Karl Grandjot; Vojtěch Jarník; Edmund Landau; J. E. Littlewood

Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen

Ann. di math., Ser. 4, B. 6 (1928--29), 7 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500715

Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

Von KARL GRANDJOT (in Paris), VOJTĚCH JARNÍK (in Prag), EDMUND LANDAU (in Göttingen) und JOHN EDENSOR LITTLEWOOD (in Cambridge).

EINLEITUNG.

Herr FATOU [1] hat zuerst bemerkt, dass die für $0 < x < 2\pi$ offenbar konvergente trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \log n}$$

bei $x \to 0$ keinem endlichen Grenzwert zustrebt.

Der (FATOUsche) Originalbeweis ist nicht so einfach wie der folgende, der zeigt, dass die Funktion gegen $+\infty$ strebt.

Durch ABELsche partielle Summation erhält man bekanntlich: Aus $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_s \geqq 0$, $\sum_{r=1}^{t} b_r \leqq B$ für $1 \leqq t \leqq s$ folgt

$$\sum_{r=1}^{s} \varepsilon_r b_r \leqq \varepsilon_1 B. \tag{1}$$

Ferner ist bekanntlich für $0 < x < 2\pi$, $u < v$

$$\sum_{n=u+1}^{v} \cos nx = \frac{-\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(v+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{2}$$

also

$$\left|\sum_{n=u+1}^{v} \cos nx\right| \leqq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

(1) *Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 142 (1906), S. 765-767.

Daher ist für jedes $m > 1$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \log n} \geqq \sum_{n=2}^{m} \frac{\cos nx}{n \log n} - \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cdot (m+1) \log (m+1)}.$$

Für $m = \left[\frac{\pi}{3x}\right]$ ist also

$$f(x) \geqq \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n \log n} + o(1) \to \infty.$$

Offenbar ergibt sich wörtlich ebenso der Satz: Aus $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots$, $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \to \infty.$$

In der Tat ist für $0 < x \leqq \frac{\pi}{3}$, $m = \left[\frac{\pi}{3x}\right]$, $s_n = a_1 + \ldots + a_n$

$$f(x) \geqq \frac{1}{2} s_m - \frac{a_{m+1}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} s_m \left(1 - \frac{2a_{m+1}}{s_m \sin \frac{x}{2}}\right).$$

In dieser Aussage kann offenbar die Voraussetzung $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ durch die schwächere

$$a_{n+1} = o\left(\frac{s_n}{n}\right) \tag{4}$$

ersetzt werden. Und statt (4) genügt augenscheinlich auch

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < \frac{\pi}{12}; \tag{5}$$

denn

$$\frac{2a_{m+1}}{s_m \sin \frac{x}{2}} \sim \frac{12 m a_{m+1}}{\pi s_m}.$$

Leicht erkennt man ferner, dass (5) durch

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < \frac{1}{2}$$

ersetzt werden kann. Denn nach einer bekannten TSCHEBYSCHEFschen Ungleichung ist für $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$, $m = \left[\frac{\pi}{2x}\right]$

$$f(x) \geqq \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx - \frac{a_{m+1}}{\sin \frac{x}{2}} \geqq \frac{s_m}{m} \sum_{n=1}^{m} \cos nx - \frac{a_{m+1}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\frac{s_m}{2m}\left(-\sin\frac{x}{2} + \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right) - a_{m+1}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\frac{s_m}{2m}(1 + o(1)) - a_{m+1}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Andererseits ist offenbar, wenn

(6) $$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots, \quad a_n \to 0, \quad s_n \to \infty,$$

stets

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} \leqq 1.$$

Es entstehen nun die fünf Fragen:

1) Folgt aus (6) allein

(7) $$f(x) \to \infty ?$$

2) Wenn nein, folgt (7) etwa aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < 1 ?$$

3) Wenn nein, welches ist die (dann offenbar existierende und dem Intervall $\frac{1}{2} \leqq P < 1$ angehörende) Weltkonstante P, so dass (7) zwar aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < P$$

folgt, jedoch für kein $P' > P$ aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < P' ?$$

4) Folgt (7) schon aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} \leqq P ?$$

5) Ist $P = \frac{1}{2}$?

