Eduard Čech

Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 11 (1922), 35 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500859

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1922 ČÍS. 11

SUR LES SURFACES DONT TOUTES LES COURBES DE SEGRE SONT PLANES

PAR

DR. EDOUARD ČECH

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 59.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

SUR LES SURFACES DONT TOUTES LES COURBES DE SEGRE SONT PLANES.

Déjà en 1880*, Darboux avait défini, en un point non-parabolique d'une surface, une terne remarquable de tangentes, auxquelles il a donné le nom de *tangentes à osculation quadrique*. En 1908**, M. Segre a été conduit par une autre voie aux mêmes tangentes et aussi aux tangentes qui leur sont conjuguées. Enfin, en 1916***, M. Fubini a défini une forme différentielle cubique invariante par transformations projectives et qui, égalée a zéro, donne les directions considérées par Darboux. Suivant M. Green, j'appelerai *tangentes de Darboux* les tangentes à osculation quadrique, et *tangentes de Segre* celles qui leur sont conjuguées. On peut donner plusieurs définitions de ces tangentes, par exemple la suivante, que j'ai donnée dans un article† qui paraîtra prochainement dans les *Annali di Matematica*: dans le plan tangent du point considéré, construisons les deux paraboles, chacune desquelles a un contact du second ordre avec une courbe asymptotique et dont l'autre tangente asymptotique est un diamètre; les trois intersections de ces paraboles, en dehors du point de la surface, sont situées sur les tangentes de Segre.

J'appelerai *courbes de Darboux (de Segre)* les courbes sur la surface, dont les tangentes sont les tangentes de Darboux (de Segre). Les courbes de Segre jouissent d'une propriété importante: *à chaque point de la surface, les plans osculateurs des trois courbes de Segre qui s'y rencontrent passent par une même droite l* ††. Cela étant rappelé, *soit L une surface dont toutes les courbes de Segre* (c'est-à-dire les courbes de Segre de toutes les trois familles) *sont planes*; on voit immédiatement que toutes les droites l et, par conséquent, *tous les plans des lignes de Segre passent par un point fixe s*. Le cône W enveloppé par les plans des courbes de Segre est *un cône algébrique de la troisième classe*; il peut être réductible. La surface L elle même est, en général, transcendente; ses équations en termes finis s'obtiennent par des quadratures.

Je commence par exposer une interprétation géométrique simple des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles, qui, j'éspère,

* *Sur le contact des courbes et des surfaces*, Bull. des Sc. Math. (2) 4, 1880.

** Rend. Acc. Lincei, 17.

*** *Applicabilità proiettiva di due superficie*, Ren. Circ. Mat. Palermo, 41.

† *L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo*.

†† Voir ma Note: „*O trilineárních systémech atd.*" Rozpravy české Akademie, Prague, 30, 1921, no 23.

sera utile dans diverses questions de la géométrie projective infinitésimale; ensuite, je réduis le problème de la détermination des surfaces L à l'intégration du système

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

qui s'achève par fonctions elliptiques. Puis je passe à la détermination du cône W déjà mentionné. Enfin, je donne, dans les divers cas, les équations en termes finis des surfaces étudiées*.

1. Interprétation géométrique d'un système d'équations aux dérivées partielles**.

Envisageons le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3 + a_{i4} y_4, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + b_{i3} y_3 + b_{i4} y_4, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

es a_{ik} et les b_{ik} étant fonctions de u, v. Les conditions d'integrabilité de ce système,

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial v} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} + \sum_{\nu=1}^{4} (a_{i\nu} b_{\nu k} - a_{\nu k} b_{i\nu}) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

supposées remplies, le système (1) a quatre solutions linéairement indépendantes

$$y_i^{(1)}, \; y_i^{(2)}, \; y_i^{(3)}, \; y_i^{(4)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

moyennant desquelles la solution générale y_i s'exprime par les formules

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1^{(1)} c_1 + y_1^{(2)} c_2 + y_1^{(3)} c_3 + y_1^{(4)} c_4, \\ y_2 &= y_2^{(1)} c_1 + y_2^{(2)} c_2 + y_2^{(3)} c_3 + y_2^{(4)} c_4, \\ y_3 &= y_3^{(1)} c_1 + y_3^{(2)} c_2 + y_3^{(3)} c_3 + y_3^{(4)} c_4, \\ y_4 &= y_4^{(1)} c_1 + y_4^{(2)} c_2 + y_4^{(3)} c_3 + y_4^{(4)} c_4, \end{aligned} \tag{4}$$

où les c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes arbitraires. Or, les solutions fixes (3) étant choisies une fois pour toutes, considérons y_1, y_2, y_3, y_4 comme formes linéaires (4) des quatre *indéterminées* c_1, c_2, c_3, c_4. Interprétons c_1, c_2, c_3, c_4 comme coordonnées homogènes de plans dans un espace ordinaire, rapportées à un tetraèdre fixe de référence. Selon les (4), les y_1, y_2, y_3, y_4 seront alors des coordonnées homogènes de plans dans un système variable avec les u, v, que j'appelerai brièvement *le système mobile. Passer du système coordonné mobile au celui fixe, c'est*

* J'ai donné ces résultats, sauf la détermination des équations finies, dont je n'avais qu'énoncé la possibilité, dans une courte note publiée dans les *Rendiconti dell' Accademia dei Lincei.*

** C'est seulement pour fixer les idées que je considère deux variables indépendentes et quatre variables dépendentes.

intégrer le système (1). Supposons, par exemple, que l'on connaisse une solution particulière

(5) $$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$$

du système (1). On voit tout de suite que les quantités (5) sont les coordonnées mobiles d'un plan *fixe*. Inversement, soient

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$$

les coordonnées mobiles d'un plan fixe: On a alors

$$\bar{y}_i = \varrho\,(u, v)\, Y_i$$

$\bar{y}_i$ étant une solution particulière du système (1). En substituant dans le système (1), on obtient ϱ par une quadrature logarithmique.

Un point est défini par une relation linéaire et homogène entre les coordonnées du plan. Supposons que la relation

(6) $$A \equiv \alpha_1 (u, v)\, y_1 + \alpha_2 (u, v)\, y_2 + \alpha_3 (u, v)\, y_3 + \alpha_4 (u, v)\, y_4 = 0.$$

définisse un point *fixe*. Ceci veut dire que, si on remplace le y_i par les expressions (4), on a

(7) $$A \equiv \varrho\,(u, v)\,(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4),$$

les a_i étant numériques. Or différentions la forme linéaire A en tenant compte du système (1). D'après (7), le résultat sera

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} A, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} A.$$

Inversement, si la forme linéaire A satisfait les conditions

(8) $$\frac{\partial A}{\partial u} = \sigma_1 (u, v)\, A, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \sigma_2 (u, v)\, A.$$

elle représente un point fixe. Plus généralement, si A est une forme algébrique de degré quelconque, et si elle satisfait des relations de la forme (8), l'enveloppe de ∞^2 plans $A = 0$ est fixe. La signification de la connaissance d'une telle forme pour l'intégration du système (1) dépend des substitutions linéaires qui la transforment en elle-même. Si ces substitutions sont en nombre fini, l'intégration du système (1) n'exige que la quadrature logarithmique

$$e^{\int \sigma_1 du + \sigma_2 dv}$$

et des opérations algébriques. On peut aussi supposer que l'on connaisse les équations, en coordonnées mobiles, d'une configuration géométrique fixe quelconque. Par exemple, supposons que la substitution linéaire

(9) $$y_i = \alpha_{i1} (u, v)\, z_1 + \alpha_{i2} (u, v)\, z_2 + \alpha_{i3} (u, v)\, z_3 + \alpha_{i4} (u, v)\, z_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

laisse invariable le système (1). J'ai exposé ailleurs comment se simplifie le problème d'intégration dans ce cas. La supposition faite revient à dire que les équations (9) représentent, en coordonnées mobiles, une homographie fixe.

Je me content ici de ces courtes indications et je renvoie le lecteur à un travail de M. Fano*, où se trouve exposé une interprétation analogue d'une équation unique

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \quad + a_0(x) = 0.$$

Toute fois, la considération des systèmes des équations du premier ordre et l'emploi des coordonnées tangentielles, comme je l'indiqué ici, me semble préférable.

2. Les conditions analytiques pour une surface L.

Si u, v sont des paramètres asymptotiques d'une surface S on peut, d'après M. Wilczynski**, fixer le facteur arbitraire des coordonnées homogènes y_1, y_2, y_3, y_4 de façon qu'elles vérifient les équations

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2b\frac{\partial y}{\partial v} + fy = 0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial v^2} + 2a'\frac{\partial y}{\partial u} + gy = 0.\end{aligned}$$

En posant

$$(11)\qquad y_1 = \frac{\partial y}{\partial u},\ y_2 = \frac{\partial y}{\partial v},\ y_3 = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v},$$

on peut réduire le système (10) à la forme (1); c'est ce que fait M. Wilczynski. Mais, dans certains cas, la surface S doit avoir certaines relations données avec des éléments fixes de l'espace; alors il sera utile d'écrire le système (1) en mettant en évidence ces relations. Ainsi, dans ce qui suit, nous avons à considérer un point fixe s en relation avec S: en écrivant le système (1), nous prendrons comme inconnues y, $y_1 = \frac{\partial y}{\partial u}$, $y_2 = \frac{\partial y}{\partial v}$ et une *constante arbitraire* s. On aura donc le système

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial u} = y_1, && \frac{\partial y}{\partial v} = y_2,\\ &\frac{\partial y_1}{\partial u} = -2by_2 - fy, && \frac{\partial y_1}{\partial v} = \alpha y + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \beta s,\\ &\frac{\partial y_2}{\partial u} = \alpha y + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \beta s, && \frac{\partial y_2}{\partial v} = -2a'y_1 - gy,\\ &\frac{\partial s}{\partial u} = 0, && \frac{\partial s}{\partial v} = 0.\end{aligned}$$

Les conditions (2) d'intégrabilité sont ici

$$(13\,a)\qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} + \alpha_1\beta = 0,\quad \frac{\partial \beta}{\partial u} + \alpha_2\beta = 0,$$

---

* Mathematische Annalen, 53, 1900.

