Vojtěch Jarník

Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre

Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau, Berlin 1968, pp. 139--156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500785

V. Jarník in Praha

BEMERKUNGEN ZU LANDAUSCHEN METHODEN IN DER GITTERPUNKTLEHRE

§ 1. Einleitung

Im folgenden sei stets

$$Q(u) = Q(u_1, \ldots, u_r) = \sum_{i,k=1}^{r} \alpha_{ik} u_i u_k \quad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$$

eine positiv-definite quadratische Form in r Veränderlichen mit der Determinante D (die Buchstaben r, Q, α_{ik}, D behalten immer diese Bedeutung). Für $x > 0$ sei $A(x) = A(x; Q) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1$ die Anzahl der Gitterpunkte (d. h. der Punkte $(m) = (m_1, \ldots, m_r)$ mit ganzen m_i) im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$; das Volumen dieses Ellipsoids ist $V(x) = \pi^{r/2} x^{r/2} D^{-(1/2)} / \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)$, und $P(x) = A(x) - V(x)$ ist der „Gitterrest", dessen Verhalten für $x \to +\infty$ Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen ist. Man setze noch für $\varrho > 0$

$$\left.\begin{aligned}
&A_0(x) = A(x), \quad A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x A(y)\,(x-y)^{\varrho-1}\,dy,\\
&V_0(x) = V(x),\\
&V_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x V(y)\,(x-y)^{\varrho-1}\,dy = \pi^{r/2} x^{r/2+\varrho} D^{-(1/2)} / \Gamma\left(\frac{r}{2} + \varrho + 1\right),\\
&P_0(x) = P(x), \quad P_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x P(y)\,(x-y)^{\varrho-1}\,dy,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

so daß

$$P_\varrho(x) = A_\varrho(x) - V_\varrho(x) \quad \text{für} \quad \varrho \geqq 0 \tag{2}$$

gilt. Für $\varrho > 0$ ist nach (1)

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x \sum_{Q(m) \leqq y} (x-y)^{\varrho-1}\,dy = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \sum_{Q(m) \leqq x} \int_{Q(m)}^x (x-y)^{\varrho-1}\,dy,$$

d. h.

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{Q(m) \leqq x} (x - Q(m))^\varrho, \tag{3}$$

und dies gilt offenbar auch für $\varrho = 0$. Daraus folgt für $\varrho \geqq 0$

$$\int_0^x A_\varrho(y)\, dy = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \int_0^x \sum_{Q(m) \leqq y} (y - Q(m))^\varrho\, dy = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 2)} \sum_{Q(m) \leqq x} (x - Q(m))^{\varrho + 1},$$

d. h.

$$A_{\varrho+1}(x) = \int_0^x A_\varrho(y)\, dy \quad \text{für} \quad \varrho \geqq 0. \tag{4}$$

Dieselbe Formel gilt offenbar für V_ϱ und daher wegen (2) auch für P_ϱ. Für ganze $\varrho > 0$ kann man also A_ϱ auch durch (4) definieren; wir werden aber im folgenden alle reellen $\varrho \geqq 0$ zulassen.

Als ich im Herbst 1923 nach Göttingen kam, um drei Semester lang unter Leitung von Edmund Landau zu arbeiten, endete die etwa zwölfjährige Periode, während der sich Landau intensiv mit Gitterpunktproblemen beschäftigte; zugleich erreichten zu jener Zeit seine diesbezüglichen Methoden ihren Höhepunkt in Wirkungskraft und Einfachheit. Die vorliegende Note schließt sich sehr eng an die im Jahre 1924 entstandenen Landauschen Arbeiten [4] bis [7] an; es ist aber vielleicht gerade bei dieser Gelegenheit nicht unangemessen, sich wieder einmal die Vollkommenheit der Landauschen Methoden zu vergegenwärtigen.

Um das Ziel dieser Note zu erläutern, wähle ich das Kreisproblem, d. h. $r = 2$, $Q(u) = u_1^2 + u_2^2$. Die Funktion $P(x)$ $\left(\text{genauer gesagt } \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}(P(x + h) + P(x - h))\right)$ läßt sich mit Hilfe Besselscher Funktionen durch eine Reihe darstellen, die sich aber wegen „schlechter" Konvergenz zur Abschätzung von P nicht eignet. Dagegen sind die analogen Reihenentwicklungen von $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... für $x > 0$ absolut und gleichmäßig konvergent und lassen bequeme Abschätzungen zu. Daher läßt sich das O-Ω-Problem für diese Funktionen vollständig lösen; es ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{1/4 + \varrho/2}), \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{1/4 + \varrho/2}) \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, \dots. \tag{5}$$

Durch geeignete Differenzenbildung erhält man — von P_1 ausgehend — auch Auskunft über $P = P_0$:

$$P(x) = O(x^{1/3}), \quad P(x) = \Omega(x^{1/4}). \tag{6}$$

Mit Hilfe von scharfsinnigen und methodisch sehr wichtigen Methoden ist es gelungen, (6) zu verschärfen: in der O-Formel kann man $\frac{1}{3}$ durch eine kleinere Zahl ersetzen, und die Ω-Formel kann man z. B. zu $P(x) = \Omega(x^{1/4} \log^{1/4} x)$ verschärfen.

Man kennt aber nicht einmal den „wahren Exponenten“, d. h. die untere Grenze der α mit $P(x) = O(x^\alpha)$.

Analoges gilt für $r = 3$, und auch für größere r findet man, daß die P_ϱ für große ϱ (nämlich für $\varrho > r/2 - \frac{1}{2}$) leicht behandelt werden können. Man könnte also vermuten, daß die P_ϱ um so leichter zu handhaben sind, je größer ϱ ist; z. B. wenn man für eine Form Q den wahren Exponenten für $P = P_0$ kennt, daß man dann um so leichter den wahren Exponenten für P_ϱ mit $\varrho > 0$ bestimmen kann. Aber es sieht anders aus, mindestens für ganze α_{ik}:

Satz 1. *Es seien die α_{ik} ganz, $\varrho \geqq 0$. Dann gelten für $P_\varrho(x)$ folgende Abschätzungen:*

$$O(x^{r/2-1}), \quad \Omega(x^{r/2-1}) \quad \textit{für} \quad \varrho < \frac{r}{2} - 2, \tag{7}$$

$$O(x^{r/2-1}\log x), \quad \Omega(x^{r/2-1}) \quad \textit{für} \quad \varrho = \frac{r}{2} - 2, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &O(\operatorname{Min}(x^{\varrho+r/2-r/(r+1-2\varrho)}, x^{\varrho/2+r/4})), \\ &\Omega(\operatorname{Max}(x^{\varrho/2+(r-1)/4}, x^{r/2-1})) \quad \textit{für} \quad \frac{r}{2} - 2 < \varrho < \frac{r}{2} - \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$O(x^{\varrho/2+(r-1)/4}\log x), \quad \Omega(x^{\varrho/2+(r-1)/4}) \quad \textit{für} \quad \varrho = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$O(x^{\varrho/2+(r-1)/4}), \quad \Omega(x^{\varrho/2+(r-1)/4}) \quad \textit{für} \quad \varrho > \frac{r}{2} - \frac{1}{2}, \tag{11}$$

mit der Ausnahme, daß (8) *für $r = 4$, $\varrho = r/2 - 2 = 0$ durch*

$$O(x\log^2 x), \quad \Omega(x) \quad \textit{für} \quad r = 4, \varrho = 0 \tag{12}$$

zu ersetzen ist.

