Vojtěch Jarník

Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz

Math. Zeitschr. 39 (1935), pp. 745--767

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500707`

Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz.

Von

V. Jarník in Prag und E. Landau in Berlin.

§ 1.

Einleitung.

Man verdankt Herrn van der Corput[1]) folgenden

Satz. *Es gibt eine Weltkonstante $P > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $a < b$ und ist*

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ reell}, \\ f'(x) \text{ vorhanden}^{2)} \text{ und monoton nicht fallend}, \\ 0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle^{3)},$$

so ist

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqq P.$$

Wir werden unter anderem den kleinsten zulässigen Wert von P bestimmen und noch genauer (genauer wegen $<$ statt $\leqq$) folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei $a < b$; es sei*

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ reell}, \\ f'(x) \text{ vorhanden}^{2)} \text{ und monoton nicht fallend}, \\ 0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle;$$

dann ist

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung darf durch keine kleinere Weltkonstante ersetzt werden.

Ändert man die Voraussetzungen, so bekommt man andere Sätze, von welchen wir folgende explizite anführen:

---

[1]) J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Annalen 84 (1921), S. 53–79; insbes. S. 58, Satz 1.

[2]) Für $x = a$ wird die rechtsseitige, für $x = b$ die linksseitige Ableitung gemeint.

[3]) $\langle a, b\rangle$ bzw. (a, b) bedeutet die Menge aller x mit $a \leqq x \leqq b$ bzw. $a < x < b$.

Satz 2. *a, b, $f(x)$ wie im Satz 1; dazu werde noch vorausgesetzt, daß a, b ganz sind. Dann ist*

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung darf durch keine kleinere Weltkonstante ersetzt werden.

Satz 3. *a, b, $f(x)$ wie im Satz 1; dazu werde noch vorausgesetzt, daß a, b ganz sind. Dann ist*

$$\left| \frac{1}{2} e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \frac{1}{2} e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqq \frac{2}{\pi},$$

und hier darf das Gleichheitszeichen nicht gestrichen werden (um so weniger darf also $\frac{2}{\pi}$ durch eine kleinere Weltkonstante ersetzt werden).

Satz 4. *a, b, $f(x)$ wie im Satz 1; dazu werde noch vorausgesetzt, daß $a - \frac{1}{2}$, $b - \frac{1}{2}$ ganz sind. Dann ist*

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| < \tfrac{1}{2},$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung darf durch keine kleinere Weltkonstante ersetzt werden.

Man bekommt also in diesen drei Fällen (ganze a, b; ganze a, b und die beiden Endglieder mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$; ganze $a - \frac{1}{2}$, $b - \frac{1}{2}$) drei verschiedene Weltkonstanten; merkwürdig ist das Auftreten des Gleichheitszeichens im Satz 3.

Wir werden aber die Sätze 1 bis 4 nicht gesondert betrachten, sondern wir werden folgenden allgemeinen Satz beweisen, der alle diese vier Sätze umfaßt:

Satz 5. *Es seien vier Zahlen*

$$\alpha,\ \beta,\ \mu_1,\ \mu_2$$

gegeben mit

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1;$$
$$0 \leqq \mu_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } \alpha > 0; \ \mu_2 = 0, \text{ wenn } \beta > 0.$$

Behauptung 1. *Ist*

$$a < b, \quad a \equiv \alpha, \quad b \equiv \beta\,^{4)},$$

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ reell}, \\ f'(x) \text{ vorhanden}^{2)} \text{ und monoton nicht fallend}, \\ 0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b \rangle,$$

[4]) Alle Kongruenzen sind modulo Eins zu verstehen.

so ist

$$
\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leqq \\ &\left| \alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta - \mu_2(1-\mu_2)}, \end{aligned} \right.
$$

und die rechte Seite von (A) *darf durch keine kleinere, nur von* $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ *abhängige Zahl ersetzt werden.*

Behauptung 2. *Ist*

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

$\Big($in diesem Falle ist die rechte Seite von (A) gleich $\frac{2}{\pi}\Big)$, *so darf das Gleichheitszeichen in* (A) *nicht gestrichen werden.*

Behauptung 3. *In allen übrigen Fällen gilt in* (A) *das Zeichen* $<$.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, die Werte von

$$T_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) = \left| \alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta - \mu_2(1-\mu_2)}$$

etwas näher zu betrachten (wobei freilich nur die im Satz 5 zugelassenen Werte von $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ betrachtet werden).

Erstens für $\alpha = \beta = 0$ (das entspricht ganzen a, b):

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(0, 0) \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau in folgenden vier Fällen:

$$\mu_1 = 0 \text{ oder } 1, \quad \mu_2 = 0 \text{ oder } 1.$$

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(0, 0) \geqq \frac{2}{\pi},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für

$$\mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Zweitens für beliebige α, β:

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau in folgenden vier Fällen:

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mu_1 = 0 \text{ oder } 1, \quad \mu_2 = 0 \text{ oder } 1.$$

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) \geqq \tfrac{1}{2},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau in den beiden folgenden Fällen:

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2} \text{ (also } \mu_1 = \mu_2 = 0)$$

oder

$$\alpha = 0, \ \mu_1 = \tfrac{1}{2}, \ \beta = \tfrac{1}{2} \text{ (also } \mu_2 = 0).$$

Nach dieser Diskussion ist klar, daß die Sätze 1 bis 4 aus Satz 5 folgen.

Wir werden aber außer der im Satz 5 betrachteten Funktionenklasse noch eine allgemeinere Funktionenklasse betrachten; wir werden nämlich noch folgenden Satz beweisen [5]):

Satz 6. *$\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ wie im Satz* 5.

Behauptung 1. *Ist*

$$a < b, \quad a \equiv \alpha, \quad b \equiv \beta,$$
$$\gamma \text{ reell},$$
$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ g(x) \text{ monoton nicht fallend}, \\ f(x) = \int\limits_a^x g(y)\,dy + \gamma \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle,$$

so gilt (A), *und die rechte Seite von* (A) *darf durch keine kleinere, nur von $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ abhängige Zahl ersetzt werden.*

Behauptung 2. *Ist*

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

$\left(\text{in diesem Falle ist die rechte Seite von (A) gleich } \frac{2}{\pi}\right)$, *so darf das Gleichheitszeichen in* (A) *nicht gestrichen werden.*

Behauptung 3. *Ist*

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \text{ (also } \mu_1 = 0), \quad \beta = 0, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

$\left(\text{in diesem Falle ist die rechte Seite von (A) gleich } \frac{2}{\pi}\right)$, *so darf das Gleichheitszeichen in* (A) *nicht gestrichen werden.*

Behauptung 4. *In allen übrigen Fällen gilt in* (A) *das Zeichen* $<$.

Im Unterschied zum Satz 5 tritt hier noch ein zweiter Fall mit dem Gleichheitszeichen auf (Behauptung 3). Es ist wohl unnötig, die den Sätzen 1 bis 4 entsprechenden Spezialfälle des Satzes 6 aufzuzählen.

Warum betrachten wir neben dem Satz 5 noch den Satz 6? Weil wir glauben, daß die im Satz 6 behandelte Funktionenklasse natürlicher ist als die im Satz 5 betrachtete. Warum wir dies glauben, wird der Leser aus den folgenden Sätzen, insbesondere aus dem Satz 8, erkennen.

