons les identités

$$\begin{aligned} \Sigma\, a^{ik}_{r} a_{iks} &= a_{rs}, \\ \Sigma\, b^{ik}_{r} b_{iks} &= -\varepsilon a_{rs}, \\ \Sigma\, a^{ik}_{r} b_{iks} &= \vartheta_{rs}. \end{aligned} \tag{5}$$

A cet effet, remarquons en premier lieu que les systèmes covariants

$$\Sigma\, a^{ik}_{r} a_{iks}, \quad \Sigma\, b^{ik}_{r} b_{iks}, \quad \Sigma\, a^{ik}_{r} b_{iks} - \vartheta_{rs}$$

sont *symmétriques*. Ceci n'a besoin de démonstration que pour le dernier système; or

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}} [(\Sigma\, a^{ik}_{1} b_{ik2} - \vartheta_{12}) - (\Sigma\, a^{ik}_{2} b_{ik1} - \vartheta_{21})] &= \Sigma\, \vartheta^{rs} (a^{ik}_{r} b_{iks} - \vartheta_{rs}) = \\ = \Sigma\, \vartheta^{rs} a^{ik}_{r} \,.\, b_{iks} - \Sigma\, \vartheta^{rs} \vartheta_{rs} &= \Sigma\, b^{iks} b_{iks} + 2\varepsilon = 0. \end{aligned}$$

---

[18] On a évidemment

$$\vartheta^{11} = \vartheta^{22} = 0, \quad \vartheta^{12} = -\vartheta^{21} = -\varepsilon \frac{1}{\sqrt{|A|}}.$$

[19] En effet

$$\Sigma\, a^{ikl} b_{ikl} = \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{ri} a^{ikl} a^{r}_{kl} = \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{ri} a^{i}_{kl} a^{rkl}.$$

Si on y échange i e r, il second terme change de signe etc.

Nous démontrerons tout de suite que les formes différentielles

$$\Sigma\, a_r^{ik}\, a_{iks}\, du_r\, du_s, \quad \Sigma\, b_r^{ik}\, b_{iks}\, du_r\, du_s,$$
$$\Sigma\, a_r^{ik}\, b_{iks}\, du_r\, du_s = \Sigma\, (\Sigma\, a_r^{ik}\, b_{lks} - \vartheta_{rs})\, du_r\, du_s \tag{A}$$

sont proportionnelles à φ_2; si nous l'admettons pour un moment, il sera, en vertu de la symmétrie démontrée,

$$\Sigma\, a_r^{ik}\, a_{iks} = \alpha \,.\, a_{rs}, \quad \Sigma\, b_r^{ik}\, b_{iks} = \beta\, a_{rs},$$
$$\Sigma\, a_r^{ik}\, b_{iks} - \vartheta_{rs} = \gamma\, a_{rs}.$$

Pour en déduire les formules (5), il ne faut que multiplier les équations précédentes par a^{rs} et sommer par rapport à r et s, tenant compte des identités (4), (4_{bis}) et (4_{ter}). Il nous reste à démontrer que les formes différentielles (A) sont proportionnelles à φ_2. A cet effet, remarquons que la forme φ_2 est proportionnelle à l'hessien de φ_3;[20] il s'ensuit, d'après la formule (1_{quater}), que φ'_3 est proportionnelle au covariant cubique de φ_3. Or cela montre immédiatement que les formes (A) sont proportionnelles a des covariants de la forme cubique φ_3; d'autre part, une forme cubique binaire a un seul covariant du second ordre, qui est son hessien, et les formes (A) sont donc proportionnelles à cet hessien, c'est-à-dire à φ_2.

4. On sait bien qu'une forme cubique binaire, son hessien et son covariant cubique sont liées par une identité algébrique d'une forme connue; de ce qui précède ii résulte donc que les formes φ_3^2, $\varphi_3'^2$ et φ_2^3 sont linéairement dépendentes.

Précisément on a l'identité

$$\varphi_3^2 - \varepsilon\, \varphi_3'^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_2^3 = 0, \tag{6}$$

comme nous voulons prouver par un calcul direct. A cet effet, remarquons qu'on a, d'après (1) et (1_{bis})

$$\begin{aligned}\varepsilon\, \varphi_3^2 - \varphi_3'^2 &= \Sigma\, a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \,.\, \Sigma\, a_{rst}\, du_r\, Du_s\, Du_t \\ &\quad - \Sigma\, a_{ikl}\, du_i\, du_k\, Du_l \,.\, \Sigma\, a_{rst}\, du_r\, du_s\, Du_t = \\ &= \Sigma\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t\, (du_l\, Du_s - du_s\, Du_l) = \\ &= -\, \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma\, \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t\, (du_1\, Du_2 - du_2\, Du_1)\end{aligned}$$

d'où, d'après (10) du § 1,

$$\varepsilon\, \varphi_3^2 - \varphi_3'^2 = \varphi_2\, \Sigma \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t.$$

Si on échange i et r, k et t, l et s

et qu'on forme la demisomme des deux expressions à droite, on en déduit

$$\begin{aligned}\varepsilon\, \varphi_3^2 - \varphi_3'^2 &= \tfrac{1}{2}\varphi_2\, \Sigma\, \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\, (du_k\, Du_t - du_t\, Du_k) = \\ &= -\, \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{|A|}\, \varphi_2\, \Sigma\, \vartheta^{ls}\, \vartheta^{kt}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\, (du_1\, Du_2 - du_2\, Du_1)\end{aligned}$$

[20] En effet, on déduit ceci sans peine des identités (2) du § 1.

d'où, en employant du nouveau l'équation (10) du § 1

$$\varepsilon\varphi_3^{\,2} - \varphi_3'^{2} = \tfrac{1}{2}\varphi_2^{\,2}\ \Sigma\,\vartheta^{ls}\,\vartheta^{kt}\,a_{ikl}\,a_{rst}\,du_i\,du_r.$$

Or des équations (2) on déduit sans peine que le second membre peut s'écrire

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\varphi_2^{\,2}\ \Sigma\,a_i^{st}\,a_{rst}\,du_i\,du_r$$

et il suffit d'appliquer encore la première des identités (5) pour arriver à la formule cherchée (6).

§ 3. La forme covariante $\Sigma\,\psi_i du_i$ et les invariants du premier ordre.

1. Commençons par remarquer que les formes φ_3 et φ'_3 sont linéairement indépendantes; c'est ce qu'on voit par exemple en comparant les équations (4), (4_{bis}) et (4_{ter}) du § 2. Il résulte alors des formules (2) du § 1 et (3) du § 2 qu'un système symmétrique c_{ikl} à trois indices peut s'exprimer en combinaison linéaire des a_{ikl} et b_{ikl} alors et alors seulement si

$$\Sigma\,a^{ik}c_{ikl} = 0.$$

Or cette propriété appartient en particulier aux systèmes $a_{ikl,1}$, $a_{ikl,2}$ déduits du système a_{ikl} moyennant la dérivation covariant; on peut donc déterminer α_r et β_r de façon qu'on ait

$$a_{ikl,r} = \alpha_r a_{ikl} + \beta_r b_{ikl}.$$

Or on démontre aisément que $\alpha_r = 0$. En effet, on déduit de la formule (4) du § 2 par dérivation covariante que

$$\Sigma\,a^{ikl}a_{ikl,r} = 0.$$

Si donc on multiplie l'équation précédente par a^{ikl} et que l'on somme par rapport aux indices i, k et l, on en déduit en tenant compte aussi des formules (4) e (4_{ter}) du § 2 que $\alpha_r = 0$ c. q. f. d.