Ich habe schon bemerkt, daß für $\varrho = 0$ und $r = 2, 3$ schärfere Resultate als (9) bekannt sind. Dasselbe gilt im Falle $\varrho = 0$, $r = 4$: Man kann in (12) $\log^2 x$ durch $\log x$, ja durch eine noch niedrigere Potenz von $\log x$ ersetzen, während andererseits die Abschätzung $O(x)$ z. B. für die vierdimensionale Kugel falsch ist.

Man analysiere ein wenig den Sinn des Satzes 1. Für $\varrho \geqq r/2 - \frac{1}{2}$ gibt Satz 1 den wahren Exponenten von P_ϱ an (und für $\varrho > r/2 - \frac{1}{2}$ sogar die vollständige Lösung des O-Ω-Problems). Analoges gilt im Intervall $0 \leqq \varrho \leqq r/2 - 2$, das für $r = 4$ auf den Punkt $\varrho = 0$ zusammenschrumpft und für $r < 4$ überhaupt wegfällt. Für $r/2 - 2 < \varrho < r/2 - \frac{1}{2}$ (und $\varrho \geqq 0$) löst unser Satz die Frage nach dem wahren Exponenten nicht; der Leser wird sehen, daß dieses Problem ebenso schwierig wie das Kreisproblem zu sein scheint. Man könnte analog zu den für $\varrho = 0$, $r = 2, 3, 4$

bekannten Verschärfungen versuchen, (8), (9), (10) zu verschärfen; ich gehe aber nicht darauf ein.

Man betrachte noch die Exponenten in (9). Die beiden Ω-Exponenten sind einander gleich für $\varrho = r/2 - \frac{3}{4}$; für größere (kleinere) ϱ ist der erste (zweite) größer, d. h. schärfer. Dabei kommen Werte $\varrho < r/2 - \frac{3}{4}$ nur für $r > 3$ in Betracht. Analog ist von den beiden O-Exponenten der erste schärfer (d. h. kleiner) als der zweite genau dann, wenn

$$(2\varrho)^2 - 2\varrho - r(r-3) > 0 \tag{13}$$

gilt. Ist $r = 2$, so gilt (13) für alle ϱ; für $r > 2$ hat aber die linke Seite von (13) eine positive Nullstelle ϱ_0 mit $r/2 - 2 < \varrho_0 < r/2 - \frac{1}{2}$. Daher ist der erste (zweite) Exponent schärfer als der andere, wenn $\varrho > \varrho_0$ ($\varrho < \varrho_0$) ist. Eine Verschärfung der Ω-Abschätzung für $r/2 - \frac{3}{4} \leqq \varrho \leqq r/2 - \frac{1}{2}$ ($\varrho \geqq 0$) im Falle der r-dimensionalen Kugel findet man in [13].

§ 2. Anwendung der Besselschen Funktionen

In diesem Paragraphen sind alle Zahlen reell. Wir brauchen eine Identität (Satz 2) mit Besselschen Funktionen

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k (k!\,\Gamma(\nu+k+1))^{-1} \tag{14}$$

(wir werden sie nur für $x > 0$ und reelles ν brauchen). Diese Identität wurde von Landau in [2], [3] (oder [1], S. 11–29 und S. 258–264) auf komplexem Wege bewiesen.[1]) In [6] (oder [1], S. 112–147) hat Landau zur Herleitung derartiger Identitäten eine einfache Methode im reellen Gebiet entwickelt und auf Gitterpunktprobleme in der Ebene angewandt. Ich gebe hier einen Beweis im Reellen, der die Landausche Methode aus [6] imitiert.

Bekanntlich ist für $x \to +\infty$

$$J_\nu(x) = 2^{1/2}\pi^{-1/2}x^{-1/2}\cos\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O(x^{-3/2}). \tag{15}$$

Durch gliedweises Differenzieren bekommt man leicht für $x > 0$, $A > 0$

$$\frac{d}{dx}(A^{-\nu}x^{\nu/2}J_\nu(Ax^{1/2})) = \frac{1}{2}A^{-(\nu-1)}x^{(\nu-1)/2}J_{\nu-1}(Ax^{1/2}). \tag{16}$$

[1]) Landau setzt ϱ ganz voraus, das ist aber unerheblich.

Nach Liouville gilt weiter: Es sei

$$A = \int_0^1 \varphi(u)\, u^{p_1+\cdots+p_r-1}\, du \tag{17}$$

konvergent, $p_i > 0$. Der Bereich M sei durch $x_1 > 0, \ldots, x_r > 0$, $x_1 + \cdots + x_r < 1$ gegeben. Dann ist

$$\int \underset{M}{\cdots} \int \varphi(x_1 + \cdots + x_r)\, x_1^{p_1-1} \cdots x_r^{p_r-1}\, dx_1 \cdots dx_r = \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_r)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_r)} A. \tag{18}$$

Hilfssatz 1. *Es sei* $A > 0$, $B > 0$. *Die Funktion* $f(u_1, \ldots, u_r)$ *habe folgende Eigenschaften:*

1. f *ist stetig im r-dimensionalen Raum* R^r.
2. $f(u_1, \ldots, u_r) = 0$ *für* Max $(|u_1|, \ldots, |u_r|) \geqq A$.
3. *Für jedes* $i\,(i = 1, \ldots, r)$ *und jede Wahl von* $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r$ *ist die Schwankung der (als Funktion von* u_i *betrachteten) Funktion* $f(u_1, \ldots, u_r)$ *höchstens gleich* B.

Dann ist

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r=-\infty}^{+\infty} f(m_1, \ldots, m_r) = \sum_{a_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{a_r=-\infty}^{+\infty} \int \underset{R^r}{\cdots} \int f(u_1, \ldots, u_r) \times \prod_{j=1}^{r} \cos(2\pi a_j u_j)\, du_1 \cdots du_r. \tag{19}$$

Bemerkung. Man beachte, daß es genügt, links über $|m_i| < A$ zu summieren. Rechts ist es wesentlich, daß es sich um eine *iterierte* Reihe handelt.