Definition 1. *Für $a < b$ sei $\mathfrak{M}(a, b)$ die Menge aller in $\langle a, b\rangle$ definierten Funktionen $f(x)$, welche sich daselbst in der Gestalt*

$$f(x) = \int\limits_a^x g(y)\,dy + \gamma$$

[5]) Daß die im Satz 6 betrachtete Funktionenklasse tatsächlich allgemeiner ist als die im Satz 5 betrachtete, kann der Leser — dem es nicht unmittelbar klar ist — aus der Vorbemerkung zum Hilfssatz 9 erkennen.

darstellen lassen mit

$$\left.\begin{array}{c}\gamma \text{ reell},\\ 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2},\\ g(x) \text{ monoton nicht fallend}\end{array}\right\} \text{ in } \langle a,\, b\rangle.$$

Definition 2. *Es sei*

$$a < b;\quad 0 \leqq \mu_1 \leqq 1,\quad 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } a \not\equiv 0;\quad \mu_2 = 0, \text{ wenn } b \not\equiv 0.$$

Dann bezeichnen wir mit

$$s_{\mu_1,\, \mu_2}(a,\, b)$$

die obere Grenze von

$$\left|\mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, d\, x\right|$$

für alle $f(x)$ *aus* $\mathfrak{M}(a,\, b)$.

Definition 3. *Es sei*

$$0 \leqq \alpha < 1,\quad 0 \leqq \beta < 1;\quad 0 \leqq \mu_1 \leqq 1,\ 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } \alpha > 0;\quad \mu_2 = 0, \text{ wenn } \beta > 0.$$

Dann bezeichnen wir mit

$$S_{\mu_1,\, \mu_2}(\alpha,\, \beta)$$

die obere Grenze von

$$s_{\mu_1,\, \mu_2}(a,\, b)$$

für alle a, b *mit*

$$a < b,\quad a \equiv \alpha,\quad b \equiv \beta.$$

Offenbar ist (nach Satz 6)

$$S_{\mu_1,\, \mu_2}(\alpha,\beta) = \left|\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta - \mu_2(1-\mu_2)}.$$

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 7. *Es sei* $a < b$; *es sei* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *eine Folge von Funktionen aus* $\mathfrak{M}(a,\, b)$, *und es sei*

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{in} \quad \langle a,\, b\rangle.$$

Dann gehört auch $f(x)$ *zu* $\mathfrak{M}(a,\, b)$.

Satz 8. a, b, μ_1, μ_2 *wie in der Definition* 2. *Dann gibt es eine Funktion* $f(x)$ *aus* $\mathfrak{M}(a,\, b)$ *mit*

$$\left|\mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, d\, x\right| = s_{\mu_1,\, \mu_2}(a,\, b).$$

Satz 9. a, b, μ_1, μ_2 *wie in der Definition* 2. *Man setze*

$$\alpha = a - [a],\quad \beta = b - [b].$$

1. *Ist*

entweder $\alpha = \beta = 0, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$

oder $\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad b - a \geqq \frac{3}{2},$

so ist

$$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b) = S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta).$$

2. *Sonst ist stets*

$$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b) < S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta).$$

§ 2.

Beweis der Sätze 5, 6.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$a < b,$$

$G(x)$ *in* $\langle a, b\rangle$ *reell und eigentlich integrabel im Riemannschen Sinne,* c *reell,*

$$F(x) = \int_a^x G(y)\,dy + c \quad \text{in} \quad \langle a, b\rangle.$$

Dann ist

$$\int_a^b G(x) \cos F(x)\,dx = \sin F(b) - \sin F(a),$$

also

$$\int_a^b G(x) \cos\left(F(x) + \frac{\pi}{2}\right) dx = \sin\left(F(b) + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(F(a) + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_a^b G(x) \sin F(x)\,dx = -\cos F(b) + \cos F(a).$$

Beweis: $\delta > 0$ sei gegeben. Man wähle ν und $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ mit

$$e_\lambda = a_\lambda - a_{\lambda-1} > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \lambda \leqq \nu,$$
$$a_0 = a, \; a_\nu = b$$

so, daß erstens, wenn s_λ die Schwankuug von $G(x)$ auf $\langle a_{\lambda-1}, a_\lambda\rangle$ ist,

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda s_\lambda < \delta;$$

zweitens bei jeder Wahl der ξ_λ auf $\langle a_{\lambda-1}, a_\lambda\rangle$

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda G(\xi_\lambda) \cos F(\xi_\lambda) - \int_a^b G(x) \cos F(x)\,dx\right| < \delta.$$

Wegen der Differentiierbarkeit von $\sin\alpha$ und der Stetigkeit von $F(x)$ gibt es auf $\langle a_{\lambda-1}, a_\lambda\rangle$ ein ξ_λ mit

$$\sin F(a_\lambda) - \sin F(a_{\lambda-1}) = \left(F(a_\lambda) - F(a_{\lambda-1})\right) \cos F(\xi_\lambda).$$

Nun ist

$$|F(a_\lambda) - F(a_{\lambda-1}) - e_\lambda G(\xi_\lambda)| = \left|\int\limits_{a_{\lambda-1}}^{a_\lambda} (G(x) - G(\xi_\lambda))\,dx\right| \leqq e_\lambda s_\lambda,$$

also

$$|\sin F(a_\lambda) - \sin F(a_{\lambda-1}) - e_\lambda G(\xi_\lambda)\cos F(\xi_\lambda)| \leqq e_\lambda s_\lambda;$$

daher ist

$$|\sin F(b) - \sin F(a) - \sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda G(\xi_\lambda)\cos F(\xi_\lambda)| \leqq \sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda s_\lambda < \delta,$$

$$\left|\sin F(b) - \sin F(a) - \int\limits_a^b G(x)\cos F(x)\,dx\right| < 2\delta.$$

Die linke Seite ist also 0.

Hilfssatz 2. *a, b, $G(x)$, c, $F(x)$ wie im Hilfssatz 1. In $\langle a, b\rangle$ sei $q(x)$ reell und monoton nicht fallend. Es verschwinde $1 + \sin F(x)$ höchstens in endlich vielen Punkten von (a, b), die, wachsend geordnet, mit*

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1} \qquad (\nu \geqq 1)$$

bezeichnet werden mögen; man setze noch

$$a_0 = a, \quad a_\nu = b.$$

1. *Dann gilt*

$$\text{(1)} \qquad \left\{\begin{aligned} \int\limits_a^b q(x)\,G(x)\cos F(x)\,dx \leqq\; & q(b-0)(1+\sin F(b)) \\ & - q(a+0)(1+\sin F(a)). \end{aligned}\right.$$

2. *Gilt in (1) das Gleichheitszeichen, so ist $q(x)$ konstant in jedem Intervall $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ $(1 \leqq \lambda \leqq \nu)$.*

Beweis. Der zweite Mittelwertsatz und der Hilfssatz 1 ergeben für $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ — mit einem geeigneten ξ aus $\langle \alpha, \beta\rangle$ —

$$\text{(2)} \qquad \left\{\begin{aligned} & \int\limits_\alpha^\beta q(x)\,G(x)\cos F(x)\,dx \\ & = q(\alpha+0)\int\limits_\alpha^\xi G(x)\cos F(x)\,dx + q(\beta-0)\int\limits_\xi^\beta G(x)\cos F(x)\,dx \\ & = q(\alpha+0)\big((1+\sin F(\xi)) - (1+\sin F(\alpha))\big) \\ & \qquad + q(\beta-0)\big((1+\sin F(\beta)) - (1+\sin F(\xi))\big) \\ & = q(\beta-0)(1+\sin F(\beta)) - q(\alpha+0)(1+\sin F(\alpha)) \\ & \qquad - \big(q(\beta-0) - q(\alpha+0)\big)(1+\sin F(\xi)). \end{aligned}\right.$$

