Eduard Čech

Sulle omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie in S_3

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 31_1 (1922), 496-498

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500866

Geometria. — *Sulle omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie in* S_3. Nota di EDWARD CECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. L'equazione di una superficie F nell'intorno d'un suo punto 0, dove le due tangenti asintotiche α_1, α_2 [1] sono distinte e nessuna di esse ha con F un contatto di ordine superiore al secondo [2] si può scrivere

$$(1) \qquad \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_1}{x_4}\frac{x_2}{x_4} + \frac{1}{6}\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_4^3} + \cdots$$

Le rette

$$x_3 = x_1 + x_2 = 0 \;;\; x_3 = x_1 + \varepsilon x_2 = 0 \;,\; x_3 = x_1 + \varepsilon^2 x_2 = 0 \;,\; \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

che indicherò con t_1, t_2, t_3, sono le *tangenti di Darboux.* Le tangenti coniugate τ_1, τ_2, τ_3, sono le tangenti di Segre. Con ω indico il piano tangente $x_3 = 0$. Ogni quadrica del fascio

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 + \lambda x_3^2 = 0$$

ha in 0 con F un contatto del terzo ordine, e $t_1\, t_2\, t_3$ sono le tangenti in 0 all'intersezione della quadrica con F; la quadrica $\mathcal{A}$ di Lie appartiene al fascio.

2. Ecco le equazioni delle *omografie* che conservano l'elemento del terzo ordine di F:

$$\text{(A)} \quad (x_1 + a_{42} x_3)\, \xi_1' + (x_2 + a_{41} x_3)\, \xi_2' + \\ + x_3\, \xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\, \xi_4' \,;$$

$$\text{(B)} \quad \varepsilon(x_1 + a_{42} x_3)\, \xi_1' + \varepsilon^2(x_2 + a_{41} x_3)\, \xi_2' + \\ + x_3\, \xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\, \xi_4' \,;$$

$$\text{(B')} \quad \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3)\, \xi_1' + \varepsilon(x_2 + a_{41} x_3)\, \xi_2' + \\ + x_3\, \xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\, \xi_4' \,;$$

$$\text{(C)} \quad (x_2 + a_{41} x_3)\, \xi_1' + (x_1 + a_{42} x_3)\, \xi_2' + x_3\, \xi_3' + \\ + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\, \xi_4' \,;$$

[1] Precisamente indico con α_1 (α_2) la tangente $x_3 = x_1 = 0$ ($x_3 = x_2 = 0$).

[2] Sicchè le rigate sono escluse.

$$(C')\quad \varepsilon(x_2 + a_{41} x_3)\,\xi_1' + \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3)\,\xi_2' + \\ + x_3\,\xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\,\xi_4' :$$

$$(C'')\quad \varepsilon^2(x_2 + a_{41} x_3)\,\xi_1' + \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3)\,\xi_2' + \\ + x_3\,\xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\,\xi_4' .$$

Si hanno, dunque, sei sistemi lineari ∞^3 di tali omografie, il primo dei quali è un gruppo continuo. Questi sistemi possiamo distinguere secondo il modo come permutano le t_1, t_2, t_3.

Possiamo fare una suddivisione secondo i divisori elementari delle omografie:

$$(Aa)\quad a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 : \quad (1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho) .$$

$$(Ab)\quad a_{41} = a_{42} = 0 ,\ a_{43} \neq 0 ; \quad (1-\varrho)^2(1-\varrho)(1-\varrho) .$$

$$\left.\begin{array}{ll}(Ac) & a_{41} \neq 0 ,\ a_{42} = 0 ; \\ (Ac') & a_{41} = 0 ,\ a_{42} \neq 0 ;\end{array}\right\} \quad (1-\varrho)^2(1-\varrho)^2 .$$

$$(Ad)\quad a_{41}\, a_{42} \neq 0 ; \quad (1-\varrho)^3(1-\varrho) .$$

$$(Ba)\quad a_{43} = a_{41}\, a_{42} ; \quad (1-\varrho)(1-\varrho)(\varepsilon-\varrho)\,\varepsilon^2-\varrho) .$$

$$(Bb)\quad a_{43} \neq a_{41}\, a_{42} ; \quad (1-\varrho)^2(\varepsilon-\varrho)(\varepsilon^2-\varrho) .$$

$$(Ca)\quad a_{41} + a_{42} = 0 ,\ a_{41}^2 + a_{43} = 0 ; \quad (1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)(1+\varrho) .$$

$$(Cb)\quad a_{41} + a_{42} = 0 ,\ a_{41}^2 + a_{43} \neq 0 ; \quad (1-\varrho)^2(1-\varrho)(1+\varrho) .$$

$$(Cc)\quad a_{41} + a_{42} \neq 0 ; \quad (1-\varrho)^3(1+\varrho) .$$

È inutile occuparsi dei sistemi (B′) e (C′), (C″) che si riducono a (B) e (C) scambiando le denominazioni delle t_1, t_2, t_3.

