Vojtěch Jarník
Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass

Matem. sb. 36 (1929), pp. 371--382

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500709

Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass.

Von Vojtěch Jarnik in Prag.

§ 1. Einleitung.

Für jede reelle Zahl Θ mit $0 \leqq \Theta \leqq 1$ (diese letztere Einschränkung ist natürlich unwesentlich) hat die Ungleichung

$$\left| \Theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} b^2}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen a, b. Bekanntlich gibt es Zahlen Θ, für welche die Konstante $1 : \sqrt{5}$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden darf [1]). Andererseits gibt es auch irrationale Zahlen, die sich «beliebig gut» durch rationale Zahlen approximieren lassen. Man kann sogar beweisen: zu jeder für $x > 0$ definierten und abnehmenden Funktion $\varphi(x)$ mit $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = 0$ lässt sich eine irrationale Zahl Θ mit $0 < \Theta < 1$ angeben, so dass die Ungleichung

$$\left| \Theta - \frac{a}{b} \right| < c \, \frac{\varphi(b)}{b^2} \quad (c \text{ konstant})$$

für $c = 1$ unendlich viele Lösungen in ganzen a, b besitzt, für jedes $c < 1$ dagegen höchstens endlich viele solche Lösungen. Der (triviale) Beweis verläuft wie folgt:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varphi(x) < \frac{1}{2}$. Jeder unendliche regelmässige Kettenbruch

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + \cdots$$

definiert eine irrationale Zahl Θ, wo $0 < \Theta < 1$. Es sei $p_n : q_n$ ihr n-ter Näherungsbruch in irreduzibler Form; dann ist [2])

$$q_{n+1} = \beta_{n+1} q_n + q_{n-1},$$

$$\frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)} < \left| \Theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

---

[1]) Vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, B. G. Teubner, 1913 (weiter als Perron zitiert), S. 49, Satz 15.

[2]) Perron, S. 43, Satz 10 und S. 44, Formel (12).

Wir wählen die ganzen positiven Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sukzessive so, dass

$$\beta_{n+1}\varphi(q_n) > 1, \ \lim_{n=\infty} \beta_{n+1}\varphi(q_n) = 1;$$

dann ist

$$q_{n+1} > \frac{q_n}{\varphi(q_n)}, \ q_{n+1} + q_n \backsim \frac{q_n}{\varphi(q_n)},$$

also

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{\varphi(q_n)}{q_n^2}, \quad \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| \backsim \frac{\varphi(q_n)}{q_n^2}.$$

Gesetzt nun, es wäre für ein $c < 1$ und für unendlich viele Paare von ganzen Zahlen a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots \ b_n \to \infty)$

$$\left|\theta - \frac{a_n}{b_n}\right| < c\frac{\varphi(b_n)}{b_n^2}; \tag{1}$$

dann wäre wegen $c\varphi(b_n) < \frac{1}{2}$ sicher $a_n : b_n$ einem Näherungsbruch von θ gleich [3]; also $a_n = l_n p_m$, $b_n = l_n q_m$, wo l_n ganz und $m \to \infty$, wenn $n \to \infty$.

Also wäre

$$\left|\theta - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\theta - \frac{p_m}{q_m}\right| \backsim \frac{\varphi(q_m)}{q_m^2} \geqq \frac{\varphi(b_n)}{b_n^2},$$

im Widerspruch gegen (1).

Es gibt also zu jeder solchen Funktion $\varphi(x)$ Zahlen θ, deren Annäherung durch rationale Zahlen *genau* durch die Funktion $\varphi(x) : x^2$ beschrieben ist.

Es entsteht nun weiter die Frage, wie «gross» die Menge derjenigen Zahlen θ mit $0 \leqq \theta \leqq 1$ ist, die eine *gegebene* Näherung durch rationale Zahlen gestatten. Man muss freilich präzisieren, was man unter der «Grösse» der entsprechenden Menge verstehen will. Hier bietet sich nun von selbst der Lebesgueschе Massbegriff an; und in dieser Richtung hat Herr A. Khintchine folgendes Resultat erhalten, welches die Frage völlig erschöpft [4]:

Für $x > 0$ sei $f(x)$ stetig, positiv und $xf(x)$ abnehmend. Die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{f(b)}{b}$$

hat für fast alle [5] θ eine unendliche Anzahl von Lösungen in ganzen a, b, wenn $\int^{\infty} f(x)dx$ divergiert und hat für fast alle θ höchstens endlich viele Lösungen in ganzen a, b, wenn $\int^{\infty} f(x)dx$ konvergiert.

---

[3]) Perron, S. 45, Satz 11.

[4]) Einige Sätze über Kettenbrüche usw., Mathem. Annalen, 92 (1924), S. 115—125; vgl. auch Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Mathem. Zeitschr, 24 (1926), S. 706—714.

[5]) «Fast alle» bedeutet: alle bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Mass Null.