Beweis. Der Fall $r = 1$ ist wohlbekannt. Induktion von $r - 1$ auf r: Man setze

$$f_1(u_2, \ldots, u_r) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} f(m_1, u_2, \ldots, u_r), \tag{20}$$

also

$$f_1(u_2, \ldots, u_r) = \sum_{a_1=-\infty}^{+\infty} F_{a_1}(u_2, \ldots, u_r), \tag{21}$$

wobei

$$F_{a_1}(u_2, \ldots, u_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, \ldots, u_r) \cos 2\pi a_1 u_1\, du_1 \tag{22}$$

ist. Nun hat F_{a_1} offenbar die Eigenschaften 1, 2, 3 mit $r - 1$, A, $2AB$ statt r, A, B. Also ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{m_2,\dots,m_r=-\infty}^{+\infty} F_{a_1}(m_2,\dots,m_r) = \sum_{a_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{a_r=-\infty}^{+\infty} \int_{R^{r-1}} \cdots \int F_{a_1}(u_2,\dots,u_r) \times \prod_{j=2}^{r} \cos(2\pi a_j u_j)\, du_2 \cdots du_r. \tag{23}$$

Daher ist nach (20), (21)

$$\sum_{m_1,\dots,m_r=-\infty}^{+\infty} f(m_1,\dots,m_r) = \sum_{\mathrm{Max}(|m_2|,\dots,|m_r|)<A} f_1(m_2,\dots,m_r)$$

$$= \sum_{\mathrm{Max}(|m_2|,\dots,|m_r|)<A} \sum_{a_1=-\infty}^{+\infty} F_{a_1}(m_2,\dots,m_r) = \sum_{a_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2,\dots,m_r=-\infty}^{+\infty} F_{a_1}(m_2,\dots,m_r);$$

daraus und aus (23), (22) folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Für* $\varrho > 0$, $x > 0$ *ist*

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \sum_{a_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{a_r=-\infty}^{+\infty} \int_{Q(u)\leq x} \cdots \int (x - Q(u))^\varrho \prod_{j=1}^{r} \cos(2\pi a_j u_j)\, du_1 \cdots du_r$$

$$= \sum_{a_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{a_r=-\infty}^{+\infty} 2^{-r} \sum_{\pm} K(\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_r), \tag{24}$$

wobei

$$K(h_1,\dots,h_r) = \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_{Q(u)\leq x} \cdots \int (x - Q(u))^\varrho \cos(2\pi(h_1u_1 + \cdots + h_ru_r))\, du_1 \cdots du_r \tag{25}$$

ist und $\sum_{\pm}$ *über die* 2^r *Kombinationen der Vorzeichen* $\pm$ *erstreckt wird (auch wenn einige* $a_j = 0$ *sind).*

Beweis. Man wende Hilfssatz 1 auf die Funktion $(\mathrm{Max}(x - Q(u), 0))^\varrho$ an und beachte, daß $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_r = 2^{-r} \sum_{\pm} \cos(\pm\alpha_1 \pm \cdots \pm \alpha_r)$ ist (dies folgt sofort durch Induktion nach r).

Wir berechnen jetzt $K(h_1,\dots,h_r)$. Es sei (α) die Matrix der Koeffizienten α_{ik} von $Q(u)$. Durch eine Substitution $u_i = \sum_k \gamma_{ik} v_k$ mit der regulären Matrix (γ) geht $Q(u)$ in eine positiv-definite Form $Q'(v)$ mit der Matrix $\overline{(\gamma)}\,(\alpha)\,(\gamma)$ über; dabei bedeutet $\overline{(\gamma)}$ die zu (γ) transponierte Matrix. Man bezeichne mit (A) bzw. (Γ) die zu (α) bzw. (γ) inverse Matrix, mit (ε) die Einheitsmatrix. Mit Q_1 bezeichne man die sogenannte zu Q inverse Form, d. h. die (bekanntlich positiv-definite) Form mit der Matrix (A). Es gibt eine reguläre Matrix (γ) mit der Determinante $D^{-1/2}$, welche die Form $Q(u)$ in $v_1^2 + \cdots + v_r^2$ überführt. Sind daneben noch reelle Zahlen $h_1, \dots, h_r$ mit

$|h_1| + \cdots + |h_r| > 0$ gegeben, so kann man noch erreichen, daß

$$h_1 u_1 + \cdots + h_r u_r = C v_1 \tag{26}$$

ist mit positivem $C = C(h_1, \ldots, h_r)$ (denn $v_1^2 + \cdots + v_r^2$ ist invariant gegenüber orthogonalen Transformationen). Wir berechnen C. Es ist $\overline{(\gamma)}\,(\alpha)\,(\gamma) = (\varepsilon)$, also $(\Gamma)\,(A)\,\overline{(\Gamma)} = (\varepsilon)$, insbesondere

$$\varepsilon_{11} = 1 = \sum_{i,k} \Gamma_{1i} A_{ik} \Gamma_{1k} = Q_1(\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots, \Gamma_{1r}),$$

aber

$$h_1 u_1 + \cdots + h_r u_r = C v_1 = \sum_{s=1}^{r} C \Gamma_{1s} u_s, \quad \text{also} \quad h_s = C \Gamma_{1s},$$

$$C^2 = C^2 Q_1(\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{1r}) = Q_1(h_1, \ldots, h_r). \tag{27}$$

Hilfssatz 3. *Es sei Q_1 die zu Q inverse Form. Für $\varrho \geqq 0$, $x > 0$ und reelle $h_1, \ldots, h_r$ mit $|h_1| + \cdots + |h_r| > 0$ ist*

$$A = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \int_{Q(u) \leqq x} \cdots \int (x - Q(u))^\varrho \, du_1 \cdots du_r = \frac{x^{\varrho + r/2} \pi^{r/2}}{D^{1/2} \Gamma\left(\varrho + \frac{1}{2} r + 1\right)}, \tag{28}$$

$$B = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \int_{Q(u) \leqq x} \cdots \int (x - Q(u))^\varrho \cos 2\pi (h_1 u_1 + \cdots + h_r u_r) \, du_1 \cdots du_r$$

$$= \frac{x^{\varrho/2 + r/4}}{\pi^\varrho D^{1/2} (Q_1(h))^{\varrho/2 + r/4}} J_{\varrho + r/2}(2\pi x^{1/2} Q_1^{1/2}(h)); \tag{29}$$

dabei schreiben wir freilich $Q_1(h) = Q_1(h_1, \ldots, h_r)$.