** Cinq Mémoires dans les Trans. Amer. Math. Soc. en 1907—09.

$$(13\text{b})\quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \alpha + \alpha_1\alpha_2 - 4a'b = 0, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} + \alpha + \alpha_1\alpha_2 - 4a'b = 0,$$

$$(13\text{c})\quad f + 2\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \alpha_2^2 - 2b\alpha_1 = 0, \quad g + 2\frac{\partial a'}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \alpha_1^2 - 2a'\alpha_2 = 0,$$

$$(13\text{d})\quad 2bg - \frac{df}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \alpha_1 f + \alpha\alpha_2, \quad 2a'f - \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \alpha\alpha_1 - \alpha_2 g.$$

Posons

$$\beta = \frac{1}{\omega},$$

les (13a) donnent alors

$$\alpha_1 = \frac{\partial \log \omega}{\partial v}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \log \omega}{\partial u}.$$

Les deux équations (13^b) se réduisent à une seule

$$\alpha = -\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + 4a'b,$$

et les (13^c) donnent

$$(14)\quad \begin{aligned} f &= -2\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + 2b\frac{\partial \log \omega}{\partial v}, \\ g &= 2\frac{\partial a'}{\partial u} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2a'\frac{\partial \log \omega}{\partial u}. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit qu'une surface quelconque S, rapportée a ses lignes asymptotiques, peut d'une infinité de manière être définie par le système d'équations aux dérivées partielles

$$(15)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2b\frac{\partial y}{\partial v} + fy = 0. \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + 2a'\frac{\partial y}{\partial u} + gy + 0, \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - 4a'b\right) y - \frac{\partial \log \omega}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial \log \omega}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{s}{\omega}, \\ &\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$

f et g étant les expressions (14); à chaque point fixe de l'espace correspond un système de l'espèce indiquée. Quant aux conditions (13^d) d'intégrabilité du système (15), on peut les écrire

$$(16)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} + 4\frac{\partial a'}{\partial u} b + 2a'\frac{\partial b}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 a'}{\partial u^2} + 2\frac{\partial a'}{\partial v} b + 4a'\frac{\partial b}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Les équations (14), écrites sous la forme

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - 2b\frac{\partial \omega}{\partial u} + \left(f + 2\frac{\partial b}{\partial v}\right)\omega = 0 \\ &\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + 2a'\frac{\partial \omega}{\partial v} + \left(f + 2\frac{\partial a'}{\partial u}\right)\omega = 0 \end{aligned}$$

forment ce que M. Wilczynski appelle le système *adjoint* du système (10); elles sont satifaites par les coordonnées des plans tangents de la surface S. D'après ce que nous avons dit dans le numéro précédent, une solution particulière du système (10) donne les coordonnées mobiles d'un plan fixe; pareillement, une solution particulière du système (17) donne les coordonnées mobiles d'un point fixe. Ainsi, on voit bien la signification géométrique des équations (14).

Le système (15) se prête naturellement à l'étude des surfaces ayant une relation particulière quelconque à un point fixe de l'espace. Ainsi, M. Tzitzéica, en étudiant* les surfaces dont les droites directrices passent par un point fixe, les surfaces S, comme il les appelle, a fait usage d'un système qui est, au fond, le système (15).

Mais, en quittant ces généralités, bornons nous à la question particulière que nous avons en vue ici. L'expression

$$(18)\quad \lambda y-\left(a'\frac{\partial b}{\partial v}-b\frac{\partial a'}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\left(a'\frac{\partial b}{\partial u}-b\frac{\partial a'}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}+6a'b\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}$$

représente, pour les valeurs diverses de λ, les divers points de la droite l d' intersection des trois plans osculateurs des courbes de Segre. Pour une surface L, les droites l passent par un point fixe s, dont nous nous pouvons servir pour former le système (15). On peut alors choisir λ de façon que l'expression (18) représente précisément le point s. En confrontant l'expression (18) avec la troisième des équations (15), on trouve les conditions

$$(19)\quad \begin{gathered}\frac{\partial \log\omega}{\partial u}=+\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{a'}{b}\right),\ \frac{\partial \log\omega}{\partial v}=-\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{a'}{b}\right)\\ \lambda=6a'b\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}-4a'b\right),\end{gathered}$$

dont la dernière ne fait que déterminer le facteur λ. Des équations (19), on tire la condition

$$(20)\quad \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\left(\frac{a'}{b}\right)=0.$$

L'équation (20) caractérise une classe particulière de surfaces, à la quelle M. Fubini a donné le nom de surfaces *isothermoasymptotiques*. Si une surface est isothermoasymptotique, on peut, par un changement convenable des paramètres u, v de lignes asymptotiques, supposer

$$(21)\quad a'=b=\varphi(u,v).$$

Supposons donc la condition (20) remplie. Alors, les équations (19) donnent simplement

$$\omega=\text{constante},$$

* Rend. Circ. Mat. Palermo, 25, 1908 et 28, 1909.

et, sans restreindre la généralité, on peut supposer $\omega = +1$. Tenant compte des équations (14), on écrira donc le système (15), pour une surface L, comme il suit:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\varphi \frac{\partial y}{\partial v} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial v} y = 0, \\ (22)\qquad &\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial y}{\partial u} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} y = 0, \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - 4\varphi^2 y = s = \text{constante.} \end{aligned}$$

Inversement, le système (22) est satisfait par les coordonnées des points d'une surface L, dès lorsque les conditions (16) d'intégrabilité sont vérifiées. Ces conditions, dans le cas actuel, sont

$$(23)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\delta u}.$$

Nous sommes ainsi amené à l'étude du système (23). Ce système, heureusement, peut être intégré complètement. C'est ce que nous ferons dans le numéro suivant.

3. Intégration du système $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}$.

Des équations (23), on tire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$(24)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} + 3\varphi^2\right) = 0.$$

Dans tout ce qui suit, je pose, pour abréger,

$$(25)\qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

A côté de l'équation (24), on a deux autres analogues

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial u} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + 3\varphi^2\right) = 0$$
$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial u} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\varepsilon^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial v} + 3\varphi^2\right) = 0.$$

J'introduis les abréviations

$$(26)\qquad x_0 = u + v, \ x_1 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v, \ x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v,$$

ainsi que

$$(27)\qquad x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Des trois équations écrites plus haut, on tire

$$
(28)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}+3\varphi^2=f_0(x_0);\\
&\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\varepsilon^2\frac{\partial \varphi}{\partial v}+3\varphi^2=f_1(x_1),\\
&\varepsilon^2\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial v}+3\varphi^2=f_2(x_2),
\end{aligned}
$$

f_0, f_1, f_2, étant des fonctions d'une seule variable. Si nous introduisons trois nouvelles fonctions F_0, F_1, F_2, définies, à des constantes additives près, par les équations

$$
(29)\qquad F_0'(x_0)=f_0(x_0),\quad F_1'(x_1)=f_1(x_1),\quad F_2'(x_2)=f_2(x_2),
$$

l'accent signifiant la dérivation, et si nous choisissons convenablement ces constantes, nous avons

$$
(30)\qquad \begin{aligned}
3\varphi &= F_0(x_0)+F_1(x_1)+F_2(x_2),\\
9\varphi^2 &= F_0'(x_0)+F_1'(x_1)+F_2'(x_2).
\end{aligned}
$$

Inversement, des équations (30), on passe, au moyen des équations (28), au système (23). On en déduit aussi successivement

$$
\begin{aligned}
&18\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial u}=F_0''(x_0)+\varepsilon^2F_1''(x_1)+\varepsilon F_2''(x_2),\\
&2\quad 3\varphi\,.\,3\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\\
&\qquad =2\,[F_0(x_0)+F_1(x_1)+F_2(x_2)]\;[F_0'(x_0)+\varepsilon^2F_1'(x_1)+\varepsilon F_2'(x_2)],\\
&F_0''(x_0)+\varepsilon^2F_1''(x_1)+\varepsilon F_2''(x_2)=\\
&\qquad =2\,[F_0(x_0)+F_1(x_1)+F_2(x_2)]\;[F_0'(x_0)+\varepsilon^2F_1'(x_1)+\varepsilon F_2'(x_2)],\\
&F_0''(x_0)+\varepsilon F_1''(x_1)+\varepsilon^2F_2''(x_2)=\\
&\qquad =2\,[F_0(x_0)+F_1(x_1)+F_2(x_2)]\;[F_0'(x_0)+\varepsilon F_1'(x_1)+\varepsilon^2F_2'(x_2)],
\end{aligned}
$$

$$
(31)\qquad \frac{F_1''(x_1)-F_2''(x_2)}{F_1'(x_1)-F_2'(x_2)}=2\,[F_0(x_0)+F_1(x_1)+F_2(x_2)].
$$

Revenons aux équations (28) et envisageons, par exemple, la première

$$
(32\text{a})\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}+3\varphi^2=f_0(x_0).
$$

Par différentiation on en déduit, en tenant compte des équations (23),

$$
(32\text{b})\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}+6\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)=f'(x_0).
$$

Ainsi, on déduit encore

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+6\varphi^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)+\varphi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}=\tfrac{1}{6}f_0''(x_0),\\
&18\varphi^3\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)+6\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}+3\varphi^2\right)=\tfrac{1}{12}f_0'''(x_0).
\end{aligned}
$$

La dernière équation, comparée avec les (32a) et (32b), donne tout de suite

(33) $$f_0'''(x_0) = 12 f_0(x_0) f_0'(x_0).$$

On déduit d'une manière analogue

(33 bis) $$f_1'''(x_1) = 12 f_1(x_1) f_1'(x_1), \; f_2'''(x_2) = 12 f_2(x_2) f_2'(x_2).$$

On sait, qu'une solution de l'équation

$$f'''(x) = 12 f(x) f'(x)$$

est ou la fonction elliptique $p(x+a)$, formée avec des périodes quelconques, ou la fonction monopériodique

$$\alpha^2 \cot^2(\alpha x + \beta) + \frac{2\alpha^2}{3},$$

α et β étant des constantes quelconques, ou la fonction rationelle

$$\frac{1}{(x+a)^2},$$

où a est une constante arbitraire, ou enfin une constante.

Excluons pour le moment le cas ou une au moins des trois fonctions f_0, f_1, f_2, soit une constante. Alors, de l'identité (31) on déduit aisément que chaque période d'une quelconque des trois fonctions f_0, f_1, f_2 est une période des deux autres. Donc, trois cas sont possibles: ou

$$f_0(x_0) = p(x_0 + a_0), \; f_1(x_1) = p(x_1 + a_1), \; f_2(x_2) = p(x_2 + a_2),$$

ou bien

$$f_i(x_i) = \alpha_i^2 \cot^2 \alpha_i (x + a_i) + \frac{2\alpha_i^2}{3} \quad (i = 0, 1, 2)$$

ou enfin

$$f_i(x_i) = \frac{1}{x_i + a_i}.$$

Les conditions pour les constantes se trouvent aisément à l'aide des équations (30).