3. Per ciascuno dei tipi enumerati, indico il simbolo di Predella e le proprietà geometriche *caratteristiche*:

(Aa). [3]. Identità.

(Ab). [(20)]. Omologia speciale. col centro 0 e piano ω d'omologia.

(Ac). [(11)]. Le rette unite dell'omografia formano una congruenza lineare speciale di cui α_1 è la retta direttrice. Esiste una quadrica che tocca tutte le rette della congruenza ed ha con F in 0 un contatto del secondo ordine.

(Ac') nasce da (Ac) sostituendo α_1 con α_2.

(Ad). [(100)]. La retta p dei punti uniti e la retta p' dei piani uniti sono tangenti coniugate di F. L'omografia subordinata in un piano unito qualunque, possiede delle coniche unite che hanno un contatto del secondo ordine con F.

È notevole che, per caratterizzare il gruppo (A), occorre conoscere soltanto l'elemento del *secondo* ordine di F.

(Ba). [100]. C'è un punto unito P_1 sopra α_1, un punto unito P_2 sopra α_2, e inoltre una retta di punti uniti la polare di $P_1\ P_2$ rapporto Λ. La omografia è ciclica d'ordine tre.

(B*b*). [(00) 00]. 0 è un punto unito doppio, inoltre c'è un punto unito P_1 (e un altro P_2) sopra α_1 (sopra α_2). La retta polare di $P_1 P_2$ rapporto $\mathcal{A}$ è pure unita. L'omografia subordinata nella stella 0 è ciclica d'ordine tre.

(C*a*). [20]. Omologia involutoria; il centro d'omologia giace sopra t_1 e il piano d'omologia ne è il piano polare rapporto $\mathcal{A}$. Ciò si potrebbe anche prendere come definizione delle tangenti di Darboux.

(C*b*). [(10) 0]. Tutti i punti di τ_1 e tutti i piani per t_1, inoltre un punto di t_1 e il suo piano polare rapporto $\mathcal{A}$ sono uniti. La proiettività subordinata nel fascio delle tangenti di F è involutoria.

(C*c*). [(000) 0]. Il punto unito triplo P sta su τ_1, il punto unito semplice Q sta su t_1. La retta τ_1 e il piano polare di Q rapporto $\mathcal{A}$ sono uniti: La proiettività subordinata nel fascio delle tangenti di F è involutoria.

4. Ecco le equazioni delle *correlazioni* che conservano l'elemento del terzo ordine di F:

$$(A)\quad (x_2 + a_{31} x_3) x'_1 + (x_1 + a_{32} x_3) x'_2 + \\ + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + x_4) x'_3 + x_3 x'_4 = 0 ,$$

$$(B)\quad \varepsilon(x_2 + a_{31} x_3) x'_1 + \varepsilon^2(x_1 + a_{32} x_3) x'_2 + \\ + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + x_4) x'_3 + x_3 x'_4 = 0 ,$$

$$(B')\quad \varepsilon^2(x_3 + a_{31} x_3) x'_1 + \varepsilon(x_1 + a_{32} x_3) x'_2 + \\ + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + x_4) x'_3 + x_3 x'_4 = 0 ,$$

$$(C)\quad (x_1 + a_{32} x_3) x'_1 + (x_2 + a_{31} x_3) x'_2 + \\ + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + x_4) x'_3 + x_3 x'_4 = 0 ,$$

$$(C')\quad \varepsilon^2(x_1 + a_{32} x_3) x'_1 + \varepsilon(x_2 + a_{31} x_3) x'_2 + \\ + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + x_4) x'_3 + x_3 x'_4 = 0 ,$$

$$(C'')\quad \varepsilon(x_1 + a_{32} x_3) x'_1 + \varepsilon^2(x_2 + a_{31} x_3) x'_2 + \\ + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + x_4) x'_3 + x_3 x'_4 = 0 .$$

Come sopra, non occorre occuparsi dei sistemi (B'). (C'). (C'').

5. Indichiamo ora le proprietà geometriche caratteristiche delle correlazioni dei tipi (A), (B), (C):

(A). Polarità rispetto ad una quadrica che ha in 0 un contatto del secondo ordine colla simmetrica di F rispetto ad ω.

(B). Divisori elementari $(1-\varrho)$ $(1-\varrho)$ $(\varepsilon-\varrho)$ $(\varepsilon^2-\varrho)$. C'è un punto fondamentale Q_1 sopra α_1 e un altro O_2 sopra α_2; inoltre sono fondamentali tutti i punti di una retta 0 P, passante per 0. Le rette $Q_1 Q_2$ e 0 P sono polari rapporto $\mathcal{A}$. La quadrica φ_1 dei punti d'incidenza e la quadrica φ_2 dei piani d'incidenza, s'intersecano nelle rette $0Q_1$; $0Q_2$, PQ_1, PQ_2. Siano k, k_1, k_2 le curvature, nel punto 0, dell'intersezione di F, φ_1 e φ_2 mediante un piano scelto nella stella 0; si ha $2k = 4k_1 = k_2$.