1. Aus (2) mit $\alpha = a$, $\beta = b$ folgt bereits (1).

2. Ist $q(x)$ in einem der Intervalle $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ nicht konstant, so wähle man zwei Stetigkeitspunkte γ, δ von $q(x)$ mit

$$a_{\lambda-1} < \gamma < \delta < a_\lambda, \quad q(\gamma) < q(\delta).$$

Dann ergibt (2) (auf die Intervalle $\langle a, \gamma \rangle$, $\langle \gamma, \delta \rangle$, $\langle \delta, b \rangle$ angewandt)

$$\int_a^\gamma q(x) G(x) \cos F(x)\, dx \leqq q(\gamma)(1 + \sin F(\gamma)) - q(a+0)(1 + \sin F(a)),$$

$$\int_\gamma^\delta q(x) G(x) \cos F(x)\, dx < q(\delta)(1 + \sin F(\delta)) - q(\gamma)(1 + \sin F(\gamma)),$$

$$\int_\delta^b q(x) G(x) \cos F(x)\, dx \leqq q(b-0)(1 + \sin F(b)) - q(\delta)(1 + \sin F(\delta)).$$

Die Addition dieser Ungleichungen ergibt (1) mit dem Zeichen $<$.

Hilfssatz 3. *Es sei*

$$a < b, \ \gamma \ \textit{reell},$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ g(x) \ \textit{monoton nicht fallend}, \\ f(x) = \int_a^x g(y)\, dy + \gamma \end{array}\right\} \ \textit{in} \ \langle a, b \rangle.$$

Für ganzes $n > 0$ *sei*

$$J_n^{\pm} = \pm 2\pi \int_a^b g(x) \cos 2\pi (nx \mp f(x))\, dx,$$

wo sich die oberen bzw. unteren Zeichen entsprechen.

1. *Dann ist*

$$J_n^{\pm} \leqq \frac{1 + \sin 2\pi(\pm nb - f(b))}{2n \mp 1}. \tag{3}$$

2. *Gilt in* (3) *mit dem oberen Zeichen für die beiden Werte* $n = 1$ *und* $n = 2$ *das Gleichheitszeichen, so gilt folgendes:*

I. $g(x)$ *ist stückweise konstant in* $\langle a, b \rangle$, *d. h.: es gibt endlich viele Zahlen* $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu$ *mit* $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_\nu = b$, *so daß* $g(x)$ *in jedem Intervall* $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ $(1 \leqq \lambda \leqq \nu)$ *konstant ist. Dabei sind die Zahlen* a_λ *mit* $1 \leqq \lambda \leqq \nu - 1$ *ganz.*

II. *Es ist entweder* $a \equiv 0$ *oder* $g(a+0) = 0$.

III. *Es ist*

$$f(a) \equiv \tfrac{1}{4}, \quad 2f(b) \equiv b + \tfrac{1}{2}.$$

Beweis. Man setze in $\langle a, b \rangle$

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{g(x)}{n \mp g(x)}, \\ G(x) &= \pm 2\pi n - 2\pi g(x), \\ F(x) &= \pm 2\pi n x - 2\pi f(x), \\ c &= \pm 2\pi n a - 2\pi \gamma; \end{aligned}$$

dann ist

$$\int_a^x G(y)\,dy + c = \pm 2\pi n x \mp 2\pi n a - 2\pi \int_a^x g(y)\,dy \pm 2\pi n a - 2\pi\gamma$$
$$= \pm 2\pi n x - 2\pi f(x) = F(x).$$

$1 + \sin F(x)$ verschwindet in $\langle a, b\rangle$ höchstens endlich oft, da aus $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ folgt

$$\pm(F(\beta) - F(\alpha)) = \int_\alpha^\beta (\pm G(y))\,dy \geqq \int_\alpha^\beta (2\pi n - \pi)\,dx > 0,$$

so daß $\pm F(x)$ in $\langle a, b\rangle$ monoton wächst. Nach Hilfssatz 2, 1 folgt

$$(4)\quad \begin{cases} J_n^{\pm} = \int_a^b q(x)\,G(x)\cos F(x)\,dx \\ \leqq \frac{g(b-0)}{n \mp g(b-0)}\big(1 + \sin 2\pi(\pm n b - f(b))\big) \\ \qquad - \frac{g(a+0)}{n \mp g(a+0)}\big(1 + \sin 2\pi(\pm n a - f(a))\big). \end{cases}$$

Weiter ist

$$(5)\qquad \frac{g(a+0)}{n \mp g(a+0)}\big(1 + \sin 2\pi(\pm n a - f(a))\big) \geqq 0,$$

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{g(b-0)}{n \mp g(b-0)}\big(1 + \sin 2\pi(\pm n b - f(b))\big) \\ \qquad \leqq \frac{1}{2n \mp 1}\big(1 + \sin 2\pi(\pm n b - f(b))\big). \end{cases}$$

1. Aus (4), (5), (6) folgt bereits (3).

2. Es gelte in (3) mit dem oberen Zeichen das Gleichheitszeichen für $n = 1$ und $n = 2$; dann muß dasselbe auch in (4), (5), (6) der Fall sein. Wir sprechen daher im folgenden von den **Gleichungen** (4), (5), (6) und meinen darunter die Beziehungen (4), (5), (6) mit dem oberen Zeichen für die Werte $n = 1$ und $n = 2$, und zwar mit dem Gleichheitszeichen. Aus den Gleichungen (4) folgt nach Hilfssatz 2, 2, daß $q(x)$ — also auch $g(x)$ — in $\langle a, b\rangle$ stückweise konstant ist, wobei jede Sprungstelle ξ von $q(x)$ (d. h. von $g(x)$), die in (a, b) liegt, der Beziehung

$$1 + \sin 2\pi(n\xi - f(\xi)) = 0$$

genügen muß. Die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$ ergeben

$$1\cdot\xi - f(\xi) \equiv -\tfrac{1}{4}, \quad 2\cdot\xi - f(\xi) \equiv -\tfrac{1}{4},$$

also

$$(7)\qquad \xi \equiv 0, \quad f(\xi) \equiv \tfrac{1}{4}.$$

Damit ist erstens I bewiesen; zweitens haben wir gezeigt, daß jede etwaige in (a, b) liegende Sprungstelle ξ von $g(x)$ die Kongruenzen (7) erfüllt.

Aus den Gleichungen (5) folgt: Ist $g(a+0) \neq 0$, so ist

$$1+\sin 2\pi(na-f(a))=0$$

für $n=1, 2$, also

(8) $$a\equiv 0,\quad f(a)\equiv \tfrac{1}{4}$$

(damit ist insbesondere II bewiesen).

Aus den Gleichungen (6) folgt: Ist $g(b-0) \neq \frac{1}{2}$, so ist

$$1+\sin 2\pi(nb-f(b))=0$$

für $n=1, 2$, also

(9) $$b\equiv 0,\quad f(b)\equiv \tfrac{1}{4}.$$

Es sei nun $g(a+0)=0$. Dann ist entweder $g(b-0)=0\neq\frac{1}{2}$; alsdann gilt (9), und es ist $g(x)=0$ in (a, b), also $f(x)$ konstant in $\langle a, b\rangle$, also nach (9)

(10) $$f(a)\equiv\tfrac{1}{4}.$$

Oder es ist $g(b-0)>0$; alsdann hat $g(x)$ mindestens eine Sprungstelle in (a, b); es sei ξ die kleinste. Dann gilt (7), und es ist $g(x)=g(a+0)$ $=0$ in (a,ξ), also $f(x)$ konstant in $\langle a,\xi\rangle$; wegen (7) gilt also wieder (10).