Sans faire une discussion complète, qui est sans difficultés, j'énonce seulement le résultat. La solution, dans le premier cas, est

(34) $$\varphi = -\frac{1}{3}\left[\zeta(x_0 + a_0) + \zeta(x_1 + a_1) + \zeta(x_2 + a_2)\right]$$

ou

(35) $$a_0 + a_1 + a_2 = 0;$$

elle dépend de quatre constantes arbitraires. Le théorème d'addition donne la vérification. En fait, d'après ce théorème, de (34) et de l'identité (27), on tire

(36) $$\varphi^2 = \frac{1}{9}\left[p(x_0 + a_0) + p(x_1 + a_1) + p(x_2 + a_2)\right].$$

L'équation (34) donne par différentiation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\frac{1}{3}\left[p'(x_0+a_0)+\varepsilon p'(x_1+a_1)+\varepsilon^2 p'(x_2+a_2)\right],$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\frac{1}{3}\left[p'(x_0+a_0)+\varepsilon^2 p'(x_1+a_1)+\varepsilon p'(x_2+a_2)\right],$$

pendant que l'équation (36) donne

$$2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{1}{9}\left[p'(x_0+a_0)+\varepsilon^2 p'(x_1+a_1)+\varepsilon p'(x_2+a_2)\right],$$

$$2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{1}{9}\left[p'(x_0+a_0)+\varepsilon p'(x_1+a_1)+\varepsilon^2 p'(x_2+a_2)\right].$$

Dans le second cas, la solution est

$$(37)\qquad \varphi=-\frac{\alpha}{3}\left[\operatorname{cotg}\alpha(x_0+a_0)+\operatorname{cotg}\alpha(x_1+a_1)+\operatorname{cotg}\alpha(x_2+a_2)\right],$$

ou la constante α est arbitraire, les a_0, a_1, a_2 restant liées par l'identité (35). La vérification se fait à l'aide de l'identité

$$\operatorname{cotg} y_0 \operatorname{cotg} y_1+\operatorname{cotg} y_0 \operatorname{cotg} y_2+\operatorname{cotg} y_1 \operatorname{cotg} y_2=1,$$

valable quand on a

$$y_0+y_1+y_2=0.$$

Dans le troisième cas, la solution est

$$(38)\qquad \varphi=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x_0+a_0}+\frac{1}{x_1+a_1}+\frac{1}{x_2+a_2}\right],$$

les constantes a_0, a_1, a_2 vérifiant toujours la condition (35).

Restent à considérer les cas ou une au moins des fonctions f_i soit une constante. En faisant usage des équations (30), on montre que cela a lieu nécessairement pour deux de ces fonctions au moins. Ainsi trois cas nouveaux sont encore possibles:

$$(39)\qquad \varphi=-\frac{\alpha}{3}\left[\operatorname{cotg}\alpha(x_i+a_i)\right],\qquad (i=0,1,2)$$

$$(40)\qquad \varphi=-\frac{1}{3}\frac{1}{x_i+a_i},\qquad (i=0,1,2)$$

$$(41)\qquad \varphi=\text{constante}.$$

Je désigne par $L_1, L_2, \dots L_6$ les surfaces L correspondant aux solutions (34), (37), ... (41) respectivement. Avant de passer à la recherche des équations finies de ces surfaces, je déterminerai l'enveloppe des plans des lignes de Segre.

4. Le cône enveloppé par les plans des lignes de Segre.

Dans le système (22), posons $s = 0$. Le système ainsi particularisé

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial u} = y_1, && \frac{\partial y}{\partial v} = y_2,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial u} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial v} y - 2\varphi y_2, && \frac{\partial y_1}{\partial v} = 4\varphi^2 y,\\
&\frac{\partial y_2}{\partial u} = 4\varphi^2 y, && \frac{\partial y_2}{\partial v} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} y - 2\varphi y_1
\end{aligned}
$$

ou la fonction φ vérifie les conditions d'intégrabilité (23)

$$
(23)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 6\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 6\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial u}
$$

admet trois solutions linéairement indépendentes. Je vais montrer qu'on peut l'intégrer algébriquement.

Si

$$
(43)\qquad
\begin{aligned}
y &= y^{(1)}c_1 + y^{(2)}c_2 + y^{(3)}c_3,\\
y_1 &= \frac{\partial y^{(1)}}{\partial u}c_1 + \frac{\partial y^{(2)}}{\partial u}c_2 + \frac{\partial y^{(3)}}{\partial u}c_3,\\
y_2 &= \frac{\partial y^{(1)}}{\partial v}c_1 + \frac{\partial y^{(2)}}{\partial v}c_2 + \frac{\partial y^{(3)}}{\partial v}c_3
\end{aligned}
$$

est la solution générale du système (42), on interprétera c_1, c_2, c_3 comme coordonnées homogènes de plans dans l'étoile dont le centre est le point fixe s; alors les y, y_1, y_2, formes linéaires en c_1, c_2, c_3, sont les coordonnées mobiles dans cette étoile. Une expression linéaire et homogène en y, y_1, y_2 représentera une droite de l'étoile s et cette droite varie en général avec les u, v. Particulièrement y représentera la droite projetant le point mobile de la surface L du point s.

Les équation des lignes de Segre étant

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
u - v &= \text{constante},\\
\varepsilon^2 u - \varepsilon v &= \text{constante},\\
\varepsilon u - \varepsilon^2 v &= \text{constante},
\end{aligned}
$$

l'expression

$$
(45)\qquad \varepsilon^i y_1 + \varepsilon^{2i} y_2 + \lambda y \quad (i = 0,\ 1,\ 2)
$$

représente la projection (prise du point de vue s) d'un point arbitraire situé sur une des tangentes de Segre. Cherchons à déterminer λ de facon que cette droite soit la droite de contact du plan projetant la tangente en question avec son enveloppe, quand on décrit, sur la surface L, une courbe quelconque, diverse de la courbe de Segre correspondante. Pour cela, il suffit de dérive l'expression (45) par rapport à u, par exemple, et exprimer que l'expression obtenue est du même type que (45). O na, d'après (42),

$$
\frac{\partial}{\partial u}(\varepsilon^i y_1 + \varepsilon^{2i} y_2 + \lambda y) = \varepsilon^i \lambda y_1 - 2\varepsilon^{2i}\varphi y_2 + \mu y;
$$

donc

$$\varepsilon^i y_1 + \varepsilon^{2i} y_2 - 2\varphi y \tag{46}$$

est la droite de contact du plan de la courbe de Segre

$$\varepsilon^{2i} u - \varepsilon^i v = \text{constante}$$

avec son enveloppe.

Celà étant, on démontre aisément la propriété fondamentale des surfaces L: *les plans des courbes de Segre enveloppent un cône algébrique de la troisième classe.* Admettons, pour le moment, ce théorème. On connaît les trois plans tangents de ce cône, passant par la droite y, ainsi que les droites de contact de ces plans. On en déduit que le cône, si il existe, est représenté, en coordonnées mobiles, par une forme cubique du type

$$W = y_1^3 + y_2^3 + 6\varphi y y_1 y_2 + 3\,(Ay + By_1 + Cy_2)\, y^2. \tag{47}$$

Il s'agit seulement de savoir si l'on peut déterminer les trois fonctions de u, v, A, B, C de manière que le cône représenté par la forme W soit fixe dans l'espace. C'est ce qu'on voit en formant, à l'aide des équations (42), les dérivées

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial u} = &\left(\frac{\partial A}{\partial u} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial v} B + 4\varphi^2 C\right) y^3 + \left(8\varphi^3 + 3A + \frac{\partial B}{\partial u}\right) y^2 y_1 + \\ &+ \left(4\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - 2\varphi B + \frac{\partial C}{\partial u}\right) y^2 y_2 + 2\left(B + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) y y_1^2 + 2\left(C + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) y y_1 y_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial v} = &\left(\frac{\partial A}{\partial v} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} C + 4\varphi^2 B\right) y^3 + \left(\frac{\partial B}{\partial v} - 2\varphi C + 4\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) y^2 y_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial C}{\partial v} + 8\varphi^3 + 3A\right) y^2 y_2 + 2\left(C + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) y y_2^2 + 2\left(B + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) y y_1 y_2.\end{aligned}$$

Pour que le cône W soit fixe, il faut et suffit que $\frac{\partial W}{\partial u}$ et $\frac{\partial W}{\partial v}$ soient proportionnelles à W D'après les expressions trouvées, ceci ne peut avoir lieu qui si l'on a identiquement

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial v} = 0. \tag{48}$$

Ainsi, on a les conditions

$$B + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,\ \ C + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,\ \ 3A = -\frac{\partial B}{\partial u} - 8\varphi^3 = -\frac{\partial C}{\partial v} - 8\varphi^3, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial B}{\partial v} - 2\varphi C + 4\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,\ \ \frac{\partial C}{\partial u} - 2\varphi B + 4\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,\\ &\frac{\partial A}{\partial u} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial v} B + 4\varphi^2 C = 0,\ \ \frac{\partial A}{\partial v} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} C + 4\varphi^2 B = 0.\end{aligned} \tag{50}$$

Des équations (49) seules on tire déjà, sans ambiguité,

$$(51)\qquad B=-\frac{\partial\varphi}{\partial v},\ C=-\frac{\partial\varphi}{\partial u},\ 3A=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-8\varphi^3.$$

En substituant ces valeurs dans les premiers membres des équations (50), on trouve

$$\frac{\partial B}{\partial v}-2\varphi C+4\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial C}{\partial u}-2\varphi B+4\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$
$$3\left(\frac{\partial A}{\partial u}+2\frac{\partial\varphi}{\partial v}B+4\varphi^2C\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+6\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$
$$3\left(\frac{\partial A}{\partial v}+2\frac{\partial\varphi}{\partial u}C+4\varphi^2B\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+6\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

Donc les équations (50) sont de même satisfaites, en vertu des conditions intégrabilité (23).

En définitive, le cône W enveloppe des plans des lignes de Segre est, en coordonées mobiles, représenté par la forme cubique

$$(52)\quad W=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-8\varphi^3\right)y^3+y_1^3+y_2^3+6\varphi yy_1y_2-3\frac{\partial\varphi}{\partial v}y^2y_1-3\frac{\partial\varphi}{\partial u}y^2y_2.$$

D'après les équations (48), toute intégrale particulière du système (42) rend l'expression W constante. On en déduit facilement qu'en général — plus précisément si l'expression W n'admet qu'un nombre fini de substitutions linéaires en elle même — on peut intégrer le système (42) algébriquement. En effet, on peut, dans ce cas, à l'aide de l'expression W déterminer par opérations algébriques les coordonées mobiles d'un plan fixe arbitraire de l'étoile s, ne touchant pas le cône W; soit

$$Y:Y_1\quad Y_2$$

ces coordonnées. On sait que l'on peut alors déterminer λ de manière que

$$y=\lambda Y,\ y_1=\lambda Y_1,\ y_2=\lambda Y_2$$

soit une solution du système (42). Or pour déterminer λ, il suffit de substituer ces expressions, λ restant indeterminée, dans la forme W; cette forme devant être constante, on obtient λ^3 rationnellement.

En terminant ce numéro, j'énonce le théorème suivant, que je vérifierai successivement dans les divers cas.