Nous posons d'ailleurs $\beta_r = \varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{rs}\psi^s$,[21] ainsi que nous obtenons la formule

$$a_{ikl,r} = \varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{rs}\psi^s\,.\,b_{ikl} \tag{1}$$

qui *exprime le système covariant à quatre indices* $a_{ikl,r}$ *moyennant le système covariant à un seul indice* ψ_i. On en déduit encore, tenant

[21] Nous considérons les ψ_i au lieu des β_i comme quantités fondamentales, parce qu'elles dépendent *rationnellement* des coefficients de φ_2 et de φ_3 et de leurs dérivées.

compte des (2) du § 2 que

$$b_{ikl,\,r} = \Sigma\, \vartheta_{rs} \psi^s \,.\, a_{ikl}\,.^{22} \tag{1_{bis}}$$

2. A l'aide du système covariant ψ_i on peut écrire des expressions simples des deux *invariants différentiels du premier ordre de l'élément linéaire projectif*

$$\begin{aligned} \Phi &= \Sigma\, a^{ik} \psi_i \psi_k = \Sigma\, a_{ik} \psi^i \psi^k = \Sigma\, \psi_i \psi^i, \\ \Psi &= \Sigma\, a^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l = \Sigma\, a_{ikl} \psi^i \psi^k \psi^l. \end{aligned} \tag{2}$$

Il est avantageux de considérer encore *l'invariant impropre*[23]

$$\Psi' = \Sigma\, b^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l = \Sigma\, b_{ikl} \psi^i \psi^k \psi^l,$$

lié aux Φ et Ψ par l'identité évidente[24]

$$\Psi^2 - \varepsilon \Psi'^2 = \tfrac{1}{2} \Phi^3. \tag{3}$$

3. Considérons les formes différentielles

$$\begin{gathered} \Sigma\, \psi_i du_i, \quad \Sigma\, \psi_i Du_i = \Sigma\, \vartheta_{ri} \psi^r du_i, \\ \Sigma\, a_{irs} \psi^r \psi^s du_i, \quad \Sigma\, b_{irs} \psi^r \psi^s du_i = \Sigma\, a_{irs} \psi^r \psi^s Du_i. \end{gathered}$$

Condition nécessaire et suffisante pour que les deux premières entre eux soient indépendantes est $\Phi \neq 0$[25]. Si elle est satisfaite, les deux autres formes (4) sont données par les identités suivantes qui nous seront utiles plus tard

$$\begin{aligned} \Sigma\, a_{irs} \psi^r \psi^s du_i &= \frac{\Psi}{\Phi} \Sigma\, \psi_i du_i + \varepsilon \frac{\Psi'}{\Phi} \Sigma\, \psi_i Du_i, \\ \Sigma\, b_{irs} \psi^r \psi^s du_i &= \frac{\Psi'}{\Phi} \Sigma\, \psi_i du_i + \frac{\Psi}{\Phi} \Sigma\, \psi_i Du_i. \end{aligned} \tag{5}$$

La démonstration en est si simple que je puis la laisser au soin du lecteur.

Supposons maintenant que $\Phi = 0$. Alors les deux formes $\Sigma\, \psi_i du_i$ et $\Sigma\, \vartheta_{ri} \psi^r du_i$ ne sont plus lineairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il

---

[22] Quelle è la signification géométrique de l'équation $\Sigma \psi_i du_i = 0$? *La tangente* $\Sigma \psi_i Du_i = 0$ (c'est la tangente conjuguée à $\Sigma \psi_i du_i = 0$) *est située dans le plan qui joint la normale projective de* M. Fubini à la *droite directrice de M. Wilczynski*. Plus précisément, la normale projective étant l'intersection des plans ξ_1 et ξ_2, la droite directrice est l'intersection des plans $\xi_1 - \frac{1}{2}\psi_1 \xi$, $\xi_2 - \frac{1}{2}\psi_2 \xi$.
La démonstration nous entraînerait trop loin de notre sujet.

[23] Ceci veut dire que Ψ' est invariant pour les transformations à jacobien positif et qu'il change de signe par une transformation à jacobien négatif. Cfr. [13].

[24] On l'obtient en remplaçant du_i par ψ^i dans l'identité (6) du § 2.

[25] En effet,

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} \psi_1 & \Sigma\, \vartheta_{r1} \psi^r \\ \psi_2 & \Sigma\, \vartheta_{r2} \psi^r \end{vmatrix} = -\varepsilon\, \Sigma\, \vartheta^{ik} \vartheta_{rk} \psi_i \psi^r = \Sigma\, \psi_r \psi^r = \Phi.$$

existe une quantité ω telle que soit $\Sigma\,\vartheta_{ri}\psi^r = \omega\psi_i$. Or

$$\Psi' = \Sigma\, b_{rst}\psi^r\psi^s\psi^t = -\Sigma\,\vartheta_{ri}\,a_{sti}\psi^r\psi^s\psi^t = \omega\,\Sigma\,a_{sti}\psi_i\psi^s\psi^t = -\,\omega\,\Psi;$$

en comparant avec l'identité (3) on en déduit que $\omega^2 = 1$.

On a ainsi

$$\Sigma\,\vartheta_{ri}\psi^r = \omega\,\psi_i,\quad \Psi' = -\,\omega\,\Psi,\quad \omega^2 = 1,\ \text{si}\ \Phi = 0. \tag{6}$$

Les formules (5) sont à remplacer ici par les formules évidentes

$$\Sigma\,\psi_i\,Du_i = \omega\,\Sigma\,\psi_i\,du_i,\quad \Sigma\,b_{iks}\psi^r\psi^s du_i = -\,\omega\,\Sigma\,a_{iks}\psi^r\psi^s du_i,\ \text{si}\ \Phi = 0. \tag{7}$$

4. Nous démontrerons encore les formules suivantes dont nous aurons besoin dans le § suivant. Elles sont valables si $\Phi \neq 0$:

$$\begin{aligned}\psi^i du_k = {} & \left(\tfrac{1}{2}a^{ik} + \frac{\Psi}{\Phi^2}\Sigma\,a^{ikr}\psi_r - \varepsilon\frac{\Psi'}{\Phi}\Sigma\,b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\,\psi_i\,du_i + \\ & + \varepsilon\left(-\tfrac{1}{2}\vartheta^{ik} + \frac{\Psi'}{\Phi^2}\Sigma\,a^{ikr}\psi_r - \frac{\Psi}{\Phi}\Sigma\,b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\,\psi_i\,Du_i,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\,a^{rsi}\psi_r\psi_s du_k = {} & \left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}\vartheta^{ik} + \tfrac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}a^{ik} + \tfrac{1}{2}\Sigma\,a^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\,\psi_i\,du_i + \\ & + \varepsilon\left(-\tfrac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}\vartheta^{ik} + \tfrac{1}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}a^{ik} - \tfrac{1}{2}\Sigma\,b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\,\psi_i\,Du_i,\end{aligned} \tag{8$_{\text{bis}}$}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\,b^{rsi}\psi_r\psi_s du^k = {} & \left(-\tfrac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}\vartheta^{ik} + \tfrac{1}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}a^{ik} + \tfrac{1}{2}\Sigma\,b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\,\psi_i\,du_i + \\ & + \left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}\vartheta^{ik} + \tfrac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}a^{ik} - \tfrac{1}{2}\Sigma\,a^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i\,Du_i.\end{aligned} \tag{8$_{\text{ter}}$}$$

