Eduard Čech

K diferenciální geometrii prostorových křivek

Rozpravy Československé Akad. Věd - Řada Mat. Přírod. Věd (15) 30 (1921), 6 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500832

K diferenciální geometrii prostorových křivek.

Napsal

Dr. **Eduard Čech.**

(Předloženo dne 28. ledna 1921.)

---

1. Prostorová křivka C buď dána v projektivních souřadnicích rovnicemi

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{x_2}{x_4} &= \frac{p_2}{2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \frac{p_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \frac{p_4}{24}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^4 + \ldots, \\ \frac{x_3}{x_4} &= \frac{q_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \frac{q_4}{24}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^4 + \frac{q_5}{120}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^5 + \ldots \end{aligned}$$

Budeme uvažovati C v okolí bodu O (0, 0, 0, 1), v němž přímka t ($x_2 = x_3 = 0$) jest tečnou a rovina ω ($x_3 = 0$) oskulační rovinou, za předpokladu, že ani t ani ω nejsou stacionární, tedy $p_2 q_3 \neq 0$.

Promítneme-li C do oskulační roviny ω se všech bodů přímky (z_1, z_2, z_3) trsu O, mají všecky tyto průměty v O mezi sebou styk čtvrtého řádu. Společnou oskulační kuželosečku těchto průmětů pro krátkost nazveme *kuželosečkou přidruženou přímce* (z_1, z_2, z_3) *vzhledem k elementu* C. Rovnice průmětu C s bodu (z_1, z_2, z_3, z_4) do ω jest výsledek eliminace x_i z rovnic (1) a rovnic

$$y_1 : y_2 : y_4 = (x_1 z_3 - x_3 z_1) : (x_2 z_3 - x_3 z_2) : (x_4 z_3 - x_3 z_4)$$

a jest tedy

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{y_2}{y_4} &= \frac{p_2}{2}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^2 + \frac{p_3 z_3 - q_3 z_2}{6 z_3}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^3 + \\ &+ \frac{4 p_2 q_3 z_1 - q_4 z_2 + p_4 z_3}{24 z_3}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^4 + \ldots. \end{aligned}$$

V rovnici (2) nevyskytuje se z_4 v koeficientech vypsaných, což naše tvrzení dokazuje. Z (2) vidíme též, že projekce C do ω se všech bodů pevné roviny ϱ svazku t mají styk třetího řádu, a tudíž jakýkoli bod R na t má vzhledem ke všem příslušným kuželosečkám tutéž poláru r.

R, r, ϱ tvoří obecnou trojinu trilinearity, kterou jsem nazval charakteristickou trilinearitou elementu C.[1]) Z rovnice (2) dospějeme snadným počtem k rovnici kuželosečky, přidružené přímce (z_1, z_2, z_3); obdržíme v souřadnicích bodových

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & 9 p_2^4 z_3^2 x_1^2 + 6 p_2^2 z_3 (p_3 z_3 - q_3 z_2) x_1 x_2 - 18 p_2^3 z_3^2 x_2 x_4 \\
& + [3 p_2 z_3 (4 p_2 q_3 z_1 - q_4 z_2 + p_4 z_3) - 4 (p_3 z_3 - q_3 z_2)^2] x_2^2 = 0,
\end{aligned}
$$

a v souřadnicích přímkových

$$
\begin{aligned}
(3') \qquad & 9 p_2^2 z_3^2 u_1^2 + 6 p_2 z_3 (p_3 z_3 - q_3 z_2) u_1 u_4 - 18 p_2^3 z_3^2 u_2 u_4 \\
& + [5 (p_3 z_3 - q_3 z_2)^2 - 3 p_2 z_3 (4 p_2 q_3 z_1 - q_4 z_2 + p_4 z_3)] u_4^2 = 0.
\end{aligned}
$$