Pour les différentes espèces L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 d'une surface L, le cône W

(L_1) *est de genre un,*

(L_2) *a un plan tangent double,*

(L_3) *a un plan tangent stationnaire,*

(L_4 et L_5) *se décompose en un cône quadrique et un faisceau, dont l'axe, dans le cas L_5, est situé sur le cône quadrique.*

(L_6) *se décompose en trois faisceaux.*

5. La surface L_6.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer

$$\varphi = 1. \tag{53}$$

Le système (22) est, dans le cas actuel,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial u} = y_1, && \frac{\partial y}{\partial v} = y_2, \\ &\frac{\partial y_1}{\partial u} = -2y_2, && \frac{\partial y_1}{\partial v} = 4y + s, \\ &\frac{\partial y_2}{\partial u} = 4y + s, && \frac{\partial y_2}{\partial v} = -2y_1. \end{aligned} \tag{54}$$

On vérifie tout de suite que les trois droites (46) sont fixes, comme j'ai déjà énoncé. Plus précisément, on prouve que les trois points, donnés par les expressions

$$t^i = \varepsilon^i y_1 + \varepsilon^{2i} y_2 - 2y - \frac{s}{2}, \qquad (i = 0,\ 1,\ 2) \tag{55}$$

sont fixes. En effet, on tire des équations (54)

$$\frac{dt_i}{\partial u} = -2\varepsilon^{2i} t_i, \quad \frac{\partial t_i}{\partial v} = -2\varepsilon^i t_i,$$

ou bien

$$t_i = c_i e^{-2x_i} \tag{56}$$

où les c_i sont des constantes et les x_i sont les expressions (26). Calculons y des équations (55) et remplaçons les t_i par les valeurs (56); on trouve ainsi la solution générale du système (54)

$$-6y = c_0 e^{-2x_0} + c_1 e^{-2x_1} + c_2 e^{-2x_2} + \frac{3s}{2}. \tag{57}$$

En tenant compte de l'identité (27), on voi donc que la surface L_6 est la bien connue *surface tétraèdrale du 3^{ne} ordre et de la 3^{me} classe*

$$y^{(1)} y^{(2)} y^{(3)} = (y^{(4)})^3. \tag{58}$$

Les plans passant par les trois arêtes

$$y^{(1)} = y^{(2)} = 0, \quad y^{(1)} = y^{(3)} = 0, \quad y^{(2)} = y^{(3)} = 0$$

ou tétraèdre de référence coupent la surface suivant les courbes de Segre, celles passant par les arêtes opposées

$$y^{(1)} = y^{(4)} = 0, \quad y^{(2)} = y^{(4)} = 0, \quad y^{(3)} = y^{(4)} = 0$$

la coupent suivant les courbes de Darboux. Les trois familles des courbes de Darboux sont dont des *coniques*; les coniques de chaque famille passent par deux points fixes.

On a aussi les propriétés corrélatives, la surface étant corrélative à elle-même.

6. La surface L_5.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer

$$\varphi = -\frac{1}{3(u+v)}. \tag{59}$$

La forme cubique W se décompose ici, comme j'avais énoncé:

$$W = \left[y_1 + y_2 + \frac{2y}{3(u+v)}\right]\left[y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 - \frac{5y^2}{9(u+v)^2} - \frac{2(y_1+y_2)y}{3(u+v)}\right]. \tag{60}$$

Les plans des courbes de Segre

$$u - v = \text{constante}$$

forment un faisceau, tandis que les plans des courbes de Segre des deux autres familles enveloppent le cône quadrique, représenté en coordonnées mobiles par l'équation

$$y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 - \frac{5y^2}{9(u+v)^2} - \frac{2(y_1+y_2)y}{3(u+v)} = 0. \tag{61}$$

Formons le système (22):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial u} = y_1, && \frac{\partial y}{\partial v} = y_1,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{2}{3(u+v)}y_2 + \frac{2}{3(u+v)^2}y, && \frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{4}{9(u+v)^2}y + s,\\
&\frac{\partial y_2}{\partial u} = \frac{4}{9(u+v)^2}y + s, && \frac{\partial y_2}{\partial v} = \frac{2}{3(u+v)}y_1 + \frac{2}{3(u+v)^2}y.
\end{aligned} \tag{62}$$

L'expression

$$t = y_1 + y_2 + \frac{2y}{3(u+v)} - 3(u+v)s \tag{63}$$

représente un point fixe; car on a, d'après les équations (62),

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{2t}{3(u+v)},$$

d'où

$$t = a(u+v)^{2/3}, \tag{64}$$

a étant constante. On vérifie aisément que la droite $s\,t$ est située sur le cône quadrique (61), le plan tangent correspondant étant

$$y : y_1 : y_2 : s = 3(u+v) : -1 : -1 : 0.$$

Le point t est un point de ce plan; un autre point en est

$$y_1 - y_2.$$

Essayons donc de déterminer λ de façon que le point

$$z = y_1 - y_2 + \lambda t$$

soit fixe. On trouve

$$\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{z}{3(u+v)}+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{3\lambda+1}{3(u+v)}\right]t,$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{z}{3(u+v)}+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{3\lambda-1}{3(u+v)}\right]t.$$

La solution plus simple du système

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{3\lambda+1}{3(u+v)}=0,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{3\lambda-1}{3(u+v)}=0.$$

est

$$\lambda=\frac{v-u}{3(v+u)};$$

on peut donc poser

$$z=y_1-y_2+\frac{v-u}{3(v+u)}\,t,$$

ou bien

(65) $$z=-\frac{2(u-v)}{9(u+v)^2}\,y+\frac{2(u+2v)}{3(u+v)}\,y_1-\frac{2(2u-v)}{3(u+v)}\,y_2+(u-v)\,s;$$

on a alors

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{z}{3(u+v)},$$

d'où

(66) $$z=\frac{b}{\sqrt[3]{u+v}},$$

b étant une constante.

Le plan

$$y:y_1:y_2:s=3\,(u^2-v^2):2\,(u+2v):-2\,(2u+v):0$$

est le plan polaire du point z par rapport au cône (61) et est donc fixe. Il contient les points s t et, par exemple, le point

$$3\,(uy_1+vy_1)-2y;$$

ainsi, on peut déterminer λ et μ de manière que le point

$$r=3\,(uy_1+vy_2)-2y+\lambda t+\mu s$$

soit fixe. On a

$$\frac{\partial r}{\partial u}=-\frac{r}{3(u+v)}+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\lambda}{u+v}+\frac{2u+v}{u+v}\right]t+$$
$$+\left[\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{\mu}{3(u+v)}+6\,(u+v)\right]s$$
$$\frac{\partial r}{\partial v}=-\frac{r}{3(u+v)}+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{\lambda}{u+v}+\frac{u+2v}{u+v}\right]t+$$
$$+\left[\frac{\partial\mu}{\partial v}+\frac{\mu}{3(u+v)}+6\,(u+v)\right]s.$$

La manière plus simple d'annuler les coefficients de t et de s dans ces équations est

$$\lambda = -\frac{u^2+uv+v^2}{u+v}, \quad \mu = -\frac{18(u+v)^2}{7};$$

posons donc

$$r = 3(uy_1+vy_2) - 2y - \frac{u^2+uv+v^2}{u+v}t - \frac{18(u+v)^2}{7}s$$

ou bien

$$(67) \qquad \begin{aligned} r = &-\frac{2(4u^2+7uv+4v^2)}{3(u+v)^2}y + \frac{2u^2+2uv-v^2}{u+v}y_1 - \\ &-\frac{u^2+2uv+2v^2}{u+v}y_2 + \frac{3(u^2-5uv+v^2)}{7}s; \end{aligned}$$

nous avons

$$(68) \qquad r = \frac{c}{\sqrt[3]{u+v}},$$

c étant constante.

Sommons les équations (63), (65), (67) après les avoir multipliées respectivement par

$$\frac{2(u^2+uv+v^2)}{u+v}, \quad 3(u-v), \quad -2;$$

en remplaçant t, z, r par leurs valeurs (64), (66), (68), nous obtenons la solution générale du système (62)

$$(69) \quad y = \frac{u^2+uv+v^2}{\sqrt[3]{u+v}}.a + \frac{3}{2}\frac{u-v}{\sqrt[3]{u+v}}b - \frac{1}{\sqrt[3]{u+v}}c + \frac{27(u+v)^2}{14}s.$$

Les équations paramètriques de la surface L_5 sont donc

$$x = \frac{u^2+uv+v^2}{(u+v)^{7/3}}, \quad y = \frac{u-v}{(u+v)^{7/3}}, \quad z = \frac{1}{3(u+v)^{7/3}}.$$

En éliminant u et v, on peut écrire

$$(70) \qquad z^8 = (4xz - y^2)^7.$$

Les courbes de Darboux de la famille

$$u + v = \text{constante}$$

sont des coniques se touchant mutuellement en un point fixe.

7. La surface L_4.

On peut évidemment supposer

$$(71) \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\cot g\,(u+v).$$

Je suivrai la même voie comme dans le cas précédent. Ici encore, la forme cubique W se décompose:

(72) $$W = [y_1 + y_2 + \frac{2}{3} \operatorname{cotg}(u+v)\, y] \cdot w,$$

où

(73) $$w = y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2 - \frac{5 + 4\sin^2(u+v)}{9\sin^2(u+v)} y^2 - \frac{2}{3}\operatorname{cotg}(u+v)(y_1+y_2)y.$$

Le système (22) est maintenant

(74) $$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial u} = y_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = y_2, \\ &\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{2}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\, y_2 + \frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2(u+v)} y, \\ &\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{4}{9}\operatorname{cotg}^2(u+v)\, y + s, \\ &\frac{\partial y_2}{\partial u} = \frac{4}{9}\operatorname{cotg}^2(u+v)\, y + s, \\ &\frac{\partial y_2}{\partial v} = \frac{2}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\, y_1 + \frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2(u+v)} y. \end{aligned}$$

Les planes des courbes de Segre de la famille

$$u - v = \text{constante}$$

passent par la droite qui joint les points s et t, où

$$t = y_1 + y_2 + \frac{2y}{3}\operatorname{cotg}(u+v) + \lambda s;$$

je veux déterminer λ de façon que le point t soit fixe. Pour cela, je forme

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{2}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\, t + \left[\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{2}{3}\lambda \operatorname{cotg}(u+v) + 1\right] s,$$

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{2}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\, t + \left[\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{2}{3}\lambda \operatorname{cotg}(u+v) + 1\right] s.$$

Posons, pour abréger,

(75) $$j = \int_{\infty}^{\sin^{2/3}(u+v)} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}};$$

on a

(76) $$\frac{\partial j}{\partial u} = \frac{\partial j}{\partial v} = \frac{2}{3\sin^{2/3}(u+v)}.$$

Ceci étant, on peut poser

$$\lambda = -\frac{3}{2} j \sin^{2/3}(u+v).$$

Le point t est alors fixe et on a

(77) $$t = y_1 + y_2 + \frac{2}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\, y - \frac{3}{2} j \cdot \sin^{2/3}(u+v)\, s,$$

(78) $$t = a \sin^{2/3}(u+v),$$

a étant constante.