Ist aber $g(a+0)\neq 0$, so gilt (8).

Also gilt (10) immer.

Es sei weiter $g(b-0)=\frac{1}{2}$. Dann ist entweder $g(a+0)=\frac{1}{2}\neq 0$; alsdann gilt (8), und es ist $g(x)=\frac{1}{2}$ in (a, b), also

$$f(b)-f(a)=\tfrac{1}{2}(b-a),$$

also nach (8)

(11) $$2f(b)\equiv b+\tfrac{1}{2}.$$

Oder es ist $g(a+0)<\frac{1}{2}$, also hat $g(x)$ in (a, b) mindestens eine Sprungstelle; es sei ξ die größte. Dann gilt (7) und es ist $g(x)=g(b-0)=\frac{1}{2}$ in (ξ, b), also

$$f(b)-f(\xi)=\tfrac{1}{2}(b-\xi);$$

wegen (7) gilt also wieder (11).

Ist aber $g(b-0)\neq\frac{1}{2}$, so gilt (9), also

$$2f(b)\equiv\tfrac{1}{2}\equiv b+\tfrac{1}{2}.$$

Also gilt (11) immer.

Damit ist aber auch III bewiesen.

Hilfssatz 4. *Für alle reellen x ist*

(12) $$|\sin\pi x|=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi n x\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

(13) $$\begin{cases} x-[x]-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\pi(x-[x]) \\ \qquad\qquad =\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2\pi n x\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}\right),\end{cases}$$

(14) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=2.$$

Beweis. Die linke Seite von (12) hat die Periode 1, ist gerade, überall stetig und von beschränkter Variation auf $\langle 0, 1\rangle$. Daher ist für alle reellen x

$$|\sin \pi x| = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2\pi n x$$

mit

$$A_n = 2\int_0^1 \sin \pi x \cos 2\pi n x \, dx$$

$$= \int_0^1 (\sin \pi (1-2n) x + \sin \pi (1+2n) x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-\cos \pi (1-2n) x}{1-2n} + \frac{-\cos \pi (1+2n) x}{1+2n}\right\}_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

für $n \geqq 0$; damit ist (12) bewiesen.

Die linke Seite von (13) hat die Periode 1, ist ungerade, überall stetig und von beschränkter Variation auf $\langle 0, 1\rangle$. Daher ist für alle reellen x

$$x - [x] - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos \pi (x - [x]) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin 2\pi n x$$

mit

$$B_n = 2\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos \pi x) \sin 2\pi n x \, dx$$

$$= \int_0^1 (2x-1) \sin 2\pi n x \, dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (\sin \pi (2n-1) x + \sin \pi (2n+1) x)\, dx$$

$$= \left\{-(2x-1)\frac{\cos 2\pi n x}{2\pi n}\right\}_0^1 - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{-2}{2\pi n} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

für $n \geqq 1$; damit ist (13) bewiesen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2;$$

damit ist (14) bewiesen.

Hilfssatz 5. *Es sei bei reellem* x

$$\delta(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} & \textit{für ganzes } x, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} = x - [x] - \tfrac{1}{2} + \delta(x).$$

Es sei

$$a < b,$$

$G(x)$ in $\langle a, b\rangle$ reell und im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel, c reell,

$$F(x) = \int_a^x G(y)\,dy + c \quad \textit{in } \langle a, b\rangle.$$

Dann ist

$$\sum_{a<n<b} F(n) + \delta(a)\,F(a) + \delta(b)\,F(b) + \psi(b)\,F(b) - \psi(a)\,F(a) - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b \sin 2\pi n x \cdot G(x)\,dx.$$

Beweis. Die Konvergenz der letzten Reihe folgt daraus, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n}$$

gleichmäßig beschränkte Partialsummen hat, also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n}\,G(x)$$

gliedweise integriert werden kann.

Da beide Seiten der Behauptung additiv sind, gebe es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein ganzes h mit

$$h \leqq a < b < h+1 \quad \text{oder} \quad h < a < b \leqq h+1.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $h = 0$ (sonst betrachte man $G(x+h) = G_1(x)$).

Dann ist die rechte Seite der Behauptung gleich

$$\int_a^b \psi(x)\,G(x)\,dx = \int_a^b (x - \tfrac{1}{2})\,G(x)\,dx$$

$$= \{(x - \tfrac{1}{2})\,F(x)\}_a^b - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= (b - \tfrac{1}{2})\,F(b) - (a - \tfrac{1}{2})\,F(a) - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= \sum_{a<n<b} F(n) + \delta(a)\,F(a) + \delta(b)\,F(b) + \psi(b)\,F(b)$$

$$- \psi(a)\,F(a) - \int_a^b F(x)\,dx.$$

Hilfssatz 6. *Es seien vier Zahlen gegeben:*

$$\alpha,\ \beta,\ \mu_1,\ \mu_2$$

mit

$$0 \leqq \alpha < 1,\quad 0 \leqq \beta < 1;\qquad 0 \leqq \mu_1 \leqq 1,\quad 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0,\ \textit{wenn}\ \alpha > 0;\ \mu_2 = 0,\ \textit{wenn}\ \beta > 0.$$

Es sei noch

$$a < b,\quad a \equiv \alpha,\quad b \equiv \beta,$$
$$\gamma\ \textit{reell},$$
$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ g(x)\ \textit{monoton nicht fallend}, \\ f(x) = \int\limits_a^x g(y)\,dy + \gamma \end{array}\right\}\ \textit{in}\ \langle a, b\rangle;$$

man setze

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\,a,\,b) = \mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int\limits_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx.$$

1. *Dann ist*

$$(15)\quad \begin{cases} |\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\,a,\,b)| \leqq \left|\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\pi} \\ \qquad + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1-\mu_2)}. \end{cases}$$

2. *Gilt in* (15) *das Gleichheitszeichen, so ist entweder*

$$\alpha = \beta = 0,\quad \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

oder

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\ (\text{also}\ \mu_1 = 0),\ \beta = 0,\ \mu_2 = \tfrac{1}{2},\ g(x)\ \textit{unstetig in}\ (a,\,b),\ b - a > \tfrac{1}{2}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\,a,\,b) \geqq 0$$

(sonst betrachte man $f(x) + \lambda$ statt $f(x)$ bei passendem reellem λ). Dann ist

$$|\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\,a,\,b)| = \Re\,\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\,a,\,b)$$
$$= \mu_1\cos 2\pi f(a) + \sum_{a<n<b}\cos 2\pi f(n) + \mu_2\cos 2\pi f(b) - \int\limits_a^b \cos 2\pi f(x)\,dx.$$

Man setze

$$(16)\quad \begin{cases} m_1 = \mu_1 - \frac{1}{2}\ \text{für}\ \alpha = 0,\quad m_1 = 0\ \text{sonst}; \\ m_2 = \mu_2 - \frac{1}{2}\ \text{für}\ \beta = 0,\quad m_2 = 0\ \text{sonst}. \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 1, letzte Zeile (mit

$$F(x) = 2\pi f(x),\quad G(x) = 2\pi g(x),\quad c = 2\pi\gamma)$$

ist in $\langle a, b\rangle$

$$-\int\limits_a^x 2\pi g(y)\sin 2\pi f(y)\,dy = \cos 2\pi f(x) - \cos 2\pi f(a);$$

also ist nach Hilfssatz 5 (mit

$$F(x) = \cos 2\pi f(x), \quad G(x) = -2\pi g(x) \sin 2\pi f(x), \quad c = \cos 2\pi f(a)):$$

$$(17)\begin{cases} |\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f; a, b)| = (m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) \\ \quad + (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^b g(x) \sin 2\pi f(x) \sin 2\pi n x \, dx \\ = (m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) + (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (J_n^+ + J_n^-). \end{cases}$$