Nach diesem schönen Satz hat z. B. die Menge M_α aller Zahlen θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$, für welche die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{1}{b^\alpha}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen a, b hat, für $\alpha > 2$ das Mass Null. Man wird aber trotzdem vermuten, dass z. B. die Menge M_3 in einer gewissen Hinsicht «viel grösser» sein muss als die Menge M_4. Zu einer solchen Klassifikation von Mengen vom Lebesgue'schen Mass Null eignet sich nun der Mass-und Dimensionsbegriff des Herrn Hausdorff [6]; das Ziel dieser Note ist es eben, auf einem besonders einfachen Fall—nämlich genau für die Mengen M_α—die Bedeutung dieses Begriffes für derartige Fragen zu zeigen. Der Leser braucht von der Hausdorff'schen Theorie nichts zu kennen.

§ 2. Definitionen und der Hauptsatz.

Wir denken uns eine reelle Zahl s gegeben. Es sei E eine Menge von reellen Zahlen; wir überdecken E mit höchstens abzählbar vielen Intervallen, deren Längen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ seien und bilden die Summe $\sum l_i^s$ (diese Summe möge $+\infty$ bedeuten, wenn $\sum l_i^s$ divergiert). Wenn $\rho > 0$, so sei $L_{s,\rho}(E)$ die untere Grenze aller solchen Summen $\sum l_i^s$, wo $l_i \leqq \rho$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Wenn ρ abnimmt, so nimmt $L_{s,\rho}(E)$ offenbar nicht ab, also existiert der Grenzwert [7])

$$\lim_{\rho=0} L_{s,\rho}(E) = L_s(E) \quad (0 \leqq L_s(E) \leqq +\infty).$$

Aus $s < s'$ folgt $L_{s',\rho}(E) \leqq \rho^{s'-s} L_{s,\rho}(E)$; wenn also $L_s(E) < \infty$, so ist $L_{s'}(E) = 0$. Weiter ist offenbar $L_s(E) = 0$ für $s > 1$ (man denke sich z. B. die ganze reelle Gerade durch abzählbar viele Intervalle überdeckt, deren Längen $l_1, l_2, \ldots$ durch $l_i = \rho : i$ gegeben sind), $L_s(E) = +\infty$ für $s < 0$, falls E nicht leer ist.

Zu jeder nichtleeren Menge E von reellen Zahlen gibt es also eine Zahl σ $(0 \leqq \sigma \leqq 1)$, so dass $L_{\sigma+\varepsilon}(E) = 0$, $L_{\sigma-\varepsilon}(E) = \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$. Diese Zahl soll die Dimension der Menge E heissen und mit $\dim E$ bezeichnet werden [8]).

Aus $E \subset E'$ folgt offenbar $\dim E \leqq \dim E'$. Weiter ist es offenbar gleichgültig, ob wir bei der Überdeckung von E nur offene oder nur abgeschlossene Intervalle oder beides zugleich zulassen.

Es sei nun $\alpha > 2$; mit M_α bezeichnen wir die Menge aller Zahlen θ mit $0 \leqq \theta \leqq 1$, für welche die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{1}{b^\alpha}$$

---

6) F. Hausdorff. Dimension und äusseres Mass, Mathem. Annalen, 79 (1919), S. 157—179.

7) Wenn $s = 1$, so ist $L_1(E)$ einfach das äussere Lebesguesche Mass von E.

8) Die Mengenfunktion $L_s(E)$ ist ein äusseres Mass im Sinne des Herrn C. Carathéodory (Über das lineare Mass usw., Göttinger Nachrichten, 1914, S. 404—426; vgl. auch Hausdorff, l. c. 6)). Wir werden von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen.

unendlich viele Lösungen in ganzen a, b besitzt. Das Ziel dieser Note ist der Satz:

$$\dim M_\alpha = \frac{2}{\alpha}.$$

Dass $\dim M_\alpha \leqq \frac{2}{\alpha}$, ist fast trivial. Wir konstruieren nämlich zu jedem Zahlenpaar a, b, wo $0 \leqq a \leqq b$, a ganz, $b > 0$ und ganz, das abgeschlossene Intervall

$$< \frac{a}{b} - \frac{1}{b^\alpha}, \ \frac{a}{b} + \frac{1}{b^\alpha} >. \tag{2}$$

M_α ist offenbar die Menge aller Punkte, die in unendlich vielen von diesen Intervallen liegen. Es sei $B > 1$; diejenigen von unseren Intervallen (2), für welche $b > B$ ist, überdecken die Menge M_α. Wenn nun $s > \frac{2}{\alpha}$, so ist die Summe der s-ten Potenzen der Längen dieser Intervalle gleich

$$2^s \sum_{b>B} \frac{b+1}{b^{\alpha s}} = O(B^{2-\alpha s}) = o(1).$$

Daher ist $L_s(M_\alpha) = 0$ für $s > \frac{2}{\alpha}$, d. h.

$$\dim M_\alpha \leqq \frac{2}{\alpha}.$$

Die ganze Schwierigkeit liegt im Beweis der Ungleichung $\dim M_\alpha \geqq \frac{2}{\alpha}$, der im nächsten § durchgeführt werden soll.

