Vojtěch Jarník

Sur les approximations diophantiques des nombres p-adiques

Revista de Ciencias, Lima, 47 (1945), pp. 489--505

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500773

Sur les approximations diophantiques des nombres p - adiques

Par VOITECH JARNÍK, *Praha*

On connaît plusieurs théorêmes de nature métrique concernant les approximations diophantiques linéaires et homogènes des nombres réels;[1] on peut se poser la question si l'on peut transporter ces résultats et leurs démonstrations à l'approximation des nombres p-adiques entiers. A titre d'exemple, je vais montrer dans cette note que le théorème métrique de M. Khintchine sur l'approximation des nombres réels peut être énoncé presque sans changements aussi pour les nombres entiers p-adiques, en conservant les grands traits de la démonstration.

1) Voir, p. ex.: A. KHINTCHINE, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math Zeitschr. *24* (1926), 706 - 714· V. JARNÍK, Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. *33* (1931), 505 - 543; A. GROSKV, Un théorème sur les systèmes de formes linéaires, C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. *19* (1938), 151 - 152; A. GROSKV, Sur la théorie métrique des formes linéaires (en russe), Bull. Acad. Sci. URSS, 1937, 427 - 443. Je ne donne pas des renvois bibliographiques sur les travaux nombreux et importants des MM. Denjoy, Khintchine, Lévy etc. concernand l'approximation d'un nombre unique qui sont basés sur la théorie des fractions continues.

Fixons les notations: les caractères minuscules latins signifient des nombres rationnels entiers, les caractères minuscules grecs — des nombres réels et les caracteres minuscules gothiques — des nombres p—adiques entiers, c'est-à-dire les expressions de la forme

$$\mathfrak{a} = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \qquad (0 \leqq a_i < p),$$

où p est un nombre premier, fixé dans tout ce qui suit. On pose $|0|_p = 0$,

$$|\mathfrak{a}|_p = p^{-f}, \quad \text{si} \quad a_f \neq 0, \quad a_i = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i < f.$$

Dans tout ce qui suit, un nombre $s > 0$ sera donné. Nous désignons par E_s l'ensemble de tous les systèmes $\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s\}$ de nombres p—adiques entiers et nous allons définir la distance $\rho_s(P,Q)$ de deux points $P = \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s\}$, $Q = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_s\}$ de l'espace E_s par l'équation.

$$\rho_s(P, Q) = \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq s} |\mathfrak{a}_i - \mathfrak{b}_i|_p .$$

Alors E_s est un espace métrique compact et l'on a

$$\rho_s(P, R) \leqq \operatorname{Max} (\rho_s(P, Q), \ \rho_s(\ , R)) .$$

Soit K une sphère ouverte de l'espace E_s, au centre P et au rayon $\rho > 0$. Alors, en choisissant pour f le plus petit nombre entier $\geqq 0$ tel que $p^{-f} < \rho$, on voit que K est l'ensemble de tous les points $X \in E_s$ tels que $\rho_s(P, X) \leqq p^{-f}$; alors la sphère K sera appelée une "sphrère d'ordre f"; c'est un ensemble ouvert et à la fois fermé. Il existe précisément une sphère d'ordre 0, à savoir E_s. Chaque sphère d'ordre f est somme de p^s sphères d'ordre $f+1$ et les sphères du même ordre sont disjointes. Remarquons que chaque point d'une sphère K peut être pris pour le centre de K.

Soit

$$K_1, \quad K_2, \dots \qquad (R)$$

une suite (finie ou infinie) des sphères, soit f_i l'ordre de K_i et posons

$$\sigma(R) = \sum_i p^{-s f_i} .$$

Pour $M \subset E_s$, nous allons désigner par μM la borne inférieure des nombres $\sigma(R)$ pour toutes les suites (R) telles que $M \subset K_1 + K_2 + \dots$. On voit sans peine que μM est une mesure extérieure au sens de M. Carathéodory [2)] et que $\mu M = p^{-fs}$, si M est une sphère d'ordre f (donc, en particulier, $\mu E_s = 1$ et $\mu M < \rho^s$, si M est une sphère ouverte au rayon $\rho > 0$).