Nous commençons par remarquer que les quatre systèmes contravariants du second ordre

$$\vartheta^{ik},\quad a^{ik},\quad \Sigma\,a^{ikr}\psi_r,\quad \Sigma\,b^{ikr}\psi_r$$

sont linéairement indépendants[26]. Il en résulte que tout système contravariant du second ordre en est une combinaison linéaire. Or les premiers

---

[26] Pour le voir supposons que soit identiquement

$$c_0\,\vartheta^{ik} + c_1\,a^{ik} + c_2\,\Sigma\,a^{ikr}\psi_r + c_3\,\Sigma\,b^{ikr}\psi_r = 0.$$

On voit tout de suite que $c_0 = 0$, car le premier système est pseudosymmétrique et les suivants sont symmétriques. En multipliant par a_{ik} et sommant on obtient de plus $c_1 = 0$, d'après les relations $\Sigma\,a_{ik}a^{ikr} = \Sigma\,a_{ik}b^{ikr} = 0$, qui sont équivalentes aux équations (2) du § 1 e (3) du § 2. La relation supposée doit donc être de la forme

$$c_2\,\Sigma\,a^{ikr}\psi_r + c_3\,\Sigma\,b^{ikr}\psi_r = 0.$$

Si on la multiplie par $\Sigma\,a^s_{ik}\psi_s$ on par $\Sigma\,b^s_{ik}\psi_s$ et qu'on rappelle les formules (5) du § 2, on obtient enfin $c_2\Phi = c_3\Phi = 0$.

membres des identités à démontrer sont précisement des tels systèmes contravariants. On peut donc trouver des quantités finies α_0, $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ de manière que soit

$$\begin{aligned} \psi^i du_k &= \alpha_0 \vartheta^{ik} + \alpha_1 a^{ik} + \alpha_2 \Sigma a^{ikr} \psi_r + \alpha_3 \Sigma b^{ikr} \psi_r, \\ \Sigma a^{rsi} \psi_r \psi_s du_k &= \beta_0 \vartheta^{ik} + \beta_1 a^{ik} + \beta_2 \Sigma a^{ikr} \psi_r + \beta_3 \Sigma b^{ikr} \psi_r, \\ \Sigma b^{rsi} \psi_r \psi_s du_k &= \gamma_0 \vartheta^{ik} + \gamma_1 a^{ik} + \gamma_2 \Sigma a^{ikr} \psi_r + \gamma_3 \Sigma b^{ikr} \psi_r. \end{aligned} \tag{A}$$

Or si l'on multiplie ces équations par ϑ^{ik} on obtient, en se rappelant les formules (5) du § 1 et (2) du § 2,

$$\Sigma \psi_i Du_i = -2\varepsilon\alpha_0, \quad \Sigma b_{rsi} \psi^r \psi^s du_i = -2\varepsilon\beta_0,$$
$$\varepsilon \Sigma a_{rsi} \psi^r \psi^s du_i = -2\varepsilon\gamma_0.$$

Si l'on multiplie les équations (A) par a^{ik} on obtient, tenant compte des relations (2) du § 1 et (3) du § 2,

$$\Sigma \psi_i du_i = 2\alpha_1, \quad \Sigma a_{rsi} \psi^r \psi^s du_i = 2\beta_1, \quad \Sigma b_{rsi} \psi^r \psi^s du_i = 2\gamma_1.$$

Enfin si l'on multiplie ces mêmes équations par $\Sigma a_{ik}^{l} \psi_l$ ou par $\Sigma b_{ik}^{l} \psi_l$ on obtient respectivement, ayant égard aux formules (2) du § 1 et (3) et (5) du § 2,

$$\Sigma a_{rsi} \psi^r \psi^s du_i = \alpha_2 \Phi, \quad \Sigma a^{rsi} a^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = \beta_2 \Phi,$$
$$\Sigma b^{rsi} a^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = \gamma_2 \Phi;$$
$$\Sigma b_{rsi} \psi^r \psi^s du_i = -\varepsilon\alpha_3 \Phi, \quad \Sigma a^{rsi} b^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = -\varepsilon\beta_3 \Phi,$$
$$\Sigma b^{rsi} b^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = -\varepsilon\gamma_3 \Phi.$$

On peut simplifier les équations que nous avons trouvées pour $\beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3$. En effet, on peut les remplacer évidemment par

$$\Sigma a_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = \beta_2 \Phi, \quad \Sigma b_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = \gamma_2 \Phi,$$
$$\Sigma a_{irs} b^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = -\varepsilon\beta_3 \Phi, \quad \Sigma b_{irs} b^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = -\varepsilon\gamma_3 \Phi.$$

D'autre part, si l'on remplace dans les équations (5)[27] les du_i par $\Sigma a^i_{kl} \psi^l du_k$, respectivement par $\Sigma b^i_{kl} \psi^l du_k$, on obtient, faisant usage des relations (2) du § 2,

$$\Sigma a_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma a^i_{kl} \psi_i \psi^l du_k + \varepsilon \Psi' \Sigma \vartheta_{ri} a^i_{kl} \psi^r \psi^l du_k) =$$
$$= \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i - \varepsilon \Psi' \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s du_i),$$

$$\Sigma b_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = \frac{1}{\Phi} (\Psi' \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i - \Psi \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s du_i);$$

---

[27] où on peut poser $\Sigma \vartheta_{ri} \psi^r du_i$ au lieu de $\Sigma \psi_i Du_i$.

$$\Sigma\, a_{irs}\, b^i_{kl}\, \psi^r \psi^s \psi^l\, du_k = \frac{1}{\Phi}\left(\Psi \Sigma\, b_{irs}\, \psi^r \psi^s\, du_i - \Psi' \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r \psi^s\, du_i\right),$$

$$\Sigma\, b_{irs}\, b^i_{kl}\, \psi^r \psi^s \psi^l\, du_k = \frac{1}{\Phi}\left(\Psi' \Sigma\, b_{irs}\, \psi^r \psi^s\, du_i - \varepsilon \Psi \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r \psi^s\, du_i\right).$$

Si on substitue maintenant les valeurs trouvées de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \gamma_3$ dans les équations (A), on obtient les premiers membres des relations (8), (8_{bis}) et (8_{ter}) exprimées en combinaison des quatre formes linéaires (4). Il suffit de remplacer les deux dernières des formes (4) par leurs valeurs (5) et simplifier les coefficients moyennant l'identité (3) pour arriver aux formules que nous voulions déduire.

