Eduard Čech

Sur les formes différentielles de M. Fubini

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 31_1 (1922), 350-352

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500864

5. Riassumendo si ha:

Esistono due classi di superficie di S_r $(r > 5)$ *tali che i loro* S_5 *2 osculatori hanno (almeno) due punti distinti di osculazione con la superficie. Esse sono:*

a) *le superficie con* ∞^1 S_5 *2-osculatori, contenenti* ∞^1 *curve in* S_3 *di cui due infinitamente vicini si segano in piani* (cioè in S_3 osculatori ad una curva e casi degeneri);

b) *le superficie con* ∞^2 S_5 *2-osculatori immerse in una congruenza di Laplace e incontrate da ogni generatrice in più di un punto.*

Geometria. — *Sur les formes différentielles de M. Fubini.* Nota di Eduard Čech, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

1. Soient les coordonnées homogènes x des points et ξ des hyperplans tangents (¹) d'une hypersurface Π de l'espace linéaire à $n+1$ dimensions exprimées en fonction de n variables indépendantes quelconques $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et posons

$$F_2 = -S\,dx\,d\xi = \sum_{ik} \Delta_{ik}\,du_i\,du_k\,, \tag{1}$$

$$\Lambda_3 = S(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) = 2\sum_{ikl} D_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l\,, \tag{2}$$

$$\nabla = |\Delta_{ik}| \;(^2)\;,\quad \vartheta_{ik} = \frac{1}{\nabla}\frac{\partial\nabla}{\partial\Delta_{ik}}\,,$$

$$F_3 = \Lambda_3 - \frac{6}{n+2} F_2 \sum_{ikl} \vartheta_{ik} D_{ikl}\,du_l = 2\sum_{ikl} \Delta_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l\,, \tag{3}$$

ainsi que l'on a

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik}\,\Delta_{ikl} = 0\,. \tag{4}$$

Soient de plus X et Ξ des solutions quelconques des équations

$$SX\xi = 1\;,\; SX\frac{\partial\xi}{\partial u_i} = 0\;;\; S\Xi x = 1\;,\; S\Xi\frac{\partial x}{\partial u_i} = 0\,. \tag{5}$$

On trouve que les x et les ξ vérifient des équations de la forme

$$x_{ik} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} + b_{ik}x + \Delta_{ik}X\,, \tag{6}$$

$$\xi_{ik} = -\sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} + \beta_{ik}\xi + \Delta_{ik}\Xi\,, \tag{6'}$$

(¹) Les facteurs de proportionalité étant choisis d'une manière quelconque.
(²) On suppose $\nabla \neq 0$.

x_{ik} et ξ_{ik} étant les dérivées secondes covariantes formées par rapport à la forme F_2. Pour $(u_1 \dots u_n)$ données, une quadrique par rapport à laquelle les hyperplans polaires des points

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n}$$

sont

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n}$$

à un contact du second ordre avec Π, et $\Lambda_3 = 0$ donne les tangentes à la variété d'intersections de Π et la quadrique. La congruence des droites xX est *conjuguée* a Π, en ce sens que, en chaque point de Π, les n directions correspondantes au développables de la congruence sont conjuguées par rapport à la quadrique $F_2 = 0$ des directions asymptotiques. Corrélativement pour la congruence $\xi\Xi$. Si l'on multiplie les x par un facteur quelconque ϱ et les ξ par le facteur σ, les formes F_2, Λ_3, F_3 se transforment comme il suit

$$F_2' = \varrho\sigma F_2 \ , \ \Lambda_3' = \varrho\sigma(\Lambda_3 + 3F_2\, d \log \varrho/\sigma) \ , \ F_3' = \varrho\sigma F_3 . \tag{7}$$

2. Le facteur des x étant toujours quelconque, je fixe maintenant les ξ à une racine $(n+2)^{\text{ième}}$ de l'unité près par la condition

$$\left| x \, , \frac{\partial x}{\partial u_1} \, , \dots , \frac{\partial x}{\partial u_n} \, , X \right| = \left| \xi \, , \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \, , \dots , \frac{\partial \xi}{\partial u_n} \, , \Xi \right| . \tag{8}$$

Alors, on a simplement $F_3 \equiv \Lambda_3$ et on peut poser

$$X = \frac{1}{n} \Delta_2 x \ , \ \Xi = \frac{1}{n} \Delta_2 \xi \, , \tag{9}$$

où Δ_2 est le paramètre différentiel second formé par rapport à F_2. La quadrique par rapport à laquelle les hyperplans polaires des points

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu \Delta_2 x$$

sont

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} + \mu \Delta_2 \xi$$

peut être appelée la *quadrique de Lie*, se réduisant à celle qui est connue sous ce nom pour $n = 2$. On a la propriété suivante: Si l'on choisit dans l'hyperplan ξ un espace E_ν a ν dimensions $(1 \leqq \nu \leqq n)$ passant par le point x, les quadriques de Lie (à ν dimensions) des sections de Π par tous les espaces à $\nu+1$ dimensions contenant E_ν sont situées sur une quadrique à n dimensions.

3. On achève la détermination des facteurs de proportionalité [1] soit en choisissant le facteur de la forme F_2, soit le facteur des ξ, par exemple. Ce dernier choix est d'ailleurs (à un facteur *numérique* des ξ près) équivalent au choix de la congruence xX, liée à la condition unique d'être *conjuguée* à Π au sens expliqué plus haut. On peut appeler la droite xX la *normale* de la métrique définie par la forme F_2 [2]. En général, par chaque point de Π passent 2^n-1 géodésiques de cette métrique, dont les plans osculateurs contiennent la normale. Les tangentes de ces géodésiques forment la généralisation des trois *tangentes de Segre* du cas $n=2$. Elles sont d'ailleurs indépendantes du facteur de F_2 et peuvent être définies comme les directions ayant la même polaire linéaire par rapport aux deux cônes apolaires $F_2=0$ et $F_3=0$.

4. Supposons maintenant que les x, ξ, toujours fonctions de n paramètres $u_1 \dots u_n$, satisfaisant aux conditions

$$S\xi x = S\xi dx = 0,$$

sont les coordonnées dans un espace linéaire à *plus* de $n+1$ dimensions. On a alors une *variété d'élements* à n dimensions. On peut, comme précédemment, former les formes F_2, Λ_3, F_3. Mais ici, on ne peut plus, en général, déterminer les facteurs de proportionnalité de manière d'avoir $F_3=\Lambda_3$. Pour $(u_1, \dots, u_n)$ données, projetons les plans osculateurs des courbes tracées sur la variété des points x, le centre de projection étant l'espace d'intersection de ξ, $\frac{\partial\xi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial\xi}{\partial u_n}$. Si une correspondance entre deux variétés d'éléments est telle que, pour chaque couple d'éléments correspondantes, les deux ensembles d'espaces projetants que je viens de définir sont *homographiques*, on peut dire, en généralisant la locution de M. Fubini, que les deux variétés d'éléments sont *projectivement applicables*. Or la condition analytique pour l'applicabilité projective des variétés d'éléments est l'invariance de la forme différentielle fractionnaire $\frac{F_3}{F_2}$, tout au moins quand cette expression a un sens, c'est-à-dire si $\nabla \neq 0$.

5. Pour les détails, voir le Mémoire *I fondamenti di geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo del Fubini* qui paraîtra dans les Annali di Matematica.

(1) Je suppose toujours vérifiée la condition (8).

(2) On voit que si l'on prend pour ξ les coordonnées cartésiennes normales (les cosinus directeurs et la distance de l'origine), on a la normale ordinaire.