Le plan

$$y : y_1 : y_2 : s = -3\sin(u+v)\cos(u+v) : [1+2\sin^2(u+v)]$$
$$[1+2\sin^2(u+v)] : 0$$

est le plan polaire du point t par rapport au cône quadrique (73) et est par suite fixe. Il contient, par exemple, le point

$$y_1 - y_2$$

et donc, étant fixe, aussi le point

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)(y_1 - y_2).$$

La droite qui joint ce dernier point au point s contient le point

$$2y + \operatorname{cotg}(u+v)\, t.$$

Posons donc

$$r_1 = y_1 - y_2, \quad r_2 = 2y + \operatorname{cotg}(u+v)\, t$$

et déterminons en premier lieu λ et μ de façon que la droite qui joint les points s et $\lambda r_1 + \mu r_2$ soit fixe. Pour cela, on calcule, *en supposant* $s = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial u}(\lambda r_1 + \mu r_2) =$$
$$= \left[\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\,.\,\lambda + \mu\right] r_1 + \left[\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\,.\,\mu\right] r_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda r_1 + \mu r_2) =$$
$$= \left[\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}(u+v)\quad \lambda - \mu\right] r_1 + \left[\frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}(\mu+v)\quad \mu\right] r_2.$$

Les seconds membres de ces équations s'annullent soit en faisant

$$\lambda = \sqrt{3}\sin^{1/3}(u+v)\, e^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}}, \qquad \mu = \sin^{1/3}(u+v)\, e^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}}$$

soit en faisant

$$\lambda = -\sqrt{3}\sin^{1/3}(u+v)\, e^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}, \qquad \mu = \sin^{1/3}(u+v)\, e^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}$$

Si donc nous introduisons les deux formes linéaires

$$(79) \qquad \begin{aligned} z_1 &= \sin^{1/3}(u+v)\, e^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}}(\sqrt{3}\, r_1 + r_2) + \lambda_1 s, \\ z_2 &= \sin^{1/3}(u+v)\, e^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}(-\sqrt{3}\, r_1 + r_2) + \lambda_2 s, \end{aligned}$$

nous pouvons déterminer λ_1 et λ_2 de manière que les points représentés par elles soient fixes. D'après la manière même dont on a obtenu ces expressions, quelles que soient les λ_i, les dérivées $\frac{\partial z_i}{\partial u}$, $\frac{\partial z_i}{\partial v}$ ne peuvent contenir que s.

On trouve les conditions

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}=\sqrt{3}\left[\sin^{1/3}(u+v)-\cos\left(u+v-\frac{\pi}{3}\right)j\right]e^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}=-\sqrt{3}\left[\sin^{1/3}(u+v)-\cos\left(u+v+\frac{\pi}{3}\right)j\right]e^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}},$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}=-\sqrt{3}\left[\sin^{1/3}(u+v)-\cos\left(u+v+\frac{\pi}{3}\right)j\right]e^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}=\sqrt{3}\left[\sin^{1/3}(u+v)-\cos\left(u+v-\frac{\pi}{3}\right)j\right]e^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}$$

On peut donc faire

$$\lambda_1=\left[\frac{3}{2}j\cos(u+v)-3\sin^{1/3}(u+v)\right]e^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}}$$

$$\lambda_2=\left[\frac{3}{2}j\cos(u+v)-3\sin^{1/3}(u+v)\right]e^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions (79) et en remplaçant les r_1, r_2 par leurs valeurs, on arrive au résultat définitif

$$\begin{aligned}(80)\quad z_1=\sin^{1/3}(u+v)\,e^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}}&[(\operatorname{cotg}(u+v)+\sqrt{3})\,y_1+\\ &+(\operatorname{cotg}(u+v)-\sqrt{3})\,y_2+\frac{2}{3}(\operatorname{cotg}^2(u+v)+3)\,y-3s],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(81)\quad z_2=\sin^{1/3}(u+v)\,e^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}&[(\operatorname{cotg}(u+v)-\sqrt{3})\,y_1+\\ &+(\operatorname{cotg}(u+v)+\sqrt{3})\,y_2+\frac{2}{3}(\operatorname{cotg}^2(u+v)+3)\,y-3s],\end{aligned}$$

$$(82)\qquad z_1=b,\qquad z_2=c,$$

b et c étant constantes. En éliminant y_1 et y_2 des équations (77), (80) et (81) et en remplaçant t, z_1 et z_2 par les expressions (78) et (82), on trouve enfin la solution générale du système (74):

$$\begin{aligned}(83)\quad -4\sin^{1/3}(u+v)\,y&=2a\cos(u+v)-be^{\frac{u-v}{\sqrt{3}}}-\\ &-ce^{-\frac{u-v}{\sqrt{3}}}+3s\left[\cos(u+v)\int_{\infty}^{\sin^{2/3}(u+v)}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}-2\sin^{1/3}(u+v)\right].\end{aligned}$$

La surface L_4 peut dont être représentée par les équations paramétriques

$$\begin{aligned}&x=\alpha^2,\\ &y=\alpha\sqrt{1-\beta^3},\\ (84)\quad &z=\alpha\left[\sqrt{1-\beta^3}\int_{\infty}^{\beta}\frac{d\beta}{\sqrt{\beta(1-\beta^3)}}-2\sqrt{\beta}\right].\end{aligned}$$

La famille $\beta=$ const. ou $u+v=$ const. de courbes de Darboux est composée de coniques passant par deux points fixes. Dans une métrique convenable, la surface devient une surface de révolution*.

8. La surface L_3.

On peut faire, dans ce cas,

$$\varphi=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{u+v}+\frac{1}{\varepsilon^2 u+\varepsilon v}+\frac{1}{\varepsilon u+\varepsilon^2 v}\right]=\frac{uv}{u^3+v^3}. \tag{85}$$

Commençons par écrire le système (22)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial u}=y_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=y_2,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial u}=\frac{2u(u^3-2v^3)}{(u^3+v^3)^2}y-\frac{2uv}{u^3+v^3}y_2, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v}=\frac{4u^2v^2}{(u^3+v^3)^2}y+s,\\
&\frac{\partial y_2}{\partial u}=\frac{4u^2v^2}{(u^3+v^3)^2}y+s, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial v}=-\frac{2v(2u^3-v^3)}{(u^3+v^3)^2}y-\frac{2uv}{u^3+v^3}y_1,
\end{aligned} \tag{86}$$

ainsi que la forme cubique W

$$\begin{aligned}
W=&-\frac{2(u^6+v^6-3u^3v^3)}{(u^3+v^3)^2}y+y_1{}^3+y_2{}^3+\frac{6uv}{u^3+v^3}yy_1y_2-\\
&-\frac{3u(u^3-2v^3)}{(u^3+v^3)^2}y^2y_1+\frac{3v(2u^3-v^3)}{(u^3+v^3)^2}y^2y_2.
\end{aligned} \tag{87}$$

J'ai déjà énoncé que le cône W a un plan tangent stationnaire. Pour trouver les coordonnées mobiles de ce plan on fera le mieux en faisant usage des équations

$$\frac{\partial W}{\partial y_1}=\frac{\partial W}{\partial y_2}=\frac{\partial^2 W}{\partial y_1{}^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y_2{}^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2=0,$$

et on trouve ainsi

$$y:y_1:y_2:s=-(u^3+v^3):u^2\quad v^2:0. \tag{88}$$

La droite de contact de ce plan tangent joint le point s au point

$$t=(u^3-v^3)\,y+(u^3+v^3)\,(uy_1-vy_2)+\lambda s.$$

D'après les équations (86), nous formons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial u}&=\frac{5u^2}{u^3+v^3}t+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u}-\frac{5u^2\lambda}{u^3+v^3}-v\,(u^3+v^3)\right]s\\
\frac{\partial t}{\partial v}&=\frac{5u^2}{u^3+v^3}t+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{5v^2\lambda}{u^3+v^3}+u\,(u^3+v^3)\right]s.
\end{aligned}$$

---

* Sur chaque surface de révolution, les parallèles forment une famille de courbes de Darboux. C'est qui on peut voir sans calcul, en s'appuyant sur la définition donnée par Darboux de ses tangentes.

Pour abréger, posons

$$(89)\qquad j=\int_{\infty}^{\frac{u}{v}}\frac{dz}{(z^3+1)^{2/3}},$$

ainsi que

$$(90)\qquad \frac{\partial j}{\partial u}=\frac{v}{(u^3+v^3)^{2/3}},\quad \frac{\partial j}{\partial v}=-\frac{u}{(u^3+v^3)^{2/3}}.$$

Le point

$$(91)\qquad t=(u^3-v^3)\,y+(u^3+v^3)\,(uy_1-vy_2)+(u^3+v^3)^{5/3}.j\,s$$

est alors fixe et l'on a

$$(92)\qquad t=a\,(u^3+v^3)^{5/3},$$

a étant une constante.

Un autre point du plan fixe (88) est évidemment le point

$$v^2y_1-u^2y_2.$$

Par suite, on peut choisir les fonctions λ et μ de manière que le point

$$z=v^2y_1-u^2y_2+\lambda t+\mu s$$

soit fixe. On a

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u^2(u^3+2v^3)}{u^6-v^6}z+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{3u^2(u^3-3v^3)}{u^6-v^6}\lambda-\frac{2uv^2(u^3+2v^3)}{(u^3+v^3)^2(u^3-v^3)}\right]t+$$
$$+\left[\frac{\partial\mu}{\partial u}-\frac{2u^2(u^3+2v^3)}{u^6-v^6}\mu+\frac{2uv^2(u^3+2v^3)}{(u^3-v^3)(u^3+v^3)^{1/3}}.j-u^2\right]s,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2v^2(2u^3+v^3)}{u^6-v^6}z+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{3v^2(3u^3-v^3)}{u^6-v^6}\lambda+\frac{2u^2v(2u^3+v^3)}{(u^3+v^3)^2(u^3-v^3)}\right]t+$$
$$+\left[\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{2v^2(2u^3+v^3)}{u^6-v^6}\mu-\frac{2u^2v(2u^3+v^3)}{(u^3-v^3)(u^3+v^3)^{1/3}}.j+v^2\right]s.$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que le choix

$$\lambda=-\frac{2u^2v^2}{(u^3+v^3)^2},\quad \mu=\frac{2u^2v^2}{(u^3+v^3)^{1/3}}\,j+u^3-v^3$$

annule des coefficients de s et de t dans les expressions de $\frac{\partial z}{\partial u}$ et de $\frac{\partial z}{\partial v}$. J'adopte ces valeurs de λ et de μ, mais, pour simplifier l'écriture, j'introduit l'expression

$$z_1=-\frac{z}{u^3-v^3}.$$

On a

$$(93)\qquad z_1=\frac{v^2y_1+u^2y_2}{u^3+v^3}+\frac{2u^2v^2}{(u^3+v^3)^2}\,y-s,$$

et

$$\frac{\partial z_1}{\partial u}=-\frac{u^2}{u^3+v^3}z_1,\quad \frac{\partial z_1}{\partial v}=-\frac{v^2}{u^3+v^3}z_1,$$

d'où

$$z_1 = \frac{b}{\sqrt[3]{u^3 + v^3}}, \tag{94}$$

b étant constante.