Beweis. Schreibt man $x^{1/2} u_j$ statt u_j, so erhält man

$$B = \frac{x^{\varrho + r/2}}{\Gamma(\varrho + 1)} \int_{Q(u) \leqq 1} \cdots \int (1 - Q(u))^\varrho \cos (2\pi x^{1/2} (h_1 u_1 + \cdots + h_r u_r)) \, du_1 \cdots du_r$$

(hierin ist auch A für $h_1 = \cdots = h_r = 0$ enthalten). Durch die oben beschriebene Substitution erhält man nach (26), (27)

$$B = \frac{x^{\varrho + r/2}}{D^{1/2} \Gamma(\varrho + 1)} \int_{v_1^2 + \cdots + v_r^2 \leqq 1} \cdots \int (1 - v_1^2 - \cdots - v_r^2)^\varrho \cos F v_1 \, dv_1 \cdots dv_r, \tag{30}$$

wobei zur Abkürzung $2\pi x^{1/2} Q_1^{1/2}(h) = F$ gesetzt wurde. Daher ist

$$B = \frac{x^{\varrho + r/2}}{D^{1/2}\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k F^{2k}}{(2k)!} B_k \tag{31}$$

mit

$$B_k = 2^r \underset{\substack{v_1^2 + \cdots + v_r^2 \leqq 1 \\ v_j > 0}}{\int \cdots \int} (1 - v_1^2 - \cdots - v_r^2)^\varrho v_1^{2k} \, dv_1 \cdots dv_r$$

$$= \underset{\substack{x_1 + \cdots + x_r \leqq 1 \\ x_j > 0}}{\int \cdots \int} (1 - x_1 - \cdots - x_r)^\varrho x_1^{k-1/2} x_2^{-1/2} \cdots x_r^{-1/2} \, dx_1 \cdots dx_r .$$

Nach (17), (18) ist also

$$B_k = \pi^{r/2 - 1/2} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{r}{2}\right)} \int_0^1 (1 - u)^\varrho u^{k + r/2 - 1} \, du$$

$$= 2^{-k} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1) \, \pi^{r/2} \frac{\Gamma(\varrho + 1)}{\Gamma\left(k + \varrho + \frac{r}{2} + 1\right)}. \tag{32}$$

Wegen $A = x^{\varrho + r/2} D^{-1/2} B_0 / \Gamma(\varrho + 1)$ folgt daraus (28), und durch Einsetzen von B_k aus (32) in (31) ergibt sich auch (29).[1]

Hilfssatz 4. *Es gibt ein* $c = c(Q, \lambda) > 0$, *so daß für jedes* $K \geqq 1$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{Q_1(h) < K}' (Q_1(h))^{-\lambda} < c K^{r/2 - \lambda} && \text{für } \lambda < \frac{r}{2}, \\ &\sum_{Q_1(h) < K}' (Q_1(h))^{-\lambda} < c \log (K + 1) && \text{für } \lambda = \frac{r}{2}, \\ &\sum_{Q_1(h) \geqq K} (Q_1(h))^{-\lambda} < c K^{r/2 - \lambda} && \text{für } \lambda > \frac{r}{2} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

gilt. Dabei bedeutet $\sum'$, daß das Glied mit $h_1 = \cdots = h_r = 0$ wegzulassen ist. Analoges gilt später in ähnlichen Fällen.

Beweis. Klar.

Im folgenden seien $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ diejenigen Werte, die $Q_1(h)$ für ganze $h_1, \ldots, h_r$ annimmt; a_n sei die Anzahl der Darstellungen von λ_n durch Q_1, d. h.

[1]) Spezialfälle von (29) kommen in der Literatur seit Bessel vor; vgl. die Fußnoten in [1], S. 15, 16, 118 und den Schluß der Einleitung von [6]. Den allgemeinen Fall kann man unschwer aus [11] oder [12] ablesen.

$a_n = \sum_{Q_1(h)=\lambda_n} 1$. Weiter schreiben wir oft (m) statt $(m_1, \ldots, m_r)$,

$$\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty} = \sum_{m_1,\ldots,m_r=-\infty}^{+\infty}, \quad \sum_{(m)=1}^{k} = \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{k} \quad \text{usw.}$$

Satz 2. *Für* $\varrho > r/2 - \frac{1}{2}$, $x > 0$ *ist*

$$P_\varrho(x) = A_\varrho(x) - \frac{\pi^{r/2} x^{\varrho + r/2}}{D^{1/2}\Gamma\left(\varrho + \frac{r}{2} + 1\right)}$$

$$= \frac{x^{r/4+\varrho/2}}{\pi^\varrho D^{1/2}} \sum_{(h)=-\infty}^{+\infty}{}' (Q_1(h))^{-\varrho/2 - r/4} J_{\varrho + r/2}(2\pi x^{1/2} Q_1^{1/2}(h)), \tag{34}$$

$$P_\varrho(x) = \frac{x^{r/4+\varrho/2}}{\pi^\varrho D^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-\varrho/2 - r/4} J_{\varrho + r/2}(2\pi x^{1/2} \lambda_n^{1/2}), \tag{35}$$

$$P_\varrho(x) = \frac{x^{(r-1)/4+\varrho/2}}{\pi^{\varrho+1} D^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-\varrho/2 - r/4 - 1/4} \cos\left(2\pi x^{1/2}\lambda_n^{1/2} - \varrho\,\frac{\pi}{2} - (r+1)\frac{\pi}{4}\right) \tag{36}$$

$$+ O(x^{(r-3)/4+\varrho/2}).$$

Beweis. Man setze in (24) für die $K(\pm a_1, \ldots, \pm a_r)$ die im Hilfssatz 3 gegebenen Werte ein. Man benutze (15) und Hilfssatz 4 (es ist $\varrho/2 + r/4 + \frac{1}{4} > r/2$). Man sieht, daß man die Reihe in (24) beliebig umgruppieren kann; daraus folgen unmittelbar die Behauptungen.

Weiter werden die Beweise nach Landaus Muster geführt. Ist f eine Funktion einer Veränderlichen, $z \neq 0$, so definiere man die Funktionen $\Delta_{k,z} f$ für $k = 1, 2, \ldots$ wie folgt:

$$\Delta_{1,z} f(x) = \Delta_z f(x) = f(x+z) - f(x), \quad \Delta_{k+1,z} f(x) = \Delta_{k,z} f(x+z) - \Delta_{k,z} f(x). \tag{37}$$

Wenn f im abgeschlossenen Intervall mit den Endpunkten $x, x + kz$ k-mal differenzierbar ist, so gibt es bekanntlich ein ξ zwischen $x, x + kz$, so daß

$$z^{-k} \Delta_{k,z} f(x) = f^{(k)}(\xi) \tag{38}$$

gilt. Da $A_\varrho(x)$ ($\varrho \geqq 0$) eine nichtabnehmende Funktion ist, gilt für $0 < kz < x$

$$(-z)^{-k} \Delta_{k,-z} A_{\varrho+k}(x) \leqq A_\varrho(x) \leqq z^{-k} \Delta_{k,z} A_{\varrho+k}(x). \tag{39}$$