Hier ist (wegen $a \equiv \alpha$; vgl. (16))

$$(m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) = (\alpha - \tfrac{1}{2} + \mu_1) \cos 2\pi f(a),$$

also

$$(18) \qquad (m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) \leqq |\alpha + \mu_1 - \tfrac{1}{2}|;$$

gilt in (18) das Gleichheitszeichen, so ist

$$(19) \qquad \text{entweder } \alpha = \tfrac{1}{2}, \text{ oder } \alpha = 0, \ \mu_1 = \tfrac{1}{2}, \text{ oder } 2f(a) \equiv 0.$$

Weiter ist nach Hilfssatz 3

$$(20)\begin{cases} (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (J_n^+ + J_n^-) \\ \quad \leqq (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) \\ \qquad + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1 + \sin 2\pi (n b - f(b))}{2n - 1} + \frac{1 - \sin 2\pi (n b + f(b))}{2n + 1} \right) \\ \quad = \mathfrak{D}. \end{cases}$$

Gilt in (20) das Gleichheitszeichen, so ist nach Hilfssatz 3 erstens $g(x)$ stückweise konstant in $\langle a, b \rangle$, wobei jede etwaige in (a, b) liegende Sprungstelle ganz ist; zweitens

$$(21) \qquad \text{entweder } \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad g(a + 0) = 0;$$

drittens

$$(22) \qquad f(a) \equiv \tfrac{1}{4}, \quad 2f(b) \equiv \beta + \tfrac{1}{2}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) + (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi f(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(2n-1)} - \frac{1}{n(2n+1)} \right) \sin 2\pi n b$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi f(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(2n-1)} + \frac{1}{n(2n+1)} \right) \cos 2\pi n b.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{n(2n-1)} - \frac{1}{n(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\frac{1}{n(2n-1)} + \frac{1}{n(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right);$$

daher ist nach Hilfssatz 4

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\pi} + \cos 2\pi f(b)\left(m_2 - \psi(b) + b - [b] - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\pi\beta\right)$$
$$- \sin 2\pi f(b)\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\,|\sin\pi b|\right).$$

Nun ist erstens

$$|\sin\pi b| = \sin\pi\beta.$$

Zweitens ist (vgl. (16)) für $\beta > 0$

$$m_2 - \psi(b) + b - [b] - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\pi\beta = \tfrac{1}{2}\cos\pi\beta = (\tfrac{1}{2} - \mu_2)\cos\pi\beta;$$

für $\beta = 0$ ist aber

$$m_2 - \psi(b) + b - [b] - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\pi\beta = \mu_2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = (\mu_2 - \tfrac{1}{2})\cos\pi\beta.$$

Stets ist also

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\pi} \pm \left(\frac{1}{2} - \mu_2\right)\cos 2\pi f(b)\cos\pi\beta - \sin 2\pi f(b)\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\pi\beta\right), \tag{23}$$

wo — wie auch im ganzen Rest dieses Beweises — das obere Zeichen dem Fall $\beta > 0$, das untere dem Fall $\beta = 0$ entspricht.

Nun ist für reelle p_1, p_2, q_1, q_2

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 \leqq \sqrt{(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)};$$

gilt hier das Gleichheitszeichen, so ist

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0.$$

Also ist nach (23)

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{D} \leqq \frac{1}{\pi} \\ &+ \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} - \mu_2\right)^2\cos^2\pi\beta + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\pi\beta\right)^2\right)\left(\cos^2 2\pi f(b) + \sin^2 2\pi f(b)\right)}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Hierin ist

$$\left(\frac{1}{2} - \mu_2\right)^2\cos^2\pi\beta + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\pi\beta\right)^2$$
$$= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4}(\cos^2\pi\beta + \sin^2\pi\beta) - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)\cos^2\pi\beta$$
$$= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2);$$

denn es ist entweder $\mu_2 = 0$ (für $\beta > 0$) oder $\cos^2\pi\beta = 1$. Aus (24) folgt also

$$\mathfrak{D} \leqq \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)}. \tag{25}$$

Gilt in (25) das Gleichheitszeichen, so ist

(26) $$\pm\left(\frac{1}{2}-\mu_2\right)\cos\pi\beta\sin 2\pi f(b)+\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin\pi\beta\right)\cos 2\pi f(b)=0.$$

1. Aus (17), (18), (20), (25) folgt bereits (15).

2. Es gelte nun in (15) das Gleichheitszeichen; dann gilt auch in (18), (20), (25) das Gleichheitszeichen; also gilt (19), (21), (22), (26), und $g(x)$ ist stückweise konstant in $\langle a, b\rangle$, wobei jede etwaige in (a, b) liegende Sprungstelle ganz ist.

Nach (22) ist $2f(a) \neq 0$; also ist nach (19)

(27) $$\text{entweder } \alpha=\tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha=0, \quad \mu_1=\tfrac{1}{2}.$$

Aus (22) folgt weiter

$$2\pi f(b)=\pi\beta+\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k \text{ ganz}),$$

also

$$\cos 2\pi f(b)=(-1)^{k+1}\sin\pi\beta, \quad \sin 2\pi f(b)=(-1)^k\cos\pi\beta;$$

also nach (26)

(28) $$\mp\left(\frac{1}{2}-\mu_2\right)\cos^2\pi\beta+\frac{1}{\pi}\sin\pi\beta-\frac{1}{2}\sin^2\pi\beta=0.$$

Wäre $\beta>0$, so wäre nach (28) (oberes Zeichen und $\mu_2=0$)

$$-\frac{1}{2}\cos^2\pi\beta+\frac{1}{\pi}\sin\pi\beta-\frac{1}{2}\sin^2\pi\beta=0,$$

$$\sin\pi\beta=\frac{\pi}{2}>1$$

— Widerspruch; also ist

(29) $$\beta=0,$$

und (28) liefert nun (unteres Zeichen und $\beta=0$)

(30) $$\mu_2=\tfrac{1}{2}.$$

Wegen (27), (29), (30) sind wir fertig, wenn wir nur noch folgendes zeigen: es sei $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$, $\mu_2=\frac{1}{2}$, und in (15) gelte das Gleichheitszeichen; dann ist $g(x)$ unstetig in (a, b), und es ist $b-a>\frac{1}{2}$. In der Tat ist $g(x)$ stückweise konstant in $\langle a, b\rangle$, und jede etwaige in (a, b) liegende Sprungstelle ist eine ganze Zahl. Wäre nun $g(x)$ stetig in (a, b), so wäre $g(x)$ konstant in (a, b); wegen $\alpha=\frac{1}{2}$ und wegen (21) wäre also $g(x)=0$ in (a, b), also $f(x)=\gamma$ in $\langle a, b\rangle$; dann wäre aber

$$\left|\mathfrak{C}_{0,1/2}(f; a, b)\right|=\left|b-a-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\int_a^b dx\right|=0,$$

während die rechte Seite von (15) positiv ist. Es besitzt daher $g(x)$ in (a, b) tatsächlich mindestens eine Sprungstelle; also muß in (a, b) mindestens eine ganze Zahl liegen; also ist $b-a>\frac{1}{2}$, da in $(b-\frac{1}{2}, b)$ keine ganze Zahl liegt.