Si l'on se borne à des ensembles boreliens, la fonction μM

A. Pour $M \subset N \subset E_s$, on a $0 \leqq \mu M \leqq \mu N \leqq 1$

2) Voir, p. ex., S. Saks, Theory of the Integral, Warszawa 1937, p. 43.

jouit des propriétés suivantes: [3]

A. Pour $M \subset N \subset E_s$, on a $0 \leqq \mu M \leqq \mu N \leqq 1$.

B. Pour chaque suite $M_1, M_2, \ldots$ on a

$$\mu \sum_i M_i \leqq \sum_i \mu M_i \, ; \qquad \mu \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} M_i \geqq \limsup_{i \to \infty} \mu M_i$$

(Saks, p. 17, (9.3)). Si les ensembles M_i sont disjoints, on a $\mu(M_1 + M_2 + \ldots) = \mu M_1 + \mu M_2 + \ldots$ (Saks, p. 16).

C. Soit $\mu M > 0$, $\delta > 0$. Alors il existe une sphère K telle que $\mu(MK) > (1-\delta)\,\mu K$. En effet, posons $M = E_s$ dans Saks, p. 152–156 et prenons, pour M_n (Saks, p. 153), le système de toutes les sphères d'ordre n; en posant, dans Saks, p. 155, (15.7), $\Phi(X) = \mu(MX)$ et ensuite, dans (15.8), $X = M$, on obtient

$$(\alpha) \quad \phi(M) = \mu M = \int_M (\mu, M)\, D\, \phi(x)\, d\mu\, ,$$

où l'on a posé

$$(\beta) \quad (\mu, M)\, D\, \phi(x) = \lim_{f \to \infty} \frac{\mu(K_f M)}{\mu K_f}\, ,$$

[3]) Tous les ensembles que l'on rencontre dans la suite, sont évidemment des ensembles boreliens.

Chaque ensemble borelien est mesurable (μ), voir Saks, p. 52, (7.4).

K_f étant la sphère d'ordre f contenant le point x[4]. D'après (α), on voit que la limite dans (β) existe et est égale à 1 dans presque tous les points $x \in M$, d'où l'existence d'une sphère K telle que $\mu(MK) > (1-\delta)\,\mu K$.

Soit $w(n)$ une fonction positive du nombre naturel n; désignons par $H(w)$ l'ensemble de tous les points $\{cr_1, \dots, cr_s\} \in E_s$ tels que les relations

$$(p, n) = 1, \quad |n\,cr_i - y_i|_p < w\,(\mathrm{Max}\,(|n|, \quad |y_1|, \dots, |y_s|)) \quad (1 \leqq i \leqq s)$$

possèdent une infinité de solutions en nombres entiers $n, y_1, \dots, y_s$. Alors le théorème que nous avons en vue s'énonce comme il suit:

Théorème. *Soit $\lambda(n)$ une fonction positive du nombre naturel n telle que $n^{s+1}\lambda^s(n)$ tende en décroissant vers zéro pour $n \to \infty$. Alors on a*

$$\mu H(\lambda) = 0 \quad ou \quad \mu H(\lambda) = 1$$

selon que la série

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^s \lambda^s(n)$$

est convergente ou divergente.

4) Pour conformer les notations avec celles de M. Saks, nous désignons ici exceptionellement par la lettre x les points de E_s (et non des nombres entiers).

Remarquons que le cas de convergence est banal. En effet, construisons autour de chaque point $\left\{\frac{y_1}{n}, \ldots, \frac{y_s}{n}\right\}$ avec $(p, n) = 1$ la sphère ouverte au rayon $\lambda(t)$, où $t = \operatorname{Max}(|n|, |y_1|, \ldots, |y_s|)$. En désignant ces sphères par $K_1, K_2, \ldots$, on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu K_j \leqq 2(s+1) \sum_{t=1}^{\infty} (2t+1)^s \lambda^s(t) .$$

Chaque point de $H(\lambda)$ étant contenu dans une infinité de sphères K_j, on a pour chaque $k > 0$

$$H(\lambda) \subset \sum_{j=k}^{\infty} K_j , \quad \mu H(\lambda) \leqq \mu \sum_{j=k}^{\infty} K_j \leqq \sum_{j=k}^{\infty} \mu K_j ,$$

donc $\mu H(\lambda) = 0$, si la série (*) est convergente.