5. Si $\Phi = 0$, mais $\Psi \neq 0$, d'autres formules prennent le lieu de celles que nous venons d'étudier. Ce sont les formules suivantes:

$$\psi^i\, du_k = \left(-\frac{\omega}{2}\,\vartheta^{ik} + \tfrac{1}{2} a^{ik}\right) \Sigma\, \psi_i\, du_i + \frac{\psi^i \psi^k}{\Psi}\, \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r \psi^s\, du_i, \tag{9}$$

si $\Phi = 0$.

$$\Sigma\, a^{irs}\, \psi_r \psi_s\, du_k = \Sigma\, a^{ikr}\, \psi_r \,.\, \Sigma\, \psi_i\, du_i + \left(\frac{\omega}{2}\,\vartheta^{ik} + \tfrac{1}{2} a^{ik}\right) \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r \psi^s\, du_i, \tag{9_{bis}}$$

si $\Phi = 0$.

On les démontre par un procédé analogue au précédent. Commençons par remarquer que, sous les hypothèses actuelles ($\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$), les systèmes contravariants

$$\vartheta^{ik}, \quad a^{ik}, \quad \Sigma\, a^{ikr}\, \psi_r, \quad \psi^i \psi^k$$

sont linéairement indépendants.[28] Par suite, on peut poser

$$\begin{aligned} \psi^i\, du_k &= \alpha_0\, \vartheta^{ik} + \alpha_1\, a^{ik} + \alpha_2\, \Sigma\, a^{ikr} \psi_r + \alpha_3\, \psi^i \psi^k, \\ \Sigma\, a^{irs}\, \psi_r \psi_s\, du_k &= \beta_0\, \vartheta^{ik} + \beta_1\, a^{ik} + \beta_2\, \Sigma\, a^{ikr} \psi_r + \beta_3\, \psi^i \psi^k. \end{aligned} \tag{B}$$

En multipliant ces équations par ϑ_{ik} on obtient[29]

$$\Sigma\, \vartheta_{ik}\, \psi^i\, du_k = -2\alpha_0, \quad \Sigma\, \vartheta_{ik}\, a^{irs}\, \psi_r \psi_s\, du_k = -2\beta_0,$$

ce qu'on peut écrire aussi, tenant compte des équations (7),

$$\alpha_0 = -\frac{\omega}{2}\, \Sigma\, \psi_i\, du_i, \quad \beta_0 = \frac{\omega}{2}\, \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r \psi^s\, du_i.$$

---

[28] Le système ϑ^{ik} étant pseudosymmétrique, une identité entre eux peut être supposée de la forme

$$c_1\, a^{ik} + c_2\, \Sigma\, a^{ikr}\, \psi_r + c_3\, \psi^i \psi^k = 0.$$

En multipliant par a_{ik}, on en déduit, faisant usage de l'identité (2) du § 1,

$$2c_1 + c_3\, \Phi = 2c_1 = 0.$$

D'autre part, en multipliant par $\psi_i \psi_k$ on déduit

$$c_2\, \Psi + c_3\, \Phi^2 = c_2\, \Psi = 0.$$

[29] Ici on a nécessairement $\varepsilon = 1$.

En multipliant les équations (B) par a_{ik}, on déduit

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma\, \psi_i{}^s du_i, \quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma\, a_{irs}\psi^r\psi^s du_i.$$

Si on multiplies les équations (B) par $\psi_i\psi_k$, on obtient en se rappelant que $\Sigma\,\psi_i\psi^i = \Phi = 0$, $\Psi \neq 0$

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \Sigma\, \psi_i\, du_i.$$

Enfin, multiplions les équations (B) par $\Sigma\, a_{ikt}\psi^t$. On obtient, tenant compte de ce que $\alpha_2 = 0$,

$$\Sigma\, a_{irs}\psi^r\psi^s du_i = \alpha_3\, \Psi,$$
$$\Sigma\, a^{irs} a_{ikt}\psi_r\psi_s\psi^t du_k = \beta_2\, \Sigma\, a^{ikr} a_{ikt}\psi_r\psi^t + \beta_3\, \Psi.$$

Or $\Sigma\, a^{ikr} a_{ikt}\psi_r\psi^t = \Phi = 0$, comme on voit tout de suite de l'identité (5) du § 2, et nous démontrerons tout de suite que $\Sigma\, a^{irs} a_{ikt}\psi_r\psi_s\psi^t du_k = 0$, ainsi qu'on a $\beta_3 = 0$. En substituant les valeurs de $\alpha_0 \ldots \beta_3$ dans les équations (B), on arrive bien aux équations (9) et (9_{bis}). L'identité que nous avons admise est un cas particulier de l'identité

$$\Sigma\, a^i_{rs} a_{pqi}\psi^r\psi^s\psi^p du_q = -\tfrac{1}{2}\Phi\, \Sigma\, \psi_i\, du_i \tag{10}$$

qui a lieu dans tous les cas. On peut la démontrer par exemple par le procédé suivant: La forme différentielle biquadratique

$$\Sigma\, a^i_{rs} a_{pqi}\, du_r du_s du_p du_q$$

est évidemment proportionnelle à une forme covariante de φ_3. Or une forme cubique binaire ne possède qu'une seule forme covariante du quatrième ordre, qui est le carré de son hessien. La forme écrite est donc proportionnelle à $\varphi_2{}^2$; je dis qu'on a précisément

$$\Sigma\, a^i_{ps} a_{pqi}\, du_r du_s du_p du_q = \tfrac{1}{2}\varphi_2{}^2. \tag{11}$$

Il suffit de comparer les coefficients de $du_1{}^4$. A droite, on obtient tout de suite $\frac{1}{2}a_{11}{}^2$. A gauche on obtient

$$\Sigma\, a_{11}{}^i a_{11i} = \Sigma\, a^{ik} a_{11i} a_{11k} = a^{11} a_{111}{}^2 + 2a^{12} a_{111} a_{112} + a^{22} a_{112}{}^2 =$$
$$= a_{111}(a^{11}a_{111} + 2a^{12}a_{112} + a^{22}a_{122}) + a^{22}(a_{112}{}^2 - a_{111}a_{122}) =$$
$$= \frac{a_{11}}{A}(a_{112}{}^2 - a_{111}a_{122})^{30}$$

ainsi que nous avons à démontrer que

$$a_{112}{}^2 - a_{111}a_{122} = \tfrac{1}{2}a_{11}\, A.$$

---

[30] Nous avons fait usage de l'identité (2) du § 1.

Or cette relation s'obtient tout de suite de l'identité (2_{bis}) du § 1 si on y remplace dans le déterminant la troisième colonne par la somme de tous les trois colonnes multipliées respectivement pac a^{11}, a^{12}, a^{22}. L'identité (11) étant ainsi démontrée, on en passe aisément à l'identité (10). En effet, par l'opération polaire $\delta u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \delta u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$ on déduit de (11)

$$\Sigma\, a_{rs}{}^i\, a_{pqi}\, du_r\, du_s\, du_p\, \delta u_q = -\tfrac{1}{2}\Sigma\, a_{ik}\, du_i\, du_k \,.\, \Sigma\, a_{ik}\, du_i\, \delta u_k,$$

et il suffit de remplacer δu_i et du_i respectivement par du_i et ψ^i pour trouver (10).

§ 4. Les invariants du second ordre; paramètres différentiels.