Par le point z_1, on peut mener, en dehors du plan (88), un seul autre plan tangent du cône W; on trouve que les coordonnées mobiles de ce nouveau plan fixe sont

$$y : y_1 : y_2 : s = (u^6 - v^6) : 2u^2(u^3 + 2v^3) : -2v^2(2u^3 + v^3) : 0.$$

Ce plan contient évidemment le point

$$2y - uy_1 - vy_2.$$

Posons donc

$$r = 2y - uy_1 - vy_2 + \lambda z_1 + \mu s.$$

On trouve

$$\frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{u^2}{u^3 + v^3} r + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + v\right) z_1 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{u^2}{u^3 + v^3} \mu\right) s,$$
$$\frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{v^2}{u^3 + v^3} r + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} + u\right) z_1 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{v^2}{u^3 + v^3} \mu\right) s.$$

Par suite, le choix

$$\lambda = -uv, \quad \mu = 0$$

rend fixe le point r. Ainsi

$$\begin{aligned} r = &-\frac{u(u^3 + 2v^3)}{u^3 + v^3} y_1 - \frac{v(2u^3 + v^3)}{u^3 + v^3} y_2 + \\ &+ 2\frac{u^6 + u^3v^3 + v^6}{(u^3 + v^3)^2} y + uvs, \end{aligned} \tag{95}$$

$$r = \frac{c}{\sqrt[3]{u^3 + v^3}}, \tag{96}$$

c étant constante.

L'élimination de y_1, et de y_2 des équations (91), (93) et (95) fournit enfin, si l'on remplace t, z_1 et r par leurs valeurs (92), (94) et (96), la solution générale du système (86)

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2\sqrt[3]{u^3 + v^3}} \Bigg\{ &a(u^3 - v^3) + 3buv + c - \\ &- s\left[(u^3 - v^3)\int_{\infty}^{\frac{u}{v}} \frac{dx}{(x^3 + 1)^{2/3}} - 2uv\sqrt[3]{u^3 + v^3}\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{97}$$

On peut dont, au moyen des paramètres α et β, représenter la surface L_3 par les équations

$$(98)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha^3, \\ y &= \frac{\alpha^2\beta}{\sqrt[3]{(\beta^3-1)^2}}, \\ z &= \frac{2\alpha^3\beta}{\beta^3-1}\sqrt[3]{\beta^3+1} - \alpha^3\int_\infty^\beta \frac{dx}{(x^3+1)^{2/3}}. \end{aligned}$$

On voit que les plans du faisceau

$$\frac{z}{x} = \text{constante}$$

coupent la surface suivant des courbes cubiques dont le point

$$x = y = z = 0$$

est un point de rebroussement commun.

9. La surface L_2.

Dans ce numéro, j'écrirai, pour abréger,

$$(99)\quad \xi_0 = \operatorname{cotg}(u+v),\ \xi_1 = \operatorname{cotg}(\varepsilon^2 u + \varepsilon v),\ \xi_2 = \operatorname{cotg}(\varepsilon u + \varepsilon_2 v),$$

ainsi que l'on a

$$(100)\qquad \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_0 + \xi_0\xi_1 = 0$$

et

$$(101)\quad \frac{\partial\xi_i}{\partial u} = -\varepsilon^{2i}(1+\xi_i^2),\quad \frac{\partial\xi_i}{\partial v} = -\varepsilon^i(1+\xi_i^2)\quad (i=0,1,2)$$

Il est permis de supposer

$$(102)\qquad \varphi = -\frac{1}{3}(\xi_0+\xi_1+\xi_2).$$

Les équations (22), dans le cas qui nous occupe, sont

$$(103)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u} &= y_1, \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} &= \frac{2}{3}(\xi_0^2+\varepsilon\xi_1^2+\varepsilon^2\xi_2^2)\,y + \frac{2}{3}(\xi_0+\xi_1+\xi_2)\,y_2, \\ \frac{\partial y_2}{\partial u} &= \frac{4}{9}(\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+2)\,y + s, \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= y_2, \\ \frac{\partial y_1}{\partial v} &= \frac{4}{9}(\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+2)\,y + s, \\ \frac{\partial y_2}{\partial v} &= \frac{2}{3}(\xi_0^2+\varepsilon^2\xi_1^2+\varepsilon\xi_2^2)\,y + \frac{2}{3}(\xi_0+\xi_1+\xi_2)\,y_1. \end{aligned}$$

Ecrivons aussi la forme cubique W

$$
(104)\quad \begin{aligned} W = &-\frac{1}{27}[10(\xi_0^3+\xi_1^3+\xi_2^3)-6(\xi_0+\xi_1+\xi_2)+24\xi_0\xi_1\xi_2]y^3+\\ &+y_1^3+y_2^3-2(\xi_0+\xi_1+\xi_2)yy_1y_2-(\xi_0^2+\varepsilon\xi_1^2+\varepsilon^2\xi_2^2)^2y^2y_1-\\ &-(\xi_0^2+\varepsilon^2\xi_1^2+\varepsilon\xi_2^2)y^2y_2. \end{aligned}
$$

Le cône cubique W a un plan tangent double, dont les coordonnées mobiles sont, comme le lecteur vérificra aisément,

$$
(105)\qquad y:y_1:y_2:s=-3:(\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2):(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2):0.
$$

Posons

$$
(106)\qquad \delta_1=+1,\ \delta_2=-1.
$$

Alors les droites de contact du plan tangent double (105) contiennent respectivement les points

$$
(107)\quad \begin{aligned} t_i = &(\xi_0+\xi_1+\xi_2+\delta_i\sqrt{3})[(\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2)y+3y_1\\ &+(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2)[(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2)y+3y_2]. \end{aligned} \qquad (i=1,2)
$$

On a

$$
\begin{aligned} \frac{\partial t_i}{\partial u} &= -\frac{(\xi_0+\xi_1+\xi_2-\delta_i\sqrt{3})^2}{3(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2)}t_i+3(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2)s\\ \frac{\partial t_i}{\partial v} &= -\frac{(\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2)(\xi_0+\xi_1+\xi_2-\delta_i\sqrt{3})}{3(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\mathfrak{z}^2\xi_2)}t_i+\\ &\quad +3(\xi_0+\xi_1+\xi_2+\delta_i\sqrt{3})s. \end{aligned} \qquad (i=1,2)
$$

Il' s'ensuit

$$
(108)\qquad t_i=3e^{-\tau_i}\int se^{\tau_i}[(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2)du+(\xi_0+\xi_1+\xi_2+\delta i\sqrt{3})dv],\qquad (i=1,2)
$$

où j'ai posé

$$
(109)\quad \begin{aligned} \tau_i=\int &\frac{\xi_0+\xi_1+\xi_2-\delta_i\sqrt{3}}{3(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2)}[(\xi_0+\xi_1+\xi_2-\delta_i\sqrt{3})du+\\ &+(\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2)dv] \end{aligned} \qquad (i=1,2).
$$

Pour évalues ces intégrales, employons l'identité (100), qui peut être écrite sous la forme

$$
\begin{aligned} &(\xi_0+\xi_1+\xi_2+\sqrt{3})(\xi_0+\xi_1+\xi_2-\sqrt{3})=\\ &=(\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2)(\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2) \end{aligned}
$$

Cela permet d'introduire deux nouvelles variables α et β en posant

$$
(110)\quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi_0+\xi_1+\xi_2+\sqrt{3}}{\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2}=\frac{\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2}{\xi_0+\xi_1+\xi_2-\sqrt{3}},\\ \beta &= \frac{\xi_0+\xi_1+\xi_2+\sqrt{3}}{\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2}=\frac{\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2}{\xi_0+\xi_1+\xi_2-\sqrt{3}}. \end{aligned}
$$

On en déduit les formules

$$\xi_0 = \frac{1+2(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{\sqrt{3}\,(\alpha\beta-1)}, \quad \xi_1 = \frac{1+2(\varepsilon^2\alpha+\varepsilon\beta)+\alpha\beta}{\sqrt{3}\,(\alpha\beta-1)},$$

$$\xi_2 = \frac{1+2(\varepsilon\alpha+\varepsilon^2\beta)+\alpha\beta}{\sqrt{3}\,(\alpha\beta-1)}, \quad \xi_0+\xi_1+\xi_2+\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}\,\alpha\beta}{\alpha\beta-1},$$

$$\xi_0+\xi_1+\xi_2-\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\alpha\beta-1}, \quad \xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2 = \frac{2\sqrt{3}\alpha}{\alpha\beta-1},$$

$$\xi_0+\varepsilon^2\xi_1+\varepsilon\xi_2 = \frac{2\sqrt{3}\,\beta}{\alpha\beta-1},$$

$$d\,\xi_i = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{(\varepsilon^{2i}+\beta+\varepsilon^i\beta^2)\;d\alpha+(\varepsilon^i+\alpha+\varepsilon^{2i}\alpha^2)\,d\beta}{(\alpha\beta-1)^2} \quad (i=0,1,2),$$

$$du = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{d\alpha}{\alpha^3-1}+\frac{\beta d\beta}{\beta^3-1}\right), \quad dv = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^3-1}-\frac{d\beta}{\beta^3-1}\right).$$

D'après ces formules, l'équation (109) s'écrit

$$d\tau_1 = \frac{d\alpha}{\alpha(\alpha^3-1)}, \quad d\tau_2 = \frac{\beta^2 d\beta}{\beta^3-1},$$

d'où

$$\tau_1 = \log\frac{(\alpha^3-1)^{1/3}}{\alpha}, \quad \tau_2 = \log\,(\beta^3-1).$$

L'équation (108) donne ensuite

$$(111) \qquad t_1 = \frac{\alpha}{(\alpha^3-1)^{1/3}}\quad a_1 + s\,.\,\frac{9\alpha}{(\alpha^3-1)^{1/3}}\int_\infty^\alpha \frac{dx}{(x^3-1)^{2/3}},$$

$$(112) \qquad t_2 = \frac{1}{(\beta^3-1)^{1/3}}\quad a_2 + s\,.\,\frac{9}{(\beta^3-1)^{1/3}}\int_\infty^\beta \frac{dx}{(x^3-1)^{2/3}},$$

a_1 et a_2 étant constantes. Il convient aussi introduire les variables α et β dans l'équation (107)

$$(113) \qquad t_1 = \frac{6\alpha}{\alpha\beta-1}\left[\frac{2(\alpha+\beta^2)}{\alpha\beta-1}y+\sqrt{3}\,.\,\beta y_1+\sqrt{3}\,.\,y_2\right],$$

$$(114) \qquad t_2 = \frac{6}{\alpha\beta-1}\left[\frac{2(\alpha^2+\beta)}{\alpha\beta-1}y+\sqrt{3}\quad y_1+\sqrt{3}\,.\,\alpha y_2\right].$$

Revenons à la forme cubique W, dont nous formons l'hessien H

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}, & \dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial y_1}, & \dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial y_2} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}.$$

On a

$$\frac{1}{8}H = Ay^3 + Byy_1y_2 + Cy^2y_1 + Dy^2y_2 + Eyy_2^2 -$$
$$- 6(\xi_0^2 + \varepsilon^2\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2^2)(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2)yy_1^2 -$$
$$- 9(\xi_0^2 + \varepsilon\xi_1^2 + \varepsilon^2\xi_2^2)y_1^2y_2 - 9(\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2)y_1y_2^2;$$

je n'aurai pas besoin des coefficients A, B, C, D, E.