§ 3. $\dim M_\alpha \geqq \frac{2}{\alpha}$.

1. Im folgenden seien zwei Zahlen α, s fest gegeben, $0 < s < \frac{2}{\alpha} < 1$. Wir führen folgende Bezeichnung ein: wenn $\mathfrak{U}$ ein System von höchstens abzählbar vielen Intervallen auf der Geraden der reellen Zahlen ist, deren Längen l_1, $l_2, \ldots$ heissen, so setzen wir

$$\Lambda_s(\mathfrak{U}) = \sum_i l_i^s.$$

2. Wir wählen nun für das folgende eine feste Folge von Primzahlen

$$q_1, q_2, q_3, \ldots,$$

die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Die Anzahl der Primzahlen, die $\geqq q_n$ und $< 2q_n$ sind, ist grösser als $\frac{1}{2}\frac{q_n}{\log q_n}$ und kleiner als $\frac{3}{2}\frac{q_n}{\log q_n}$;

b) $e^{\log^2 q_n} < q_{n+1} < 2e^{\log^2 q_n}$;

c) $2q_n < q_{n+1}$;

d) $\frac{2}{2^\alpha q_n^\alpha} > \frac{3}{q_{n+1}}$;

e) $\frac{2}{q_n^\alpha} < \frac{1}{4q_n^2}$.

Die Bedingungen a), b) sind offenbar erfüllbar, da $\pi(x)$, die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$, bekanntlich der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x} \log x = 1$$

genügt [9]). Die Bedingungen c), d), e) sind dann von selbst erfüllt, wenn wir q_1 hinreichend gross wählen (was offenbar erlaubt ist).

3. Für spätere Zwecke beweisen wir [10]):

$$\lim_{n=\infty} \frac{q_n^{2-\alpha s}}{(3\cdot 2^\alpha)^n (q_1 q_2 \cdots q_{n-1})^{\alpha-2} \log q_1 \log q_2 \cdots \log q_n} \cdot \frac{1}{\log^s q_n \log^s q_{n+1}} = +\infty.$$

Wegen $2-\alpha s > 0$ genügt zu zeigen: für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$(3\cdot 2^\alpha)^n = O(q_n^\varepsilon), \quad q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = O(q_n^\varepsilon), \quad \log q_{n+1} = O(q_n^\varepsilon). \tag{3}$$

Beweis: nach **2**b) ist $\frac{q_{n+1}}{q_n} \to \infty$, also $e^n = O(q_n^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$; also gilt die erste Gleichung in (3). Weiter ist für $n > 2$

$$q_1 q_2 \cdots q_{n-1} < q_{n-1}^{n-1} = e^{(n-1)\log q_{n-1}} < q_{n-1}^{\varepsilon \log q_{n-1}} < q_n^\varepsilon$$

für $\varepsilon > 0$, $n > n_0(\varepsilon)$; endlich ist nach **2**b) $\log q_{n+1} \backsim \log^2 q_n = O(q_n^\varepsilon)$.

4. Wir konstruieren im abgeschlossenen Intervall $< 0, 1 >$ abzählbar viele abgeschlossene Intervalle folgendermassen: Um jeden Punkt $\frac{a}{b}$ als Mittelpunkt, wo $0 < a < b$, a ganz, b Primzahl, $q_1 \leqq b < 2q_1$, konstruieren wir ein abgeschlossenes Intervall von der Länge $2 : b^\alpha$. Für zwei verschiedene solche Punkte $a : b$, $a' : b'$ ist nach **2**e)

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} \right| \geqq \frac{1}{bb'} > \frac{1}{4q_1^2} > \frac{2}{q_1^\alpha} \geqq \frac{1}{b^\alpha} + \frac{1}{b'^\alpha},$$

also sind je zwei solche Intervalle fremd. Ihre Anzahl ist nach **2**a) grösser als

$$(q_1 - 1)\frac{1}{2}\frac{q_1}{\log q_1} > \frac{1}{3\cdot 2^\alpha}\frac{q_1^2}{\log q_1}.$$

Diese Intervalle nennen wir «Intervalle erster Ordnung».

---

9) Übrigens könnte man auch mit den elementaren Ungleichungen (vgl. z.B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie (S. Hirzel 1927), Bd. 1, S. 66)

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x} \log x > 0, \quad \limsup_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x} \log x < \infty$$

auskommen, man müsste aber in a), b) statt $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 2 eventuell andere Konstanten wählen.

10) $3\cdot 2^\alpha$ bedeutet: drei *mal* zwei hoch α $\left(\text{und nicht } \left(\frac{32}{10}\right)^\alpha\right)$.