1. A l'aide des dérivées covariantes $\psi_{i,k}$ des ψ_i on peut exprimer simplement les *invariants différentiels du second ordre de l'élément linéaire projectif*

$$\begin{gathered} K = -\tfrac{1}{3}\Sigma\, a^{ik}\,\psi_{i,k} = -\frac{1}{3\sqrt{|A|}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{|A|}\,\psi^1) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{|A|}\,\psi^2)\right]^{31} \\ \Theta = \Sigma\, a^{ikl}\,\psi_{i,k},\,\psi_l \end{gathered} \tag{1}$$

et les deux *invariants impropres du second ordre*

$$\begin{gathered} H = \Sigma\, \vartheta^{ik}\,\psi_{i,k} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial u} - \frac{\partial\psi_1}{\partial v}\right) \\ \Theta' = \Sigma\, b^{ikl}\,\psi_{ik}\,\psi_i. \end{gathered} \tag{2}$$

Je dis que *K est la courbure de la forme φ_2*. Malheureusement, je ne connais aucune démonstration simple de ce théorème en calcul absolu. Je laisse donc au lecteur le soin de vérifier ce fait en supposant par exemple $a_{12} = 0$, ce qui suffit et peut être fait sans peine.

2. Nous savons que, si l'on suppose $\Phi \neq 0$, les formes linéaires $\Sigma\,\psi_i\, du_i$ e $\Sigma\,\psi_i\, Du_i$ sont linéairement indépendantes[32], ainsi que chaque forme différentielle linéaire en est alors une combinaison linéaire. Les formules du § précédent permettent d'exprimer ainsi en particulier les différentielles des invariants du premier ordre. On obtient

$$\begin{aligned} d\,\Phi = {} & \left(-3K + 2\,\frac{\Psi\Theta - \varepsilon\,\Psi'\Theta'}{\Phi^2}\right)\Sigma\,\psi_i\, du_i + \\ & + \varepsilon\left(-H + 2\,\frac{\Psi'\Theta - \Psi\Theta'}{\Phi^2}\right)\Sigma\,\psi_i\, Du_i, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} d\,\Psi = {} & \left(-\frac{3\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi' H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi K}{\Phi} + \frac{3}{2}\,\Theta\right)\Sigma\,\psi_i\, du_i + \\ & + \varepsilon\left(-\Psi' - \frac{3}{2}\,\frac{\Psi H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi' K}{\Phi} - \frac{3}{2}\,\Theta'\right)\Sigma\,\psi_i\, Du_i, \end{aligned} \tag{3_{bis}}$$

[31] On reconnaît aisément l'équivalence des deux définitions de K.

[32] Voir la note [25].

$$
\begin{aligned}
d\,\Psi' = &\left(-\tfrac{3}{2}\frac{\Psi H}{\Phi} - \tfrac{9}{2}\frac{\Psi' K}{\Phi} + \tfrac{3}{2}\Theta'\right)\Sigma\,\psi_i\,du_i + \\
+ &\left(-\Psi - \frac{3\varepsilon}{2}\frac{\Psi' H}{\Phi} - \tfrac{9}{2}\frac{\Psi K}{\Phi} - \tfrac{3}{2}\Theta\right)\Sigma\,\psi_i D u_i.
\end{aligned}
\qquad (3_{\text{ter}})
$$

En effet, on a évidemment

$$d\Phi = d\,\Sigma\,a^{ir}\psi_i\psi_r = 2\,\Sigma\,a^{ir}\psi_{i,k}\psi_r du_k = 2\,\Sigma\,\psi_{i,k}\psi^i du_k$$

et il suffit de remplacer les produit $\psi^i du_k$ par les expressions (8) du § 3 pour arriver à l'équation (3).

On a de plus

$$
\begin{aligned}
d\,\Psi &= d\,\Sigma\,a^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_i = \Sigma\,a^{rsi}{}_{,k}\psi_r\psi_s\psi_i du_k + 3\,\Sigma\,a^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_{i,k} du_k,\\
d\,\psi' &= d\,\Sigma\,b^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_i = \Sigma\,b^{rsi}{}_{,k}\psi_r\psi_s\psi_i du_k + 3\,\Sigma\,b^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_{i,k} du_k.
\end{aligned}
$$

Or[33]

$$
\begin{aligned}
a^{rsi}{}_{,k} &= \varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{kt}\psi^t\,.\,b^{rsi}\\
b^{rsi}{}_{,k} &= \Sigma\,\vartheta_{kt}\psi^t\,.\,a^{rsi},
\end{aligned}
$$

ainsi que

$$
\begin{aligned}
d\,\Psi &= \varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{kt}\psi^t du_k\,.\,\Sigma\,b^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_i + 3\,\Sigma\,a^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_{i,k} du_k =\\
&= -\,\varepsilon\,\Psi'\,\Sigma\,\psi_i D u_i + 3\,\Sigma\,a^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_{i,k} du_k,\\
d\,\Psi' &= -\,\Psi\,\Sigma\,\psi_i D u_i + 3\,\Sigma\,b^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_{i,k} du_k.
\end{aligned}
$$

En y substituant pour $\Sigma\,a^{rsi}\psi_r\psi_s du_k$ et $\Sigma\,b^{rsi}\psi_r\psi_s du_k$ respectivement les valeurs (8_{bis}) et (8_{ter}) du § 3, on en déduit les formules (3_{bis}) et (3_{ter}).

3. Supposons maintenant que $\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$.

Des équations (2) du § 2 et (6) du § 3 on déduit tout de suite

$$\Theta' = -\,\omega\,\Theta, \text{ si } \Phi = 0. \qquad (4)$$

Je dis qu'on a encore

$$H = -\,3\,\omega K, \text{ si } \Phi = 0. \qquad (4_{\text{bis}})$$

A ce but, remplaçons dans l'équation

$$0 = d\,\Phi = 2\,\Sigma\,\psi_{i,k}\psi^i du_k$$

les produits $\psi^i du_k$ par leurs expressions (9) du § 3. Nous obtenons

$$0 = -\,(\omega H + 3K)\,\Sigma\,\psi_i du_i + 2\,\frac{\Sigma\,\psi_{i.k}\psi^i\psi^k}{\Psi}\,\Sigma\,a_{irs}\psi^r\psi^s du_i.$$

Or les formes $\Sigma\,\psi_i du_i$ et $\Sigma\,a_{irs}\psi^r\psi^s du_i$ étant, dans le cas actuel, linéairement indépendantes, on en conclut non seulement (4_{bis}) mais encore

$$\Sigma\,\psi_{i,k}\psi^i\psi^k = 0, \text{ si } \Phi = 0\,[34].$$

---

[33] Voir § 3, (1) et (1_{bis}).

[34] Si $\Phi \neq 0$, on trouve aisément

$$\Sigma\,\psi_{i,k}\psi^i\psi^k = -\,\tfrac{3}{2}\Phi K + \frac{\Psi\Theta - \varepsilon\,\Psi'\Theta'}{\Phi}.$$

Au lieu de la formule (3_{bis}) nous obtenons maintenant

$$d\Psi = (\Psi + 3\Theta)\Sigma \psi_i du_i - 9K\Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s du_i \quad \text{si } \Phi = 0. \tag{5}$$

La démonstration ne diffère de celle de (3_{bis}) qu'en ce qu'on a à employer l'identité (9_{bis}) § 3 au lieu de (8_{bis}).