D'après un théorème bien connu, on peut déterminer ψ de manière que l'on ait

$$\frac{1}{8}H + \psi W = \left[-3\frac{\partial W}{\partial y} + (\xi_0 + \varepsilon^2\xi_1 + \varepsilon\xi_2)\frac{\partial W}{\partial y_1} + (\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2)\frac{\partial W}{\partial y_2}\right] \cdot \frac{z}{3},$$

z étant une forme linéaire en y, y_1, y_2. En posant $y = 0$ dans l'identité précédente, on trouve $\psi = 9$, d'où vient

(115) $$z = -2(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + 5)y - 3(\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2)y_1 - 3(\xi_0 + \varepsilon^2\xi_1 + \varepsilon\xi_2)y_2.$$

On forme alors

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -(\xi_0 + \varepsilon^2\xi_1 + \varepsilon\xi_2)\left(\frac{z}{3} + 3s\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = -(\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2)\left(\frac{z}{3} + 3s\right).$$

Il s'ensuit

(116) $$z = -9s + be^{-\frac{\omega}{3}}$$

b étant une constante; j'ai posé

$$\omega = \int (\xi_0 + \varepsilon^2\xi_1 + \varepsilon\xi_2)\,du + (\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2)\,dv.$$

Si l'on introduit, ici encore, les variables α et β, on a tout de suite, d'après les formules écrites plus haut

$$d\omega = 3\left[\frac{(\alpha^2 - \beta)\,d\alpha}{(\alpha\beta - 1)(\alpha^3 - 1)} + \frac{(\beta^2 - \alpha)\,d\beta}{(\alpha\beta - 1)(\beta^3 - 1)}\right].$$

L'intégration donne

$$\omega = \log\frac{(\alpha\beta - 1)^3}{(\alpha^3 - 1)(\beta^3 - 1)},$$

ce qui substitué en (116) donne

(117) $$z = b\frac{\sqrt[3]{(\alpha^3 - 1)(\beta^3 - 1)}}{\alpha\beta - 1} - 9s.$$

Si l'on introduit les α et β dans l'équation (115), on a

(118) $$z = \frac{6}{\alpha\beta - 1}\left[-\frac{2(\alpha^2\beta^2 + 1)}{\alpha\beta - 1}y - \sqrt{3}\;\alpha y_1 - \sqrt{3}\,.\,\beta y_2\right].$$

L'élimination de y_1 et y_2 (113), (114) et (118) donne, tenant compte des équations (111), (112), (117), la solution générale du système (103):

$$(119)\quad \begin{aligned} y = -\frac{1}{12(\alpha\beta-1)}\Bigg[a_1\frac{\alpha^2-\beta}{\sqrt[3]{\alpha^3-1}} + a_2\frac{\beta^2-\alpha}{\sqrt[3]{\beta^3-1}} + b\sqrt[3]{(\alpha^3-1)(\beta^3-1)} + \\ + 9s\left(\frac{\alpha^2-\beta}{\sqrt[3]{\alpha^3-1}}\int_\infty^\alpha \frac{dx}{(x^3-1)^{2/3}} + \frac{\beta^2-\alpha}{\sqrt[3]{\beta^3-1}}\int_\infty^\beta \frac{dx}{(x^3-1)^{2/3}} - \alpha\beta + 1\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Les équations paramètriques de la surface L_3 sont donc

$$(120)\quad \begin{aligned} x &= \frac{\alpha^2-\beta}{\sqrt[3]{(\alpha^3-1)^2(\beta^3-1)}}, \\ y &= \frac{\beta^2-\alpha}{\sqrt[3]{(\alpha^3-1)(\beta^3-1)^2}}, \\ z &= x\int_\infty^\alpha \frac{d\lambda}{(\lambda^3-1)^{2/3}} + y\int_\infty^\beta \frac{d\lambda}{(\lambda^3-1)^{2/3}} - \frac{\alpha\beta-1}{\sqrt[3]{(\alpha^3-1)(\beta^3-1)}}.\end{aligned}$$

10. Les surfaces L_1.

Dans le cas qui nous reste, les calculs à faire ne sont plus si simples comme dans les cas précédents. Ainsi, j'emploie une méthode indirecte, qui réussit complètement dans la partie *algébrique* du problème; cependant, les résultats donnés précédemment laissent prévoir que les quadratures à effectuer peuvent s'écrire de manière bien plus simple.

Comme dans le numéro 3, j'emploierai les abréviations

$$(121)\quad x_0 = u+v,\ x_1 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v,\ x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v,\ x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer

$$(122)\quad \varphi = -\frac{1}{3}(\zeta x_0 + \zeta x_1 + \zeta x_2).$$

La forme cubique W est

$$(123)\quad W = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - 8\varphi^3\right)y^3 + y_1^3 + y_2^3 + 6\varphi y y_1 y_2 - 3\frac{\partial\varphi}{\partial v}y^2 y_1 - 3\frac{\partial\varphi}{\partial u}y^2 y_2.$$

Calculons les deux invariants S et T de cette forme; d'après les formules de Salmon, on trouve

$$(124)\quad S = \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - 9\varphi^4 - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$(125)\quad T = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)^2 - 36\varphi^3\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + 216\varphi^6 - 4\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^3 - 4\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^3 + 36\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Si l'on substitue dans le second membre de (124) la valeur (122), on a

$$\begin{aligned}- 9S = (\zeta x_0 + \zeta x_1 + \zeta x_2)(p'x_0 + p'x_1 + p'x_2) + (px_0 + px_1 + px_2)^2 + \\ + (px_0 + \varepsilon px_1 + \varepsilon^2 px_2)(px_0 + \varepsilon^2 px_1 + \varepsilon px_2).\end{aligned}$$

Donnons a x_2 une valeur fixe arbitraire et regardons x_1 comme fonction dè x_0

$$x_1 = - x_0 - x_2\,;$$

le second membre est alors une fonction doublement périodique de x_0 dont les pôles ne peuvent être que

$$x_0 = 0, \quad x_0 = - x_2.$$

Au domaine du point $x_0 = 0$, on a

$$\zeta x_0 = \frac{1}{x_0} - \frac{g_2}{60} x_0^3 - \frac{g_3}{140} x_0^5 +$$

$$p x_0 = \frac{1}{x_0^2} + \frac{g_2}{20} x_0^2 + \frac{g_3}{28} x_0^4 +$$

d'où

$$\zeta x_0 + \zeta x_1 + \zeta x_2 = \frac{1}{x_0} + px_2 \cdot x_0 + \frac{1}{2} p'x_2 \cdot x_0^2 + \left(\frac{1}{6} p''x_2 - \frac{g_2}{60}\right) x_0^3 +$$

$$px_0 + px_1 + px_2 = \frac{1}{x_0^2} + 2px_2 + p'x_2 \quad x_0 + \left(\frac{1}{2} p''x_2 + \frac{g_2}{20}\right) x_0^2 +$$

$$\begin{aligned}&px_0 + \varepsilon^i p x_1 + \varepsilon^{2i} px_2 = \\ &= \frac{1}{x_0^2} - px_2 + \varepsilon^i p'x_2 \quad x_0 + \left(\frac{\varepsilon^i}{2} p''x_2 + \frac{g_2}{20}\right) x_0^2 + \ldots, (i = 1, 2)\end{aligned}$$

$$p'x_0 + p'x_1 + p'x_2 = - \frac{2}{x_0^3} + \left(- p''x_2 + \frac{g_2}{10}\right) x_0 +$$

$$\begin{aligned}&(\zeta x_0 + \zeta x_1 + \zeta x_2)(p'x_0 + p'x_1 + p'x_2) = \\ &= - \frac{2}{x_0^4} - \frac{2px_2}{x_0^2} - \frac{p'x_2}{x_0} + \left(- \frac{4}{3} p''x_2 + \frac{4g_2}{30}\right) +\end{aligned}$$

$$(px_0 + px_1 + px_2)^2 = \frac{1}{x_0^4} + \frac{4px_2}{x_0^2} + \frac{2p'x_2}{x_0} + \left(4p^2x_2 + p''x_2 + \frac{g_2}{10}\right) +$$

$$\begin{aligned}&(px_0 + \varepsilon px_1 + \varepsilon^2 px_2)(px_0 + \varepsilon^2 px_1 + \varepsilon px_2) = \\ &= \frac{1}{x_0^4} - \frac{2px_2}{x_0^2} - \frac{p'x_2}{x_0} + \left(4p^2x_2 - \frac{1}{2} p''x_2 + \frac{g_2}{10}\right) +\end{aligned}$$

et enfin

$$- 9S = \left(5p^2x_2 - \frac{5}{6} p''x_2 + \frac{g_2}{3}\right) + \cdots \equiv \frac{9}{12} g_2 +$$

On voit que la fonction reste finie; à cause de la symétrie, la fonction est de même finie pour $x_0 = - x_2$; S est constante, et on voit que

$$S = - \frac{g_2}{12}. \tag{126}$$

Quant à T, on l'écrira d'abord sous la forme

$$T=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)^2-4\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^3+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^3+27\varphi^6\right]-$$
$$-36\varphi^2\left(\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-9\varphi^4-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)^2-$$
$$-4\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^3+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^3+27\varphi^6\right]+3g_2\varphi^2,$$

c'est ce qui, d'après (122), est égale à

$$T=\frac{1}{9}[(p'x_0+p'x_1+p'x_2)^2-4(p^3x_0+p^3x_1+p^3x_2+6px_0px_1px_2)+$$
$$+3g_2(px_0+px_1+px_2)].$$