* * *

Dans les quatres lemmes suivants, on suppose donnée une fonction positive $w(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^s w^s(n)$ diverge et que l'expression $n^{s+1} w^s(n)$ tende en décroissant vers zéro pour $n \to \infty$ (il s'en suit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^s w^s(np)$ est elle-même divergente).

Par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ on désigne des nombres positifs, ne dépendant que de s, de p et de la fonction w. $\varphi(n)$ est la fonction d'Euler, $\mu(n)$ la fonction de Möbius. L'apostrophe ejouté au symbole de sommation $\sum_n'$ signifie que l'on doit supprimer les termes correspondants aux valeurs de n qui sont divisibles par p.

Lemme 1. M, N *étant deux nombres entiers tels que* $N > M > \alpha_1$, *on a*

$$\sum_{n=M}^{N}{}' w^s(np)\,\varphi^s(n) > 3^{-s} \sum_{n=M}^{N} n^s w^s(np) - M^{s+1} w^s(Mp).$$

Démonstration. $\displaystyle\sum_{d=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(d)}{d^2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \sum_{d=1}^{\infty}{}'\left(\frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{\mu(dp)}{(dp)^2}\right) =$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{x}{}' \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{n=1}^{x}{}' \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d=1}^{x}{}' \frac{\mu(d)}{d}\left(\left[\frac{x}{d}\right] - \left[\frac{x}{dp}\right]\right) = x\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d=1}^{x}{}'\frac{\mu(d)}{d^2} +$$

$$+ O\sum_{d=1}^{x}\frac{1}{d} = x\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d=1}^{\infty}{}'\frac{\mu(d)}{d^2} + O(\log x) = \frac{x}{1+\frac{1}{p}}\,\frac{6}{\pi^2} +$$

$$+ O(\log x) > \tfrac{1}{8}x \quad \text{pour } x > \alpha_1.$$

Posons $\sigma(n) = n^s w^s(np)$; $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{x}{}' \frac{\varphi^s(n)}{n^s}$; donc $\Psi(x) \leqq x$ et $\Psi(n) = \Psi(n-1)$ pour p/n .

D'après l'inégalité de Hölder, on a pour $x > \alpha_1$

$$\tfrac{1}{3} x < \sum_{n=1}^{x}{}' \frac{\varphi(n)}{n} \leqq \left(\sum_{n=1}^{x}{}' 1\right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\sum_{n=1}^{x}{}' \frac{\varphi^s(n)}{n^s}\right)^{\frac{1}{s}} \leqq x^{1-\frac{1}{s}} \Psi^{\frac{1}{s}}(x),$$

$\Psi(x) > 3^{-s} x$. Pour $N > M > \alpha_1$, on a donc

$$\sum_{n=M}^{N}{}' w^s(np)\ \varphi^s(n) = \sum_{n=M}^{N} \sigma(n)\ (\Psi(n) - \Psi(n-1)) =$$

$$= \sum_{n=M}^{N-1} \Psi(n)\ (\sigma(n) - \sigma(n+1)) + \Psi(N)\,\sigma(N) - \Psi(M-1)\,\sigma(M)$$

$$> 3^{-s} \left(\sum_{n=M}^{N-1} n\ (\sigma(n) - \sigma(n+1)) + N\sigma(N)\right) - M\sigma(M)$$

$$= 3^{-s} \left(\sum_{n=M}^{N} \sigma(n) + (M-1)\,\sigma(M)\right) - M\sigma(M)$$

$$> 3^{-s} \sum_{n=M}^{N} n^s w^s(pn) - M^{s+1} w^s(Mp) .$$

Lemme 2. *Soit* $0 < m < n$, $(p, m n) = 1$, $c \geqq 0$. *Soit* A *le nombre de tous les couples* x, y *tels que*

$$(1) \qquad 0 < x < mp, \quad 0 < y < np, \quad (mp, x) = (np, y) = 1$$

$$(2) \qquad \frac{x}{m} \equiv \frac{y}{n} \pmod{p^c} .$$

Alors $$A \leqq m n p^{7-c} .$$

Démonstration. Posons $(m, n) = d$, $m = m' d$, $n = n' d$ et définissons a, b, f par