Hilfssatz 7. *Es seien fünf Zahlen gegeben:*

$$\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2, \delta$$

mit

$$0 \leqq \alpha < 1, \ 0 \leqq \beta < 1;$$
$$0 \leqq \mu_1 \leqq 1, \ 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } \alpha > 0; \ \mu_2 = 0, \text{ wenn } \beta > 0;$$
$$0 < \delta < 1.$$

Dann gibt es zwei Zahlen a, b und eine Funktion $f(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$a < b; \ a \equiv \alpha, \ b \equiv \beta;$$

in $\langle a, b \rangle$ ist $f(x)$ reell, $f'(x)$ vorhanden[2]) *und monoton nicht fallend,* $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2}$; *wird endlich $\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f; a, b)$ wie im Hilfssatz 6 definiert, so ist*

$$|\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f; a, b)| > \left|\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\pi}$$
$$+ \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)} - 56\,\delta.$$

Beweis. Ersetzt man im Hilfssatz 7 die Bedingungen „$0 \leqq \beta < 1$" und „$\mu_2 = 0$, wenn $\beta > 0$" durch „$0 < \beta \leqq 1$" und „$\mu_2 = 0$, wenn $\beta < 1$", so entsteht ein neuer Hilfssatz — wir nennen ihn Hilfssatz 7′ —, und es genügt, den Hilfssatz 7′ zu beweisen, was wir jetzt machen wollen (denn offenbar sind die beiden Hilfssätze 7 und 7′ untereinander äquivalent).

Es sei

(31) $\quad \varrho = i$ für $\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} < 0$, $\varrho = -i$ für $\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} \geqq 0$.

Weiter sei

$$\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} e^{\pi i \beta} + \mu_2 e^{\pi i \beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta - \mu_2 - \frac{1}{\pi i} \cos \pi\beta$$

(man beachte $\mu_2 \cos \pi\beta = -\mu_2$, $\mu_2 \sin \pi\beta = 0$; denn entweder ist $\beta = 1$ oder $\mu_2 = 0$). Für $\beta = 1$ ist

$$-\frac{1}{\pi i} \cos \pi\beta \neq 0;$$

für $\beta < 1$ ist

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta - \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta > 0;$$

stets ist also $\tau \neq 0$. Weiter ist

$$|\tau|^2 = \frac{1}{4} - \mu_2 + \mu_2^2 - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta + \frac{2}{\pi} \mu_2 \sin \pi\beta + \frac{1}{\pi^2}(\cos^2 \pi\beta + \sin^2 \pi\beta)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \mu_2(1 - \mu_2) - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta;$$

wird also

$$\sigma = \frac{1}{i} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} e^{\pi i \beta} + \mu_2 e^{\pi i \beta}} \tag{32}$$

gesetzt, so ist

$$|\sigma| = 1, \ |\varrho| = 1. \tag{33}$$

Im folgenden bezeichnen wir mit Λ Zahlen, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist. Man wähle nun zwei irrationale Zahlen Θ, ϑ mit

$$0 < \Theta < \vartheta < \tfrac{1}{2}; \tag{34}$$

$$\frac{1}{e^{2\pi i\Theta}-1} - \frac{1}{2\pi i\Theta} + \frac{1}{2} = \Lambda, \tag{35}$$

$$\frac{e^{2\pi i\vartheta}}{e^{2\pi i\vartheta}-1} - \frac{1}{2} = \Lambda, \tag{36}$$

$$\frac{e^{2\pi i\Theta x}-1}{2\pi i\Theta} - x = \Lambda \text{ für } |x| \leqq 1, \tag{37}$$

$$\frac{1}{2\pi i\vartheta} - \frac{1}{\pi i} = \Lambda, \tag{38}$$

$$e^{2\pi i\Theta x} - 1 = \Lambda \text{ für } |x| \leqq 1, \tag{39}$$

$$e^{2\pi i\vartheta x} - e^{\pi i x} = \Lambda \text{ für } |x| \leqq 1. \tag{40}$$

Das geht, da die linke Seite von (35), (37), (39) für $\Theta \to 0$, die von (36), (38), (40) für $\vartheta \to \frac{1}{2}$ gegen Null strebt und zwar gleichmäßig für $|x| \leqq 1$.

Man wähle dann zwei ganze Zahlen c, d mit

$$c \leqq -1,\ d \geqq 1,\ e^{2\pi i\Theta c} = \varrho + \Lambda,\ e^{2\pi i\vartheta d} = \sigma + \Lambda; \tag{41}$$

das geht wegen (33), da Θ, ϑ irrational sind. Man setze nun

$$a = c - 1 + \alpha,\ b = d + \beta, \tag{42}$$

so daß also

$$a \equiv \alpha,\ b \equiv \beta,\ c-1 \leqq a < c,\ d < b \leqq d+1; \tag{43}$$

endlich sei

$$F(x) = \Theta x \text{ für } x \leqq 0,\ F(x) = \vartheta x \text{ für } x > 0. \tag{44}$$

Dann ist nach (42), (43), (44)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F;\, a,\, b) &= \mu_1 e^{2\pi i\Theta a} + \sum_{n=c}^{-1} e^{2\pi i\Theta n} + 1 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{d} e^{2\pi i\vartheta n} + \mu_2 e^{2\pi i\vartheta b} - \int_a^0 e^{2\pi i\Theta x}\,dx - \int_0^b e^{2\pi i\vartheta x}\,dx \\
&= \mu_1 e^{2\pi i\Theta a} + \frac{1-e^{2\pi i\Theta c}}{e^{2\pi i\Theta}-1} + 1 + e^{2\pi i\vartheta}\frac{e^{2\pi i\vartheta d}-1}{e^{2\pi i\vartheta}-1} \\
&\quad + \mu_2 e^{2\pi i\vartheta b} - \frac{1-e^{2\pi i\Theta a}}{2\pi i\Theta} - \frac{e^{2\pi i\vartheta b}-1}{2\pi i\vartheta} \\
&= (1-e^{2\pi i\Theta c})\left(\frac{1}{e^{2\pi i\Theta}-1} - \frac{1}{2\pi i\Theta}\right) \\
&\quad + (e^{2\pi i\vartheta d}-1)\left(\frac{e^{2\pi i\vartheta}}{e^{2\pi i\vartheta}-1} - \frac{1}{2\pi i\vartheta}\right) + \frac{e^{2\pi i\Theta c}}{2\pi i\Theta}(e^{2\pi i\Theta(a-c)}-1) \\
&\quad - \frac{e^{2\pi i\vartheta d}}{2\pi i\vartheta}(e^{2\pi i\vartheta(b-d)}-1) + \mu_1 e^{2\pi i\Theta c} e^{2\pi i\Theta(a-c)} \\
&\quad + 1 + \mu_2 e^{2\pi i\vartheta d} e^{2\pi i\vartheta(b-d)}.
\end{aligned}$$

Nach (33) und (35) bis (43) ist also

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F;a,b) = (1-\varrho+\Lambda)\left(-\frac{1}{2}+\Lambda\right)$$
$$+(\sigma-1+\Lambda)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}+2\Lambda\right)+(\varrho+\Lambda)(-1+\alpha+\Lambda)$$
$$-(\sigma+\Lambda)\left(\frac{1}{\pi i}+\Lambda\right)(e^{\pi i\beta}-1+\Lambda)+\mu_1(\varrho+\Lambda)(1+\Lambda)$$
$$+1+\mu_2(\sigma+\Lambda)(e^{\pi i\beta}+\Lambda)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}\sigma+\frac{1}{\pi i}-\varrho+\alpha\varrho-\frac{1}{\pi i}\sigma e^{\pi i\beta}$$
$$+\frac{1}{\pi i}\sigma+\mu_1\varrho+1+\mu_2\sigma e^{\pi i\beta}+32\Lambda$$
$$=\varrho\left(\alpha+\mu_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\pi i}+\sigma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}e^{\pi i\beta}+\mu_2 e^{\pi i\beta}\right)+32\Lambda.$$