(Denn z. B. ist

$$(-z)^{-k} \Delta_{k,-z} A_{\varrho+k}(x) = z^{-k} \int_{x-z}^{x} \left(\int_{x_1 - z}^{x_1} \cdots \left(\int_{x_{k-1}-z}^{x_{k-1}} A_\varrho(x_k)\, dx_k\right) \cdots dx_2\right) dx_1 .\Bigg)$$

Satz 3. *Es ist*

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2}) \qquad \text{für} \quad \varrho > \frac{r}{2} - \frac{1}{2}, \tag{40}$$

$$P_\varrho(x) = O(x^\varrho \log x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2} \log x) \quad \text{für} \quad \varrho = \frac{r}{2} - \frac{1}{2},^{1)} \tag{41}$$

$$P_\varrho(x) = O(x^{\varrho+r/2-r/(r+1-2\varrho)}) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \frac{r}{2} - \frac{1}{2}. \tag{42}$$

Beweis. (40) folgt sofort aus (36). Ist $0 \leqq \varrho \leqq r/2 - \frac{1}{2}$, so wähle man ein ganzes k mit $\varrho + k > r/2 - \frac{1}{2}$ und eine Funktion $z(x)$ mit $0 < z(x) = o(x)$ und bilde die beiden Ausdrücke

$$(\pm z(x))^{-k} \Delta_{k,\pm z(x)} A_{\varrho+k}(x), \tag{43}$$

indem man von jedem Glied der Reihe (34) (mit $\varrho + k$ statt ϱ) die k-te Differenz bildet. Es ist erstens (ich schreibe z statt $z(x)$) nach (38)

$$(\pm z)^{-k} \Delta_{k,\pm z} \frac{\pi^{r/2} x^{r/2+\varrho+k}}{D^{1/2}\Gamma\left(\varrho + \frac{r}{2} + k + 1\right)} = \frac{\pi^{r/2} \xi^{r/2+\varrho}}{D^{1/2}\Gamma\left(\varrho + \frac{r}{2} + 1\right)}$$
$$= \frac{\pi^{r/2} x^{r/2+\varrho}}{D^{1/2}\Gamma\left(\varrho + \frac{r}{2} + 1\right)} + O(zx^{r/2+\varrho-1}).$$

Zweitens hat man für

$$L = (\pm z)^{-k} \Delta_{k,\pm z} x^{r/4+\varrho/2+k/2} (Q_1(h))^{-\varrho/2-k/2-r/4} J_{\varrho+k+r/2}(2\pi x^{1/2} Q_1^{1/2}(h))$$

zwei Abschätzungen: Nach (15) ist (für $x \to +\infty$)

$$L = O(z^{-k} x^{r/4+\varrho/2+k/2-1/4} (Q_1(h))^{-\varrho/2-k/2-r/4-1/4}), \tag{44}$$

und nach (38), (16), (15) ist

$$L = O(x^{r/4+\varrho/2-1/4} (Q_1(h))^{-\varrho/2-r/4-1/4}). \tag{45}$$

Man wähle nun ein $K = K(x) \geqq 1$. Für $0 < Q_1(h) < K$ benutze man (45), für $Q_1(h) \geqq K$ die Abschätzung (44). Nach (33) erhält man für (43) folgende Darstellung:

$$\frac{\pi^{r/2} x^{r/2+\varrho}}{D^{1/2}\Gamma\left(\frac{r}{2} + \varrho + 1\right)} + O(zx^{r/2+\varrho-1})$$
$$+ O(z^{-k} x^{r/4+\varrho/2+k/2-1/4} K^{r/4-\varrho/2-k/2-1/4}) + O(x^{r/4+\varrho/2-1/4} K^{r/4-\varrho/2-1/4}) \tag{46}$$

---

1) Für $r = 1$, $\varrho = 0$ ist natürlich trivialerweise $P_0(x) = O(1)$.

mit der Ausnahme, daß für $\varrho = r/2 - \frac{1}{2}$ im letzten Glied K^0 durch $\log(K+1)$ ersetzt werden muß. Man erhält die beste Abschätzung, wenn man $K = xz^{-2}$ und dann $z = x^{1-r/(r+1-2\varrho)}$ wählt. Diese Wahl ist zulässig, da $z(x) \leqq x^{1-r/(r+1)} \leqq x^{1/2} = o(x)$, $K \geqq 1$ ist. Setzt man z, K in (46) ein und beachtet (39), so erhält man (41), (42).

Satz 4. *Für $\varrho \geqq 0$ ist $P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})$. Schärfer: Es gibt ein $c = c(Q, \varrho) > 0$, ein $n_0 = n_0(Q, \varrho)$ und eine von Q und ϱ abhängige Folge $x_1, x_2, \ldots$ mit*

$$\left.\begin{aligned} &x_n = x_{n,\varrho} = \frac{n^2}{4\lambda_1} + O(n) \quad (n \to \infty), \\ &P_\varrho(x_{2n}) > cx_{2n}^{(r-1)/4+\varrho/2}, \quad P_\varrho(x_{2n+1}) < -cx_{2n+1}^{(r-1)/4+\varrho/2} \quad \textit{für} \quad n > n_0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Beweis. Ist $s > r/2 + 1$, so ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s} \leqq \lambda_2^{-s} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (\lambda_2/\lambda_n)^{r/2+1} = o(a_1 \lambda_1^{-s}) \tag{48}$$

für $s \to +\infty$ (die Konvergenz der Reihe folgt aus (33)). Man definiere y_n durch

$$2\pi\lambda_1^{1/2} y_n^{1/2} - \left(\varrho + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = n\pi,$$

also $y_n = \frac{1}{4} n^2 \lambda_1^{-1} + O(n)$. Ist ϱ hinreichend groß, so folgt aus (36) und (48)

$$(-1)^n P_\varrho(y_n) > \frac{1}{2} \cdot \frac{y_n^{(r-1)/4+\varrho/2}}{\pi^{\varrho+1} D^{1/2}} \cdot \frac{a_1}{\lambda_1^{\varrho/2+r/4+1/4}} + O(y_n^{(r-3)/4+\varrho/2})$$

für $n \to \infty$. Also gilt (47) für hinreichend große ϱ (mit $x_n = y_n$). Gilt aber die Behauptung für ein $\varrho \geqq 1$, so gilt sie auch mit $\varrho - 1$ statt ϱ. In der Tat, aus (47) folgt für große n

$$(-1)^n \int_{x_{n-1}}^{x_n} P_{\varrho-1}(x)\, dx > cx_n^{(r-1)/4+\varrho/2}.$$

Da die Länge des Integrationsintervalls $O(n) = O(x_{n-1}^{1/2})$ ist, gibt es ein ξ_n mit $x_{n-1} < \xi_n < x_n$, $(-1)^n P_{\varrho-1}(\xi_n) > c'\xi_n^{(r-3)/4+\varrho/2}$, wobei $c' > 0$ von n unabhängig ist und $\xi_n = \frac{1}{4} n^2 \lambda_1^{-1} + O(n)$ gilt.