Wir werden in dieser Abhandlung alle diese Fragen beantworten und finden:

Ad 1) Nein.

Ad 2) Nein.

Ad 3) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^P \sin \pi y \, dy = 0.$

Ad 4) Nein.

Ad 5) Nein.

§ 1.

Es sei

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^\alpha \sin \pi y \, dy \quad \text{für} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Offensichtlich fällt $I(\alpha)$ monoton für wachsendes α; denn

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^\alpha \log y \sin \pi y \, dy = -\int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^\alpha \,|\log y \sin \pi y\,| \, dy < 0.$$

Ferner ist

$$I(0) = \frac{1}{\pi} > 0, \quad I(1) = -\frac{1}{\pi^2} < 0.$$

Also gibt es genau ein P mit

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^P \sin \pi y \, dy = 0, \quad 0 < P < 1.$$

Dabei ist $P > \frac{1}{2}$. Denn für $0 < y \leqq \frac{1}{2}$ ist

$$y < \frac{3}{4} < 1,$$

$$(\sqrt{y} + \sqrt{1-y})^2 = 1 + 2\sqrt{y(1-y)} > 1 + \sqrt{y} > 1 + y = (\sqrt{1+y})^2,$$

also

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{y}+\sqrt{1-y}-\sqrt{1+y})\sin \pi y\,dy>0.$$

§ 2.

Satz 1: Aus (6) *zusammen mit*

(8) $$\gamma=\limsup_{n=\infty}\frac{na_{n+1}}{s_n}<P$$

folgt

$$f(x)\to\infty \quad \textit{bei} \quad x\to 0.$$

Beweis: Für $x>0$, $m=\left[\frac{\pi}{2x}\right]$ und $v\geqq 3m+1$ ist nach (2), gleichmässig in v,

$$\sum_{n=3m+1}^{v}\cos nx=\frac{-\sin\left(3m+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(v+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\geqq\frac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+O(x)\right)-1}{2\sin\frac{x}{2}}=O(x).$$

Nach (1) ist also

$$\sum_{n=3m+1}^{\infty}a_n\cos nx\geqq O(a_{3m+1}x)=O(1),$$

und es genügt,

$$\sum_{n=1}^{3m}a_n\cos nx\to\infty$$

zu zeigen.

Nach (8) ist für $n\geqq n_0$, wenn wir $\varkappa=\frac{\gamma+P}{2}$ setzen,

$$\frac{s_n}{n^\varkappa}-\frac{s_{n+1}}{(n+1)^\varkappa}=\frac{s_n}{n^\varkappa}-\frac{s_n+a_{n+1}}{(n+1)^\varkappa}>s_n\left(\frac{1}{n^\varkappa}-\frac{1}{(n+1)^\varkappa}-\frac{\varkappa}{(n+1)^{\varkappa+1}}\right)>0.$$

Daher ist, wenn $s_0 = 0$ und $s_\tau = s_{[\tau]}$ für $\tau \geqq 0$ definiert wird,

$$\sum_{n=1}^{3m} a_n \cos nx = \sum_{n=1}^{3m} (s_n - s_{n-1}) \cos nx = \sum_{n=1}^{3m} s_n (\cos nx - \cos(n+1)x) + s_{3m} \cos(3m+1)x$$

$$= x\int_0^{3m+1} s_\tau \sin \tau x \, d\tau + s_{3m} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + o(1)\right) = x \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \frac{s_\tau}{\tau^\varkappa} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + o(s_{3m})$$

$$\geqq O(x) + x \frac{s_{\frac{\pi}{x}}}{\left(\frac{\pi}{x}\right)^\varkappa} \int_{n_0}^{\frac{\pi}{x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + x \frac{s_{\frac{\pi}{x}}}{\left(\frac{\pi}{x}\right)^\varkappa} \int_{\frac{\pi}{x}}^{\frac{3\pi}{2x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + o\left(s_{\frac{\pi}{x}}\right)$$

$$= s_{\frac{\pi}{x}} \left(\frac{x^{1+\varkappa}}{\pi^\varkappa} \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + o(1) \right) \to \infty$$

wegen

$$\frac{x^{1+\varkappa}}{\pi^\varkappa} \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau = \pi \int_0^{\frac{3}{2}} y^\varkappa \sin \pi y \, dy = \pi I(\varkappa) > 0.$$

§ 3.