5. Wenn schon für ein ganzes $n > 1$ paarweise fremde abgeschlossene Intervalle $(n-1)$-ter Ordnung definiert sind, deren Längen $\leqq \frac{2}{q_{n-1}^{\alpha}}$ und $> \frac{2}{2^{\alpha} q_{n-1}^{\alpha}}$ sind, definieren wir die Intervalle n-ter Ordnung folgendermassen:

Um jeden Punkt $\frac{a}{b}$ als Mittelpunkt, wo $0 < a < b$, a ganz, b Primzahl, $q_n \leqq b < 2q_n$, konstruieren wir ein abgeschlossenes Intervall von der Länge $2 : b^{\alpha}$. Ein solches Intervall wollen wir dann und nur dann ein «Intervall n-ter Ordnung» nennen, wenn es ganz in einem Intervall $(n-1)$-ter Ordnung liegt. Diese Intervalle sind paarweise fremd, denn für je zwei verschiedene solche Punkte $a : b$, $a' : b'$ ist nach **2e**)

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}\right| \geqq \frac{1}{bb'} > \frac{1}{4q_n^2} > \frac{2}{q_n^{\alpha}} \geqq \frac{1}{b^{\alpha}} + \frac{1}{b'^{\alpha}}.$$

6. Die Anzahl der Intervalle n-ter Ordnung, die in einem Intervall $(n-1)$-ter Ordnung liegen, ist nach **2a**) d) mindestens

$$\left[\left(\frac{2}{2^{\alpha} q_{n-1}^{\alpha}} - \frac{2}{q_n^{\alpha}}\right) q_n - 1\right] \frac{1}{2} \frac{q_n}{\log q_n} >$$

$$> \left(\frac{2q_n}{2^{\alpha} q_{n-1}^{\alpha}} - 2\right) \frac{1}{2} \frac{q_n}{\log q_n} > \frac{1}{3 \cdot 2^{\alpha}} \frac{q_n^2}{q_{n-1}^{\alpha} \log q_n}$$

(also > 0, für grosse n sogar > 1) und höchstens

$$\left(\frac{4q_n}{q_{n-1}^{\alpha}} + 1\right) \frac{3}{2} \frac{q_n}{\log q_n} < 8 \frac{q_n^2}{q_{n-1}^{\alpha} \log q_n}.$$

Die Anzahl aller Intervalle n-ter Ordnung ist daher für $n > 1$ mindestens

$$\frac{1}{(3 \cdot 2^{\alpha})^n} \frac{(q_1 q_2 \cdots q_n)^2}{(q_1 q_2 \cdots q_{n-1})^{\alpha} \log q_1 \log q_2 \cdots \log q_n}.$$

7. Die Vereinigungsmenge aller Intervalle n-ter Ordnung ist eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge V_n von $\langle 0, 1 \rangle$. Es ist $V_n \subset V_{n-1}$; daher ist auch die abgeschlossene Menge

$$P_{\alpha} = V_1 V_2 V_3 \cdots$$

nichtleer. Offenbar ist $P_{\alpha} \subset M_{\alpha}$; denn jeder Punkt Θ von P_{α} liegt in $\langle 0, 1 \rangle$ und zu jedem n gibt es ein Intervall n-ter Ordnung, in welchem Θ liegt; also gibt es zwei ganze Zahlen a, b, so dass

$$b \geqq q_n, \quad \left|\Theta - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{1}{b^{\alpha}}.$$

Es genügt also vollständig,

$$\dim P_{\alpha} \geqq \frac{2}{\alpha} \tag{4}$$

zu beweisen.

8. P_α ist perfekt (was wir übrigens nicht brauchen werden); denn es sei Θ ein Punkt von P_α; es sei I_n ein Intervall n-ter Ordnung, in welchem Θ liegt; wenn n hinreichend gross ist, so liegen in I_n mindestens zwei Intervalle $(n+1)$-ter Ordnung (nach 6), also mindestens zwei verschiedene Punkte von P_α.

9. Wir wählen nun eine ganze, positive Zahl n. Mit $\mathfrak{U}_n$ bezeichnen wir ein beliebiges, höchstens abzählbares System von offenen Intervallen, die die Menge P_α überdecken und deren Längen $\leqq \frac{1}{10q_n^2}$ sind.

Die untere Grenze von $A_s(\mathfrak{U}_n)$ (vgl. **1.**) für alle solchen $\mathfrak{U}_n$ ist eben die im § 2 eingeführte Zahl $L_{s,\rho}(P_\alpha)$ für $\rho = \frac{1}{10q_n^2}$. Nach dem Borelschen Überdeckungssatz (P_α ist beschränkt und abgeschlossen) können wir uns bei der Berechnung von $L_{s,\rho}(P_\alpha)\left(\rho=\frac{1}{10q_n^2}\right)$ auf Systeme $\mathfrak{U}_n$ beschränken, die aus endlich vielen Intervallen bestehen; weiter dürfen wir jene Intervalle aus $\mathfrak{U}_n$ weglassen, die keinen Punkt mit P_α gemein haben; und endlich können wir die Intervalle von $\mathfrak{U}_n$ abschliessen, indem wir ihre Endpunkte zu ihnen rechnen.

