Čech, Eduard: Scholarly works

Eduard Čech

Algebraické formy o proměnných koeficientech

Rozpravy Československé Akad. Věd - Řada Mat. Přírod. Věd (9) 33 (1924), 2 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500884

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1924

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXIII. ČÍSLO 9.

Algebraické formy o proměnných koeficientech.

Podává

Eduard Čech.

Předloženo 21. března 1924.

Buď $f(x_i)$ algebraická forma v $x_1, x_2, \ldots x_n$, jejíž koeficienty jsou dané funkce (mající spojité derivace těch řádů, o nichž bude řeč) jedné proměnné t. Buď $\varphi(\xi_i)$ jiná taková forma téhož stupně v $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Chceme nalézti nutné a postačující podmínky, aby existovala substituce

(1) $$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k \qquad a_{ik} \neq 0$$

o *numerických* (na t nezávislých) koeficientech a_{ik}, jež by činila

(2) $$f(x_i) = f(\sum_k a_{ik}\,\xi_k) \qquad \varphi(\xi_i)$$

identicky v t. Ukážeme, že tento problém dá se zcela snadno převésti v problém algebraický. Odvodíme nejprve teorém:

Obecně, aby substituce (1) existovala, je nutné a stačí, aby pro jakkoli zvolené t existovala substituce tvaru (1), jež by činila

(3) $$f(x_i) = \varphi(\xi_i), \quad f'(x_i) = \varphi'(\xi_i).$$

Při tom na př. $f'(x_i)$ značí formu, jež vznikne z formy f, derivujeme-li její koeficienty dle t. *Výjimka nastane jen tehdy, když pro jakkoli zvolené t forma f připouští nekonečně mnoho substitucí tvaru (1) v sebe samu.*

Je zřejmé, že platnost rovnic (3) je nutná. Jsou-li naopak splněny rovnice (3), existují taková a_{ik} ($a_{ik} \neq 0$), že jest identicky

(4) $$f(\sum_k a_{ik}\,\xi_k) - \varphi(\xi_i),$$

(5) $$f(\sum_k a_{ik}\,\xi_k) \qquad \varphi'\ \xi_i$$

Běží pouze o to, dokázati, že tato a_{ik} jsou konstanty nezávislé na t. Avšak derivujeme-li (4) dle t, obdržíme, kladouce

$$f(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i,$$

$$f'(\sum_k a_{ik} \xi_k) + f(\sum_k a_{ik} \xi_k, \sum_k a'_{ik} \xi_k) = \varphi'(\xi_i)$$

a tedy dle (5) jest identicky

$$f(\sum_k a_{ik} \xi_k, \sum_k a'_{ik} \xi_k) = 0. \tag{6}$$

Ježto determinant a_{ik} jest od nuly ruzný, jest v důsledku (1)

$$\sum a'_{ik} \xi_k = \sum_k \alpha_{ik} x_k.$$

Rovnice (6) pak se píše

$$f(x_i, \sum_k \alpha_{ik} x_k) = 0. \tag{7}$$

Nejsou-li všecka a'_{ik} a tedy ani všecka α_{ik} rovna nule, rovnice (7) praví, že forma f připouští infinitesimální transformaci o symbolu

$$\sum_i \left(\sum_k \alpha_{ik} x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \tag{8}$$

Infinitesimální transformace (8) vytvořuje však pro každé t grupu substitucí tvaru (1) o jednom parametru, jejíž každá substituce transformuje formu f v sebe, což bylo dokázati.

Svrchu uvedený *případ výjimečný* lze studovati touž metodou. Dokáže se tak, že *v tomto případě obecně stačí, aby pro každé t existovala substituce tvaru (1), jež by činila*

$$f(x_i) = \varphi(\xi_i), \quad f'(x_i) = \varphi'(\xi_i), \quad f''(x_i) = \varphi''(\xi_i).$$

Novou výjimku tvoří případ, kdy pro každé t existuje nekonečný počet substitucí tvaru (1), transformujících v sebe netoliko f, ale i f'; v tomto případě bylo by nutno uvažovati ještě formu f''' atd.

Že náš výsledek platí, když místo formy f uvažujeme systém více forem, nebo místo parametru t několik parametru, je zřejmé.

IX.