Satz 2: Es gibt ein Beispiel mit (6), $\gamma = P$ *und* $f(x)$ *nicht* $\to \infty$ *bei* $x \to 0$.

Beweis: Es sei

$$k_0 = 1, \quad k_q = 2^{4^q}, \quad c_q = \frac{1}{k_{q-1}} \quad \text{und} \quad P_q = P + \frac{1-P}{q} \quad \text{für} \quad q \geqq 1,$$

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{c_q}{n^{1-P_q}} \quad \text{für} \quad k_{q-1} < n \leqq k_q.$$

Dann ist

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots, \quad a_n \to 0.$$

Für $k_{q-1} < n \leqq k_q$ ist

$$\frac{n a_{n+1}}{s_n} \leqq \frac{n \frac{c_q}{n^{1-P_q}}}{c_q \left(\frac{1}{1^{1-P_q}} + \ldots + \frac{1}{n^{1-P_q}} \right)} \leqq \frac{n^{P_q}}{\int_1^n \frac{d\tau}{\tau^{1-P_q}}} = \frac{n^{P_q}}{\frac{1}{P_q}(n^{P_q} - 1)} \to P;$$

daher ist

$$\gamma \leqq P.$$

Nun sei $x = x_q = \frac{3\pi}{2k_q}$. Wegen $I'(\alpha) < 0$ ist $-I(P_q) > \frac{W}{q}$, wo W eine positive absolute Konstante ist. Daher ist $\left(\text{man beachte } P_q > P > \frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{k_{q-1}} a_n \cos nx \leqq k_{q-1} = 2^{4^{q-1}} = 2^{-4^{q-1}}\, 2^{\frac{1}{2}4^q} = c_q \sqrt{k_q} = o(-c_q k_q^{P_q} I(P_q)),$$

da für alle grossen q offenbar $k_q^{P_q - \frac{1}{2}} > k_q^{P - \frac{1}{2}} > q^2$; man merke sich

$$-c_q k_q^{P_q} I(P_q) \to \infty.$$

Ferner ist nach (1) und (3)

$$\sum_{n=k_q+1}^{\infty} a_n \cos nx \leqq O\left(\frac{a_{k_q+1}}{x}\right) = O(k_q c_{q+1}) = O(1).$$

Schliesslich ist

$$\sum_{n=k_{q-1}+1}^{k_q} a_n \cos nx = c_q \sum_{n=k_{q-1}+1}^{k_q} \frac{\cos nx}{n^{1-P_q}} \leqq c_q \sum_{n=1}^{k_q} \frac{\cos nx}{n^{1-P_q}},$$

da $nx \leqq \frac{\pi}{2}$ für $n \leqq k_{q-1}$ wegen $k_{q-1} < \frac{k_q}{3}$; und hierin ist, da $\frac{\cos v}{v^{1-P_q}}$ für $0 < v \leqq \frac{3\pi}{2}$ in zwei Abteilungen monoton ist,

$$\sum_{n=1}^{k_q} \frac{\cos nx}{n^{1-P_q}} = \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \frac{\cos \tau x}{\tau^{1-P_q}}\, d\tau + O(1) = \frac{\pi^{1+P_q}}{P_q} x^{-P_q} I(P_q) + O(1).$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$f(x) \leqq \frac{\pi^{1+P}}{P} c_q x^{-P_q} I(P_q)(1 + o(1)),$$

$$\liminf_{x=0} f(x) = -\infty. \tag{9}$$

Aus (9) folgt 1) die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 2) $f(x)$ nicht $\to +\infty$ bei $x \to 0$, also 3) $\gamma \geqq P$, also 4) $\gamma = P$.