10. Es ist also $L_{s,\rho}(P_\alpha)$ gleich der unteren Grenze der Zahlen $A_s(\mathfrak{B}_n)$, wo $\mathfrak{B}_n$ ein beliebiges System von abgeschossenen Intervallen ist mit folgenden Eigenschaften: $\mathfrak{B}_n$ besteht aus endlich vielen abgeschlossenen Intervallen, die P_α überdecken und deren Längen $\leqq \frac{1}{10q_n^2}$ sind; jedes von diesen Intervallen enthält mindestens einen Punkt von P_α *im Inneren.*

11. Der Abstand je zweier Intervalle n-ter Ordnung ist grösser als

$$\frac{1}{4q_n^2}-\frac{2}{q_n^\alpha}>\frac{1}{10q_n^2} \text{ für[11] } n>c_1>1.$$

Es sei nun stets $n>c_1$. Also hat jedes Intervall von $\mathfrak{B}_n$ mit *genau* einem Intervall n-ter Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt.

Es sei I ein Intervall von $\mathfrak{B}_n$; dann gibt es einen Punkt von P_α, der *im Inneren* von I liegt; also gibt es ein $m>n$, so dass I ein ganzes Intervall m-ter Ordnung enthält (m darf übrigens beliebig gross gewählt werden); also enthält I nach **6.** mindestens zwei Intervalle $(m+1)$-ter Ordnung, wenn $m>c_2$ gewählt wurde. Da andererseits I mit *genau* einem Intervall n-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat, so gibt es eine Zahl $k>n$ mit folgender Eigenschaft: k ist die kleinste unter allen Zahlen m, für welche I mit mindestens zwei Intervallen m-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat. Wir wollen sagen, dass das Intervall I zur Zahl k gehört.

12. Wenn nun ein Intervall I von $\mathfrak{B}_n$ zur Zahl k gehört, so ist seine Länge nach **11.** grösser als

$$\frac{1}{4q_k^2}-\frac{2}{q_k^\alpha}>\frac{1}{10q_k^2}.$$

Es seien $A_1, A_2, \cdots A_t$ diejenigen Intervalle k-ter Ordnung, mit welchen I gemeinsame Punkte hat, wobei A_i links von A_{i+1} liegen möge.

---

11) $c_1, c_2, \ldots$ sollen positive Zahlen sein, die nur von s, α und von der Folge $q_1, q_2, \ldots$ abhängen.

Es sei a der linke Endpunkt von A_1, b der rechte Endpunkt von A_t; da die Länge von A_1 und A_t höchstens $\frac{2}{q_k^\alpha} < \frac{1}{20 q_k^2}$ beträgt, wenn $k > c_3 > c_1$ (also wenn $n > c_3 > c_1$), so ist die Länge von $\bar{I} = \langle a, b \rangle$ höchstens zweimal so gross wie die Länge von I, wenn $n > c_3$. Es sei nun stets $n > c_3$. Weiter ist jeder Punkt von P_α, der in I liegt, auch in $\bar{I}$ enthalten. Wenn wir also im Überdeckungssystem $\mathfrak{B}_n$ jedes Intervall I durch das entsprechende $\bar{I}$ ersetzen, bekommen wir wieder ein Überdeckungssystem $\mathfrak{W}_n$ von P_α, für welches $\Lambda_s(\mathfrak{W}_n) \leqq 2^s \Lambda_s(\mathfrak{B}_n)$.

13. Wir wollen daher im folgenden Überdeckungssysteme $\mathfrak{W}_n$ folgender Art betrachten: $\mathfrak{W}_n$ ist ein beliebiges System von endlichvielen abgeschlossenen Intervallen, die P_α überdecken und folgende Eigenschaft besitzen: jedes Intervall I aus $\mathfrak{W}_n$ gehört zu einer ganzen Zahl $k > n$ im folgenden Sinn: $I = \langle \gamma, \beta \rangle$ (wo $\gamma < \beta$) ist Teilmenge eines Intervalles $(k-1)$-ter Ordnung, γ ist der linke Endpunkt eines Intervalls k-ter Ordnung, β ist der rechte Endpunkt eines anderen Intervalls k-ter Ordnung.

14. Nach **12.** ist $2^s L_{s,\varrho}(P_\alpha)$ $\left(\varrho = \frac{1}{10 q_n^2}\right)$ mindestens gleich der unteren Grenze der Zahlen $\Lambda_s(\mathfrak{W}_n)$.

Wenn nun $B_1, B_2, \ldots$ die Intervalle n-ter Ordnung sind, so zerfällt $\mathfrak{W}_n$ in Teilsysteme $\mathfrak{W}_n(B_i)$, wo $\mathfrak{W}_n(B_i)$ dieselben Eigenschaften hat, die wir in **13** von $\mathfrak{W}_n$ verlangten, nur dass $\mathfrak{W}_n(B_i)$ nicht die Menge P_α, sondern nur den Durchschnitt $P_\alpha \cdot B_i$ überdeckt.