Nach (31), (32) ist also

$$(45)\quad\begin{cases}\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F;a,b)\\ =\frac{1}{i}\left(\left|\alpha+\mu_1-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{\pi}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\sin\pi\beta-\mu_2(1-\mu_2)}\right)+32\Lambda.\end{cases}$$

Man betrachte nun die für alle reellen x definierte Funktion

$$\varphi(x) = (x+\delta)^2\frac{\vartheta-\Theta}{4\delta}+\Theta x;$$

es ist

$$\varphi'(x) = (x+\delta)\frac{\vartheta-\Theta}{2\delta}+\Theta;$$

also ist $\varphi'(x)$ nach (34) stets wachsend, und es ist

$$\varphi(-\delta) = -\Theta\delta = F(-\delta),\quad \varphi'(-\delta) = \Theta = F'(-\delta),$$
$$\varphi(\delta) = \vartheta\delta = F(\delta),\quad \varphi'(\delta) = \vartheta = F'(\delta);$$

endlich ist $\varphi'(x) > 0$ in $(-\delta,\delta)$, also $\varphi(x)$ monoton wachsend in $\langle-\delta,\delta\rangle$; daher ist

$$|\varphi(x)| \leqq \vartheta\delta < \tfrac{1}{2}\delta,\quad |F(x)| \leqq \vartheta\delta < \tfrac{1}{2}\delta \text{ in } \langle-\delta,\delta\rangle.$$

Wird also bei reellen x

$$f(x) = F(x) \text{ für } |x| > \delta,\quad f(x) = \varphi(x) \text{ für } |x| \leqq \delta$$

gesetzt, so ist in $(-\infty, +\infty)$ $f(x)$ reell, $f'(x)$ vorhanden und monoton nicht fallend, $0 < \Theta \leqq f'(x) \leqq \vartheta < \frac{1}{2}$; weiter ist

$$f(x)-F(x) = 0 \text{ für } |x| \geqq \delta,\ |f(x)-F(x)| < \delta \text{ für } |x| < \delta.$$

Beachtet man noch, daß für reelle y, z gilt

$$|e^{iy}-e^{iz}| = \left|2\sin\frac{y-z}{2}\right| \leqq |y-z|,$$

so folgt (wegen $0 < \delta < 1$)

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;a,b)-\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F;a,b) = e^{2\pi i f(0)}-e^{2\pi i F(0)}-\int_{-\delta}^{\delta}(e^{2\pi i f(x)}-e^{2\pi i F(x)})\,dx$$
$$= 2\pi\Lambda+2\cdot 2\pi\Lambda = 24\Lambda.$$

Nach (45) ist also

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\, a, b)$$
$$= \frac{1}{i}\left(\left|\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1-\mu_2)}\right) + 56\,\Lambda,$$

womit der Hilfssatz 7 bewiesen ist.

Hilfssatz 8. *Es sei b ganz, $a < b - \frac{1}{2}$ und entweder $a \equiv 0$ oder $a \equiv \frac{1}{2}$. Es werde $f(x) = 0$ für $x \leqq b - 1$, $f(x) = \frac{x - b + 1}{2}$ für $x > b - 1$ gesetzt; $\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\, a, b)$ werde wie im Hilfssatz 6 definiert.*

Dann ist für $a \equiv 0$

$$|\mathfrak{C}_{1/2,\,1/2}(f;\, a, b)| = \frac{2}{\pi}$$

und für $a \equiv \frac{1}{2}$

$$|\mathfrak{C}_{0,\,1/2}(f;\, a, b)| = \frac{2}{\pi}.$$

Beweis. Für $a \equiv 0$ ist

$$\mathfrak{C}_{1/2,\,1/2}(f;\, a, b) = b - \frac{1}{2} - a + \frac{1}{2}e^{\pi i} - \int_a^{b-1} dx - \int_{b-1}^{b} e^{\pi i(x-b+1)}dx$$
$$= b - \frac{1}{2} - a - \frac{1}{2} - (b - 1 - a) - \frac{e^{\pi i} - 1}{\pi i} = \frac{2}{\pi i};$$

für $a \equiv \frac{1}{2}$ ist (wegen $a < b - 1$)

$$\mathfrak{C}_{0,\,1/2}(f;\, a, b) = b - \left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,e^{\pi i} - \int_a^{b-1} dx - \int_{b-1}^{b} e^{\pi i(x-b+1)}\,dx = \frac{2}{\pi i}.$$

Hilfssatz 9. *Es sei $a < b$; in $\langle a, b\rangle$ sei $f(x)$ reell, $f'(x)$ vorhanden* [2]) *und monoton nicht fallend, $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2}$.*

1. *Dann gibt es eine reelle Zahl γ und eine Funktion $g(x)$ mit*

$$\left.\begin{array}{c} g(x) \text{ monoton nicht fallend,} \\ 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ f(x) = \int_a^x g(y)\,dy + \gamma \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle.$$

2. *$g(x)$ läßt sich sogar stetig in $\langle a, b\rangle$ wählen.*

Vorbemerkung. Die Umkehrung von 1. ist falsch, wie das Beispiel $\gamma = 0$, $g(x) = 0$ für $a \leqq x < \frac{a+b}{2}$, $g(x) = \frac{1}{2}$ für $\frac{a+b}{2} \leqq x \leqq b$ lehrt.

Beweis. $f'(x)$ ist in $\langle a, b\rangle$ monoton und nimmt jeden Zwischenwert an; also ist $f'(x)$ stetig in $\langle a, b\rangle$; es ist also

$$\int_a^x f'(y)\,dy = f(x) - f(a) \quad \text{in } \langle a, b\rangle.$$

Es genügt daher, $g(x) = f'(x)$, $\gamma = f(a)$ zu setzen.

Beweis des Satzes 5. Hilfssatz 9, Hilfssatz 6, Hilfssatz 7, Hilfssatz 8 mit $a = 0$, $b = 1$.

Beweis des Satzes 6. Hilfssatz 6, Hilfssatz 9, Hilfssatz 7, Hilfssatz 8.

§ 3.

Beweis der Sätze 7, 8, 9.