2. Vyšetřme krátce souvislost přímek trsu O s kuželosečkami jim přidruženými. Rovnice (3) ukazuje, že přímky, jimž přidružené kuželosečky obsahují pevný bod roviny ω, tvoří kvadratický kužel. Tyto kužele dotýkají se roviny ω podél t, a mají zde styk druhého řádu: vyjádříme-li ze (3) $\frac{z_3}{z_1}$ jako potenční řadu v $\frac{z_2}{z_1}$, máme

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{q_3}{3 p_2^2} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \ldots$$

Společná křivost těchto kuželů jest rovna $+\frac{2}{3}$ křivosti plochy tečen křivky C.[2]) Podobně ukazuje rovnice (3′), že přímky, jimž přidružené kuželosečky dotýkají se pevné přímky roviny ω, tvoří zase kvadratický kužel. I tyto kužele dotýkají se ω podél t a mají zde společnou křivost, rovnou $+\frac{5}{6}$ křivosti plochy tečen, neboť nyní nalezneme

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{5 q_3}{12 p_2^2} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \ldots .$$

Tyto výsledky stačí, abychom konstruktivně řešili úlohu: Známe kuželosečky C_1, C_2, přidružené resp. přímkám p_1, p_2; jest nalézti kuželosečku C_3 přidruženou přímce p_3.

Trojiny charakteristické trilinearity tvoří: 1. libovolný bod na t, jeho polára vzhledem k C_1 a rovina $(t\, p_1)$; 2. libovolný bod na t, jeho polára vzhledem k C_2 a rovina $(t\, p_2)$; 3. libovolný bod na t, přímka t a rovina ω; 3′. bod O, libovolná přímka svazku (O, ω) a rovina ω. Tím jest tato tri-

[1]) Viz moji práci „O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivného prostoru", (jež vyjde v „Čas. p. p. m. a f.)" kde zejména vyložena souvislost této trilinearity s trilinearitou korelativní. Zde vytknu pouze jeden důsledek vět l. c. odvozených, který nám v dalším bude užitečným a jenž snadno se verifikuje: Zvolme na t kdekoli bod S. Kterýkoli kužel, pro nějž každá přímka svazku (O, ω) spolu se svou polární rovinou a s bodem S tvoří trojinu charak. tril. elementu C, má podél t křivost rovnou jedné třetině křivosti plochy tečen čáry C. Při tom rozumí se křivostí rozvinutelné plochy (i kužele) limita poměru úhlu dvou tečných rovin k úhlu příslušných vytvořujících přímek.

[2]) V. cit. práci.

linearita určena. Rovina (p_1, p_2) protne ω v přímce p_0. Nechť rovina τ svazku t spolu s p_0 dělí $p_1\, p_2$ harmonicky a sestrojme bod S, aby S, p_0, τ byla jedna trojina charak. trilianerity. Dále sestrojme kužel K_0 tak, aby bod S, kterákoli přímka svazku (O, ω) a polární rovina její vzhledem ke K_0 tvořily trojinu charak trilinearity, a aby obsahoval přímku p_1 a tedy i p_2. Kužel K_0 a dvojice rovin $[(p_1\, p_2), \omega] \equiv \delta_1$ stanoví svazek kuželů, jemuž náleží i dvojice rovin $[(p_1\, t), (p_2\, t)] \equiv \delta_2$. V tomto svazku stanovme kužele K', K'' tak, aby bylo

$$(4) \qquad (\delta_1\, \delta_2\, K_0\, K') = \tfrac{1}{2}, \quad (\delta_1\, \delta_2\, K_0\, K'') = \tfrac{2}{5}.$$