$$p^{f-1} \leqq d < p^f , \quad p^{a-1} \leqq m < p^a , \quad p^{b-1} \leqq n < p^b ;$$

les relations (1), (2) entraînent

$$(3) \qquad \frac{2m\,n\,p}{d} > |\,xn' - ym'\,| \equiv 0 \pmod{p^c} .$$

Si $2 m n p d^{-1} \leqq p^c$, alors (3) entraîne $x n' - y m' = 0$, $\dfrac{x}{m'} = \dfrac{y}{n'}$, ce qui est impossible, car $(x, m') = (y, n') = 1$, $0 < m' < n'$; on a donc, dans ce cas, $A = 0 \leqq m n p^{7-c}$.

Soit donc $2 m n p d^{-1} > p^c$, donc $p^{a+b-f+3} > p^c$ et supposons que. $A > m n p^{7-c}$, donc $A > p^{a+b-c+5}$.

Les expressions $xn'-ym'$, satisfaisant aux relations (1), (3), sont situées dans la même classe mod p^c, donc dans tout au plus $p^{a+b-f+3-c}$ classes mod $p^{a+b-f+3}$. Il existe donc au moins une classe mod $p^{a+b-f+3}$ contenant plus que p^{f+2} expressions $xn'-ym'$.

En soustrayant une de ces expressions de toutes les autres, on obtient au moins p^{f+2} couples x, y tels que

$$|x|+|y| > 0, \ |x| < mp, \ |y| < np, \ xn'-ym' \equiv 0 \pmod{p^{a+b-f+3}} ;$$

mais alors $|xn'-ym'| < 2mnpd^{-1} \leq p^{a+b-f+3}$, donc $xn'-ym'=0$, $xy \neq 0$, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{n'}{m'}$, donc $x = rm'$, $y = rn'$, où $0 < |r| < \dfrac{m}{m'}\, p = dp$; on a donc pour x, y au plus $2dp < p^{f+2}$ possibilités—contradiction.

Lemme 3. *A chaque* $\mathrm{M} > 0$ *on peut faire correspondre un ensemble fermé* $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{E}_s$ *jouissant des propriétés suivantes:*

1) $\mu \mathrm{F} > \alpha_2$.

2) *A chaque point* $\{cr_1, \dots, cr_s\} \in \mathrm{F}$, *on peut faire correspondre* $s+2$ *nombres* $r, n > 0, y_1, \dots, y_s$ *de sorte que*

$$(p, n) = 1, \quad r = \mathrm{Max}\,(n, |y_1|, \dots, |y_s|) \geq \mathrm{M},$$

$$|n\, cr_i - y_i|_p < w(r) \qquad (i=1,2,\dots, s) .$$

COROLLAIRE: Posons $G = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} F(i)$; si l'on a $\{cr_1, \ldots, cr_s\} \in G$,

alors il existe une infinité de valeurs $i > 0$ telles que $\{cr_1, \ldots, cr_s\} \in F(i)$, donc $\{cr_1, \ldots, cr_s\} \in H(w)$. Mais

$$\mu G \geqq \limsup_{i \to \infty} \mu F(i) \geqq \alpha_2 ,$$

donc

LEMME 4. $$\mu H(w) > 0 .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Il est permis de supposer que $w(n) < 1$ pour $n > 0$. Définissons, pour chaque $n > 0$, le nombre entier $c(n)$ par les inégalités

$$p^{-c(n)} < w(pn) \leqq p^{-c(n)+1} \quad (c(n) > 0) .$$

Par $C(cr)$ nous allons désigner le nombre d'éléments de l'ensemble cr. Soient M, N deux nombres entiers, $0 < M < N$. Pour chaque n avec

(4) $$M \leqq n \leqq N , \qquad (n, p) = 1$$

soit γ_n l'ensemble de tous les points $\left\{\frac{y_1}{n}, \ldots, \frac{y_s}{n}\right\}$ jouissants des propriétés suivantes: I) on a

(5) $$0 < y_i < np\,, \quad (np, y_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s)\,;$$