Die Anzahl der Teilsysteme $\mathfrak{W}_n(B_i)$ ist nach **6.** mindestens

$$\frac{1}{(3\cdot 2^\alpha)^n} \frac{(q_1 q_2 \cdots q_n)^2}{(q_1 q_2 \cdots q_{n-1})^\alpha \log q_1 \log q_2 \cdots \log q_n}$$

und

$$\Lambda_s(\mathfrak{W}_n) = \sum_i \Lambda_s(\mathfrak{W}_n(B_i)).$$

15. Es sei nun B ein Intervall n-ter Ordnung. Wir wollen eine untere Schranke für $\Lambda_s(\mathfrak{W}_n(B))$ angeben. Es seien $I_{k,1}, I_{k,2}, \cdots, I_{k,v_k}$ diejenigen Intervalle von $\mathfrak{W}_n(B)$, die zur Zahl k gehören (es sind freilich nur endlich viele von den Zahlen v_k von Null verschieden); dabei ist $k \geqq n+1$. Die Anzahl der Intervalle k-ter Ordnung, die in $I_{k,i}$ enthalten sind, sei $t_{k,i}$; also ist $t_{k,i}$ ganz, $t_{k,i} > 1$. Die Länge von $I_{k,i}$ ist grösser als

$$\frac{t_{k,i} - 1}{4 q_k^2} \geqq \frac{t_{k,i}}{8 q_k^2}.$$

Also ist

$$\Lambda_s(\mathfrak{W}_n(B)) \geqq \frac{1}{8^s} \sum_{k,i} \frac{t_{k,i}^s}{q_k^{2s}}. \tag{5}$$

Andererseits ist $I_{k,i}$ Teilmenge eines Intervalls $(k-1)$-ter Ordnung, also ist nach **6.**

$$t_{k,i} \leqq 8 \frac{q_k^2}{q_{k-1}^\alpha \log q_k}. \tag{6}$$

16. Es sei k_0 die grösste Zahl, zu welcher ein Intervall in $\mathfrak{W}_n(B)$ gehört. Ich behaupte: jedes Intervall k_0-ter Ordnung, welches in B liegt, ist Teilmenge eines Intervalls aus $\mathfrak{W}_n(B)$. Denn es sei C ein Intervall k_0-ter Ordnung, welches in B liegt. In C liegt ein Punkt x von P_α; also muss es ein Intervall $I_{k,i}$ aus $\mathfrak{W}_n(B)$ geben, das x enthält. Weil aber $I_{k,i}$ einen Punkt mit C gemein hat und $k \leqq k_0$ ist, so ist C Teilmenge von $I_{k,i}$, w. z. b. w.

17. Die Intervalle $I_{n+1,i}$ $(i=1, 2, \ldots v_{n+1})$ überdecken höchstens

$$\sum_i t_{n+1,i}$$

Intervalle $(n+1)$-ter Ordnung. Da es in B nach **6.** mindestens

$$\frac{1}{3\cdot 2^\alpha}\frac{q_{n+1}^2}{q_n^\alpha \log q_{n+1}}$$

Intervalle $(n+1)$-ter Ordnung gibt, so ist entweder

$$1-\frac{3\cdot 2^\alpha q_n^\alpha \log q_{n+1}}{q_{n+1}^2}\sum t_{n+1,i} \leqq 0,$$

oder es bleiben in B noch mindestens

$$\frac{1}{3\cdot 2^\alpha}\frac{q_{n+1}^2}{q_n^\alpha \log q_{n+1}}-\sum_i t_{n+1,i} > 0$$

Intervalle $(n+1)$-ter Ordnung übrig, die durch die $I_{n+1,i}$ nicht überdeckt werden. Im letzten Falle enthalten diese Intervalle nach **6.** mindestens

$$\frac{1}{3\cdot 2^\alpha}\frac{q_{n+2}^2}{q_{n+1}^\alpha \log q_{n+2}}\left(\frac{1}{3\cdot 2^\alpha}\frac{q_{n+1}^2}{q_n^\alpha \log q_{n+1}}-\sum_i t_{n+1,i}\right)$$

Intervalle $(n+2)$-ter Ordnung, von welchen höchstens

$$\sum_i t_{n+2,i}$$

durch die Intervalle $I_{n+2,i}$ überdeckt werden. Es ist also entweder

$$1-\frac{3\cdot 2^\alpha q_n^\alpha \log q_{n+1}}{q_{n+1}^2}\sum t_{n+1,i}-\frac{(3\cdot 2^\alpha)^2 (q_n q_{n+1})^\alpha \log q_{n+1} \log q_{n+2}}{(q_{n+1} q_{n+2})^2}\sum_i t_{n+2,i} \leqq 0,$$

oder es bleiben in B noch mindestens

$$\mu=\frac{1}{(3\cdot 2^\alpha)^2}\frac{(q_{n+1}q_{n+2})^2}{(q_n q_{n+1})^\alpha \log q_{n+1} \log q_{n+2}}-\frac{1}{3\cdot 2^\alpha}\frac{q_{n+2}^2}{q_{n+1}^\alpha \log q_{n+2}}\sum_i t_{n+1,i}-\sum_i t_{n+2,i} > 0\,.$$