Rovina $(t\, p_3)$ protne K' mimo v t ještě v přímce p' a K'' v p''. Kuželosečky C_1, C_2 mají v O styk druhého řádu; protínají se tedy ještě v jednom bodě M a mají mimo t další společnou tečnu m. Sestrojme nyní projektivitu π mezi řadou bodů na t a svazkem přímek (O, ω) takovou, aby každý pár prvků z π spolu s rovinou $(t\, p_3)$ tvořil trojinu charakteristické trilinearity a uvažujme v ω svazek Σ kuželoseček, pro něž každý pár prvků z π jest pól a polára. Ve svazku Σ najděme kuželosečku C' obsahující M, a kuželosečku C'', dotýkající se m. Konečně sestrojme v Σ, jemuž náleží i kuželosečka ε rozpadající se ve dvojnásobnou t, kuželosečku C_3 tak, aby

$$(\varepsilon\, C'\, C''\, C_3) = (t\, p'\, p''\, p_3).$$

Kuželosečkou hledanou jest potom C_3. Dle věty uvedené v odst. 1., pozn., jest totiž křivost K_0 podél t rovna $+\frac{1}{3}$ křivosti plochy tečen čáry C, a tudíž dle relací (4) křivost K', K'' rovna resp. $+\frac{2}{3}$, $+\frac{5}{6}$ křivosti této rozvinutelné plochy. V důsledku toho jest K' (K'') místem přímek, jimž přidružené kuželosečky obsahují M (dotýkají se m); rovina $(p_3\, t)$ pak místem přímek, jimž přidružené kuželoselosečky náležejí svazku Σ. Přímkám p', p'' jsou tedy přidruženy resp. kuželosečky C', C'' a přímce p_3 C_3, jak bylo tvrzeno.

Poznamenejme ještě mimochodem zajímavou okolnost, že vztah mezi přímkami trsu O a kuželosečkami jim přidruž. definuje *jednojednoznačnou* dotykovou transformaci mezi trsem O a rovinou ω.

3. Z rovnic (1) křivky C vypočteme nyní souřadnice jejích tečen. Tyto jsou úměrny determinantům matice

$$\left\| \begin{array}{l} t, \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_3}{6} t^3 + \frac{p_4}{24} t^4 + \ldots, \frac{q_3}{6} t^3 + \frac{q_4}{24} t^4 + \frac{q_5}{120} t^5 + \ldots \\ 1, p_2 t + \frac{p_3}{2} t^2 + \frac{p_4}{6} t^3 + \ldots, \frac{q_3}{2} t^2 + \frac{q_4}{6} t^3 + \frac{q_5}{24} t^4 + \ldots \end{array} \right\|,$$

píšeme-li pro pohodlí $\frac{x_1}{x_4} = t$. Jsou tedy rovnice C v přímkových souřadnicích:

1*

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\varrho\, p_{12} &= -\frac{p_2}{2}t^2 - \frac{p_3}{3}t^3 - \frac{p_4}{8}t^4 - \dots,\\
\varrho\, p_{23} &= -\frac{p_2 q_3}{12}t^4 - \frac{p_2 q_4}{24}t^5 - \frac{9\,p_2 q_5 + 5\,(p_3 q_4 - p_4 q_3)}{720}t^6 + \dots,\\
\varrho\, p_{31} &= \frac{q_3}{3}t^3 + \frac{q_4}{8}t^4 + \frac{q_5}{30}t^5 + \dots,\\
\varrho\, p_{14} &= 1,\\
\varrho\, p_{24} &= p_2\, t + \frac{p_3}{2}t^2 + \frac{p_4}{6}t^3 + \dots,\\
\varrho\, p_{34} &= \frac{q_3}{2}t^2 + \frac{q_4}{6}t^3 + \frac{q_5}{24}t^4 + \dots.
\end{aligned}
$$