4. Des invariants que nous avons trouvés, on en peut déduire un'infinité d'autres moyennant des *paramètres differéntiels*, c'est-à-dire des opérations differéntielles qui, appliquées à des invariants (propres ou impropres), donnent des nouveaux invariants (propres ou impropres). Dans la suite nous aurons à considérer les paramètres différentiels

$$\begin{aligned} \Delta(P, Q) &= \Sigma a^{ik} P_i Q_k \\ E(P, Q) &= \Sigma a^{ikl} P_i P_k Q_l. \end{aligned} \tag{6}$$

Nous posons

$$\Delta(P, P) = \Delta(P), \quad E(P, P) = E(P). \tag{6_{bis}}$$

A l'aide des équations (2) et (2_{bis}) du § 1, on vérifie aisément les identités

$$\begin{gathered} \Delta(Q)E(P) - 2\Delta(P, Q)E(P, Q) + \Delta(P)E(Q, P) = 0, \\ \Delta(Q)E(P, Q) - 2\Delta(P, Q)E(Q, P) + \Delta(P)E(Q) = 0, \\ \begin{vmatrix} E(P), & E(P, Q), & E(Q, P) \\ E(P, Q), & E(Q, P), & E(Q) \\ \Delta(P), & \Delta(P, Q), & \Delta(Q) \end{vmatrix} + [\Delta(P)\Delta(Q) - \Delta(P, Q)^2]^2 = 0. \end{gathered} \tag{6_{ter}}$$

Indiquons encore un procédé qui, appliqué a un invariant, donne deux nouveaux invariants, en nous bornant au cas $\Phi \neq 0$.[35] Rappelons nous de ce fait que les formes différentielles linéaires $\Sigma \psi_i du_i$ e $\Sigma \psi_i Du_i$ sont linéairement indépendantes, si $\Phi \neq 0$. On peut donc poser, P étant invariant,

$$dP = P_I \Sigma \psi_i du_i + P_{II} \Sigma \psi_i Du_i \tag{7}$$

et les quantités P_{I} et P_{II} sont manifestement de nouveaux invariants.[36] D'ailleurs, on trouve sans peine

$$P_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\Phi}\Sigma \psi_i P_i, \quad P_{\mathrm{II}} = -\frac{\varepsilon}{\Phi}\Sigma \vartheta^{ri}\psi_r P_i. \tag{7_{bis}}$$

Si $\Phi \neq 0$, on peut exprimer les opérations (6) moyennant les opérations (7_{bis}) suivant les formules

$$\Delta(P, Q) = \Phi(P_{\mathrm{I}} Q_{\mathrm{I}} - \varepsilon P_{\mathrm{II}} Q_{\mathrm{II}}), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E(P, Q) = {} & \Psi(P_{\mathrm{I}}^2 Q_{\mathrm{I}} + 2\varepsilon P_{\mathrm{I}} P_{\mathrm{II}} Q_{\mathrm{II}} + \varepsilon P_{\mathrm{II}}^2 Q_{\mathrm{I}}) - \\ & - \Psi'(P_{\mathrm{I}}^2 Q_{\mathrm{II}} + 2P_{\mathrm{I}} P_{\mathrm{II}} Q_{\mathrm{I}} + \varepsilon P_{\mathrm{II}}^2 Q_{\mathrm{II}}).^{37} \end{aligned} \tag{8_{bis}}$$

Je laisse au lecteur le soin vérifier ces formules.

---

[35] Si $\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$, on peut considérer un procédé analogue en remplaçant $\Sigma \psi_i Du_i$ par $\Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s du_i$.

[36] M. Cartan a déjà considéré une opération semblable à celle du texte.

[37] En particulier,

$$\Delta(P) = \Phi(P_{\mathrm{I}}^2 - \varepsilon P_{\mathrm{II}}^2), \quad E(P) = \Psi P_{\mathrm{I}}(P_{\mathrm{I}}^2 + 3\varepsilon P_{\mathrm{II}}^2) - \Psi' P_{\mathrm{II}}(3P_{\mathrm{I}}^2 + \varepsilon P_{\mathrm{II}}^2).$$

§ 5. Résolution du problème d'équivalence dans le cas général.

1. Nous allons finalement résoudre le problème déjà mentionné dans l'introduction: *Outre le couple φ_2, φ_3 de formes différentielles dans les variables u_1, u_2, satisfaisant aux relations (2) et (2_{bis}), on donne un autre couple $\overline{\varphi}_2$ et $\overline{\varphi}_3$ dans d'autres variables $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$. On se propose de reconnaître si l'on peut déterminer $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$ en fonction de u_1 et u_2 de façon qu'il en résulte*

$$\varphi_2 = \overline{\varphi}_2, \ \varphi_3 = \overline{\varphi}_3,$$

et, si cela est possible, de trouver toutes les transformations qui ont la propriété indiquée.[38] Dans le § présent, nous supposerons qu'on puisse trouver *deux invariants* (propres ou impropres) P *et* Q du système φ_2, φ_3, *dont le déterminant fonctionnel soit divers de zéro.* D'ailleurs, il résultera dans le § suivant que, *si de tels invariants existent, on peut les trouver déjà entre les invariants*

$$\Phi, \ \Psi, \ \Psi', \ H, \ K, \ \Theta, \ \Theta' \tag{1}$$

définis aux §§ 3 et 4.

2. Nous posons $\delta_1 = 1$ ($\delta_1 = -1$) si P est un invariant propre (impropre); et pareillement $\delta_2 = \pm 1$ suivant la manière dont se comporte Q. Nous considérerons les équations

$$\overline{P} = \alpha_1 P, \ \overline{Q} = \alpha_2 Q, \ \alpha_1 = \pm 1, \ \alpha_2 = \pm 1. \tag{2}$$

Soit $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ une solution de ces équation et soit $\beta = \pm 1$ le signe du déterminant fonctionnel $\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}$. Pour abréger, nous dirons que *la colution sonsidérée est* ***propre*** si les signes α_1 et α_2 satisfont aux règles suivantes: 1° si $\delta_i = 1$, $\alpha_i = 1$, 2° si $\delta_i = -1$, $\alpha_i = \beta$. Nous ne considérerons que les solutions propres de (2).

Cela étant, *conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit possible transformer φ_2, φ_3 en $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$ sont.*[39]

1° *qu'il existe une solution propre de l'équation* (2)

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \ \bar{v} = \bar{v}(u, v) \tag{3}$$

2° *que les équations*

$$\begin{gathered} \overline{\Delta}(\overline{P}) = \Delta(P), \overline{\Delta}(\overline{P}, \overline{Q}) = \alpha_1\alpha_2 \Delta(P, Q), \overline{\Delta}(\overline{Q}) = \Delta(Q), \\ \overline{\boldsymbol{E}}(\overline{P}) = \alpha_1 \boldsymbol{E}(P), \boldsymbol{E}(\overline{P}, \overline{Q}) = \alpha_2 \boldsymbol{E}(P, Q), \\ \overline{\boldsymbol{E}}(\overline{Q}, \overline{P}) = \alpha_1 \boldsymbol{E}(P), \overline{\boldsymbol{E}}(\overline{Q}) = \alpha_2 \boldsymbol{E}(Q) \end{gathered} \tag{4}$$

soient satisfaites en vertu de (3).