Intervalle $(n+2)$-ter Ordnung übrig, die durch die $I_{n+1,i}$, $I_{n+2,i}$ nicht überdeckt werden. Im letzten Fall enthalten diese Intervalle nach **6.** mindestens

$$\mu\cdot\frac{1}{3\cdot 2^\alpha}\frac{q_{n+3}^2}{q_{n+2}^\alpha \log q_{n+3}}$$

Intervalle $(n+3)$-ter Ordnung, von welchen höchstens

$$\sum_i t_{n+3,\,i}$$

durch die $I_{n+3,\,i}$ überdeckt werden. Es ist also entweder

$$1-\frac{3\cdot 2^{\alpha}q_n^{\alpha}\log q_{n+1}}{q_{n+1}^2}\sum_i t_{n+1,\,i}-\frac{(3\cdot 2^{\alpha})^2(q_nq_{n+1})^{\alpha}\log q_{n+1}\log q_{n+2}}{(q_{n+1}q_{n+2})^2}\sum_i t_{n+2,\,i}-$$
$$-\frac{(3\cdot 2^{\alpha})^3(q_nq_{n+1}q_{n+2})^{\alpha}\log q_{n+1}\log q_{n+2}\log q_{n+3}}{(q_{n+1}q_{n+2}q_{n+3})^2}\sum_i t_{n+3,\,i}\leqq 0,$$

oder es bleiben in B noch Intervalle $(n+3)$-ter Ordnung übrig, die durch die $I_{n+1,\,i}$, $I_{n+2,\,i}$, $I_{n+3,\,i}$ nicht überdeckt werden.

So kann man fortfahren; dieses Verfahren muss aber einmal abbrechen, da nach **16.** die Intervalle k_0-ter Ordnung, die in B liegen, alle durch die $I_{k,\,i}$ $(n+1\leqq k\leqq k_0)$ überdeckt werden. Es ist also

$$\sum_k\frac{(3\cdot 2^{\alpha})^{k-n}(q_nq_{n+1}\cdots q_{k-1})^{\alpha}\log q_{n+1}\log q_{n+2}\cdots\log q_k}{(q_{n+1}q_{n+2}\cdots q_k)^2}\sum_i t_{k,\,i}\geqq 1. \tag{7}$$

Wir erhalten also nach (5) sicher eine untere Schranke für $8^s\varLambda_s(\mathfrak{W}_\alpha(B))$, wenn wir eine untere Schranke für

$$\sum_{k,\,i}\frac{t_{k,\,i}^s}{q_k^{2s}} \tag{8}$$

finden, wo die $t_{k,\,i}$ endlich viele positive Zahlen sind, die den Nebenbedingungen (6), (7) genügen. Dabei läuft $(k,\,i)$ über irgendwelche Paare natürlicher Zahlen, wobei aber stets $k\geqq n+1$ ist.

18. Wenn nun für irgend ein k unter den Zahlen $t_{k,\,i}$ zwei vorkommen—sagen wir t', t''—die kleiner sind als

$$4\frac{1}{\log q_n}\frac{q_k^2}{q_{k-1}^{\alpha}\log q_k},$$

so verkleinert man die Summe (8), wenn man dort die Zahlen t', t'' durch die einzige Zahl $t'+t''$ ersetzt; denn $(t'+t'')^s<t'^s+t''^s$. Die Bedingungen (6), (7) bleiben natürlich bei dieser Abänderung erhalten. Indem man dieses Verfahren wiederholt, sieht man ein, dass man sich bei der Untersuchung der unteren Grenze von (8) auf solche Ausdrücke (8) beschränken kann, wo folgendes gilt:

Unter den Zahlen $t_{k,\,i}$ gibt es für jedes k höchstens eine, sagen wir λ_k, die kleiner ist als

$$4\frac{1}{\log q_n}\frac{q_k^2}{q_{k-1}^{\alpha}\log q_k};$$

die übrigen (vielleicht existierenden) $t_{k,\,i}$ genügen also den Ungleichungen

$$4\frac{1}{\log q_n}\frac{q_k^2}{q_{k-1}^{\alpha}\log q_k}\leqq t_{k,\,i}<8\frac{q_k^2}{q_{k-1}^{\alpha}\log q_k};$$

ihre Anzahl sei τ_k (also $\tau_k \geqq 0$). Die Summe (8) ist mindestens gleich

$$\frac{4^s}{\log^s q_n} \sum \frac{\tau_k}{q_{k-1}^{\alpha s} \log^s q_k}. \tag{9}$$