On a, dans le domaine de $x_0=0$,

$$(p'x_0+p'x_1+p'x_2)^2=$$
$$=\frac{4}{x_0^6}+\left(4p''x_2-\frac{2g_2}{5}\right)\frac{1}{x_0^2}+\frac{2p'''x_2}{x_0}+\left(\frac{2}{3}p^{IV}x_2-\frac{4g_3}{7}\right)+$$
$$-4(p^3x_0+p^3x_1+p^3x_2+6px_0px_1px_2)=$$
$$=-\frac{4}{x_0^6}-\left(24p^2x_2+\frac{3g_2}{5}\right)\frac{1}{x_0^2}-\frac{24px_2\,.\,p'x_2}{x_0}+$$
$$+\left(-8p^3x_2-12px_2\,.\,p''x_2-\frac{3g_3}{7}\right)+$$
$$3g_2(px_0+px_1+px_2)=\frac{3g_2}{x_0^2}+6g_2xp_2+\ldots,$$

d'où

$$9T=\frac{4(p''x_2-p6^2x_2+\frac{1}{2}g_2)}{x_0^2}+\frac{2(p''x_2-12px_2\,.\,p'x_2)}{x_0}+$$
$$+\left(\frac{2}{3}p^{IV}x_2-8p^3x_2-12px_2\quad p''x_2+6g_2px_2-g_3\right)+$$
$$\equiv-9g_3+$$

On en conclut, comme précédemment,

$$T=-g_3. \tag{127}$$

On savait a priori que la forme W peut être, par une substitution linéaire, réduite a une forme à coeffients constants. Maintenant nous pouvons dire qu'on peut, par la substitution

$$\begin{aligned} y&=y^{(1)}c_1+y^{(2)}c_2+y^{(3)}c_3,\\ y_1&=y_1^{(1)}c_1+y_1^{(2)}c_2+y_1^{(3)}c_3,\\ y_2&=y_2^{(1)}c_1+y_2^{(2)}c_2+y_2^{(3)}c_3,\end{aligned} \tag{128}$$

la réduire à la forme

$$4c_1^3-g_2c_1c_3^2-g_3c_3^3-c_2^2c_3, \tag{129}$$

et, de plus, le déterminant

(130)
$$\Delta = \begin{vmatrix} y^{(1)} & y^{(2)} & y^{(3)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & y_1^{(3)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & y_2^{(3)} \end{vmatrix}$$

est *constant*. Les équations (128) représentant la solution générale du système (22), dans lequel on avait posé $s = 0$, on a, en particulier

(131)
$$y_1^{(i)} = \frac{\partial y^{(i)}}{\partial u}, \; y_2^{(i)} = \frac{\partial y^{(i)}}{\partial v}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Envisageons un plan auxiliaire π et y définissons un système de coordonnées homogènes de droites. Pour des valeurs quelconques de u, v, considérons les trois droites du plan π, dont les coordonnées sont

$$p(x_i) : p'(x_i) : 1. \qquad (i = 0, 1, 2)$$

L'identité

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

montre que les trois droites ont un point commun. En prenant ce point comme image du point (u, v) de la surface L_1, on en obtient une représentation plane, dans laquelle aux *courbes de Darboux* correspondent les tangentes d'une courbe de la troisième classe, qui peut être supposée identique à l'intersection du plan π avec le cône W. On voit aussi immédiatement que les propriétés de cette représentation se conservent, quand on remplace x_i par $mx_i + a_i$, m, a_0, a_1, a_2 étant des constantes liées par la condition

$$a_0 + a_1 + a_2,$$

et alors seulement.

Or la projection de L_1 du point de vue s jouit précisement des propriétés indiquées, seulement, ce sont maintenant les *lignes de Segre* auxquelles correspondent les tangentes de la courbe de la troisième classe. Cela montre que les coordonnées *fixes* de plans des courbes de Segre sont de la forme

$$c_1 : c_2 : c_3 = p(z_i) : p'(z_i) : 1, \qquad (i = 0, 1, 2)$$

où

(132)
$$\begin{aligned} z_0 &= m(x_1 + a_1 - x_2 - a_2) \\ z_1 &= m(x_2 + a_2 - x_0 - a_0) \qquad a_0 + a_1 + a_2 = 0. \\ z_2 &= m(x_0 + a_0 - x_1 - a_1) \end{aligned}$$

m, a_0, a_1, a_2 sont des constantes qu'il est inutile de calculer. Seulement il est important d'observer l'identité

(133)
$$z_0 + z_1 + z_2 = 0.$$

En tenant compte que les coordonnées *mobiles* des trois plans vérifient la relation $y = 0$, la première des équations (128) donne les trois relations

$$p(z_i)\, y^{(1)} + p'(z_i)\, y^{(2)} + y^{(3)} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

se réduisant à deux, qui determinent les rapports

$$y^{(1)} : y^{(2)} : y^{(3)}.$$

On obtient

(134) $$y^{(1)} = -2Ay^{(2)},\quad y^{(3)} = -\frac{1}{3}By^{(2)},$$

où j'ai posé

(135) $$A = \zeta z_0 + \zeta z_1 + \zeta z_2,$$

(136) $$B = p' z_0 + p' z_1 + p' z_2 - 8A^3.$$

En introduisant les valeurs (134) dans le déterminant (130), on trouve

$$\varDelta = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial A}{\partial v} \\ \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial v} \end{vmatrix} (y^{(2)})^3.$$

On a, d'après (135) et (136), en tenant compte des équations (132)*,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial A}{\partial v} \\ \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial v} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} pz_0 + \varepsilon^2 pz_1 + \varepsilon pz_2, & pz_0 + \varepsilon pz_1 + \varepsilon^2 pz_2 \\ p'' z_0 + \varepsilon^2 p'' z_1 + \varepsilon p'' z_2, & p'' z_0 + \varepsilon p'' z_1 + \varepsilon^2 p'' z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6k \begin{Vmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} pz_0 & pz_1 & pz_2 \\ p^2 z_0 & p^2 z_1 & p^2 z_2 \end{Vmatrix} = k_1 D,$$

où j'ai posé

(137) $$D = (pz_1 - pz_2)(pz_2 - pz_0)(pz_0 - pz_1).$$

$\varDelta$ étant constante, on a ainsi

(138) $$y^{(2)} = k_2 D^{-\frac{1}{3}}$$

Nous connaissons donc l'intégrale générale (128) des équation (22) dans lesquelles on a fait $s = 0$, si nous négligeons les valeurs des nombres m, a_0, a_1, a_2; ces valeurs sont sans importance si nous ne voulons qu'obtenir les équations finies d'une surface L_1. Mais il faut intégrer les équations (22) pour s différent de zéro. Pour cela, j'emploierai la variation des constantes, comme j'avais fait dans les cas précédents.

En profitant du fait que le déterminant des équations (128) est constant, on trouve

$$c_3 = 6k_3 D^{-\frac{2}{3}} \left(Q_3 y + \frac{\partial A}{\partial v} y_1 - \frac{\partial A}{\partial u} y_2 \right),$$

$$c_1 + - k_3 D^{-\frac{2}{3}} \left(Q_1 y + \frac{\partial B}{\partial v} y_1 - \frac{\partial B}{\partial u} y_2 \right);$$

---

* Dans ce qui suit, j'indiquerai avec k, k_1, k_2 . . des constantes qu'il est inutile de connaître.

la première équation (128) donne ensuite

$$c_2 = 2k_3 D^{-\frac{2}{3}}\left[Q_2 y + \left(\frac{\partial A}{\partial v}B - \frac{\partial B}{\partial v}A\right)y_1 - \left(\frac{\partial A}{\partial u}B - \frac{\partial B}{\partial u}A\right)y_2\right].$$

On n'a pas besoin des valeurs de Q_1, Q_2, Q_3. Si $y, y_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, y_2 = \frac{\partial y}{\partial v}$ est la solution générale des équations (22), c_1, c_2, c_3 ne sont plus constants; néanmoins, les expressions $\frac{\partial c_i}{\partial u}, \frac{\partial c_i}{\partial v}$, linéaires et homogènes en y, y_1, y_2, s, se réduisent nécessairement à zéro, si l'on fait $s = 0$. On trouve ainsi, sans calculs,

$$\frac{\partial c_1}{\partial u} = k_3 D^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial B}{\partial u}\cdot s, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial v} = -k_3 D^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial B}{\partial v}\, s,$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial u} = -2k_3 D^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial A}{\partial u}B - \frac{\partial B}{\partial u}A\right)s, \quad \frac{\partial c_2}{\partial v} = 2k_3 D^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial A}{\partial v}B - \frac{\partial B}{\partial v}A\right)s,$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial u} = -6k_3 D^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial A}{\partial u}\cdot s, \qquad \frac{\partial c_3}{\partial v} = 6k_3 D^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial A}{\partial v}\, s.$$

Introduisons donc les trois fonctions des trois variables z_0, z_1, z_2, dont deux seules sont indépendentes à cause de l'identité $z_0 + z_1 + z_2 = 0$; soit

$$(139) \quad \omega_1 = \int D^{-\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial z_1} - \frac{\partial B}{\partial z_2}\right)dz_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial z_2} - \frac{\partial B}{\partial z_0}\right)dz_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial z_0} - \frac{\partial B}{\partial z_1}\right)dz_2\right],$$

$$(140) \quad \begin{aligned} \omega_2 = \int D^{-\frac{2}{3}}\Big\{ & B\left[\left(\frac{\partial A}{\partial z_1} - \frac{\partial A}{\partial z_2}\right)dz_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial z_2} - \frac{\partial A}{\partial z_0}\right)dz_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial z_0} - \frac{\partial A}{\partial z_1}\right)dz_2\right] \\ & - A\left[\left(\frac{\partial B}{\partial z_1} - \frac{\partial B}{\partial z_2}\right)dz_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial z_2} - \frac{\partial B}{\partial z_0}\right)dz_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial z_0} - \frac{\partial B}{\partial z_1}\right)dz_2\right]\Big\}, \end{aligned}$$

$$(141) \quad \omega_3 = \int D^{-\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial z_1} - \frac{\partial A}{\partial z_2}\right)dz_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial z_2} - \frac{\partial A}{\partial z_0}\right)dz_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial z_0} - \frac{\partial A}{\partial z_1}\right)dz_2\right],$$

les limites inférieures des intégrales étant fixées arbitrairement. On a alors

$$\begin{aligned} c_1 &= k_4\omega_1 s + b_1, \\ c_2 &= -2k_4\omega_2 s + b_2, \\ c_3 &= -6k_4\omega_3 s + b_3, \end{aligned}$$

b_1, b_2, b_3 étant des constantes arbitraires.

La solution générale du système (22) est donc

$$(142) \qquad y = D^{-\frac{1}{3}}\left[(a_1 A + a_2 B + a_3) + k_5 s\,(A\omega_1 + \omega_2 - B\omega_3)\right],$$

où a_1, a_2, a_3 sont constantes, la surface L_1 peut être représentée au moyen de deux paramètres par les formules

$$(143) \qquad \begin{aligned} x &= A, \\ y &= B, \\ z &= A\omega_1 - B\omega_3 + \omega_2. \end{aligned}$$