Kombinujeme-li tyto rovnice lineárně tak, aby pravá strana počínala teprve pátou mocninou t, a anulujeme-li pak levou stranu, obdržíme rovnici oskulačního lineárního komplexu $\boldsymbol{\Omega}$ křivky C:

$$
(6)\qquad a\, p_{12} + b\, p_{23} + c\, p_{31} + d\, p_{34} = 0,
$$

kde

$$
(6')\qquad
\begin{aligned}
a &= -4\, p_2\, q_3^3,\; b = 3\, q_4\, (p_2\, q_4 - 2\, p_3\, q_3) - 2\, q_3\, (p_2\, q_5 - 3\, p_4\, q_3),\\
c &= 2\, p_2\, q_3\, (p_2\, q_4 - 2\, p_3\, q_3),\; d = -4\, p_2^2\, q_3^2.
\end{aligned}
$$

Invariant komplexu $\boldsymbol{\Omega}$ jest $a\,d = 16\,p_2^3\,q_3^5$; nemůže tedy za našich předpokladů $\boldsymbol{\Omega}$ býti speciální. Polární rovina bodu (x_1, x_2, x_3, x_4) vzhledem k $\boldsymbol{\Omega}$ jest

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\varrho\, u_1 &= a\, x_2 - c\, x_3,\\
\varrho\, u_2 &= -a\, x_1 + b\, x_3,\\
\varrho\, u_3 &= c\, x_1 - b\, x_2 + d\, x_4,\\
\varrho\, u_4 &= -d\, x_3.
\end{aligned}
$$

Buď $\boldsymbol{\Gamma}$ plocha tečen čáry C. Jsou-li (y_1, y_2, y_4) souřadnice proměnného bodu průseku $\boldsymbol{\Gamma}$ s ω, jest

$$
y_1 : y_2 : y_4 = p_{31} : -p_{23} : p_{34},
$$

kde na pravo jest dosaditi z (5); bude tudíž

$$
\frac{y_1}{y_4} = \frac{2}{3}t + \frac{q_4}{36\,q_3}t^2 + \frac{6\,q_3 q_5 - 5\,q_4^2}{540\,q_3^2}t^3 + \dots
$$

$$
\frac{y_2}{y_4} = \frac{p_2}{6}t^2 + \frac{p_2\, q_4}{36\,q_3}t^3 + \frac{12\,p_2 q_3 q_5 + 15\,q_3\,(p_3 q_4 - p_4 q_3) - 10\,p_2 q_4^2}{1080\,q_3^2}t^4 + \dots
$$

a vyloučíme-li

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\frac{y_2}{y_4} &= \frac{3\,p_2}{8}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^2 + \frac{3\,p_2\, q_4}{64\,q_3}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^3 +\\
&+ \frac{3\,p_2\,(96\,q_3\, q_5 - 115\,q_4^2) + 720\,q_3\,(p_3\, q_4 - p_4\, q_3)}{10240\,q_3^2}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^4 + \dots.
\end{aligned}
$$

Oskulační kuželosečku C_2 průseku Γ s ω nazveme s Wilczynskim[1]) *oskulační kuželosečkou křivky* C v bodě O. Z rovnice (8) vypočteme snadno rovnici C_2; obdržíme v souřadnicích bodových

$$(9)\quad \begin{aligned} &20\, p_2^2\, q_3 (3\, p_2\, q_3\, x_1^2 + q_4\, x_1\, x_2 - 8\, q_3\, x_2\, x_4) \\ &+ [p_2 (32\, q_3\, q_5 - 45\, q_4^2) + 80\, q_3 (p_3\, q_4 - p_4\, q_3)]\, x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

a v souřadnicích přímkových

$$(9')\quad \begin{aligned} &20\, p_2\, q_3 (4\, q_3\, u_1^2 + q_4\, u_1\, u_4 - 6\, p_2\, q_3\, u_2\, u_4) \\ &- [p_2 (24\, q_3\, q_5 - 35\, q_4^2) + 60\, q_3 (p_3\, q_4 - p_4\, q_3)]\, u_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Korelativně definujeme jako *oskulační kužel křivky* C oskulační kužel druhého stupně Γ_2 kužele promítajícího C s O. Rovnici Γ_2 možno odvoditi stejnou cestou, jako jsme učinili s C_2; jednodušeji však k ní dospějeme, užijeme-li okolnosti bez počtu patrné, že Γ_2 jest polární k C_2 vzhledem k Ω. Obdržíme takto z (9') a (7) rovnici Γ_2 v souřadnicích bodových:

$$(10)\quad \begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3) \equiv{} &20\, q_3^2 [4\, q_3^2\, x_2^2 + (3\, p_2\, q_4 - 8\, p_3\, q_3)\, x_2\, x_3 - 6\, p_2^2\, q_3\, x_1 x_3] \\ &+ [9\, p_2^2 (4\, q_3\, q_5 - 5\, q_4^2) + 60\, p_2\, q_3 (p_3\, q_4 - 2\, p_4\, q_3) + 80\, p_3^2\, q_3^2]\, x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

4. Bodem O veďme libovolnou přímku (z_1, z_2, z_3). Kuželosečka $C_2^{(z)}$ přidružená této přímce vzhledem k elementu C jest dána rovnicí (3). Křivky $C_2^{(z)}$ a C_2 dotýkají se v O a protínají se tudíž v dalších dvou bodech; abychom obdrželi rovnici spojnice těchto dvou průsečíků, násobíme (3) výrazem $20 q_3^2$, (9) výrazem $-3\, p_2\, z_3^2$, sečteme a dělíme x_2:

$$(11)\quad \begin{aligned} P_1 \equiv{} &60\, p_2^2\, q_3\, z_3 \{[(2\, p_3\, q_3 - p_2\, q_4)\, z_3 - 2\, q_3^2\, z_2]\, x_1 + 2\, p_2\, q_3\, z_3\, x_4\} \\ &+ \{20\, q_3^2 (8\, p_3\, q_3 - 3\, p_2\, q_4)\, z_2\, z_3 + 240\, p_2^2\, q_3^3\, z_1\, z_3 - 80\, q_3^4\, z_2^2 \\ &+ [3\, p_2^2 (45\, q_4^2 - 32\, q_3\, q_5) - 60\, p_2\, q_3 (4\, p_3\, q_4 - 5\, p_4\, q_3) - \\ &- 80\, p_3^2\, q_3^2]\, z_3^2\}\, x_2 = 0. \end{aligned}$$

Rovnice reciproké poláry přímky (z_1, z_2, z_3) vzhledem k Ω jest

$$(12)\quad \begin{aligned} P_2 \equiv{} &2\, p_2\, q_3 \{[(2\, p_3\, q_3 - p_2\, q_4)\, z_3 - 2\, q_3^2\, z_2]\, x_1 + 2\, p_2\, q_3\, z_3\, x_4\} \\ &+ \{4\, p_2\, q_3^3\, z_1 + [3\, q_4 (p_2\, q_4 - 2\, p_3\, q_3) - 2\, q_3 (p_2\, q_5 - 3\, p_4\, q_3)]\, z_3\}\, x_2 = 0. \end{aligned}$$

Průsečík M přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ jest na t; jeho rovnice jest

$$(13)\quad 2\, p_2\, q_3\, z_3\, u_1 - [(2\, p_3\, q_3 - p_2\, q_4)\, z_3 - 2\, q_3^2\, z_2]\, u_4 = 0.$$

Souřadnice tečen vedených s M k C_2 obdržíme řešením rovnic (9') a (13). Jedna z nich je t; jako rovnici druhé nalezneme

$$(14)\quad \begin{aligned} P_3 \equiv{} &60\, p_2^2\, q_3\, z_3 \{[(2\, p_3\, q_3 - p_2\, q_4)\, z_3 - 2\, q_3^2\, z_2]\, x_1 + 2\, p_2\, q_3\, z_3\, x_4\} \\ &+ \{20\, q_3^2 [4\, q_3^2\, z_2^2 + (3\, p_2\, q_4 - 8\, p_3\, q_3)\, z_2\, z_3] \\ &+ [3\, p_2^2 (15\, q_4^2 - 8\, q_3\, q_5) - 60\, p_2\, q_3 (2\, p_3\, q_4 - p_4\, q_3) + \\ &+ 80\, p_3^2\, q_3^2]\, z_3^2\}\, x_2 = 0. \end{aligned}$$

[1]) Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, str. 250.