---

[38] Pour les quantités déduites de φ_2, φ_3, nous retenons les notations des §§ précédents; les quantités analogues déduites de $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$ seront indiquées par un trait horizontal.

[39] On choisit arbitrairement les invariants P e Q, pourvu que $\frac{\partial P, Q}{\partial(u, v)} \neq 0$.

Les transformations de φ_2, φ_3 en $\overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$ sont celles qui satisfont[40] aux conditions de cet énoncé.

Il est évident que les conditions énumérées sont nécessaires. Pour voir qu'elles sont aussi suffisantes, il suffit de voir que, si l'on prend P et Q comme nouvelles variables indépendantes au lieu de u_1 et u_2, les nouveaux coefficients de φ_2 et φ_3 sont des fonctions rationnelles de

$$\varDelta (P),\ \varDelta (P, Q),\ \varDelta (Q),\ \mathbf{E} (P), \mathbf{E}\ (P, Q),\ \mathbf{E} (Q, P),\ \mathbf{E} (Q)$$

seulement. Or étant donné le caractère invariantif de ces expressions, il suffit de voir que a_{ik} et a_{ikl} sont des fonctions rationnelles de

$$\varDelta (u_1) = a^{11},\ \varDelta (u_1, u_2) = a^{12},\ \varDelta (u_2) = a^{22},$$
$$\mathbf{E} (u_1) = a^{111},\ \mathbf{E} (u_1, u_2) = a^{112},\ \mathbf{E} (u_2, u_2) = a^{122},\ \mathbf{E} (u_1) = a^{222},$$

et ceci est évident.

3. Supposons en particulier que les invariants $\varPhi$ et $\varPsi$ soient des fonctions indépendantes de u_1 et u_2. Alors *condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible transformer* φ_2, φ_3 *en* $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$ *est qu'il soit possible déterminer* $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ *en fonction de* u_1 *et* u_2 *de façon que les équations*

$$\overline{\varPhi} = \varPhi,\ \overline{\varPsi} = \varPsi,\ \overline{\varPsi}' = \beta \varPsi,\ \overline{H}, = \beta H,\ \overline{K} = K,\ \overline{\varTheta} = \varTheta,\ \overline{\varTheta}' = \beta \varTheta'$$

soient satisfaites, β *étant le signe du déterminant fonctionnel* $\dfrac{\partial (\bar{u}, \bar{v})}{\partial (u, v)}$. Il est évident que les conditions sont nécessaires. Pour voir qu'elles suffisent, on a besoin, d'après ce qui précède, d'exprimer les invariants

$$\varDelta (\varPhi),\ \varDelta (\varPhi, \varPsi),\ \varDelta (\varPsi),\ \mathbf{E} (\varPhi)$$
$$\mathbf{E} (\varPhi, \varPsi),\ \mathbf{E} (\varPsi, \varPhi),\ \mathbf{E} (\varPsi)$$

moyennent les invariants

$$\varPhi,\ \varPsi,\ \varPsi',\ H,\ K,\ \varTheta,\ \varTheta'.$$

Or les équations (8) et (8_{bis}) du § 4 donnent tout de suite les expressions demandées, si l'on se rappelle les identités (3) et (3_{bis}) du § 4.

§. 6. Résolution du problème d'équivalence pour les éléments linéaires projectifs qui admettent un groupe continu de transformations en eux mêmes.

1. Si $\Sigma \alpha_i \, du_i$ est une forme différentielle linéaire, nous indiquons par $(\Sigma \alpha_i \, du_i)'$ son covariant bilinéaire[41] c'est-à-dire l'expression à deux séries de différentielles

$$(\Sigma \alpha_i \, du_i)' = \delta \Sigma \alpha_i \, du_i - d \Sigma \alpha_i \, \delta u_i = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma\, \vartheta^{ki} \alpha_{i,k} \lfloor du_1,\ du_2 \rfloor,$$

[40] En particulier on voit que la recherche de toutes les transformations possibles se fait sans quadratures.

[41] On soit que $(\Sigma\, \alpha_i \, du_i)'$ est condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma\, \alpha_i \, du$ soit une différentielle exacte.

où $[du_1, du_2] = du_1 \delta u_2 - du_2 \delta u_1$. Plus généralement, $\Sigma \beta_i du_i$ étant une autre forme différentielle linéaire, nous poserons

$$[\Sigma \alpha_i du_i, \ \Sigma \beta_i du_i] = \begin{vmatrix} \Sigma \alpha_i du_i, & \Sigma \beta_i du_i \\ \Sigma \alpha_i \delta u_i, & \Sigma \beta_i \delta u_i \end{vmatrix} = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki} \alpha_i \beta_k \, [du_1, du_2].$$

On vérifie aisément que, si $\Phi \neq 0$,

$$(\Sigma \psi_i du_i)' = -\varepsilon \frac{H}{\Phi} [\Sigma \psi_i du_i, \ \Sigma \psi_i Du_i], \tag{1}$$

$$(\Sigma \psi_i Du_i)' = 3 \varepsilon \frac{K}{\Phi} [\Sigma \psi_i du_i, \ \Sigma \psi_i Du_i], \tag{1_{bis}}$$

et si $\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$.

$$(\Sigma \psi_i du_i)' = -\frac{H}{\Psi'} [\Sigma \psi_i du_i, \ \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i], \tag{2}$$

$$(\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i)' = -\left(1 + 2 \frac{\Theta'}{\Psi'}\right) [\Sigma \psi_i du_i, \ \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i]. \tag{2_{bis}}$$

2. Nous ferons usage du lemme suivant: *$\Sigma \alpha_i du_i$ et $\Sigma \beta_i du_i$ étant deux formes différentielles linéaires linéairement indépendantes, si dans les équations*

$$\begin{aligned} (\Sigma \alpha_i du_i)' &= A \, [\Sigma \alpha_i du_i, \ \Sigma \beta_i du_i], \\ (\Sigma \beta_i du_i)' &= B \, [\Sigma \alpha_i du_i, \ \Sigma \beta_i du_i], \\ d\lambda &= C \Sigma \alpha_i du_i + D \Sigma \beta_i du_i \end{aligned}$$

les A, B, C, D sont fonctions d'une seule variable λ (λ étant fonction de u_1 et u_2, non constante), on peut par des quadratures déterminer un facteur intégrant de la forme

$$G_1 \Sigma \alpha_i du_i + G_2 \Sigma \beta_i du_i$$

G_1 et G_2 étant des fonctions de λ; ce facteur intégrant est lui aussi une fonction de λ.