II) $m, x_1, \ldots, x_s$ étant $s + 1$ nombres tels que

(6) $$M \leqq m < n\,, \quad (m, p) = 1\,,$$

(7) $$0 < x_i < mp\,, \quad (mp, x_i) = 1 \quad (i = 1, \ldots, s)\,,$$

alors l'une au moins des inégalités

(8) $$\left| \frac{x_i}{m} - \frac{y_i}{n} \right|_p > w(mp) \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

est en défaut.[5)]

Soit m un nombre avec (6) et désignons par $I_{n,m}$ l'ensemble de tous les systèmes $\{y_1, \ldots, y_s\}$ avec (5), auxquels on peut faire correspondre au moins un système $x_1, \ldots, x_s$ avec (7), (8). Alors

$$C(\gamma_n) \leqq \varphi^s(np) - \sum_{M \leqq m < n}{}' C(I_{n,m})$$

et d'après le Lemme 2)

$$C(I_{n,m}) \leqq (p^7\, m\, n\, p^{-c(m)})^s \leqq (p^7\, m\, n\, w(mp))^s\,,$$

5) Remarquons que (8) équivaut aux congruences

$$\frac{x_i}{m} \equiv \frac{y_i}{n} \pmod{p^{c(m)}} \qquad (1 \leqq i \leqq s)\,.$$

donc

$$C(\gamma_n) \geqq \varphi^s(n) - p^{7s} n^s \sum_{m=M}^{N} m^s w^s(mp) .$$

Le nombre n avec (4) étant donné, construisons toutes les sphères au rayon $\omega(np)$ (c'est-à-dire les sphères d'ordre $c(n)$) dont les centres appartiennent à γ_n ; tes sphères sont disjointes deux à deux pour $n < \alpha_3$ car, pour $0 < x_i < np$, $0 < y_i < np$,

$$\left| \frac{x_i}{n} - \frac{p_i}{n} \right|_p < w(np)$$

on a

$$p^{c(n)} > w^{-1}(pn) > (np)^{1+\frac{1}{s}} > 2np > |x_i - y_i| \equiv 0 \pmod{p^{c(n)}},$$

donc $x_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$. En désignant par Z_n la somme de

ces sphères, on a donc

$$\mu Z_n = p^{-c(n)s} C(\gamma_n) \geqq p^{-s} w^s(pn) \left(\varphi^s(n) - p^{7s} n^s \sum_{m=M}^{N} m^s w^s(mp)\right) .$$

Posons $\sum_{n=M}^{N}{}' Z_n = F$; les ensembles Z_n sont disjoints, car

$$P = \left\{ \frac{x_1}{m}, \ldots, \frac{x_s}{m} \right\} \in \gamma_m , \qquad Q = \left\{ \frac{y_1}{n}, \ldots, \frac{y_s}{n} \right\} \in \gamma_n , \; m<n \text{ entraîne,}$$

d'après la définition de γ_n, l'inégalité

$$\rho_s (P, Q) \geqq w(mp) = \operatorname{Max} (w(mp) , \; w(np)) \; .$$

En tenant compte du Lemme 1, on obtient pour $N > M > \alpha_4 = \operatorname{Max} (\alpha_1, \alpha_3)$

$$\mu F = \sum_{n=M}^{N}{}' \mu Z_n \geqq p^{-s} \sum_{n=M}^{N}{}' w^s(pn) \, \varphi^s(n) - p^{6s} \, (\sum_{n=M}^{N} n^s w^s (pn))^2$$

$$> (3p)^{-s} \sum_{n=M}^{N} n^s w^s(pn) - p^{6s} \, (\sum_{n=M}^{N} n^s w^s (pn))^2 - p^{-s} M^{s+1} . w^s (pM) \, .$$

Pour $M > \alpha_5 > \alpha_4$ on a, d'une part,

$$M^{s+1} w^s (pM) < \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) 3^{-2s} \, p^{-7s} \, ;$$

d'autre part, on peut trouver un nombre entier $N > M$ tel que nombre entier $N > M$ tel que

$$\frac{1}{4}\, 3^{-s}\, p^{-7s} < \sum_{n=M}^{N} n^s w^s (p\, n) < \frac{1}{3}\, 3^{-s}\, p^{-7s},$$

d' où

$$\mu F > \frac{1}{4}\, 3^{-2s}\, p^{-8s} - \frac{1}{9}\, 3^{-2s}\, p^{-8s} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) 3^{-2s}\, p^{-8s} = \alpha_2$$