Beweis des Satzes 7[6]). Nach der Voraussetzung gibt es für jedes ganze $n > 0$ eine reelle Zahl γ_n und eine Funktion $g_n(x)$ mit

$$\left.\begin{array}{c} g_n(x) \text{ monoton nicht fallend,} \\ 0 \leqq g_n(x) \leqq \tfrac{1}{2}, \\ f_n(x) = \int\limits_a^x g_n(y)\, dy + \gamma_n \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle.$$

Es sei nun $f^+(x)$ (bzw. $f^-(x)$) die obere rechte (bzw. linke) Derivierte von $f(x)$. Dann zeigen wir zunächst: Für $a < x_1 < x_2 < b$ ist

$$(46) \qquad 0 \leqq f^+(a) \leqq f^-(x_1) \leqq f^+(x_1) \leqq f^-(x_2) \leqq f^+(x_2) \leqq f^-(b) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Es sei nämlich

$$a < a + h_0 < x_1 - k_1 < x_1 < x_1 + h_1 < x_2 - k_2 < x_2 < x_2 + h_2 < b - k_0 < b;$$

dann ist für jedes ganze $n > 0$

$$(47) \quad \begin{cases} 0 \leqq \dfrac{f_n(a+h_0) - f_n(a)}{h_0} \leqq \dfrac{f_n(x_1) - f_n(x_1 - k_1)}{k_1} \leqq \dfrac{f_n(x_1 + h_1) - f_n(x_1)}{h_1} \\ \leqq \dfrac{f_n(x_2) - f_n(x_2 - k_2)}{k_2} \leqq \dfrac{f_n(x_2 + h_2) - f_n(x_2)}{h_2} \leqq \dfrac{f_n(b) - f_n(b - k_0)}{k_0} \leqq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(denn es ist

$$0 \leqq g_n(a) \leqq \frac{f_n(a+h_0) - f_n(a)}{h_0} \leqq g_n(a+h_0) \leqq g_n(x_1 - k_1)$$
$$\leqq \frac{f_n(x_1) - f_n(x_1 - k_1)}{k_1} \leqq g_n(x_1) \leqq \ldots).$$

Durch $n \to \infty$ sieht man, daß (47) auch dann richtig bleibt, wenn der Index n überall gestrichen wird; wenn man dann $h_0, k_1, h_1, k_2, h_2, k_0$ gegen Null streben läßt, folgt (46).

Wir setzen nun (man beachte (46))

$$g(a) = f^+(a),\ g(b) = f^-(b),\ g(x) = f^+(x) = \mathrm{Max}(f^+(x), f^-(x)) \text{ in } (a, b).$$

Dann ist in $\langle a, b\rangle$

$$(48) \qquad 0 \leqq g(x) \leqq \tfrac{1}{2},\ g(x) \text{ monoton nicht fallend.}$$

[6]) Mit Benutzung des Lebesgueschen Integrals wäre der Beweis etwas kürzer.

Es sei nun $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$; wir setzen

$$F(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \quad \text{in} \quad \langle \alpha, \beta \rangle;$$

also

$$F^+(x) = f^+(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \qquad \text{für} \quad \alpha \leqq x < \beta,$$

$$F^-(x) = f^-(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \qquad \text{für} \quad \alpha < x \leqq \beta.$$

Dann ist $F(x)$ in $\langle a, b \rangle$ stetig, und wegen $F(\alpha) = F(\beta) = 0$ wird $\underset{\alpha \leqq x \leqq \beta}{\operatorname{Min}} F(x)$ für ein ξ mit $\alpha \leqq \xi < \beta$ und auch für ein η mit $\alpha < \eta \leqq \beta$ erreicht. Alsdann ist für $\xi \leqq x \leqq \beta$ bzw. für $\alpha \leqq x \leqq \eta$

$$F(x) - F(\xi) \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad F(x) - F(\eta) \geqq 0,$$

also nach (46)

$$0 \leqq F^+(\xi) = f^+(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leqq g(\beta) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

$$0 \geqq F^-(\eta) = f^-(\eta) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geqq g(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

also

(49) $$(\beta - \alpha) g(\alpha) \leqq f(\beta) - f(\alpha) \leqq (\beta - \alpha) g(\beta).$$

Wir zeigen nun: Es ist

(50) $$f(x) = \int_a^x g(y)\,dy + f(a) \quad \text{in} \quad \langle a, b \rangle;$$

wegen (48) sind wir dann fertig. Für $x = a$ ist dies klar; es sei also $a < x \leqq b$. Bei jeder Einteilung

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{\nu-1} < a_\nu = x, \quad a_\lambda - a_{\lambda-1} = e_\lambda \quad (1 \leqq \lambda \leqq \nu)$$

ist nach (49)

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} g(a_{\lambda-1}) e_\lambda \leqq f(x) - f(a) = \sum_{\lambda=1}^{\nu} (f(a_\lambda) - f(a_{\lambda-1})) \leqq \sum_{\lambda=1}^{\nu} g(a_\lambda) e_\lambda;$$

bei $\underset{\lambda = 1, 2, \ldots, \nu}{\operatorname{Max}} e_\lambda \to 0$ ist aber

$$\lim \sum_{\lambda=1}^{\nu} g(a_{\lambda-1}) e_\lambda = \lim \sum_{\lambda=1}^{\nu} g(a_\lambda) e_\lambda = \int_a^x g(y)\,dy,$$

womit (50) bewiesen ist.

Beweis des Satzes 8. Es gibt eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ aus $\mathfrak{M}(a, b)$ mit

(51) $$\lim_{n=\infty} |\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f_n; a, b)| = s_{\mu_1, \mu_2}(a, b).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f_n(a) = 0$ (sonst betrachte man $f_n(x) - f_n(a)$). Es ist

(52) $$0 \leqq f_n(x_2) - f_n(x_1) \leqq \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) \quad \text{für} \quad a \leqq x_1 < x_2 \leqq b.$$

also

(53) $$0 \leqq f_n(x) \leqq \tfrac{1}{2}(b - a) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Aus (52), (53) folgt bekanntlich, daß die Folge $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... eine in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält[7]); ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei bereits die Folge $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig konvergent; es sei

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x) \text{ in } \langle a, b\rangle.$$

Nach Satz 7 gehört $f(x)$ zu $\mathfrak{M}(a, b)$; nach (51) ist aber (infolge der gleichmäßigen Konvergenz)

$$|\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f; a, b)| = s_{\mu_1, \mu_2}(a, b).$$

Beweis des Satzes 9. Soll

(55) $$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b) = S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta)$$

gelten, so muß nach Hilfssatz 6 und Satz 8 entweder

$$a \equiv b \equiv 0, \ \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

oder

$$a \equiv \tfrac{1}{2}, \ b \equiv 0, \ \mu_2 = \tfrac{1}{2}, \ b - a \geqq \tfrac{3}{2}$$

sein. In diesen beiden Fällen gilt aber (55) nach Hilfssatz 8.

Prag und Berlin, den 7. November 1934.

---

7) Beweis: Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ die rationalen Zahlen von $\langle a, b\rangle$. Es gibt (wegen (53)) eine Teilfolge $f_{11}(x), f_{12}(x), f_{13}(x), \ldots$, die für $x = \xi_1$ konvergiert; diese Teilfolge enthält wieder eine für $x = \xi_2$ konvergente Teilfolge $f_{21}(x)$, $f_{22}(x), \ldots$ usw. Die „Diagonalfolge" $f_{11}(x), f_{22}(x), f_{33}(x), \ldots$ konvergiert in allen Punkten ξ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Es sei $\varepsilon > 0$; wir wählen zuerst ein k so, daß es zu jedem x aus $\langle a, b\rangle$ ein λ mit

(54) $$|x - \xi_\lambda| < \frac{\varepsilon}{2}, 1 \leqq \lambda \leqq k$$

gibt; dann wählen wir ein N so, daß für $n > N$, $m > N$, $1 \leqq \lambda \leqq k$ gilt

$$|f_{nn}(\xi_\lambda) - f_{mm}(\xi_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es sei nun $a \leqq x \leqq b$, $n > N$, $m > N$. Wir wählen ein λ mit (54); dann ist nach (52)

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| \leqq |f_{nn}(x) - f_{nn}(\xi_\lambda)| + |f_{nn}(\xi_\lambda) - f_{mm}(\xi_\lambda)| + |f_{mm}(\xi_\lambda) - f_{mm}(x)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon;$$

also ist die Diagonalfolge gleichmäßig konvergent in $\langle a, b\rangle$.

(Eingegangen am 8. November 1934.)