Aus (7) folgt aber

$$8\left(3\cdot 2^\alpha \tau_{n+1} + \sum_{k>n+1} \tau_k (3\cdot 2^\alpha)^{k-n} \frac{(q_n\cdots q_{k-2})^\alpha}{(q_{n+1}\cdots q_{k-1})^2} \log q_{n+1}\cdots \log q_{k-1}\right) +$$
$$+\sum_{k>n} \lambda_k (3\cdot 2^\alpha)^{k-n} \frac{(q_n\cdots q_{k-1})^\alpha}{(q_{n+1}\cdots q_k)^2} \log q_{n+1}\cdots \log q_k \geqq 1.$$

Die zweite Reihe links ist aber wegen

$$\lambda_k < 4\cdot \frac{1}{\log q_n} \frac{q_k^2}{q_{k-1}^\alpha \log q_k}$$

kleiner als

$$4\cdot 3\cdot 2^\alpha \frac{1}{\log q_n}\left(1+\sum_{k=n+2}^{\infty} (3\cdot 2^\alpha)^{k-n-1} \frac{(q_n\cdots q_{k-2})^\alpha}{(q_{n+1}\cdots q_{k-1})^2} \log q_{n+1}\cdots \log q_{k-1}\right) <$$
$$< 4\cdot 3\cdot 2^\alpha\cdot \frac{2}{\log q_n} < \frac{1}{2} \text{ für } n > c_4 > c_3.$$

(Denn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder in der letzten Reihe ist

$$3\cdot 2^\alpha \frac{q_{k-2}^\alpha}{q_{k-1}^2} \log q_{k-1} < \frac{1}{2}$$

für genügend grosse k, also für genügend grosse n; vgl. 2b). Es sei nun stets $n > c_4$.

Dann ist notwendig — wenn noch

$$\xi_{n+1} = 3\cdot 2^\alpha \tau_{n+1},\quad \xi_k = (3\cdot 2^\alpha)^{k-n} \frac{(q_n\cdots q_{k-2})^\alpha}{(q_{n+1}\cdots q_{k-1})^2} \log q_{n+1}\cdots \log q_{k-1}\cdot \tau_k \text{ (für } k > n+1)$$

gesetzt wird —

$$\sum_{k>n} \xi_k \geqq \frac{1}{16}.$$

Nun ist der Ausdruck (9) gleich

$$\left(\frac{4}{\log q_n}\right)^s \left(\frac{\xi_{n+1}}{3\cdot 2^\alpha q_n^{\alpha s} \log^s q_{n+1}} + \sum_{k>n+1} \frac{(q_{n+1}\cdots q_{k-1})^2 q_{k-1}^{-\alpha s} \log^{-s} q_k \cdot \xi_k}{(3\cdot 2^\alpha)^{k-n} (q_n\cdots q_{k-2})^\alpha \log q_{n+1}\cdots \log q_{k-1}}\right). \tag{10}$$

Der Faktor in (10) bei ξ_k $(k = n+1, n+2, \cdots)$ wächst offenbar mit k, wenn $k > c_5 > c_4$, also wenn $n > c_5$; denn $2-\alpha s > 0$, $q_{k-1} = O(q_k^\varepsilon)$, $\log q_{k+1} = O(q_k^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ (wegen 2b).

Es sei nun $n > c_5$. Daher nimmt der Ausdruck (10) unter den Nebenbedingungen

$$\xi_k \geqq 0,\quad \sum_{k>n} \xi_k \geqq \frac{1}{16}$$

sein Minimum für $\xi_{n+1}=\frac{1}{16}$, $\xi_{n+2}=\xi_{n+3}=\cdots=0$ an. Die Summe (8) ist also mindestens gleich

$$\frac{1}{16}\left(\frac{4}{\log q_n}\right)^s \frac{1}{3\cdot 2^\alpha q_n^{\alpha s}\log^s q_{n+1}}. \tag{11}$$

Also ist $8^s \Lambda_s(\mathfrak{W}_n(B))$ mindestens gleich der Zahl (11); nach **14.** ist schliesslich

$$L_{s,\rho}(P_\alpha)\geqq 2^{-s}\frac{1}{(3\cdot 2^\alpha)^n}\,\frac{(q_1\cdots q_n)^2}{(q_1\cdots q_{n-1})^\alpha}\,\frac{1}{\log q_1\cdots\log q_n}\cdot 8^{-s}\cdot\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{4}{\log q_n}\right)^s\frac{1}{3\cdot 2^\alpha q_n^{\alpha s}\log^s q_{n+1}}$$

$\left(\rho=\frac{1}{10q_n^2}\right)$. Dieser Ausdruck strebt aber nach **3.** gegen $+\infty$, wenn $n\to\infty$; also ist $L_s(P_\alpha)=+\infty$ für $0<s<\frac{2}{\alpha}$; damit ist aber (4) bewiesen.

Potštejn, im August 1929.