Bemerkung. Die Anwendbarkeit der Landauschen Methode aus [6] ist nicht auf Ellipsoide beschränkt. Landau selbst hat mit ihrer Hilfe einen Beweis eines allgemeinen van der Corputschen O-Satzes gegeben; der Satz gibt die Abschätzung $P(x) = O(x^{1/3})$ für sehr allgemeine ebene Bereiche. Man kann aber mit derselben Methode auch eine Ω-Abschätzung (mit dem Ergebnis $P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})$) für ziemlich allgemeine konvexe r-dimensionale Bereiche beweisen. Dies wird dadurch ermöglicht, daß die entsprechende Verallgemeinerung der $K(h_1, \ldots, h_r)$ aus Hilfssatz 2 asymptotische Eigenschaften besitzt, die denjenigen der Besselschen Funktionen ähnlich sind. Vgl. [9] für $r = 2$ und [10] für allgemeines r.

§ 3. Anwendung von Thetafunktionen

In diesem Paragraphen werden auch imaginäre Zahlen auftreten. Mit $c_1, c_2, \ldots$, aber öfter unterschiedslos mit c bezeichne ich positive Zahlen, die nur von Q und ϱ abhängen. Statt $c_1 < f(x) < c_2$ schreibe ich also oft $c < f(x) < c$ usw. (a, b) bedeute den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen a, b. Wir leiten jetzt eine andere Formel für $P_\varrho(x)$ ab. Dazu brauchen wir die bekannte Formel: Ist $a > 0, \varrho > 0$, so ist

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda s} s^{-\varrho-1}\, ds = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leqq 0, \\ 2\pi i \lambda^\varrho / \Gamma(\varrho + 1) & \text{für } \lambda > 0. \end{cases} \tag{49}$$

Dabei wird hier und im folgenden derjenige Zweig von s^α (α reell) genommen, der für $s > 0$ positiv ist.

Beweis. In dem (schwierigeren) Fall $\lambda > 0$ läßt sich das Integral wegen $\varrho > 0$ leicht auf das Hankelsche Schlingenintegral zurückführen. Man findet übrigens einen vollständigen Beweis z. B. in [1], S. 248.

Nach (3) ist also für $\varrho > 0, x > 0, a > 0$

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{Q(m) \leqq x} (x - Q(m))^\varrho = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(m)=-\infty}^{+\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\exp((x - Q(m))\, s)}{s^{\varrho+1}}\, ds$$

(ich schreibe gelegentlich $\exp(x)$ statt e^x). Hier kann man offenbar die Integration mit der Summation vertauschen. Setzt man also

$$\Theta(s) = \sum_{(m)=-\infty}^{+\infty} e^{-Q(m)s}, \tag{50}$$

so folgt

Hilfssatz 5. *Für $a > 0, x > 0, \varrho > 0$ ist*

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Theta(s)\, e^{xs} s^{-\varrho-1}\, ds. \tag{51}$$

Bisher war in § 2, § 3 Q eine beliebige positiv-definite quadratische Form. Von nun an setzen wir voraus, daß die α_{jl} ganz sind.

Hilfssatz 6. *Es seien die α_{jl} ganz, $(h, k) = 1$, $k > 0$; $m_1, \ldots, m_r$ ganz. Man setze*

$$S_{h,k,(m)} = \sum_{(a)=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi i h}{k} Q(a) - 2\pi i \frac{a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r}{k}\right). \tag{52}$$

Dann gilt $S_{h,1,(m)} = 1$; $|S_{h,k,(m)}| < ck^{r/2}$; *ist* $\operatorname{Re} s > 0$, *so gilt weiter*

$$\Theta(s) = \pi^{r/2} D^{-1/2} k^{-r} \left(s - 2\pi i \frac{h}{k}\right)^{-r/2} \sum_{(m)=-\infty}^{+\infty} S_{h,k,(m)} \exp\left(\frac{-\pi^2 Q_1(m)}{k^2(s - 2\pi i h/k)}\right), \tag{53}$$

wobei Q_1 die zu Q inverse Form ist.

Beweis. Vgl. etwa [8], Hilfssatz 3 A und 4; oder (in einer etwas anderen Bezeichnung) die Beweise der Formeln (11), (12) in [7] oder [1], S. 148–154. In [7], [1] wird insbesondere $\Theta(s) = \sum \exp(-\pi Q(m)\, s)$ gesetzt (die dortigen α_j sind bei uns gleich Null); Landaus k heißt bei uns r.

Satz 5. *Q habe ganze Koeffizienten α_{jl}. Dann gilt*

(I) $\quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1}) \quad$ *für* $\varrho \geqq 0$,

(II) $\quad P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1}) \quad$ *für* $0 \leqq \varrho < \frac{r}{2} - 2$,

(III) $\quad P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1} \log x) \quad$ *für* $0 < \varrho = \frac{r}{2} - 2$,

(IV) $\quad P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1} \log^2 x) \quad$ *für* $r = 4$, $0 = \varrho = \frac{r}{2} - 2$,

(V) $\quad P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2}) \quad$ *für* $\varrho > \frac{r}{2} - 2$, $\varrho \geqq 0$, $r \geqq 3$.

Vorbemerkung. In (II) bis (V) ist automatisch $r \geqq 3$. Der Fall $\varrho = 0$, $r = 3$ von (V) wurde in Satz 3 bewiesen. Satz 1 aus § 1 folgt offenbar aus den Sätzen 3, 4, 5.

Beweis. Wir beweisen zunächst (II) bis (V). Von nun an sei $x > 2$. Man setze $z = z(x) = x^{-\varrho}$. Nach (39) (mit $k = 1$) genügt es, die beiden Zahlen

$$I = \pm x^\varrho \int_x^{x \pm z} A_\varrho(y)\, dy = \pm x^\varrho (A_{\varrho+1}(x \pm z) - A_{\varrho+1}(x)) \tag{54}$$

mit der gewünschten Präzision abzuschätzen. Es sei noch bemerkt, daß man für $\varrho > 0$ direkt A_ϱ untersuchen könnte; um aber den (bekannten) Fall $\varrho = 0$ mit einzubeziehen, rechne ich mit den Differenzen (54). Für $A_{\varrho+1}$ wende ich Hilfssatz 5 mit $a = 1/x$ an und erhalte

$$I = \pm \frac{x^\varrho}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(s)\, e^{xs}(e^{\pm zs} - 1)\, s^{-\varrho-2}\, dt \tag{55}$$

mit $s = 1/x + it$.