Podobně nalezneme rovnici druhé tečny s M k $C_2^{(z)}$:

$$
\begin{aligned}
& P_4 \equiv 36\, p_2^2\, q_3\, z_3\, \{[(2\, p_3\, q_3 - p_2\, q_4)\, z_3 - 2\, q_3^2\, z_2]\, x_1 + 2\, p_2\, q_3\, z_3\, x_4\} \\
(15) \quad & + \{20\, q_3^2\, [(3\, p_2\, q_4 - 8\, p_3\, q_3)\, z_2\, z_3 + 4\, q_3^2\, z_2^2] - 48\, p_2^2\, q_3^3\, z_1\, z_3 \\
& + [9\, p_2^2\, q_4^2 - 12\, p_2\, q_3\, (4\, p_3\, q_4 + p_4\, q_3) + 80\, p_3^2\, q_3^2]\, z_3^2\}\, x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Srovnáním levých stran rovnic (11), (12), (14), (15) obdržíme, přihlížejíce k (10), identity

$$
\begin{aligned}
P_1 - P_3 &= -2\, G\, (z_1, z_2, z_3)\, x_2, \\
P_1 + P_3 &= 60\, p_2\, z_3\, P_2, \\
P_1 - 4\, P_3 &= -5\, P_4.
\end{aligned}
$$

Takto jsme vedeni k následujícímu výsledku: Bodem O prostorové křivky C veďme libovolnou přímku z (mimo oskulační rovinu ω čáry C v O) a sestrojme kuželosečku $C_2^{(z)}$ přidruženou přímce z vzhledem k elementu C a oskulační kuželosečku C_2 křivky C v O. Tyto dvě kuželosečky mají v O styk přesně prvého řádu a protínají se tedy ve dvou (různých nebo splývajících) dalších bodech, jichž spojnice buď u_1. Dále buď u_2 reciproká polára z vzhledem k oskul. lin. komplexu Ω křivky C v O. — Tehdy a jen tehdy, je-li z na oskulačním kuželi Γ_2 čáry C v O, splynou u_1 a u_2 v jedinou přímku. Oba od O různé průsečíky C_2 a $C_2^{(z)}$ splynou pak (a jen pak) v jediný, v němž jest $u_1 \equiv u_2$ společnou tečnou.[1]) Není-li však z na Γ_2, leží průsečík M přímek u_1 a u_2 na tečně t křivky C v O. Veďme bodem M druhé tečny u_3, u_4 resp. ke kuželosečkám C_2 a $C_2^{(z)}$. Pak platí

$$(t\, u_2\, u_1\, u_3) = -1, \quad (t\, u_4\, u_1\, u_3) = \tfrac{1}{4}.$$

Stačí poznamenati, že křivost kuželoseček $C_2^{(z)}$ v O rovná se křivosti C (a jest tedy stálá), kdežto křivost C_2 v O rovná se třem čtvrtinám křivosti C, abychom seznali, že výsledek odvozený obsahuje postačující základ příslušné konstruktivní teorie.[2])

---

[1]) Tento speciální výsledek dokáže se velmi snadno synteticky, nahradíme-li C oskulační křivkou kubickou.

[2]) V této souvislosti jest upozorniti ještě na jednu větu mé cit. práce: Buď P libovolný bod na t, p polára P vzhledem k C_2, a π polární rovina p vzhledem ke Γ_2. Pak svazek přímek (P, π) náleží oskul. lin. kongruenci (a tedy i oskul. lin. komplexu) křivky C v O. P, p, π tvoří, mimochodem řečeno, trojinu charakt. trilinearity elementu C.