Cherchons par exemple un facteur intégrant ϱ (fonction de λ) de la forme $\Sigma \alpha_i du_i$. On a

$$\begin{aligned} (\varrho \Sigma \alpha_i du_i)' &= \varrho \, (\Sigma \alpha_i du_i)' + [\Sigma \alpha_i du_i, \, d\varrho] = \\ &= \left(\varrho A + D \frac{d\varrho}{d\lambda}\right) [\Sigma \alpha_i du_i, \ \Sigma \beta_i du_i], \end{aligned}$$

ainsi qu'il suffit de poser

$$\varrho = e^{-\int \frac{A}{D} d\lambda}.$$

3. Ces préliminaires posés nous pouvons poursuivre l'étude commencée dans le § précédent. *On suppose que*

$$\Phi, \ \Psi, \ \Psi', \ H, \ K, \ \Theta, \ \Theta'$$

soient des fonctions d'un seule variable $\lambda = \lambda\,(u_1, u_2)$; mais on exclut le cas où Φ et Ψ soient simultanément des constantes. Alors condition nécessaire et suffisante pour la transformabilité de φ_2, φ_3 en $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$ est que

$$\overline{\Phi}, \ \overline{\Psi}, \ \overline{\Psi}', \ \overline{H}, \ \overline{K}, \ \overline{\Theta}, \ \overline{\Theta}'$$

soient **les mêmes** *fonctions d'une variable* $\bar\lambda = \bar\lambda\ (\bar u_1, \bar u_2)$. Il y a ∞^1 transformations qui peuvent s'obtenir par des quadratures.

Il est évident, ici encore, que la condition est nécessaire. Pour voir qu'elle suffit, nous commençons par supposer $\Phi \neq 0$. Si nous posons

$$d\lambda = C\Sigma\, \psi_i\, du_i + D\Sigma\, \psi_i\, Du_i,$$ [42]

C et D sont fonctions de λ: on le voit immédiatement des équations (3) et (3_{bis}) du § 4 et des hypothèses faites. D'après les équations (1) et (1_{bis}) et le lemme qui précède, on peut déterminer par quadratures deux fonctions, U et V et u_1 et u_2 telles qu'on ait

$$dU = \varrho\, \Sigma\, \psi_i du_i,\ \ dV = \sigma\, \Sigma\, \psi_i\, Du_i,$$

ϱ et σ étant des fonctions de λ. Par des nouvelles quadratures, on détermine deux fonctions, $\bar U$ et $\bar V$ de $\bar u_1$ et $\bar u_2$ de manière que

$$d\bar U = \bar\varrho\, \Sigma\, \bar\psi_i\, d\bar u_i,\ \ d\bar V = \bar\sigma\, \Sigma\, \bar\psi_i\, \bar D \bar u_i,$$

$\bar\varrho$ et $\bar\sigma$ étant *les mêmes* functions de $\bar\lambda$ comme les ϱ et σ de λ. Pour fixer les idées, supposons $D \neq 0$.[43]

La transformation cherchée, si elles existe, est certainement donnée par les équations

$$\bar\lambda = \lambda,\ \ \bar U = U + a,$$

a étant constant.[44] Or de quelle manière que l'on choisisse la constante a, la transformation précédente porte φ_2, φ_3 en $\bar\varphi_2$, $\bar\varphi_3$. En effet, on a

$$\lambda_{\text{I}} = C,\ \ \lambda_{\text{II}} = D,\ \ U_{\text{I}} = \varrho,\ \ U_{\text{II}} = 0$$

et il suffit d'appliquer les équations (8) et (8_{bis}) du § 4.[45]

La démonstration ne change que très peu si $\Phi = 0$, $\psi \neq 0$.

Il suffit de remplacer la forme $\Sigma\, \psi_i\, Du_i$ par $\Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\ du_i$ et les équations (1) et (1_{bis}) par les équations (2) et (2_{bis}).

4. Passons au dernier cas. *Si Φ et Ψ sont des constantes, conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse transformer φ_2, φ_3 en $\bar\varphi_2$, $\bar\varphi_3$* sont

$$\bar\varepsilon = \varepsilon,\ \ \bar\Phi = \Phi,\ \ \bar\Psi = \Psi.$$

Il y a ∞^2 transformations qui se trouvent par des quadratures.[46] Comme dans les autres cas, il suffit de montrer que la condition est

---

[42] Cela est possible, les formes $\Sigma\, \psi_i\, du_i$ et $\Sigma\, \psi_i\, Du_i$ étant indépendantes.

[43] Si $D = 0$, $C \neq 0$ et on procède analoguement.

[44] Ces deux équations sont indépendantes car $\rho D \neq 0$.

[45] Cfr. le raissonement fait à la fin du § 5.

[46] Des équations (3), (3_{bis}), (3_{ter}), (4), (4_{bis}), (5) du § 4 on déduit sans peine: *Les équations*

$$\Phi = \text{const.},\ \ \Psi = \text{const.}$$

sont parfaitement équivalentes aux équations

$$H = 0,\ \ K = -\tfrac{1}{9}\Phi,\ \ \Theta = -\tfrac{1}{3}\Psi,\ \ \Theta' = -\tfrac{1}{3}\Psi'. \tag{3}$$

suffisante. Soit en premier lieu $\Phi \neq 0$. Des équations (1), (1_{bis}) et (3) on voit que

$$(\Sigma \psi_i \, du_i)' = 0, \quad (\Sigma \psi_i \, Du_i)' = \frac{\varepsilon}{3} [\Sigma \psi_i \, du_i, \; \Sigma \psi_i \, Du_i].$$

La première donne que

$$\Sigma \psi_i \, du_i = 3\varepsilon \frac{dU}{U}$$

est une différentielle exacte; la seconde peut s'écrive

$$(U \Sigma \psi_i \, Du_i)' = 0,$$

ainsi que

$$U \Sigma \psi_i \, Du_i = V$$

est une différentielle exacte. Si on introduit U et V comme nouvelles variables indépendantes, on obtient sans peine

$$\varphi_2 = \frac{1}{9 U^2 \Phi} (dU^2 - 9 \varepsilon \, dV^2),$$

$$\varphi_3 = \frac{\varepsilon}{27 U^3 \Phi^3} (\Psi \, dU^3 + 3 \Psi' dU^2 \, dV + 9 \Psi \, dU dV^2 + 27 \Psi' \, dV^3).$$

Le théorème énoncé en résulte immédiatement. Si $\Phi = 0$, $\psi \neq 0$, on trouve des équations (2), (2_{bis}) et (3) que

$$(\Sigma \psi_i \, du_i)' = 0, \quad (\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i)' = -\tfrac{1}{3} [\Sigma \psi_i \, du_i, \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i].$$

Ceci permet de poser

$$\Sigma \psi_i \, du_i = -3 \frac{dU}{U},$$

$$U \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i = dV.$$

En prenant U et V comme nouvelles variables indépendantes, on peut continuer comme plus haut.

Soit enfin $\Phi = \Psi = 0$. La seconde des équations (3) donne $K = 0$. La courbure de φ_2 est donc nulle et on peut donc par des quadratures introduire des nouvelles variables indépendantes de manière que les nouveaux coefficients de φ_2 soient constants. Les équations (1) du § 3 montrent que les nouveaux coefficients de φ_3 seront eux aussi des constantes[47]. On voit d'ailleurs sans peine qu'on peut ainsi obtenir que les nouveaux coefficients de φ_2 et φ_3 soient parfaitement déterminés, si l'on donne le signe ε. Et cela achève la démonstration du théorème énoncé.

---

[47] En effet, on voit tout de suite que $\psi_1 = \psi_2 = 0$ si $\Phi = \Psi = 0$.