Ich konstruiere nun die sogenannte zu $x^{1/2}$ gehörige Fareyreihe, d. h. die Menge aller Brüche h/k mit $0 < k \leqq x^{1/2}$, $h \gtreqless 0$, $(h, k) = 1$; ich nenne sie kurz Fareybrüche. Sind h/k, h'/k' zwei benachbarte Fareybrüche, so heißt der Bruch $(h + h')/(k + k')$ ihre Mediante. Also ist $x^{1/2} < k + k' \leqq 2x^{1/2}$. Weiter ist bekanntlich $hk' - h'k = \pm 1$, also

$$\frac{1}{2kx^{1/2}} \leqq \left|\frac{h + h'}{k + k'} - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{kx^{1/2}}. \tag{56}$$

Zu jedem Fareybruch h/k konstruiere ich das Intervall (α, β), wobei α, β die beiden zu h/k benachbarten Medianten sind, und bezeichne mit $B_{h,k}$ das Intervall $(2\pi\alpha, 2\pi\beta)$. Nach (56) ist

$$B_{h,k} = (2\pi h/k - \lambda_1 k^{-1} x^{-1/2}, 2\pi h/k + \lambda_2 k^{-1} x^{-1/2}) \quad \text{mit} \quad \pi \leqq \lambda_j < 2\pi. \tag{57}$$

Es sei

$$I_{h,k} = \pm \frac{x^{\varrho}}{2\pi} \int_{B_{h;k}} \Theta(s)\, e^{xs}(e^{\pm zs} - 1)\, s^{-\varrho-2}\, dt. \tag{58}$$

Ich berechne $I_{0,1}$ möglichst genau und schätze die übrigen $I_{h,k}$ ab; dabei kann ich mich auf $h > 0$ beschränken, da $I_{h,k}$, $I_{-h,k}$ konjugiert-komplex sind.

Für alle reellen t und $s = 1/x + it$ ist offenbar $|e^{xs}| = e$, $|e^{\pm zs} - 1| < c \operatorname{Min}(|zs|, 1)$. Für $t \in B_{h,k}$ ist nach (57) und wegen $k \leqq x^{1/2}$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{k^2(s - 2\pi ih/k)} = \frac{x}{k^2(1 + x^2(t - 2\pi h/k)^2)} > c. \tag{59}$$

Also ist auf $B_{h,k}$

$$\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty} \left|\exp\left(\frac{-\pi^2 Q_1(m)}{k^2(s - 2\pi ih/k)}\right)\right| < \sum_{(m)=-\infty}^{+\infty} \exp(-c(|m_1| + \cdots + |m_r|)) < c, \tag{60}$$

und auf $B_{0,1}$ ist

$$\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty}{}' \left|\exp\left(\frac{-\pi^2 Q_1(m)}{s}\right)\right|$$

$$< c \sum_{(m)=-\infty}^{+\infty}{}' \exp\left(-\frac{cx}{1 + x^2 t^2}(|m_1| + \cdots + |m_r|)\right) < c \exp\left(\frac{-cx}{1 + x^2 t^2}\right). \tag{61}$$

Nach (61) und Hilfssatz 6 ist auf $B_{0,1}$

$$\Theta(s) = \frac{\pi^{r/2}}{D^{1/2} s^{r/2}}(1 + \psi(s)) \quad \text{mit} \quad |\psi(s)| < c \exp\left(\frac{-cx}{1 + x^2 t^2}\right).$$

Da für $\alpha > 0$ die Funktion $\xi^\alpha e^{-c\xi}$ für $\xi > 0$ beschränkt ist, erhält man

$$\left| \pm \frac{x^\varrho}{2\pi} \int_{B_{0,1}} \frac{\pi^{r/2}(e^{\pm zs} - 1)\, e^{xs}}{D^{1/2} s^{r/2+\varrho+2}} \psi(s)\, dt \right| < cx^\varrho \int_{-2\pi/x^{1/2}}^{2\pi/x^{1/2}} \frac{z}{|s^{r/2+\varrho+1}|} \exp\left(\frac{-cx}{1+x^2t^2}\right) dt$$

$$= c \int_{-2\pi/x^{1/2}}^{2\pi/x^{1/2}} \frac{x^{r/2+\varrho+1}}{(1+x^2t^2)^{r/4+\varrho/2+1/2}} \exp\left(\frac{-cx}{1+x^2t^2}\right) dt < cx^{-1/2} \cdot x^{r/4+\varrho/2+1/2}.$$

Man schätze nun den Fehler ab, den man begeht, wenn man

$$\pm \frac{x^\varrho}{2\pi} \int_{B_{0,1}} \frac{\pi^{r/2} e^{xs}(e^{\pm zs} - 1)}{D^{1/2} s^{r/2+\varrho+2}}\, dt$$

durch

$$\pm \frac{x^\varrho}{2\pi i} \int_{1/x-i\infty}^{1/x+i\infty} \frac{\pi^{r/2} e^{xs}(e^{\pm zs} - 1)}{D^{1/2} s^{r/2+\varrho+2}}\, ds$$

$$= \pm \frac{\pi^{r/2} x^\varrho}{D^{1/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+\varrho+2\right)} \left((x \pm x^{-\varrho})^{\varrho+r/2+1} - x^{\varrho+r/2+1}\right)$$

$$= \frac{\pi^{r/2} x^{\varrho+r/2}}{D^{1/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+\varrho+1\right)} + O(x^\varrho \cdot x^{-2\varrho} \cdot x^{\varrho+r/2-1})$$

ersetzt (Formel (49) und Taylorsche Formel). Dieser Fehler ist absolut kleiner als

$$cx^\varrho \int_{\pi x^{-1/2}}^{+\infty} x^{-\varrho} t^{-r/2-\varrho-1}\, dt = cx^{r/4+\varrho/2}.$$

Also ist

$$I_{0,1} = \frac{\pi^{r/2} x^{\varrho+r/2}}{D^{1/2}\Gamma\left(\varrho+\frac{r}{2}+1\right)} + O(x^{r/2-1}) + O(x^{r/4+\varrho/2}). \tag{62}$$

Es genügt, noch die Summe der $I_{h,k}$ mit $h > 0$ abzuschätzen. Auf $B_{h,k}$ mit $h > 0$ ist offenbar $cx^{-1/2} < ch/k < t < ch/k$, und (58), Hilfssatz 6 und (60) ergeben (man beachte $r \geqq 3$)

$$|I_{h,k}| \leqq ck^{-r/2}(k/h)^{\varrho+2}\, x^\varrho \operatorname{Min}(hk^{-1}x^{-\varrho}, 1) \int_{-\infty}^{+\infty} |s - 2\pi i h/k|^{-r/2}\, dt$$

$$= ck^{\varrho+1-r/2} h^{-\varrho-1} \operatorname{Min}(1, kh^{-1}x^\varrho) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{r/2}(1+x^2t^2)^{-r/4}\, dt.$$