Si $\{cr_1,\dots, cr_s\} \in F$, alors il existe $s + 1$

nombres $n, y_1,\dots, y_s$ tels que

$$(p, n) = 1, \quad M \leqq n \leqq N, \quad o < y_i < np,$$

$$| n\, cr_i - y_i |_p < w\, (n\, p). \qquad (1 \leqq i \leqq s),$$

d' où

$$n > o, \ (p, n) = 1, \ np > r = \text{Max}\, (n, | y_1 |, \dots\dots, | y_s |) \geqq M,$$

$$| n\, cr_i - y_i |_p < w\, (r) \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

L' existence d' un ensemble $F = F\,(M)$ jouissant des propriétés demandées est donc établie pour $M > \alpha_5$, donc, a fortiori, aussi pour $o < M \leqq \alpha_5$

Démonstration du théorème. La série termes décroissants $\sum_{n=1}^{\infty} n^s \lambda^s (n)$ étant supposée divergente, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^s \lambda^s (k\, n)$ diverge pour chaque $k > 0$.

On voit donc sans peine qu'il existe une suite $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^s (na_n) . n^s$ diverge. En posant $w(n) = \lambda\,(na_n)$, on voit que $n^{s+1}\,\omega^s\,(n) = a_n^{-s-1}\,(na_n)^{s+1}\lambda^s(na_n)$ tend en décroissant vers zéro, d'après le Lemme 4, on a donc $\mu\,H\,(w) > 0$.

Soit $\delta > 0$; il existe donc une sphère K_1 d' un certain ordre f telle que

$$\mu\,(H\,(u)\,K_1) > (1-\delta)\,p^{-fs}. \quad \text{Soient}$$

$$K_1, \ldots, K_z \qquad (z = p^{fs})$$

toutes les sphères d'ordre f. Chaque sphère K_l provient de K_1 à l' aide d' une translation $\{r_{1l}, \ldots, r_{sl}\}$,[6] où $0 \leq r_{il} < p^f$; soit $H_l\,(w)$ l'ensemble provenant de $H\,(w)$ par cette translation. Si $\{r_{1l}, \ldots, r_{sl}\} \in H_l\,(\omega)$, alors il existe une infinité de systèmes $n, y_1, \ldots, y_s$ tels que $(p, n) = 1$, $|\,n\,(cr_i - r_{il}) - y_i\,| < w\,(t)$ $(1 \leq i \leq s)$, oú $t = \mathrm{Max}\,(n, |\,y_1\,|, \ldots, |\,y_s\,|)$; si t est assez grand, on a

$$t_1 = \mathrm{Max}\,(n, |\,n\,r_{il} + y_i\,|, \ldots, |\,n\,r_{sl} + y_s\,|) \leq tp^f \leq ta_t,$$

$$|\,ncr_i - (nr_{il} + y_i)\,| < w\,(t) = \lambda\,(t\,a_t) < \lambda\,(t_1) \quad (1 \leq i \leq s)$$

donc $H_l\,(\omega) \subset H\,(\lambda)$, d'où

$$\mu\,H\,(\lambda) \geq \sum_{l=1} \mu\,(K_l\,H_l\,(\omega)) > 1\text{-}\delta, \text{ donc } \mu\,H\,(\lambda) = 1.$$

6) C'est-à-dire: K_1 est l'ensemble de tous les points $\{cr_1 + r_1 l, \ldots, cr_s + r_1 l\}$, où $\{cr_1, \ldots, cr_s\}$ parcourt tous les points de K_1. Evidemment: si l'ensemble B provient de l'ensemble A par une translation, alors borelien B est lui-même un ensemble borelien et $\mu B = \mu A$.

RESUME

La note contient la démonstration d'un théorème métrique sur les approximations diophantiques des nombres p-adiques entiers, analogue à un théorème de M. Khintchine sur les approximations des nombres réels.