Die Summation über h, k ergibt höchstens

$$W = cx^{r/2-1} \sum_{0<k\leqq x^{1/2}} k^{\varrho+1-r/2} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-\varrho-1} \operatorname{Min}(1, kh^{-1}x^\varrho). \tag{63}$$

Ist $\varrho > 0$, so ersetze man das Min durch Eins, und man erhält

$$W = O(x^{r/2-1}) \quad \text{für} \quad 0 < \varrho < \frac{r}{2} - 2,$$

$$W = O(x^{r/2-1} \log x) \quad \text{für} \quad 0 < \varrho = \frac{r}{2} - 2,$$

$$W = O(x^{r/4+\varrho/2}) \quad \text{für} \quad \varrho > 0, \varrho > \frac{r}{2} - 2.$$

Für $\varrho = 0$ hat die innere Summe in (63) die Größenordnung $\log(k+1)$ und man erhält

$$W = O(x^{r/2-1}) \quad \text{für} \quad \varrho = 0, r > 4,$$

$$W = O\left(x \sum_{0<k\leqq x^{1/2}} \frac{\log(k+1)}{k}\right) = O(x \log^2 x) \quad \text{für} \quad \varrho = 0, r = 4.$$

Daraus und aus (62) folgt (II) bis (V). Man beachte, daß sich für $r = 3$, $\varrho = 0$ nur $W = O(x^{3/4} \log x)$ ergibt, ein Resultat, das schwächer als das Resultat des Satzes 3 ist.

Beweis von (I). Für natürliches n sei α_n die Anzahl der Lösungen von $Q(m) = n$. Dann ist $\sum_{n \leqq N} \alpha_n = A_0(N)$ asymptotisch gleich dem Volumen $\pi^{r/2} D^{-1/2} N^{r/2} / \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)$; also ist

$$\alpha_n = \Omega(n^{r/2-1}). \tag{64}$$

Nun ist $P_0(x) = A_0(x) - \pi^{r/2} D^{-1/2} x^{r/2} / \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)$. Hier ist das zweite Glied rechts stetig, während das erste für $x = n$ einen Sprung von der Größe α_n erleidet. Nach (64) ist also $P_0(x) = \Omega(x^{r/2-1})$.

Nun sei $\varrho > 0$. Setzt man $K = \pi^{r/2} D^{-1/2} / \Gamma\left(\frac{r}{2} + \varrho + 1\right)$, so ist

$$P_\varrho(x) = \sum_{m \leqq x} \alpha_m (x - m)^\varrho / \Gamma(\varrho + 1) - K x^{r/2+\varrho}. \tag{65}$$

Man setze nun $P_\varrho(x) = o(x^{r/2-1})$ voraus; daraus werden wir einen Widerspruch ableiten. Man wähle ein ganzes $k \geqq \varrho + 1$, und für jedes natürliche n bilde man die k-te Differenz

$$\Delta_{k, 1/(k+2)} P_\varrho \left(n + \frac{1}{k+2}\right) = D_n. \tag{66}$$

Man beachte, daß in D_n die Werte von P_ϱ in den Punkten $n + \frac{1}{k+2}, n + \frac{2}{k+2}, \ldots, n + \frac{k+1}{k+2}$ vorkommen. Nach der Voraussetzung ist $D_n = o(n^{r/2-1})$. Nun sind alle

Glieder rechts in (65) für $n < x < n + 1$ unbeschränkt differenzierbar ($m \leqq x$ bedeutet für diese x dasselbe wie $m \leqq n$). Also gibt es ein x_n mit

$$n + \frac{1}{k+2} < x_n < n + \frac{k+1}{k+2}, \tag{67}$$

$$(k+2)^k D_n = P_\varrho^{(k)}(x_n) = \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - k + 1) \sum_{m \leqq n} \alpha_m (x_n - m)^{\varrho - k} / \Gamma(\varrho + 1)$$

$$- \left(\frac{r}{2} + \varrho\right)\left(\frac{r}{2} + \varrho - 1\right) \cdots \left(\frac{r}{2} + \varrho - k + 1\right) K x_n^{r/2 + \varrho - k}. \tag{68}$$

Dieser Ausdruck ist also gleich $o(n^{r/2-1})$. Es sei erstens ϱ nicht ganz, also $k > \varrho + 1$, und aus (68) folgt

$$\sum_{m \leqq n} \alpha_m (x_n - m)^{\varrho - k} = o(n^{r/2-1}),$$

also (wegen (67)) erst recht

$$\alpha_n (x_n - n)^{\varrho - k} = o(n^{r/2-1}), \quad \alpha_n = o(n^{r/2-1});$$

das steht im Widerspruch zu (64).

Es sei zweitens ϱ ganz, und man setze $k = \varrho + 1$, so daß die erste Summe in (68) rechts verschwindet, während $r/2 + \varrho - k + 1 > 0$ ist. Also würde aus (68) $x_n^{r/2-1} = o(n^{r/2-1})$ folgen, was wiederum einen Widerspruch liefert.

Literatur

[1] Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre von Edmund Landau, herausgegeben von Arnold Walfisz; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

[2] E. Landau, Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid), Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. **31** (1915), 458—476.

[3] E. Landau, Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Sitzungsber. d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-Naturwiss. Kl. Abt. IIa, **124** (1915), 445—468.

[4] E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (IV. Abhandlung), Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1924, 137—150.

[5] E. Landau, Über die Gitterpunkte in einem Kreise (V. Mitteilung), Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1924, 135—136.

[6] E. Landau, Die Bedeutungslosigkeit der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie, Monatshefte für Math. u. Physik **34** (1925), 1—36.

[7] E. Landau, Über die Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. **21** (1924), 126—132.

[8] V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 5. Abh., Časopis pro pěst. mat. a fys. **69** (1940), 148—174.

[9] V. Jarník, Sur les points à coordonnées entières dans le plan, Bulletin international de l'Acad. Tchèque des Sci. **25** (1925), 341—352.

[10] S. Krupička, О целых точках в болеемерных выпуклых телах, Czechoslovak Math. Journal **7** (82) (1957), 524—550. Deutscher Auszug daselbst 550—552.

[11] D. G. Kendall, On the number of lattice points inside a random oval, Quarterly J. of Math., Oxford Ser. **19** (1948), 1—26.

[12] S. Bochner and K. Chandrasekharan, Summations over lattice points in $\varkappa$-space. Quarterly J. of Math., Oxford Ser. **19** (1948), 238—248.

[13] K. Chandrasekharan and R. Narasimhan, Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions, Acta Arithmetica **6** (1961), 487—503.